République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

FERHAOUI Yamina Lina Chiraze

Une lacune dans un article sur le théorème de point fixe de Banach pour une classe d'espaces métriques généralisés

Soutenu publiquement le 23 juin 2024, devant le jury composé de

BENAICHOUCHE Noureddine	*M AA.* **Univ. Médéa**	**Président**
LEGHMIZI Mohamed Lamine	*M C A.* **Univ. Médéa**	**Directeur de mémoire**
MOSTEFAOUI Zahia	*M C A.* **E.N.S Kouba**	**Examinatrice**

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Avant tout, je tiens à exprimer ma reconnaissance à **Allah**, le Tout-Puissant, pour m'avoir donné la force et la détermination nécessaires à l'accomplissement de ce travail.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à Monsieur **M.L LEGHMIZI**, pour avoir dirigé ce travail avec passion, bienveillance et compétence. Son encadrement a été une source d'inspiration et m'a permis de surmonter de nombreux défis. Je lui exprime toute ma gratitude.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur **N. BENAICHOUCHE**, président du jury, pour avoir accepté de relire ce travail et pour ses précieux commentaires.

Je suis profondément reconnaissant à Madame **Z.MOUSTEFAOUI** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner et de juger ce travail.

Je tiens également à remercier chaleureusement tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès de Médéa, pour leur soutien académique et leurs encouragements.

Mes plus sincères remerciements vont à ma famille, en particulier mes parents, pour leur soutien indéfectible et leur encouragement constant tout au long de mon parcours académique.

Enfin, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien et leur camaraderie tout au long de cette aventure.

Dédicace

À ma chère mère,
Pour ton amour inconditionnel, ton soutien sans faille, et tes innombrables sacrifices. Tes encouragements et ta foi en moi ont été ma plus grande source de motivation. Ce travail est dédié à toi, avec toute ma gratitude et mon amour éternel.

À mon cher père,
Pour ton soutien indéfectible, tes conseils avisés, et ta confiance en moi. Tu as toujours été une source d'inspiration et de force. Ce travail est dédié à toi, avec toute ma gratitude et mon respect profond.

À ma chère grand-mère, Yemma Zhor
Tu es l'une des personnes qui illuminent nos vies par leur présence. Ta sagesse, ton amour inconditionnel, et ta bienveillance ont toujours été des sources d'inspiration pour moi. Tu m'as appris tant de choses, non seulement par tes mots, mais surtout par tes actes et ton exemple.Ce travail est dédié à toi, avec toute ma gratitude.

À mes chères sœurs, Nayrouz et Cirine
Pour votre soutien constant, vos encouragements, et votre amour. Votre présence et vos mots bienveillants ont été une source de réconfort et de motivation tout au long de ce parcours. Ce travail est dédié à vous, avec toute mon affection et ma gratitude.

À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, et à ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail, merci de m'avoir chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'espace métrique généralisé introduits par Briancari en 2000 dans [4] et de mettre en évidence une propriété de continuité incorrecte de la distance généralisée associée voir [16].

Mots clés : Espace topologique, espace métrique, distance, espace métrique généralisé, distance généralisé.

Abstarct

The aim of this thesis is to study the generalized metric space introduced by Briancari in 2000 in [4] and to highlight an incorrect continuity property of the generalized distance as seen in [16].

Keywords : Topological space, metric space, distance, generalized metric space, generalized distance.

Sommaire

Introduction **2**

1 PRÉLIMINAIRES **4**
1.1 ESPACE TOPOLOGIQUE 4
1.1.1 Topologie 4
1.2 Topologie de l'espace métrique 5
1.2.1 Distance 5
1.2.2 Continuité et Convergence 9
1.2.3 Complétude de l'espace métrique 11
1.2.4 Compacité de l'espace métrique 11
1.3 Topologie de l'espace vectoriel normé 11
1.3.1 Norme 11
1.4 Espace de Banach 12
1.5 Théorème de point fixe 12
1.5.1 Théorème du point fixe de Banach 13

2 ESPACE MÉTRIQUE GÉNÉRALISÉ **16**
2.1 Définition de l'Espace Métrique Généralisé de Branciari 16
2.2 Topologie de l'espace métrique généralisé 18
2.3 Théorème de point fixe 25
2.4 Contraction de Banach 25
2.5 Théorème du point fixe de Kannan 26

3 UNE LACUNE DANS L'ESPACE MÉTRIQUE GÉNÉRALISÉ. **29**
3.1 Lacune dans l'énoncé de Branciari 29
3.2 Contre-exemple 1. 31
3.2.1 Contre-exemple 2 32

Bibliographie **35**

Notation

(X,d)	Espace métrique.
$d(\cdot,\cdot)$	Distance.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$\|.\|$	*la norme sur espace de Banach.*
Id	Application identique.
$(X,\mathscr{D})$	Espace métrique généralisé.
$\mathscr{D}(\cdot,\cdot)$	Distance généralisé.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R},\mathbb{C}$	Les corps de nombres réels et complexes, respectivement.
τ_X	La topologie sur X.
$E,X,..$	Des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}=(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.
f^{-1}	Réciproque de f.
$(X,\|.\|_X)$	Espace normé.
$\|.\|$	Module complexe / valeur absolue.
$B(x_0,r)$	La boule ouvert dans l'espace métrique (X,d)
$B^{'}(x_0,r)$	La boule fermée dans l'espace l'espace métrique (X,d).
$\mathscr{V}(x_0)$	L'ensemble des voisinages de point x_0.

Introduction

L'idée de généraliser les espaces métriques est motivée par la théorie du point fixe, en particulier le principe de contraction de Banach. Le premier résultat concernant l'existence et l'unicité d'un point fixe pour les fonctions continues dans un espace métrique complet, dans le cadre des espaces métriques, a été établi par Stefan Banach en 1922 [3]. Ce théorème est devenu connu sous le nom de principe de contraction de Banach et a été étendu dans plusieurs directions ultérieurement.

Une de ces directions de recherche concerne les applications appelées contractions généralisées. Le théorème de point fixe est un outil mathématique précieux, notamment dans la résolution des équations différentielles.

En 2000, Branciari [4] a introduit l'espace métrique généralisé, en remplaçant l'inégalité triangulaire de la distance associée à l'espace métrique, par une inégalité rectangulaire. Par la suite, divers résultats sur l'existence de point fixe ont été obtenus dans ce sens. voir [10], [12]. La topologie des espaces métriques généralisés constitue une extension et une généralisation de la théorie classique des espaces métriques. Alors que les espaces métriques traditionnels sont définis par une distance satisfaisant les axiomes de séparation, de symétrie et d'inégalité triangulaire, les espaces métriques généralisés relâchent certaines de ces contraintes pour permettre une plus grande flexibilité et une application à des contextes plus variés. Cette approche permet d'étudier des propriétés topologiques et géométriques dans des cadres où les notions traditionnelles de distance ne s'appliquent pas de manière standard, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles perspectives en analyse, géométrie et théorie des espaces fonctionnels.

Ce travail a pour objectif de mettre au point une lacune obtenu par Samat [16], en 2010, concernant un énoncé sur la continuité de distance généralisée. En effet, la confusion à notre avis est la conséquence de la non séparation de cet espace en général et que dans ce cas les limites d'une suite convergente n'implique pas forcément que les termes se rapprochent les uns des autres. Donc, ces termes ne sont pas susceptibles de converger.

Le contenu de ce mémoire est composé de trois chapitres

Le premier chapitre est consacré à un rappel des outils de base nécessaires sur les espaces métriques, la convergence, les suites de Cauchy, la complétude, la compacité, et enfin le théorème du point fixe de Banach.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l'étude des espaces métriques généralisés, de leurs propriétés topologiques et de leur séparation, en particulier des résultats de théorème contraction de Banach.

Dans le cadre du troisième chapitre, une lacune spécifique dans la théorie des espaces métriques généralisés est identifiée et explorée avec un contre exemple par [16] Cette lacune pourrait concerner un aspect non résolu ou une question ouverte dans la littérature

mathématique sur ces espaces étendus. Cette section vise à mettre en évidence des zones où davantage de recherche et d'analyse sont nécessaires pour approfondir notre compréhension et pour combler ces lacunes potentielles dans la théorie des espaces métriques généralisés de type Branciari..

CHAPITRE

1 PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous débuterons par l'étude des espaces topologiques, qui offrent un cadre abstrait pour analyser la notion de proximité entre les points. Ensuite, nous nous concentrerons sur les espaces métriques, une sous-classe d'espaces topologiques où la notion de distance est précisément définie. Nous explorerons les propriétés clés des espaces métriques, notamment la continuité, la convergence et la complétude, ainsi que les points fixes des fonctions dans ce contexte. Pour plus de détail voir ([7], [5], [17], [9])

1.1 ESPACE TOPOLOGIQUE

Soit X un ensemble quelconque et non vide et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

1.1.1 Topologie

Définition 1.1 *On appelle* topologie sur X *toute partie* τ *de* $\mathscr{P}(X)$ *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- *L'ensemble vide* $\varnothing$ *et* X *appartiennent à* τ.
- *La réunion de toute famille d'éléments de* τ *appartient à* τ.
- *L'intersection de toute famille finie d'éléments de* τ *appartient à* τ.

Le couple (X,τ) *est appelé un* espace topologique.

Soit (X,τ) un espace topologique, que nous notons pour simplifier X.

Exemple 1.2 *1. L'ensemble des parties* A *de* $\mathbb{R}$ *telles que, pour tout* $x \in A$*, il existe un intervalle ouvert* $]a,b[$ *tel que* $x \in]a,b[\subset A$ *est une topologie sur* $\mathbb{R}$ *appelée topologie euclidienne.*

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in A, \exists]a,b[\text{ avec } x \in]a,b[\subset \mathbb{R}\}$$

2. *$\tau = \mathscr{P}(X)$ est une topologie sur X appelée topologie discrète. C'est celle qui a le plus d'ouverts. (X,τ) s'appelle espace topologique discret.*

Les éléments de τ sont appelés les ensembles *ouverts* de la topologie τ.

Définition 1.3 1. *On appelle voisinage d'un point $x \in X$, toute partie de X qui contient un ouvert contenant $\{x\}$.*

2. *Plus généralement, on appelle voisinage d'une partie A de X, toute partie de X qui contient un ouvert contenant A.*

On note :

- *$\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*
- *$\mathscr{V}(A)$ l'ensemble des voisinages de A.*

Définition 1.4 *Soient (X,τ_X) et (X',τ'_X)deux espaces topologiques. Une application f de X dans X'. On dit que f est continue au point $x \in X$ si, pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. De manière équivalente, f est continue au point x si, pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*

Définition 1.5 *Soit (X,τ) un espace topologique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge vers $a \in X$ si*

$$\forall V \in \mathscr{V}(a), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V$$

1.2 Topologie de l'espace métrique

Les espaces métriques sont un cas particulier très important d'espaces topologiques. Nous étudierons leurs propriétés spécifiques dans le reste de ce chapitre.

1.2.1 Distance

Définition 1.6 *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$:*

1. *$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x,y \in X$. (Séparation)*
2. *$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (Symétrie).*
3. *$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ (L'inégalité triangulaire).*

Le couple (X,d) est appelé un espace métrique.

Exemple 1.7 1. *L'application d définie sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = |x-y|$$

Est une distance, dite usuelle.

2. *L'application d définie sur* $X \times X$ *par :*

$$\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y, \\ 0 & si\ x = y, \end{cases}$$

Est une distance, dite discrète

Sur un espace métrique, la donnée d'une distance permet de définir naturellement une topologie qui est engendrée par des parties particulières de l'espace : les boules

Définition 1.8 *Soit* (X,d) *un espace métrique. On définit :*

1. *Une boule ouverte de centre* $x_0 \in X$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble :*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

2. *Une boule fermée de centre* $x_0 \in X$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble :*

$$B_f(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leqslant r\}.$$

3. *Une sphère de centre* $x_0 \in X$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble :*

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}.$$

Proposition 1.9 *Dans le cas d'espace métrique la topologie induite* τ *distance est donné par*

$$\tau = \left\{ O = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) : I\ quelconque, \forall i \in I, r_i > 0 \right\}$$

où $B(x,r)$ *désigne la boule ouverte de centre* x *et de rayon* r

Preuve.

Soit (X,d) un espace métrique. Nous voulons montrer que la topologie τ induite par la distance d est donnée par

$$\tau = \left\{ O = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) : I \text{ quelconque}, \forall i \in I, r_i > 0 \right\},$$

où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r.

$$O = O_{I_0} = \bigcup_{i\in I_0} B(x_i, r_i) \text{pour } I_0 \text{ quelconque.}$$

Dans un espace métrique, la topologie induite par la distance est définie par l'ensemble des ouverts qui peuvent être formés à partir des boules ouvertes. Montrons que cet ensemble de boules ouvertes forme effectivement une topologie.

Considérons un espace métrique (X,d) où X est un ensemble et d est une distance sur X. La topologie induite τ par la distance d est définie par :

$$\tau = \left\{ O \subseteq X : O = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) \text{ pour un ensemble quelconque } I, \forall i \in I, x_i \in X, r_i > 0 \right\}$$

où $B(x_i, r_i)$ représente une boule ouverte centrée en x_i avec un rayon r_i.

Pour vérifier que τ est une topologie, nous devons vérifier que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. X et l'ensemble vide $\emptyset$ sont dans τ.
2. τ est fermé pour les unions arbitraires.
3. τ est fermé pour les intersections finies.

Condition 1 : X et $\emptyset$ sont dans τ

- X est dans τ car on peut écrire X comme l'union de toutes les boules ouvertes $B(x,r)$ pour $x \in X$ et $r > 0$.
- $\emptyset$ est dans τ car l'union vide est vide, et donc $\emptyset$ est triviale.

Condition 2 : Unions arbitraires

Soit $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille quelconque d'éléments de τ. Alors, chaque O_α peut s'écrire comme une union de boules ouvertes, c'est-à-dire :

$$O_\alpha = \bigcup_{i\in I_\alpha} B(x_i^\alpha, r_i^\alpha)$$

Prenons l'union arbitraire de tous les O_α :

$$\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} \left(\bigcup_{i\in I_\alpha} B(x_i^\alpha, r_i^\alpha) \right)$$

Cette union est elle-même une union de boules ouvertes, donc elle appartient à τ.

Condition 3 : Intersections finies

Soit $O_1, O_2, \ldots, O_n$ une famille finie d'éléments de τ. Alors, chaque O_i peut s'écrire comme une union de boules ouvertes, c'est-à-dire :

$$O = \bigcup_{j \in I_i} B(x_j^i, r_j^i)$$

Prenons l'intersection finie de ces O_i :

$$\bigcap_{i=1}^{n} O = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j \in I_i} B(x_j^i, r_j^i) \right)$$

Cette intersection peut être plus compliquée à manipuler directement en termes de boules ouvertes. Cependant, une propriété importante de la topologie métrique est que chaque point de l'intersection finie d'ouverts métriques (qui sont des unions de boules ouvertes) peut être recouvert par une boule ouverte plus petite contenue dans chaque O_i. Donc, l'intersection finie de ces ouverts est encore un ouvert métrique et peut être écrite comme une union de boules ouvertes. Ainsi, cette intersection finie appartient à τ.

Puisque les conditions ci-dessus sont satisfaites, l'ensemble des ouverts formé par les unions de boules ouvertes induites par la distance d constitue effectivement une topologie sur X.

Soit $x \in O$. Par définition, $x \in \bigcup_{i \in I_0} B(x_i, r_i)$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \in \bigcup_{i \in I_0} B(x_i, r_i)$.

il existe un point $y \in O$. Par définition de O, il existe un indice $i \in I$ tel que $y \in B(x_i, r_i)$. Par définition de la boule ouverte, cela signifie qu'il existe $R = r_i - d(y, x_i) > 0$ tel que pour tout $z \in B(y, R)$,

$$d(z, x_i) \leq d(z, y) + d(y, x_i) < R + d(y, x_i) = r_i.$$

Donc, $z \in B(x_i, r_i)$, ce qui implique que $B(y, R) \subseteq B(x_i, r_i) \subseteq O$. Par conséquent, O est un ouvert de τ. ■

Définition 1.10 *Soit (X, d) espace métrique.*

1. *F est une partie fermé dans X, si son complément $X \setminus Y$ est un ouvert dans X.*
2. *On dit qu'un ensemble $V \subset X$ un voisinage de $x \in X$, s'il existe une boule ouverte centrée en x inclue dans V tel que :*

$$V \in \mathcal{V}(x) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset v.$$

Remarque 1.11 *La distance définie sur X, induite une topologie métrisable.*

Séparation de l'espace La notion d'espace séparé que l'on va définir est très importante dans la suite, car elle assure notamment l'unicité de la limite d'une fonction lorsqu'elle existe.

Définition 1.12 *Un espace metrique (X, d) est dit séparé (où hausdorff), pour tous points distincts x et y de X, il existe des voisinages disjoints V_x et V_y de x et y respectivement.*

Remarque 1.13 *Un espace métrique (X,d) est toujours séparé , c'est-à-dire que pour tous points distincts $x, y \in X$, il existe des voisinages disjoints V_x et V_y de x et y respectivement. En effet, on peut choisir les boules ouvertes $V_x = B(x,r)$ et $V_y = B(y,r)$ où $r = \frac{d(x,y)}{2}$. Ces boules sont disjointes car si un point appartenait à leur intersection, il violerait l'inégalité triangulaire.*

1.2.2 Continuité et Convergence

Après avoir défini les espaces métriques et exploré leurs propriétés fondamentales, nous abordons maintenant les notions de convergence et de continuité dans ce cadre. La continuité des fonctions peut être analysée à l'aide de la distance définie dans l'espace métrique.

Définition 1.14 *Soit (X,d) et (X',d') deux espaces métriques et soit $a \in X$, on dit que $f : X \longrightarrow X'$ est une application continue au point a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x,a) < \delta \Longrightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

c'est à dire

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a).$$

Définition 1.15 *Continuité sur un ensemble*
On dit que $f : (X,d) \longrightarrow (X',d')$ est continue sur X si elle est continue en tout point de X.

Définition 1.16 *Soit (X,d) espace métrique et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dans X, on dit une suite $\{x_n\}$ converge vers $\overline{x} \in X$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\varepsilon : d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \overline{x}.$$

Définition 1.17 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X est une suite de Cauchy dans (X,d) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que : } \forall p, q \in \mathbb{N}$$

$$p, q \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Autrement,

$$\lim_{p,q \longrightarrow +\infty} d(x_p, x_q) = 0$$

Exemple 1.18 *Soit (X,d) espace métrique et la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$x_n = \frac{1}{n}$$

est une suite de cauchy. En effet,

Pour $\varepsilon > 0$ et $q > p \geqslant N_\varepsilon$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant |x_p - x_q| \leqslant |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}| = |\frac{q-p}{pq}| \leqslant \frac{p-q}{pq} < \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}$$

Il suffit de choisir

$$N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$$

Proposition 1.19 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. Soit (X,d) espace métrique et soit une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ qui converge vers $\overline{x} \in X$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\forall p,q \in \mathbb{N}$ d'où $p,q \geqslant N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ on a :

$$d(x_p,\overline{x}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d(x_q,\overline{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x_p,x_q) = |x_p - x_q| \leqslant |x_p - \overline{x}| + |x_q - \overline{x}| < \varepsilon$$

■

Remarque 1.20 *Toute suite de Cauchy n'est pas en générale convergente.*

Exemple 1.21 *Considérons la suite (x_n) définie par des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$.*

Prenons la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, où $\frac{p_n}{q_n}$ est une fraction rationnelle obtenue à partir des développements fractionnaires continus de $\sqrt{2}$. Par construction, cette suite est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tous les indices $m,n > N$, nous avons

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Cependant, cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. En effet, si elle convergeait dans $\mathbb{Q}$, sa limite serait un nombre rationnel. Mais la suite (x_n) est conçue pour approcher $\sqrt{2}$, qui est irrationnel. Par conséquent, il n'existe pas de rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n \to q$.

Ainsi, bien que (x_n) soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

1.2.3 Complétude de l'espace métrique

Définition 1.22 *Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge.*

Exemple 1.23
1. *$\mathbb{R}$ est complet.*
2. *$\mathbb{C}$ est complet.*
3. *L'intervalle $]0,1[$, sous-espace de $\mathbb{R}$, n'est pas complet. Il suffit de considérer $x_n = \frac{1}{n}$.*

1.2.4 Compacité de l'espace métrique

Définition 1.24 *Un espace métrique (X,d) est dit compact si toute suite d'éléments de (X,d) admet une suite extraite convergente vers un point dans X.*

Proposition 1.25 *Tout espace métrique compact X est complet.*

1.3 Topologie de l'espace vectoriel normé

Après avoir étudié les espaces métriques, où la notion de distance entre les points est fondamentale, nous abordons maintenant les espaces vectoriels normés. Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel X non vide sur un corps $\mathbb{K}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$. La norme permet de mesurer la "longueur" des vecteurs et induit une distance, faisant de chaque espace vectoriel normé un espace métrique particulier.

1.3.1 Norme

Définition 1.26 *Une norme sur X est une application $\|\,.\,\|: X \to \mathbb{R}$ si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$.
3. $\forall (x,y) \in X^2, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

$(X, \|\,.\,\|)$ s'appelle espace vectoriel normé (e.v.n) de support X.

Exemple 1.27
1. *La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les applications $\|\,.\,\|_1, \|\,.\,\|_2, ..., \|\,.\,\|_p$ sont des normes sur $X = \mathbb{R}^n$.*

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, ..., \| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}_{p \in [1, +\infty[}$$

Proposition 1.28 *1. Tout espace normé est un espace métrique c'est à dire qu'on peut définir une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ par :*

$$\forall x, y \in X, \ \ d(x, y) = \| x - y \|$$

Remarque 1.29 *La topologie induite par la norme sur X est équivalente à la topologie généré par la distance définie la proposition 1.28 Donc l'espace normé $(X, \|.\|)$ est un espace métrisable.*

1.4 Espace de Banach

Définition 1.30 *Un espace normé, dans lequel toute suite de Cauchy est convergente, est appelé espace de Banach. Autrement dit,un espace normé complet est appelé espace de Banach.*

Un espace de Banach est un espace vectoriel norme complet pour la distance induite par la norme.

Proposition 1.31 *Tout espace de Banach est normé, mais la réciproque, en général, n'est pas vraie.*

Exemple 1.32 *$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach dont la norme est définie par :* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$.

1.5 Théorème de point fixe

Dans le cadre des espaces métriques, le concept de point fixe est particulièrement important. Les théorèmes de point fixe, tels que le théorème de Banach, sont des résultats fondamentaux qui garantissent l'existence et l'unicité de points fixes sous certaines conditions, comme la contractivité de l'application.

Définition 1.33 *Application Lipschitzienne*
Soient (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques, on dit que l'application $T : X \to Y$ est lipschitzienne ou (k -Lipschitzienne) s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x, y \in X, \quad d'(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Proposition 1.34 *Une application $T : X \longrightarrow X$ est k-lipschitzienne est uniformément continue.*

Preuve. Soit $k > 0$ donné. Sachant que $d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ pour un $k > 0$ donné, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Il s'ensuit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \ \delta = \frac{\varepsilon}{k}, d(x, y) < \delta$$

$$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y),$$

$$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{k},$$

$$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \varepsilon.$$

Donc T est uniformément continue.

■

Définition 1.35 *Application contractante*
Soit (X, d) un espace métrique et soit l'application $T : X \to X$. On dit que T est contractante s'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall x, y \in X, \quad d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

On dit alors que T est k-contractante.

Théorème 1.36 *Si $T : X \longrightarrow X$, T une application contractante alors, elle admet un point fixe.*

1.5.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard. Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.37 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application contractante. Alors il existe un unique $u \in X$ tel que $T(u) = u$. De plus, toute suite d'éléments de X vérifiant la récurrence $x_{n+1} = T(x_n)$ vérifie la majoration :*

$$d(x_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1),$$

donc x_n converge vers u.

Preuve. L'idée d'existence d'un point fixe basé sur la approximation pour la suite définie par : **1) Existence :** Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet X. Soit $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\leq \sum_{q=0}^{p-1} d(x_{n+q},x_{n+q+1}) \\ &\leq \sum_{q=0}^{p-1} k^{n+q} d(x_0,x_1) \\ &\leq k^n \sum_{q=0}^{p-1} k^q d(x_0,x_1) \\ &\leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) d(x_0,x_1) \\ d(x_n,x_{n+p}) &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

Comme $0<k<1$, on a $k^n\to 0$ quand $n\to+\infty$, et il en résulte immédiatement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers une limite $\overline{u}$, comme T est continue on a :

$$\overline{u}=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} T(x_{n+1})=T\left(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}\right)=T(\overline{u}).$$

Donc $\overline{u}$ est un point fixe de T.

2) Unicité : Supposons que $x,\ y\in X$ sont deux points fixes de T tels que $x\neq y$. Donc $T(x)=x,\ T(y)=y$, alors :

$$d(x,y)=d(T(x),T(y))\leq k\,d(x,y),\quad 0<k<1.$$

Par conséquent, $d(x,y)=0$ ce qui entraîne $x=y$.

■

Exemple 1.38 *Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R},d)$, où d est la distance usuelle sur les réels $(d(x,y)=|x-y|)$, et une application contractante $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $T(x)=\frac{x}{2}$.*

T est contractante

Pour montrer que T est contractante, nous devons vérifier qu'il existe un $k\in[0,1)$ tel que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$,

$$d(T(x),T(y))\leq k\cdot d(x,y).$$

Calculons $d(T(x),T(y))$:

$$d(T(x),T(y))=|T(x)-T(y)|=\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|=\frac{|x-y|}{2}.$$

Donc, $k=\frac{1}{2}$, ce qui est dans $[0,1)$.

Existence et unicité du point fixe

Le théorème nous assure qu'il existe un unique $u\in\mathbb{R}$ tel que $T(u)=u$. Trouvons ce point

fixe :

$$u = T(u) = \frac{u}{2}.$$

Résolvons cette équation :

$$u = \frac{u}{2} \implies u - \frac{u}{2} = 0 \implies \frac{u}{2} = 0 \implies u = 0.$$

Donc, $u = 0$ est le point fixe unique.

Convergence de la suite (x_n)

Considérons maintenant une suite (x_n) définie par la récurrence $x_{n+1} = T(x_n)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que cette suite converge vers $u = 0$ et vérifier la majoration donnée dans le théorème.

La récurrence est :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}.$$

Nous devons montrer que $d(x_n, 0) \leq \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} d(x_0, x_1)$, c'est-à-dire :

$$|x_n - 0| \leq \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} |x_0 - x_1|.$$

Calculons $d(x_0, x_1)$:

$$x_1 = T(x_0) = \frac{x_0}{2},$$

$$d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1| = \left| x_0 - \frac{x_0}{2} \right| = \left| \frac{x_0}{2} \right| = \frac{|x_0|}{2}.$$

Maintenant, la majoration est :

$$|x_n| \leq \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{|x_0|}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |x_0|.$$

Ce qui est correct, car :

$$|x_n| = \left| \frac{x_0}{2^n} \right| = \frac{|x_0|}{2^n}.$$

Nous avons donc montré que x_n converge vers 0 et que la majoration est vérifiée. Cet exemple illustre bien le théorème de Banach sur les points fixes dans un espace métrique complet avec une application contractante.

CHAPITRE

2 ESPACE MÉTRIQUE GÉNÉRALISÉ

Les espace métrique généralisé de Branciari [4]représente une extension des espaces métriques classiques, introduite pour étudier des structures plus générales tout en conservant certaines propriétés fondamentales des espaces métriques. Cette généralisation repose sur une modification de la condition de l'inégalité triangulaire par inégalité rectangulaire. Les espaces métriques de Branciari ont trouvé des applications intéressantes dans divers domaines des mathématiques, notamment en analyse et en théorie des points fixes. Ce chapitre explore la définition, les propriétés et quelques exemples de ces espaces.

2.1 Définition de l'Espace Métrique Généralisé de Branciari

Définition 2.1 *Soit X un ensemble non vide, $\mathscr{D} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une application telle que pour tout $x, y \in X$ on a :*

1. ***Séparation :*** $\mathscr{D}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. ***Symétrie :*** $\mathscr{D}(x,y) = \mathscr{D}(y,x)$
3. ***Inégalité rectangulaire :*** $\forall \xi \neq \eta \in X$ *chacun d'eux est différent de* x *et* y ,
   $\mathscr{D}(x,y) \leqslant \mathscr{D}(x,\xi) + \mathscr{D}(\xi,\eta) + \mathscr{D}(\eta,y)$

Alors $(X, \mathscr{D})$ est appelé espace métrique généralisé, (en abrégé e.m.g).

Exemple 2.2 *Soit $X = \mathbb{R}^2$, et on définit $\mathscr{D} : X \times X \to [0, +\infty[$ par $\forall x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$*

$$\mathscr{D}(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2, & \text{si } x_i, y_i \in \{0,1\}, \\ \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. ***séparation*** *Est facile à vérifier.*
2. ***symétrie*** *Est facile à vérifier.*
3. ***inégalité rectangulaire*** *Soient* $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2)\in X$ *tel que* $\xi\neq\eta$

   - *Dans le cas où l'un des* x_i, y_i, ξ_i, *et* $\eta_i\notin\{0,1\}^2$ *:*

$$\mathscr{D}(x,y)=\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(x,\xi)+\mathscr{D}(\xi,\eta)+\mathscr{D}(\eta,y)&=\sum_{i=1}^{2}|x_i-\xi_i|+\sum_{i=1}^{2}|\xi_i-\eta_i|+\sum_{i=1}^{2}|\eta_i-y_i|\\&\geqslant|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\\&=\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|\\&=\mathscr{D}(x,y)\end{aligned}$$

   Donc, $\mathscr{D}(x,y)\leqslant\mathscr{D}(x,\xi)+\mathscr{D}(\xi,\eta)+\mathscr{D}(\eta,y)$.

   - *Dans le cas où* x_i, y_i, ξ_i, *et* $\eta_i\in\{0,1\}^2$ *:*

$$\mathscr{D}(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

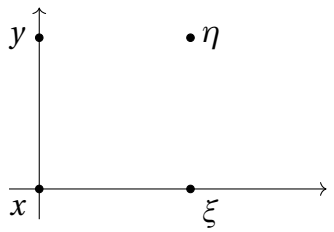
$$\begin{aligned}\mathscr{D}(x,\xi)+\mathscr{D}(\xi,\eta)+\mathscr{D}(\eta,y)&=\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i-\xi_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2}|\xi_i-\eta_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2}|\eta_i-y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2\\&\geqslant|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\\&=\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|\\&=\mathscr{D}(x,y)\end{aligned}$$

L'inégalité rectangulaire est bien vérifie.

Alors, $(X,\mathscr{D})$ *est un espace métrique généralisé.*

Cas particulière :

On prend $x=(0,0)$, $y=(0,1)$, $\xi=(1,0)$ *et* $\eta=(1,1)$.



Nous avons $\mathscr{D}(x,y)=\mathscr{D}(x,\xi)=\mathscr{D}(\xi,\eta)=\mathscr{D}(y,\eta)=1$ *et* $\mathscr{D}(x,\eta)=\mathscr{D}(\xi,y)=2^2$. *On peut vérifier l'inégalité rectangulaire dans tous les cas possibles, l'une de ces cas est :*

$$\mathscr{D}(x,\eta)\leqslant\mathscr{D}(x,\xi)+\mathscr{D}(\xi,y)+\mathscr{D}(y,\eta)$$
$$2^2\leqslant 1+2^2+1$$

Alors $(X,\mathscr{D})$ *est un espace métrique généralisé.*

2.2 Topologie de l'espace métrique généralisé

On peut définir des notions des boules ouvertes de convergence, de continuité et de en utilisant la fonction de distance généralisée. Cette approche topologique est fondamentale pour l'étude approfondie des propriétés et des applications des espaces métriques généralisés.

Définition 2.3 *On définit la boule de rayon* r *et de centre* x_0

$$B(x_0,r[=\{y\in X\,|\,\mathscr{D}(x_0,y)<r\}$$

L'ensemble de voisinage est notée :

$$\mathscr{B}=\left\{B(x,r)\,|\,x\in X,\ r\in\mathbb{R}^+\backslash\{0\}\right\}$$

Proposition 2.4 *Dans le cas d'espace métrique la topologie induite* τ *distance est donne par*

$$\tau=\left\{O=\bigcup_{i\in I}B(x_i,r_i):I\,quelconque,\forall\, i\in I,\,x_i\in O_i,\,r_i>0\right\}$$

où $B(x,r)$ *désigne la boule ouverte de centre* x *et de rayon* r

Preuve. Soit $(X,\mathscr{D})$ un espace métrique. Nous voulons montrer que la topologie τ induite par la distance d est donnée par

$$\tau=\left\{O=\bigcup_{i\in I}B(x_i,r_i):I \text{ quelconque},\forall i\in I,x_i\in O_i,r_i>0\right\},$$

où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r

$$O=\bigcup_{i\in I}B(x_i,r_i).I \text{ quelconque}$$

Montrons que $O\in\tau$, c'est-à-dire que pour tout $y\in O$, il existe un $R>0$ tel que $B(y,R)\subset O$.

Puisque $y\in O$, $\exists i\in I$ tel que $y\in B(x_i,r_i)$. Par définition, $d(y,x_i)<r_i$. Soit $R=r_i-d(y,x_i)$, qui est strictement positif. Pour tout $z\in B(y,R)$,

$$\forall\xi\neq x, r=r_i-\mathscr{D}(x,x_i)-\mathscr{D}(x,\xi) \text{ tel que } 0<\mathscr{D}(x,\xi)<r_i+\mathscr{D}(x,x_i)$$

Alors pour $z\in B(x,r)\Rightarrow\mathscr{D}(x,z)<r$

$$\mathscr{D}(x_i,z)\leqslant\mathscr{D}(x,z)+\mathscr{D}(x,x_i)+\mathscr{D}(x,\xi)=r_i-\mathscr{D}(x,x_i)-\mathscr{D}(x,\xi)$$

Donc, $z\in B(x_i,r_i)$, ce qui implique que $B(y,R)\subset B(x_i,r_i)\subset O$. Par conséquent, O est un ouvert de τ.

■

L'exemple suivant montre que l'espace métrique généralise n'est pas en général un espace métrique.

Exemple 2.5 *Soit $X=\mathbb{R}$ et $\beta\neq 0\in\mathbb{R}$. Définissons $\mathscr{D}:X\times X\to\mathbb{R}$ comme suit :*

$$\mathscr{D}(x,y)=\begin{cases}0 & si\ x=y;\\ 3\beta & si\ x\ et\ y\in\{1,2\},x\neq y;\\ \beta & si\ x\notin\{1,2\}\ où\ y\notin\{1,2\}\ etx\neq y.\end{cases}$$

Il est alors facile de voir que $(X,\mathscr{D})$ est un espace métrique généralisé mais $(X,\mathscr{D})$ n'est pas un espace métrique standard car il ne vérifie pas la propriété triangulaire :

$$3\beta=\mathscr{D}(1,2)>\mathscr{D}(1,3)+\mathscr{D}(3,2)=\beta+\beta.$$

La réunion des espaces métriques généralises est espace métrique généralisé.

Exemple 2.6 *Soit* $(X_n, \mathscr{D}_n) : n \in J \subset \mathbb{N}$ *une famille d'espaces métriques généralisés disjoints, et soit* $X = \bigcup\{X_n : n \in J\}$. *Définissons* $\mathscr{D} : X \times X \to [0, +\infty[$ *par :*

$$\mathscr{D}(x,y) = \begin{cases} \mathscr{D}_n(x,y), & \text{si } x, y \in X_n, \text{ pour } n \in J, \\ 1, & \text{si } x \in X_n, y \in X_m, \text{ pour } m, n \in J, m \neq n. \end{cases}$$

Alors, $(X, \mathscr{D})$ *est un espace métrique généralisé.*

Soit $\{(X_n, \mathscr{D}_n) : n \in J \subset \mathbb{N}\}$ une famille d'espaces métriques généralisés disjoints, et soit $X = \bigcup_{n\in J} X_n$. Définissons $\mathscr{D} : X \times X \to [0, +\infty[$ par :

$$\mathscr{D}(x,y) = \begin{cases} \mathscr{D}_n(x,y), & \text{si } x, y \in X_n, \text{ pour } n \in J, \\ 1, & \text{si } x \in X_n, y \in X_m, \text{ pour } m, n \in J, m \neq n. \end{cases}$$

1. Symétrie : Pour tous $x, y \in X$, $\mathscr{D}(x,y) = \mathscr{D}(y,x)$. En effet, $\mathscr{D}_n(x,y) = \mathscr{D}_n(y,x)$ pour tout $n \in J$, et si $x \in X_n$ et $y \in X_m$ avec $n \neq m$, alors $\mathscr{D}(x,y) = 1 = \mathscr{D}(y,x)$.

2. Séparation : : Pour tous $x, y \in X$, $\mathscr{D}(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$. En effet, dans chaque X_n, $\mathscr{D}_n(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Si $x \in X_n$ et $y \in X_m$ avec $n \neq m$, alors $\mathscr{D}(x,y) = 1 \neq 0$. Ainsi, $\mathscr{D}(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

3. Inégalité rectangulaire : Pour tous $x, y, z, w \in X$, $\mathscr{D}(x,w) \leq \mathscr{D}(x,y) + \mathscr{D}(y,z) + \mathscr{D}(z,w)$.

Cas 1 : $x, y, z, w \in X_n$ pour un certain $n \in J$. Dans ce cas, $\mathscr{D}(x,y) = \mathscr{D}_n(x,y)$, $\mathscr{D}(y,z) = \mathscr{D}_n(y,z)$ et $\mathscr{D}(z,w) = \mathscr{D}_n(z,w)$. Puisque $(X_n, \mathscr{D}_n)$ est un espace métrique généralisé, l'inégalité rectangulaire y est satisfaite :

$$\mathscr{D}_n(x,w) \leq \mathscr{D}_n(x,y) + \mathscr{D}_n(y,z) + \mathscr{D}_n(z,w).$$

Cas 2 : $x, y \in X_n$ et $z, w \in X_m$ pour $n \neq m$. Dans ce cas, $\mathscr{D}(x,z) = 1$ et $\mathscr{D}(y,w) = 1$, nous avons :

$$\mathscr{D}(x,w) = 1,$$

et

$$\mathscr{D}(x,y) + \mathscr{D}(y,z) + \mathscr{D}(z,w) \geq 1.$$

Donc, $\mathscr{D}(x,w) \leq \mathscr{D}(x,y) + \mathscr{D}(y,z) + \mathscr{D}(z,w)$ est satisfait.

Cas 3 : $x, z \in X_n$ et $y, w \in X_m$. Ici, $\mathscr{D}(x,z) = \mathscr{D}_n(x,z)$, $\mathscr{D}(y,w) = \mathscr{D}_m(y,w)$ et $\mathscr{D}(x,y) = 1$ et $\mathscr{D}(z,w) = 1$. On a donc :

$$\mathscr{D}(x,w) = 1,$$

et

$$\mathscr{D}(x,y) + \mathscr{D}(y,z) + \mathscr{D}(z,w) \geq 1.$$

Donc, $\mathscr{D}(x,w) \leq \mathscr{D}(x,y) + \mathscr{D}(y,z) + \mathscr{D}(z,w)$ est satisfait.

Ainsi, toutes les propriétés d'un espace métrique généralisé sont vérifiées, donc $(X, \mathscr{D})$ est un espace métrique généralisé.

Définition 2.7 *Soit $(X,\mathscr{D})$ un espace métrique généralisé (emg), et soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dans X. La suite $\{x_n\}$ converge au sens des emg vers $\overline{x}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\varepsilon,\ \ \mathscr{D}(x_n, \overline{x}) < \varepsilon.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(x_0, \varepsilon[.$$

Exemple 2.8 *On prend la métrique généralisé de l'exemple 2.2 qui est définie pour $X = \mathbb{R}^2$, et $\mathscr{D} : X \times X \to [0, +\infty[$ par $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$*

$$\mathscr{D}(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2, & \text{si } x_i, y_i \in \{0,1\}, \\ \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Montrons que cette suite converge vers $(0,0)$ dans l'espace $(X,\mathscr{D})$.

Pour montrer cela, nous devons vérifier que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\mathscr{D}(x_n,(0,0)) < \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

- *$x_n \in \{0,1\}$ (i.e., $x_n = (0,0)$ où $x_n = (1,1)$ où $x_n = (0,1)$ où $x_n = (1,0)$).*
  Dans les deux cas, $\mathscr{D}(x_n,(0,0)) = 0$.
- *Pour $x_n \notin \{0,1\}$:*

$$\mathscr{D}(x_n,(0,0)) = \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{1}{n} - 0\right| = 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

Il suffit de choisir N tel que $\frac{2}{N} < \epsilon$.,

$$\mathscr{D}(x_n,(0,0)) = \frac{2}{n} < \epsilon$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ converge vers $(0,0)$ dans l'espace métrique généralisé $(X,\mathscr{D})$.

Définition 2.9 *Soit (X,d) un espace métrique généralisé (emg) et soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de X. Nous disons que (x_n) est une suite de Cauchy au sens des emg si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ pour tous les } n, m \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \text{ tel que } d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Exemple 2.10 *Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dans $(X,\mathscr{D})$ dans espace métrique généralisé, tel que x_n une suite constante par $x_n = c$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Pour tout $m,n\geq N$ (où N est un certain entier naturel fixé), nous avons :

$$\mathscr{D}(x_m,x_n)=\mathscr{D}(c,c)=0$$

(x_n) est suite de Cauchy.

Définition 2.11 ***Séparation*** *Soit X un ensemble et soit τ une topologie sur X. L'espace topologique (X,τ) est un espace séparé (de Hausdorff) si pour tout $x,y\in X$ avec $x\neq y$, il existe des sous-ensembles ouverts U et V de X tels que $x\in U$, $y\in V$ et U et V sont disjoints. De manière équivalente, un espace topologique (X,τ) est séparé si et seulement si chaque suite converge dans X a une limite unique, et en particulier la limite d'une suite convergente est unique.*

Remarque 2.12 *L'espace métrique généralisé n'est pas en général sépare, comme l'exemple suivant montrer .*

Exemple 2.13 *Soit $X=\{0,2\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et définissons une fonction $\mathscr{D}:X\times X\to[0,+\infty[$ par*

$$\mathscr{D}(x,y)=\begin{cases}0 & si\ x=y,\\ 1 & si\ x,y\in\{0,2\}\ où\ x,y\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\}\ et\ x\neq y,\\ y & si\ x\in\{0,2\},y\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\},\\ x & si\ y\in\{0,2\},x\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\}.\end{cases}$$

1.$\mathscr{D}$ est une métrique généralisée

Nous devons montrer que $\mathscr{D}$ satisfait les propriétés suivantes pour tous $x,y,z\in X$:

1. ***la symétrie***

   Nous devons montrer que $\mathscr{D}(x,y)=\mathscr{D}(y,x)$ pour tous $x,y\in X$. Considérons les différents cas possibles pour x et y :

   (a). Si $x=y$:

   $$\mathscr{D}(x,y)=0\quad et\quad \mathscr{D}(y,x)=0.$$

   Donc, $\mathscr{D}(x,y)=\mathscr{D}(y,x)$.

   (b). si $x\neq y$

   - *Si $x,y\in\{0,2\}$ ou $x,y\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\}$:*

   $$\mathscr{D}(x,y)=1\quad et\quad \mathscr{D}(y,x)=1.$$

   Donc $\mathscr{D}(x,y)=\mathscr{D}(y,x)$.

- *Si* $x \in \{0,2\}$ *et* $y \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$:

$$\mathscr{D}(x,y) = y \quad et \quad \mathscr{D}(y,x) = x.$$

La symétrie est bien vérifie donc, $\mathscr{D}(x,y) = \mathscr{D}(y,x)$.

2. ***Séparation*** *Elle est claire,* $\mathscr{D}(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.
3. ***Inégalité rectangulaire*** *Soient* $x, y, z, w \in X$ *,et sont distincts vérifions l'inégalité rectangulaire :* $\mathscr{D}(x,y) \leqslant \mathscr{D}(x,z) + \mathscr{D}(z,w) + \mathscr{D}(w,y)$ *Considérons les différents cas possibles pour* $x, y, z, w \in X$:

   - $y = z = w$:

   L'inégalité est vérifié car$\mathscr{D}(x,x) = 0$.

   - *Si deux des points sont égaux, par exemple* $x = y$:

   $$\mathscr{D}(x,w) + \mathscr{D}(y,z) = \mathscr{D}(y,w) + \mathscr{D}(x,z)$$

   et l'inégalité est vérifié.

   - *Si tous les points sont distincts et* $x, y, z, w \in \{0,2\}$ *où* $x, y, z, w \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$: $\mathscr{D}(x,w) = 1$, $\mathscr{D}(y,z) = 1$, $\mathscr{D}(x,y) = 1$, $\mathscr{D}(y,w) = 1$, $\mathscr{D}(z,w) = 1$, $\mathscr{D}(z,x) = 1$.

   $$\mathscr{D}(x,y) \leqslant \mathscr{D}(x,z) + \mathscr{D}(z,w) + \mathscr{D}(w,y)$$

   $$1 \leqslant 1 + 1 + 1$$

   L'inégalité est donc satisfaite.

   - *Si* $x, w \in \{0,2\}$ *et* $y, z \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$: *si on prend* $x = 0$, $y = \frac{1}{m}$, $z = \frac{1}{n}$, $w = 2$. $\mathscr{D}(0, \frac{1}{m}) = \frac{1}{m}, \mathscr{D}(2, \frac{1}{m}) = \frac{1}{m}, \mathscr{D}(\frac{1}{n}, 2) = \frac{1}{n}, \mathscr{D}(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

   $$\begin{aligned} \mathscr{D}(x,y) &\leqslant \mathscr{D}(x,z) + \mathscr{D}(z,w) + \mathscr{D}(w,y) \\ \mathscr{D}(0, \frac{1}{m}) &\leqslant \mathscr{D}(0, \frac{1}{n}) + \mathscr{D}(\frac{1}{n}, 2) + \mathscr{D}(2, \frac{1}{m}) \\ \frac{1}{m} &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

   - L'inégalité est satisfaite.

En examinant ces cas, donc $\mathscr{D}$ *vérifie l'inégalité rectangulaire.*
Par conséquent, $(X, \mathscr{D})$ *est un espace métrique généralisé.*

Espace métrique généralisé n'est pas séparé :

Pour montrer que l'espace métrique généralisé n'est pas séparé, où $X = \{0,2\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *et* $\mathscr{D}$ *est défini comme suit :*

$$\mathscr{D}(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y, \\ 1 & si\ x, y \in \{0,2\}\ où\ x, y \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}\ et\ x \neq y, \\ y & si\ x \in \{0,2\}, y \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \\ x & si\ y \in \{0,2\}, x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}. \end{cases}$$

n'est pas séparé, nous devons démontrer qu'il existe deux points distincts $a, b \in X$ *tels que pour tout voisinage* U *de* a *et* V *de* b, $U \cap V \neq \emptyset$.

1. *Nous allons montrer que cet espace n'est pas séparé en examinant les boules autour de* 0 *et* 2. *Considérons les points* 0 *et* 2 *dans* X.

   - *Si* $\epsilon \leq 1$, *alors* $B(0,\epsilon) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : \frac{1}{n} < \epsilon\right\}$.

   - *Si* $\epsilon > 1$, *alors* $B(0,\epsilon) = X$, *car pour tout* $y \in X$, $\mathscr{D}(0,y) < \epsilon$.

   - *Si* $\epsilon \leq 1$, *alors* $B(2,\epsilon) = \{2\} \cup \left\{\frac{1}{n} : \frac{1}{n} < \epsilon\right\}$.

   - *Si* $\epsilon > 1$, *alors* $B(2,\epsilon) = X$, *car pour tout* $y \in X$, $\mathscr{D}(2,y) < \epsilon$.

   Intersection des Boules

   Considérons des boules $B(0,\epsilon)$ *et* $B(2,\epsilon)$ *avec* $\epsilon = 1$ *:*

   $$B(0,1) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

   $$B(2,1) = \{2\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

   L'intersection $B(0,1) \cap B(2,1) \neq \emptyset$. *Puisqu'il est impossible de trouver des boules disjointes, cela montre que l'espace* $(X, \mathscr{D})$ *n'est pas séparé.*

2. ***Unicité de limite***

   On considéré la suite $\frac{1}{n}$ *converge avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *d'après la définition de convergence il existe un point* $\overline{x} \in X$ *tel que pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$, $\mathscr{D}\left(\frac{1}{n}, \overline{x}\right) < \epsilon$.

   - ***Cas 1 :*** $\overline{x} = 0$

     - *Si* $\overline{x} = 0$, *alors pour* $n \geq 1$, $\mathscr{D}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n}$.

     - *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il suffit de choisir* N *tel que* $N > \frac{1}{\epsilon}$. *Ainsi, pour* $n \geq N$, *nous avons* $\frac{1}{n} < \epsilon$, *ce qui signifie que* $\mathscr{D}\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \epsilon$.

     Cela montre que la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *converge vers 0 dans* $(X, \mathscr{D})$.

- ***Cas 2 :*** $\overline{x}=2$ - *Si* $\overline{x}=2$, *alors pour* $n\geq 1$, $\mathscr{D}\left(\frac{1}{n},2\right)=\frac{1}{n}$.
  - *De manière similaire, pour tout* $\epsilon>0$, *il suffit de choisir* N *tel que* $N>\frac{1}{\epsilon}$. *Ainsi, pour* $n\geq N$, *nous avons* $\frac{1}{n}<\epsilon$, *ce qui signifie que* $\mathscr{D}\left(\frac{1}{n},2\right)<\epsilon$.

  Cela montre également que la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *converge vers 2 dans* $(X,\mathscr{D})$.

La suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *ne converge pas de manière unique dans* $(X,\mathscr{D})$.

Cela montre que l'espace métrique généralisé $(X,\mathscr{D})$ *n'est pas séparés.*

Le lemme suivant donne la condition d'unicité de la limite.

Lemme 2.1 *Soit* $(X,\mathscr{D})$ *un espace métrique généralisé (emg),* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* (X,d), *et* $x,y\in X$. *Supposons qu'il existe un entier positif* N *tel que :*

1. $x_n\neq x_m$ *pour tout* $n,m>N$;
2. x_n *et* x *sont des points distincts dans* X, *pour tout* $n>N$;
3. x_n *et* y *sont des points distincts dans* X, *pour tout* $n>N$;
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathscr{D}(x_n,x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathscr{D}(x_n,y)$.

Alors nous avons $x=y$. *Nous observons facilement que si l'une des conditions (1) ou (3) n'est pas satisfaite, alors le résultat du Lemme reste valide.*

2.3 Théorème de point fixe

Définition 2.14 *[2] Une application* $T:(X,\mathscr{D})\to(X',\mathscr{D}')$ *est continue si, pour toute suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathscr{D}(x_n,x)=0\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\mathscr{D}(Tx_n,Tx)\to 0.$$

2.4 Contraction de Banach

Le théorème des points fixes le plus fréquemment cité dans la littérature est le principe de contraction de Banach (voir [8]), qui affirme que si X est un espace métrique complet et $T:X\to X$ est une application contractante, c'est-à-dire s'il existe $\varphi\in[0,1[$ tel que pour tout $x,y\in X$:

$$d(Tx,Ty)\leq\varphi\cdot d(x,y)\quad(1)$$

Alors T possède un unique point fixe. La définition contractante (1) implique que T est uniformément continue.

2.5 Théorème du point fixe de Kannan

Il existe une définition contractante qui ne force pas T à être continue. C'est le point fixe de Kannan [8], qui a établi un théorème pour les applications satisfaisant :

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi[d(x,Tx)+d(y,Ty)] \quad (2)$$

pour tout $x, y \in X$, où $\varphi \in [0,1[$.

Théorème 2.15 *[1] Soit $(X,\mathscr{D})$ un espace métrique généralisé complet, et soit une application satisfait (2) $T : X \to X$. Alors, T possède un unique point fixe.*

Nous notons que le théorème du point fixe de Kannan n'est pas une extension du principe de contraction de Banach.

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire de X. Définissons $x_1 = T(x_0)$. Si $x_1 = x_0$, alors $x_0 = T(x_0)$, ce qui signifie que x_0 est un point fixe de T et il n'y a rien à prouver.

Supposons que $x_1 \neq x_0$. Définissons $x_2 = T(x_1)$. De cette manière, nous pouvons définir une suite de points dans X comme suit :

$$x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \quad x_n \neq x_{n+1}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

En utilisant l'inégalité (2), nous avons

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1},Tx_n) \\ &\leq \varphi\,[d(x_{n-1},Tx_{n-1})+d(x_n,Tx_n)] \\ &\leq \varphi\,[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})] \\ &\leq \frac{\varphi}{1-\varphi}d(x_{n-1},x_n). \end{aligned}$$

Nous pouvons également supposer que x_0 n'est pas un point périodique, en effet si $x_n = x_0$, alors

$$\begin{aligned} d(x_0,Tx_0) &= d(x_n,Tx_n) \\ &= d(T^n x_0, T^{n+1}x_0) \\ &\leq \frac{\varphi}{1-\varphi}d(T^{n-1}x_0,T^n x_0) \\ &\leq \left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)^2 d(T^{n-2}x_0,T^{n-1}x_0) \leq \ldots \leq \left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)^n d(x_0,Tx_0). \end{aligned}$$

Posons $h = \frac{\varphi}{1-\varphi}$, alors $h < 1$ et

$$(1-h^n)d(x_0,Tx_0) \leq 0.$$

Il s'ensuit que x_0 est un point fixe de T. Ainsi, dans la suite de la démonstration, nous pouvons supposer que $T^n x_0 \neq x_0$ pour $n = 1,2,3,\ldots$. Maintenant, l'inégalité (2) implique

que

$$\begin{aligned} d(T^n x_0, T^{n+m} x_0) & \\ &\leq \varphi\left[d(T^{n-1} x_0, T^n x_0) + d(T^{n+m-1} x_0, T^{n+m} x_0)\right] \\ &\leq \varphi\left[h^{n-1} d(x_0, T x_0) + h^{n+m-1} d(x_0, T x_0)\right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$d(x_n, x_{n+m}) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Cela implique que (x_n) est une suite de Cauchy dans X. Comme X est complet, il existe un $u \in X$ tel que $x_n \to u$. Par la propriété rectangulaire, nous avons

$$\begin{aligned} d(Tu, u) & \\ &\leq d(Tu, T^n x_0) + d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) + d(T^{n+1} x_0, u) \\ &\leq \varphi\left[d(u, Tu) + d(T^{n-1} x_0, T^n x_0)\right] + h^n d(x_0, T x_0) + d(T^{n+1} x_0, u) \\ &\leqslant h d(T^{n-1} x_0, T^n x_0) + \frac{h^n}{1-\varphi} d(x_0, T x_0) + \frac{1}{1-\varphi} d(T^{n+1} x_0, u) \\ &\leq h^n d(x_0, T x_0) + \frac{h^n}{1-\varphi} d(x_0, T x_0) + \frac{1}{1-\varphi} d(T^{n+1} x_0, u) \end{aligned}$$

En laissant $n \to \infty$ et en utilisant le fait que $d(a_n, y) \to d(a, y)$ et $d(x, a_n) \to d(x, a)$ lorsque $a_n \to a$ dans X, nous avons $u = Tu$.

Montrons maintenant que T a un point fixe unique. Pour cela, supposons qu'il existe un autre point v dans X tel que $v = Tv$. Alors,

$$d(v, u) = d(Tv, Tu) \leq \varphi d(v, Tv) + d(u, Tu) \leq \varphi d(v, v) + d(u, u) = 0.$$

Par conséquent, $u = v$.

■

Exemple 2.16 *Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Définissons $\mathscr{D} : X \times X \to \mathbb{R}$ comme suit :*

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}(1,2) = \mathscr{D}(2,1) = 3, \\ &\mathscr{D}(2,3) = \mathscr{D}(3,2) = \mathscr{D}(1,3) = \mathscr{D}(3,1) = 1, \\ &\mathscr{D}(1,4) = \mathscr{D}(4,1) = \mathscr{D}(2,4) = \mathscr{D}(4,2) = \mathscr{D}(3,4) = d(4,3) = 4. \end{aligned}$$

Alors $(X, \mathscr{D})$ est un espace métrique généralisé complet mais $(X, \mathscr{D})$ n'est pas un espace métrique car il manque la propriété triangulaire :

$$3 = \mathscr{D}(1,2) > \mathscr{D}(1,3) + \mathscr{D}(3,2) = 1 + 1 = 2.$$

Définissons une application $T : X \to X$ comme suit :

$$Tx = \begin{cases} 3 & si\ x \neq 4; \\ 1 & si\ x = 4. \end{cases}$$

Notez que

$$\mathscr{D}(T(1), T(2)) = \mathscr{D}(T(1), T(3)) = \mathscr{D}(T(2), T(3)) = 0$$

et dans tous les autres cas

$$\mathscr{D}(Tx, Ty) = 1; \quad [\mathscr{D}(x, Tx) + \mathscr{D}(y, Ty)] \geqslant 4.$$

Ainsi, pour $\varphi = \frac{1}{3}$, toutes les conditions du Théorème sont satisfaites pour obtenir un point fixe unique de T.

CHAPITRE

3 UNE LACUNE DANS L'ESPACE MÉTRIQUE GÉNÉRALISÉ.

Récemment, Branciari a proposé le concept d'espace métrique généralisé et ses propriétés. Ce chapitre met en lumière une erreur concernant la continuité dans cet espace, découverte par B. Samet [16] grâce à un contre-exemple précis. Cette analyse souligne les implications de cette découverte pour la théorie des espaces métriques généralisés.

3.1 Lacune dans l'énoncé de Branciari

Branciari a annoncé proposition suivante :

Proposition 3.1 *La métrique généralisé $\mathscr{D}$ est continue par rapport à chacune de ses coordonnées.*

Preuve. Soit $\mathscr{D} : X \times X \to [0, +\infty[$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a, et b sont distincts dans X et $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, alors :

avec inégalité rectangulaire on obtient :

$$\mathscr{D}(x_n, b) \leq \mathscr{D}(x_n, x_m) + \mathscr{D}(x_m, a) + \mathscr{D}(a, b) \tag{3.1}$$

$$\mathscr{D}(a, b) \leq \mathscr{D}(a, x_m) + \mathscr{D}(x_m, x_n) + \mathscr{D}(x_n, b) \tag{3.2}$$

avec $x_n \neq x_m$

En effet, de 3.2 et 3.1 on obtient :

$$\mathscr{D}(x_n, b) - \mathscr{D}(a, b) \leq \mathscr{D}(x_n, x_m) + \mathscr{D}(x_m, a)$$

$$\mathscr{D}(x_n, b) - \mathscr{D}(a, b) \leq -(\mathscr{D}(x_n, x_m) + \mathscr{D}(x_m, a))$$

Donc, nous obtenons :

$$|\mathscr{D}(x_n, b) - \mathscr{D}(a, b)| \leq \mathscr{D}(x_n, x_m) + \mathscr{D}(x_m, a). \tag{3.3}$$

Puisque $x_n \to a$, la suite (x_n) est une suite de Cauchy. Par définition, :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathscr{D}(x_n,x_m)=0.$$

De plus, comme $x_n \to a$, nous avons également :

$$\lim_{m\to\infty}\mathscr{D}(x_m,a)=0.$$

Comme

$$\mathscr{D}(x_n,x_m)\to 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}(x_m,a)\to 0.$$

Nous obtenons :

$$\lim_{m\to\infty}\mathscr{D}(x_n,b)=\mathscr{D}(a,b).$$

Par conséquent :

$$\mathscr{D}(x_n,b)\to\mathscr{D}(a,b) \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty.$$

Ainsi, $\mathscr{D}$ est continue par rapport à la première coordonnée. Par symétrie, cette continuité est également valide pour la deuxième coordonnée. ■

Remarque 3.2 *L'erreur est due au fait qu'une suite convergente dans espace métrique généralisé, n'implique pas que la suite est de cauchy.*

Branciari a affirmé que la fonction $\mathscr{D}$ est continue dans chaque coordonnée. Plus précisément, si x_n, a, b sont des points distincts de X ($n \in \mathbb{N}$) et si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors nous avons

$$|\mathscr{D}(x_n, b) - \mathscr{D}(a, b)| \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty. \tag{3.4}$$

Le but est de montrer que (1) n'est pas toujours vrai en général. Un contre-exemple est donné par [16] dans la section suivante.

3.2 Contre-exemple 1.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avec $\sqrt{5} \neq \frac{\sqrt{5}}{7}$. Nous définissons l'ensemble

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup \{\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{7}\}$$

et nous considérons $\mathscr{D} : X \times X \to \mathbb{R}$ défini par

$$\begin{cases} \mathscr{D}(x, x) = 0 \text{ pour tout } x \in X, \\ \mathscr{D}(x, y) = \mathscr{D}(y, x) \text{ pour tout } x, y \in X, \\ \mathscr{D}(x_n, x_m) = 1 \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N}^* \text{avec} n \neq m, \\ \mathscr{D}(x_n, \frac{\sqrt{5}}{7}) = \frac{1}{n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ \mathscr{D}(x_n, \sqrt{5}) = \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ \mathscr{D}(\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{7}) = 1. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que l'exemple donné constitue un espace métrique généralisé.

1. **Symétrie :** La symétrie de la distance est claire car $\mathscr{D}(x, y) = \mathscr{D}(y, x)$ pour tout $x, y \in X$.
2. **Séparation :** $\mathscr{D}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ car $\mathscr{D}(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$ et les autres valeurs de distance sont toujours positives.
3. **Inégalité rectangulaire :** Nous devons montrer que $\mathscr{D}(x, y) \leq \mathscr{D}(x, \xi) + \mathscr{D}(\xi, \eta) + \mathscr{D}(\eta, y)$ pour tout $x, y, \xi, \eta \in X$.

Cette inégalité est triviallement satisfaite pour la plupart des cas. Pour le cas où $x = x_n$, $y = a$ et $z = b$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(x,y) &= \mathscr{D}(\frac{\sqrt{5}}{7}, \sqrt{5}) = 1,\\
\mathscr{D}(x,\xi) &= \mathscr{D}(x_n, \frac{\sqrt{5}}{7}) = \frac{1}{n^2},\\
\mathscr{D}(\xi,\eta) &= \mathscr{D}(x_n, x_m) = 1\\
.\mathscr{D}(\eta,y) &= \mathscr{D}(x_m, \sqrt{5}) = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

On obtient $1 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1} + 1$. ce qui est toujours vrai.

Par conséquent, l'exemple donné constitue un espace métrique généralisé.

Nous devons montrer que l'exemple donné n'est pas une suite de Cauchy. Considérons la paire d'éléments x_n et $\frac{\sqrt{5}}{7}$. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathscr{D}(x_n, \frac{\sqrt{5}}{7}) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2} = 0^+$.

et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathscr{D}(x_n, \sqrt{5}) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

$$|\mathscr{D}(x_n,b) - \mathscr{D}(a,b)| = \left|1 - \frac{1}{n^2}\right| \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Et donc SAMET [16] a montré que l'inégalité 3.4 est fausse. Cette erreur est si (x_n) est une suite convergente dans X, alors $\mathscr{D}(x_n, x_m) \to 0$ lorsque $n, m \to +\infty$. D'une autre manière, Branciari a utilisé que toute suite convergente est une suite de Cauchy. Ce résultat est vrai dans le cas d'un espace métrique, mais ce n'est pas dans le cas d'un espace généralisé, il est généralement faux comme le montre le contre-exemple donné.

Exemple suivant montre que c'est pas toute suite convergente est de cauchy

3.2.1 Contre-exemple 2

Rappelons d'exemple 2.13. Soit $X = \{0,2\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et définissons une fonction $d : X \times X \to [0, +\infty[$ par

$$\mathscr{D}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y,\\ 1 & \text{si } x, y \in \{0,2\} \text{ où } x, y \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et } x \neq y,\\ y & \text{si } x \in \{0,2\}, y \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\},\\ x & \text{si } y \in \{0,2\}, x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}. \end{cases}$$

Considérons la suite $u_n = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ dans X.

1. **Convergence** : La suite (u_n) converge vers 0 dans $(X, \mathscr{D})$ car

$$\lim_{p\to\infty} \mathscr{D}(u_n, 0) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. **Suite de Cauchy** : Pour montrer que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy, considérons deux termes u_p et u_q pour $p \neq q$. Si $p \neq q$, alors $u_p = \frac{1}{p}$ et $u_q = \frac{1}{q}$, et selon la définition de $\mathscr{D}$, nous avons :

$$\mathscr{D}(u_p, u_q) = 1 \quad \text{car} \quad u_p, u_q \in \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ et } u_p \neq u_q.$$

Pour qu'une suite soit de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$, il doit exister un entier N tel que pour tous $p, q \geq N$, $\mathscr{D}(u_p, u_q) < \epsilon$. Cependant, pour $p \neq q$, nous avons toujours $\mathscr{D}(u_p, u_q) = 1$, ce qui est supérieur à tout $\epsilon < 1$.

Donc, (u_p) n'est pas une suite de Cauchy dans $(X, \mathscr{D})$.

Conclusion

La conclusion de ce mémoire reflète une exploration approfondie et structurée des concepts clés dans les domaines des espaces topologiques, métriques et généralisés. En commençant par les fondements de la topologie générale et de la topologie induite par distance, ça nous a permet de comprendre les notions et les propriétés essentielles de convergence et de continuité. Nous avons ensuite abordé les espaces vectoriels normés, où la mesure de la norme et les propriétés des espaces de Banach, complets et essentiels dans l'analyse mathématique, ont été rigoureusement explorées. Le théorème des points fixes de Banach a constitué un point culminant, illustrant de manière concrète comment des outils mathématiques abstraits peuvent résoudre des problèmes concrets, notamment en garantissant l'existence et l'unicité des solutions dans des espaces normés particuliers.

Enfin, en abordant les espaces métriques généralisés, notre mémoire a élargi les horizons en introduisant des structures mathématiques plus complexes et moins conventionnelles. Nous avons défini ces nouveaux types d'espaces et examiné comment les principes de la topologie et de la complétude s'appliquent à eux, tout en identifiant une lacune spécifique dans la théorie actuelle. Cette lacune suggère des avenues prometteuses pour la recherche future, visant à combler ces déficits et à approfondir notre compréhension des structures métriques généralisées.

En conclusion, ce mémoire a non seulement approfondi notre compréhension des fondements théoriques des espaces métriques et topologiques, mais il a également souligné l'importance des applications concrètes de ces concepts en mathématiques et au-delà. En nous lançant dans une exploration détaillée et méthodique, il offre une base solide pour de futures recherches et développement dans ce domaine en constante évolution de la mathématique moderne.

Bibliographie

[1] A. Azam, M. Arshad, Kannan fixed point theorems on generalized metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. 1, 45-48 (2008).

[2] H. Aydi, E. Karapınar, and B. Samet, "Fixed points for generalized (α,ψ)-contractions on generalized metric spaces." J. Inequal. Appl. 229 (2014).

[3] S. Banach Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, (1922).

[4] A. Branciari, A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. Publ. Math. Debrecen 57 (2000).

[5] A. El Jai, Éléments de topologie et espaces métriques. Presses Universitaires de Perpignan, (2007).

[6] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings. Journal of the London Mathematical Society, 74-79 (1962).

[7] E. Karapınar, Ravi P. Agarwal, Fixed Point Theory in Generalized Metric Spaces. (2022).

[8] K. Goebel and A. Kirk, Topics in metric fixed point theory. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[9] C. Godbillon, Éléments de topologie algébrique. Hermann, Collection MÉTHODES, (1971).

[10] A. Jamshaid, A. Muhammad et V. Calogero, On a Theorem of Khan in a Generalized Metric Space. (2013).

[11] M. Jleli, and B. Samet, A New Generalization of the Banach Contraction Principle. Journal of Inequalities and Applications, Article No. 38, (2014).

[12] R. Kannan, Some results on fixed points. Bull. Calcutta. Math. Soc. 60, 71-76, (1968).

[13] J.R. Graef, J. Henderson, A.Ouahab, "Topological Methods for Differential Equations and Inclusions." Taylor and Francis Group, LLC.

[14] B. E. Rhoads, A comparison of various definitions of contractive mappings." Trans. Amer. Math. Soc. 26 (1977), 257-290.

[15] I. R. Sarma, J. M. Rao, and S. S. Rao, Contractions over generalized metric spaces. The Journal of Nonlinear Science and Applications, vol. 2, no. 3, pp. 180-182, (2009).

[16] B. Samet, Discussion on 'a fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces' by A. Branciari. Publicationes Mathematicae, vol. 76, no. 3-4, pp. 493-494, (2010).

[17] C. Tisseron, Notions de topologie, Introduction aux espaces fonctionnels. Hermann, (1997).