République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE Dr. YAHIA FARES MÉDÉA



Département de Génie Electrique et de l'Informatique

Mémoire de Projet de Fin d'Etudes pour l'obtention du Diplôme

De MASTER en Génie Electrique

Option : Automatique Des Systèmes

THEME

ETUDE ET SIMULATION DE L'ESTIMATION DE TRAJECTOIRE D'UN MISSILE PAR L'ALGORITHME DE FILTRE DE KALMAN ETENDU COMPARAISON AVEC LE FILTRE DE KALMAN

Réalisé par:

- ***Mr.BENAISSA Imad***
- ***Mr.BENAIMECHE Mustapha***

Proposé et Dirigé

Mr. BAYASLI Omar

Promotion 2013

REMERCIEMENT :

NOUS REMERCIONS LE DIEU TOUT PUISSANT DE NOUS AVOIR DONNÉ LA FORCE ET LA DÉTERMINATION POUR MENER À TERME CE TRAVAIL NOUS TENONS À REMERCIER NOTRE PROMOTEUR MONSIEUR BAYASLI OMAR QUI NOUS A CONFIÉ CE TRAVAIL DANS LE CADRE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE. ELLE NOUS A INITIÉS À L'APPROCHE SCIENTIFIQUE CRITIQUE DES TRAVAUX DE RECHERCHE. ELLE NOUS A ÉGALEMENT ENCOURAGÉS ET SOUTENUS EN BIEN DES MOMENTS DIFFICILES. ON LUI EXPRIME NOTRE PROFOND ATTACHEMENT. C'EST AVEC UN RÉEL PLAISIR QUE NOUS TENONS À EXPRIMER TOUTE NOTRE RECONNAISSANCE À DOCTEUR ISMAÏL BENTOUATI ADJOINT DE CHEF DU DÉPARTEMENT GÉNIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE.

NOS REMERCIEMENTS S'ADRESSENT ÉGALEMENT À TOUS LES ENSEIGNANTS, QUI NOUS ONT INCULQUÉ LEUR SAVOIR ET CONNAISSANCES. LES ÉTUDIANTS ET TOUS LES MEMBRES DU PERSONNEL DE FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE.

DÉDICACES

JE TIEN À DÉDIER CE TRAVAIL A MES CHERS PARENTS POUR LEUR SOUTIEN MORAL ET MATÉRIEL DURANT TOUTE LA PÉRIODE DE MES ÉTUDES.

A MES CHERS FRÈRES.

A MA GRAND-MÈRE ET TOUTE MA FAMILLE.

A MON BINÔME ET SA FAMILLE.

A TOUS MES AMIS ET SPÉCIALEMENT MON COUSIN IMAD ET MON AMI AMINE CEUX QUI M'ONT AIDÉ POUR RÉALISER CE TRAVAIL.

Mustapha

Dédicace

Je dédie ce travail ; dit de fin d'études :

A mes parents

A mes frères : Billel et Younes.

A ma petite sœur : Karima.

A mon binôme

A mes tous mes amies :

Mohammed, Hamza, Kamel, Krimo, Ahmed Dr, Hamza Ch,…

Et tous qui m'aide pour faire ce travail.

Tables de Matières :

Remerciement

Dédicaces

Tables de Matières

Résumé

Liste des figures

INTRODUCTION GENERALE ……1

CHAPITRE I : LES SYSTEMES LINEAIRES ET LES SYSTEMES NON LINEAIRES

I.1. Introduction ……..2

I.2. LES SYSTEMES LINEAIRES

1. **Résolution d'un système linéaire** ……..2
2. **Résolution des systèmes particuliers** ……4
   - **2.1. Systèmes triangulaires normalisé** ……....4
   - **2.2. Système échelonné**…….. 4
   - **2.3. Système homogène associé à un système linéaire** ……...5
3. **Méthode du pivot de Gauss** ……..5
4. **Description de l'ensemble des solutions** ……..5
   - **4.1. Notion de rang** ……5
   - **4.2. Système de Cramer** ……6
   - **4.3. Structure de l'ensemble des solutions** ……..6
5. **Ecriture matricielle d'un système linéaire** ……..6

I.3.LES SYSTEMES NON LINEAIRES ……...7

1. **Analyse des systèmes non linéaires** ……..……7
2. **Choix des entrées** ……...7
3. **Différents types de non linéarité** ……..8
4. **Résolution de système des équations non linéaire** ……..8
   - **4.1. La méthode de Newton et ses variantes** ……...8
   - **4.2. Méthode de Newton modifiée** ……8
   - **4.3. Méthode de point fixe** ……9
5. **Systèmes asservis possédant un seul élément non linéaire** ……9
6. **Méthodes d'études des systèmes asservis non linéaires** ……9
7. **Asservissement à plusieurs non linéarité** ……...9
   - **7.1. Méthode du premier harmonique** ……..10
     - **7.1.1. Gain complexe équivalent** ……11
     - **7.1.2. Notion de lieu critique** ……..11
     - **7.1.3. Méthode de calcul approché de gain complexe équivalent** ……...11
     - **7.1.4. Condition de validité** ……12
   - **7.2. Méthode du plan de phase** ……...12
     - **7.2.1. Principe** ……..12
     - **7.2.2. Analyse des trajectoires et diagnostic du système** ……..13
8. **Stabilité des systèmes non linéaires** ……...14

8.1. Fonction de transfert généralisée ……..14
8.1.1. Principe ……..14
8.1.2. Méthode du lieu de Cypkin ……..15
9. Représentation d'état des systèmes à temps continu ……...15
9.1. Etat d'un système et variables d'état ……...15
9.2. Modélisation du fonctionnement de système ……..16
9.3. Résolution des équations d'état ……17
9.3.1. Généralisation au système vectoriel ……..17
9.3.2. Calcul de la matrice de transition ……18
10. Conclusion ……19

CHAPITRE II : FILTRE DE KALMAN ET FILTRE DE KALMAN ETENDU

1. Introduction ……20
2. Filtrage de kalman ……..20
2.1. Définition et propriétés de filtre de kalman ……20
2.2. Principe de filtre de kalman ……21
2.2.1. Le modèle de kalman ……..21
2.2.2. La formulation du filtre de kalman ……..22
2.2.3. Détermination du filtre ……..23
2.2.4. Le filtre de kalman continu ……24
2.2.5. La structure du filtre de kalman – Bucy continu……26
2.2.6. Le filtre de kalman discret ……26
2.3. Le filtre de kalman étendu (EKF) ……...28
2.3.1. Modèle générale de filtre de kalman étendu ……29
2.3.1.1. Filtre de kalman étendu discret ……...29
2.3.1.2. Filtre de kalman étendu continu ……..31
2.3.2. Principe de filtre de kalman étendu ……..31
3.3. Iterated Extended Kalman Filter IEKF ……...34
4. Conclusion ……...35

CHAPITRE III : LES MISSILES

1. **Introduction** ……36
2. Définition du missile …..……36
3. Propulsions ……..36
3.1. **Fusée** ……36
3.1.1. A carburant solide ……36
3.1.2. A carburant liquide ……..36
3.2. Réacteurs ……36
3.2.1. Simple flux ……36
3.2.2. Statoréacteur ……37
3.3. Fusée/Statoréacteur ……37
4. Classification des missiles ……37
5. Le guidage d'un missile ……...38
5.1. Phases de guidage ……...39
5.2. Téléguidage Beam Rider ……39
5.3. Téléguidage commandé ……..40
5.4. Guidage Homming ……41
5.4.1. Guidage Homming Semi-actif ……..41

5.4.2. Guidage Homming Actif ……..42
5.4.3. Guidage Homming Passif ……43
5.4.4. Guidage Homming Retransmit ……...43
5.5. Guidage en navigation ……44
5.5.1. Guidage en navigation inertielle ……..44
5.5.1.1. Gyroscope ……...44
5.5.1.2. Accéléromètre ……45
5.5.2. Concept de navigation inertielle ……..46
5.5.3. Guidage en navigation à distance ……47
5.6. Global Positionning System (GPS) ……..47
5.6.1. Composition de GPS ……48
5.6.2. Principe de fonctionnement ……49
5.7. Guidage en navigation céleste ……...49
5.8. Guidage en navigation géophysique ……49
6. Radar ……50
6.1. Définition ……50
6.2. Origine du mot « radar » ……...50
6.3. Composition d'un système radar ……..50
6.4. Types de radar ……51
6.4.1. Configuration mono-statique ……...51
6.4.2. Configuration bi-statique ……51
7. Conclusion ……51
CHAPITRE IV : RESULTAT ET SIMULATION
1. Introduction ……...52
2. Description du langage Matlab ……52
2.1. Définition ……52
2.2. Accès au Matlab ……52
3. Modèle du missile ……..52
4. Résultats de simulation par le filtre de kalman et le filtre de kalman étendu …….54
5. Comparaison entre l'estimation par le filtre de kalman et le filtre de kalman étendu61
6. Conclusion ……..61
CONCLUSION GENERALE
Liste des annexe :
Annexe A ……i
Annexe B ……...v
Annexe C ……viii
BIBLIOGRAPHIQUES

ملخص

هذا العمل المعنون " دراسة و محاكاة التقريب لمسار صاروخ باستعمال خوارزمية كالمان الواسعة **مقارنة مع** خوارزمية كالمان " هو عبارة عن موضوع هدفه توضيح الطريقة المتبعة لتحديد سلوك نظام الصاروخ.

كذلك يحتوي على مفاهيم و تعاريف لعناوين رئيسة وفرعية نسبة للافكار المطروحة للنقاش هدفها اغناء الفهم في هذا الميدان . ايضا , هذا العمل مدعم باساليب توضيحية (صور' **مخططات** 'معادلات' ...) لتقريب **الصورة للقارئ** فيما يخص الخوارزميات المقربة و تقنيات المقاربة باستعمال مرشحة كالمان بالمقارنة مع مرشحة كالمان **الواسعة** لتحديد مدى نجاعتهما .

Résumé :

Ce travail titré par « Etude et simulation de l'estimation de la trajectoire d'un missile par l'algorithme de filtre de kalman étendu comparaison avec le filtre de kalman est un sujet chargé d'exprimer le chemin suivi pour modéliser le comportement d'un missile, encore qu'il contient des notions et définitions des termes soient principales ou bien relatifs à l'idée discutée pour enrichir la compréhension à ce domaine, en plus que nous injectons quelques expressions explicatives (figures, courbes, équations,…) afin d'approximer la vue au lecteur, concernant les estimateurs et les techniques d'estimation en choisissant l'algorithme de filtre de kalman comparant avec celle du filtre de kalman étendu à fin de détecter le meilleur estimateur parmi eux.

Abstract:

This work called " Estimation study and simulation of the missile trajectory by the extended kalman filter algorithm comparison with the kalman filter " is an subject mean to determine the model way of the missile behavior, and he content notions of principals terms and relatives terms to add the comprehension in this world; then we add some explicatives expressions (figures, graphs, equations,…) to approximate the view to the reader, about the estimators and the estimations techniques when we chooses the extended kalman filter algorithm comparison with the kalman filter to detect the best.

Liste des figures :

Fig(A.1) : Relation entrée-sortie …….i
Fig(A.2) : Classification monographique ……..ii
Fig(A.3) : Fonction signe ……..iii
Fig(A.4) : Fonction échelon ……..iii
Fig(A.5) : Fonction rampe ……iii
Fig(A.6) : Fonction rectangulaire …….iv
Fig(A.7) : Fonction triangulaire ……iv
Fig(A.8) : Impulsion de Dirac……iv
Fig(A.9) : Fonction sinus cardinal ……iv
Fig(I.1) : Système non linéaire commandé.....……7
Fig(I.2) : Système non linéaire séparable…….....10
Fig(I.3) : L'entrée de système……...10
Fig(I.4) : La réponse d'un système linéaire……..10
Fig(I.5) : La réponse d'un système non linéaire ……..10
Fig(I.6) : Singularités d'un plan de phase…….13
Fig(I.7) : Système non-linéaire ……...……...…..14
Fig(I.8) : Critère de stabilité d'un système non linéaire……15
Fig(I.9) : Exemple de représentation d'état d'un système……15
Fig(I.10) : Représentation schématique d'une modélisation d'état……..17
Fig(II.1) : Schéma de principe d'un estimateur d'état…….……20
Fig(II.2) : Schéma fonctionnel du filtre de kalman continu……...……26
Fig(II.3) : Schéma fonctionnel du filtre de Kalman discret…….....28
Fig (II.4) : Schéma fonctionnel du filtre de Kalman discret étendu……...…31
Fig (II.5) : Schéma fonctionnel du filtre de Kalman continu étendu……..…..32
Fig (II.6) : Application récursive du filtre de Kalman Étendu……..33
Fig(III.1) : Composition d'un missile……...38
Fig(III.2) : Phases de guidages…….……39
Fig(III.3) : Système de guidage Beam Rider……....39
Fig(III.4) : téléguidage commandé……..40
Fig(III.5) : Types de guidage Homing……..41
Fig (III.6): Guidage Homing Semi-actif ……..…42
Fig(III.7) : Guidage Homing Actif……42
Fig(III.8) : Guidage Homing Passif……..43
Fig(III.9) : Guidage Homing Retransmit……..44
Fig(III.10) : Gyroscope…….....45
Fig(III.11) : Concept de navigation inertiel……..46
Fig (III.12): GPS satellites……...…….47
Fig (III.13): Les trois segments du GPS……...……48

Fig(III.14) : Principe du sondage radar……..……50
Fig (IV.1) : Trajectoire du missile ……54
Fig (IV.2) :Estimation du trajectoire du missile par le filtre de kalman……...54
Fig (IV.3) : L'erreur de l'estimation ..……..……55
Fig (IV.4) :L'erreur moyenne carrée (MSE). …….……55
Fig (IV.5) : L'estimation de la trajectoire d'un missile par le filtre de kalman étendu ..……..56
Fig (IV.6) : L'erreur de l'estimation par le filtre de kalman étendu..……...56
Fig (IV.7) : L'erreur au carrée (MSE) ..……57
Fig (IV.8) : Trajectoire de décroissance d'un missile. ……57
Fig (IV.9) : L'estimation de trajectoire de décroissance d'un missile par le filtre de kalman .58
Fig (IV.10) : L'erreur de l'estimation de décroissance d'un missile par le filtre de kalman.58
Fig (IV.11) : L'erreur au carrée (MSE)…….59
Fig (IV.12) : Estimation de la chute d'un missile par le filtre de kalman étendu ……59
Fig (IV.13) : L'erreur de l'estimation la chute d'un missile par le filtre de kalman étendu….60
Fig (IV.14) : L'erreur carrée de l'estimation ……...60

INTRODUCTION GENERALE :

Le filtre de Kalman doit son nom à Rudolf Kalman bien que Thorvald Nicolai Thiele et Peter Swerling aient développé un algorithme similaire avant lui. La paternité du filtre fait l'objet d'une petite controverse dans la communauté scientifique. Le filtre a été décrit dans diverses publications par Swerling (1958), Kalman (1960) et Kalman-Bucy (1961). Stanley Schmidt est reconnu comme ayant réalisé la première implémentation du filtre. C'était lors d'une visite de Rudolf Kalman au NASA Ames Research Center qu'il vit le potentiel de son filtre pour l'estimation de la trajectoire pour le programme Apollo. Ceci conduisit à l'utilisation du filtre dans l'ordinateur de navigation.

Une grande variété de filtres de Kalman ont été, depuis, développés à partir de la formulation originale dite filtre de Kalman simple. Schmidt développa le filtre de Kalman *étendu*, Bierman, Thornton et bien d'autres développèrent toute une gamme de filtres racine carrée. Le filtre le plus utilisé est vraisemblablement la phase-locked loop, largement répandue dans les radios, ordinateurs, équipement de communication, etc.

Le problème du filtrage consiste à déterminer des estimateurs de variables du système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires. Nous allons donc étudier dans cette partie l'aspect stochastique de la notion d'observateurs. Deux points de vue peuvent être utilisés pour aborder cette question : celui de Wiener qui utilise une approche fréquentielle et celui de Kalman qui utilise l'approche temporelle. Dans tous les cas, le but est de déterminer un système (le filtre), optimal au sens de la minimisation de la variance d'erreur entre la variable réelle et son estimation. Nous ne regarderons ici que la deuxième approche. En effet, un filtre de Wiener est un cas particulier de filtre de Kalman et cette dernière approche permet d'appréhender directement le cas d'un système non stationnaire multi variable.

Le filtre de Kalman est un reconstructeur d'état dans un environnement stochastique. Lorsque les variances des bruits sont connues, c'est un estimateur linéaire minimisant la variance de l'erreur d'estimation. Les algorithmes donnant la solution de ce problème ont été Déterminés initialement par Kalman, dans le cas discret et Kalman Bucy, dans le cas continu. Nous établirons, dans un premier temps, les équations du filtre de Kalman discret puis, celles du filtre de Kalman continu par passage à la limite.

Les applications du filtre de Kalman sont nombreuses dans les métiers de L'ingénieur. Le filtre de Kalman permettant de donner un estimé de l'état de système a partir d'une information a priori sur l'évolution de cet état (modèle) et de mesures réelles, il sera utilisé pour estimer des conditions initiales inconnues (balistique), prédire des trajectoires de mobiles (trajectographie), localiser un engin (navigation, radar,...) et également pour implanter des lois de commande fondées sur un estimateur de l'état et un retour d'état (Commande Linéaire Quadratique Gaussienne). Les bases de traitement de signal sur lesquelles repose le filtre de Kalman seront également utiles a tout ingénieur confronté a des problèmes de définition de protocoles d'essais, de dépouillements d'essais et également d`identification paramétrique, c'est-a-dire la détermination expérimentale de certains paramètres du modèle.

Dans le premier chapitre de ce document, on a étudié les systèmes linéaires et non linéaires à coté de stabilité et dans le second chapitre nous donnerons tous les éléments définissant la structure du filtre de Kalman et kalman etendu.et dans le troisième chapitre nous allons parler sur les missiles et son guidage avec ses types, et le dernier chapitre on va présenter les résultats de simulation du modèle de la trajectoire de missile et son estimé.

CHAPITRE I :

LES SYSTEMES LINEAIRES ET LES SYSTEMES NON LINEAIRES

I .1. Introduction :

L'objectif de ce chapitre c'est d'avoir une notion sur les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. Ensuite, on a cité l'analyse de chacun des deux concernant la modélisation et la résolution suivant quelques manières illustrées ainsi qu'on a présenté quelques méthodes d'études de stabilité.

I.2. LES SYSTEMES LINEAIRES :

Une équation est linéaire si les variables y apparaissent de manière séparées et toujours à la puissance *1*. Un système linéaire, aussi appelé système d'équations linéaires, est un système de telles équations.

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ réelles ou complexes tout système de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \qquad (I.1)$$

Où les coefficients $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $(b_i)_{1\le i\le n}$ sont des scalaires fixés.

On dit qu'un système est homogène ou sans second membre si $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

On appelle opérations élémentaires sur les lignes $L_1, \dots, L_n$ du système (S) l'un des trois opérations suivantes :

1. multiplier la ligne L_i par un scalaire non nul, et on note : $L_i \leftarrow \alpha L_i$,
2. ajouter à la ligne L_i α fois une autre ligne L_j et on note : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$,
3. échanger les lignes L_i et L_j, et on note : $L_1 \leftarrow L_j$.

I.2.1. Résolution d'un système linéaire :

La résolution d'un système linéaire, c'est la détermination de toutes les solutions. Pour cela, on transforme le système initial en un système équivalent plus simple, puis en un système encore plus simple, jusqu'à aboutir à un système qu'on sache résoudre. Les principales opérations qui permettent de transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent sont les suivantes :

- Multiplier une ligne par un constant non nul.
- Ajouter λ fois la ligne k à la ligne i, où λ est un réel quelconque et $i \neq k$.

- Échanger la ligne i et la ligne k.

Les trois opérations ci-dessus sont appelées “opérations élémentaires". Ce sont les plus importantes.

On peut aussi :

- Ajouter à une ligne une combinaison des autres lignes (remplacer la $k$ième ligne par $L_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i L_i$). Cela revient à faire plusieurs opérations élémentaires successives.
- supprimer les lignes $0 = 0$
- conclure que le système n’a pas de solutions s’il comporte une ligne du type $0 = b_i$ avec $b_i \neq 0$.

Dans les exemples de résolution de systèmes linéaires ci-dessous, on écrira en face de la $i$ème ligne du système :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, ou simplement λL_i, pour dire que la $i$ème ligne du nouveau système est égale à λ fois la ième ligne de l’ancien système.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, ou simplement $L_i + \lambda L_k$, pour dire que la nouvelle ligne i est égale à l’ancienne ligne i plus λ fois l’ancienne ligne k.
- $L_i \leftrightarrow L_k$ pour dire que les lignes i et k ont été échangées. [1,2]

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \qquad (I.2)$$

En multipliant la première ligne par 1/3, on obtient le système équivalent :

$$\begin{matrix} (1/3)L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \qquad (I.3)$$

Puis en ajoutant deux fois la première ligne à la seconde ligne, on obtient :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 5y = 10 \end{cases} \qquad (I.4)$$

En divisant la deuxième ligne par 5, on obtient

$$\begin{matrix} L_1 \\ \frac{1}{5}L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad (I.5)$$

Enfin, en soustrayant deux fois la deuxième ligne à la première ligne, on obtient :

$$\begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \qquad (I.6)$$

Le système a donc une solution unique : (−5, 2)

I.2.2 Résolution de systèmes particuliers :

I.2.2.1. Systèmes triangulaires normalisés :

On appelle système triangulaire normalisé tout système de n équations à n inconnues ayant la forme triangulaire suivante :

$$(S)\begin{cases} x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ x_n = b_x \end{cases} \qquad (I.7)$$

Ce système est dit normalisé car les coefficients des premiers termes de chaque ligne valent tous un.

Pour tout second membre $(b_i)_{1\le i\le n}$, le système (T) possède une unique solution obtenue de proche en proche à partir de la dernière ligne :

$$\begin{cases} x_n = b_n \\ x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n \\ \vdots \\ x_2 = b_1 - a_{2,n}x_n - \cdots - a_{2,3}x_3 \\ x_1 = b_1 - a_{1,n}x_n - \cdots - a_{1,3}x_3 - a_{1,2}x_2 \end{cases} \qquad (I.8)$$

I.2.2.2. Systèmes échelonnés :

On dit qu'un système linéaire de n équations à p inconnues est échelonné si :

1. lorsque les coefficients de $x_1, \ldots, x_k$ sont nuls sur une ligne, alors les coefficients de $x_1, \ldots, x_{k+1}$ sont nuls sur la ligne suivante,
2. lorsque le membre de gauche d'une ligne est nul, alors il en va de même pour toutes les lignes suivantes. [5,6]

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + a_{1,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,i}x_i + a_{2,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{r,k}x_k + \cdots + a_{r,p}x_p = b_r \\ 0 = b_{r-1} \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 = b_n \end{cases} \qquad (I.9)$$

De plus, on dit que le système échelonné est normalisé lorsque le premier coefficient non nul de chaque ligne vaut un :

$$a_{1,1} = a_{2,i} = \cdots = a_{r,k} = 1 \qquad (I.10)$$

I.2.2.3. Système homogène associé à un système linéaire :

Un système est homogène (ou sans second membre) si les coefficients du second membre sont tous nuls.

Soit (S) un système linéaire. Le système homogène associé au système (S) est le système qui a le même premier membre que (S) mais où le second membre est nul.

Le système homogène associé au système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \quad (I.11)$$

est

$$\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \quad (I.12)$$

I.2.3. Méthode du pivot de Gauss :

Le pivot de Gauss est un algorithme permettant de transformer un système quelconque (S) en un système échelonné (SE) en effectuant une succession d'opérations élémentaires. Ainsi, le système échelonné obtenu est équivalent au système initial. La résolution du système (S) revient donc à celle du système échelonné (SE) qui a été traitée dans le paragraphe précédent. [3].

Son principe est comme suit :

1. On choisit une ligne pivot dont le coefficient de x_1 est non nul et si possible égale à 1 et on la place en première position.
2. On réalise des opérations sur les autres lignes de façon à annuler les coefficients de x_1 :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha_i L_1:$$

3. On répète ces opérations sur le sous-système de $n - 1$ équations à au plus $p - 1$ inconnues obtenu en omettant la première ligne.
4. On répète l'étape précédente jusqu'à obtenir un système échelonné.

Cette méthode est universelle pour échelonner un système linéaire. Suivant les cas, il peut y avoir une méthode plus courte pour y arriver.

I.2.4. Description de l'ensemble des solutions :

I.2.4.1 Notion de rang :

1. On appelle rang d'un système linéaire échelonné (SE) le nombre d'équations dont le membre de gauche est non nul.

2. On appelle rang d'un système linéaire (S) le rang du système échelonné équivalent.

I.2.4.2. Systèmes de Cramer :

On appelle système de Cramer, tout système linéaire de n équations à n inconnues possédant une unique solution. Un système linéaire est de Cramer, si et seulement si, il est équivalent à un système triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

Un système linéaire de n équations à n inconnues est de Cramer, si et seulement si son rang est égal à r.

I.2.4.3. Structure de l'ensemble des solutions :

Soient (S) un système linéaire de n équations à p inconnues compatible, (S_H) son système homogène associé et X_0 une solution particulière de (S).

Alors, X est solution du système (S) si et seulement si $X - X_0$ est solution du système homogène associé (S_H) :

$$X \in S \Leftrightarrow X - X_0 \in S_H \qquad (I.13)$$

I.2.5. Ecriture matricielle d'un système linéaire :

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \qquad (I.14)$$

Soit $A \in M_{n,p}$ la matrice des coefficients du premier membre et B la matrice (ou vecteur) colonne des coefficients du second membre :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1p} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (I.15)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (I.16)$$

Résoudre ce système linéaire revient à trouver les vecteurs colonnes à p composantes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad (I.17)$$

Tels que $AX = B$ où AX est le produit matriciel de la matrice A et du vecteur X.

I.3. LES SYSTEMES NON LINEAIRES :

Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires, décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.[4],[9].

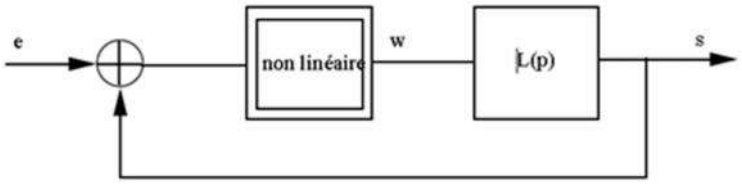


Figure (I.1) - Système non linéaire commandé.

I.3.1. Analyse des systèmes non linéaires :

L'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques, la précision du suivi. Bien sur, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut, dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.

I.3.2. Choix des entrées :

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui rendent compte de l'état du système à chaque instant.

I.3.3. Les différents types de non-linéarités :

On distingue généralement ces types de systèmes non linéaires :

– des non-linéarités continues (courbures) ou discontinues (relais),

– des non-linéarités avec ou sans mémoire (toutes celles avec hystérésis),

– des non-linéarités accidentelles, c'est-à-dire dues aux imperfections des composants (saturation d'un amplificateur, jeu), ou essentielles, c'est-à-dire liées à la nature même du composant (relais).

I.3.4. Résolution de systèmes non linéaires :

Nous considérons le problème suivant :

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, trouver $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(p) = 0$.

Nous allons pour cela étendre au cas de la dimension $n > 1$

Pour $k \geq 0$; et $D \subseteq \mathbb{R}^n$,

$C^K(D) =$ Ensemble des fonctions k fois continument différentiables de dans $\mathbb{R}^n$ restreintes à D.

Nous supposerons que $F \in C^1(D)$.

$J_F(x)$ est la matrice jacobéenne associée à F et évaluée au point $x = [x1, \dots, xn]^T$ de $\mathbb{R}^n$.

$$(J_F(x))_{ij} = \left(\frac{J_{F_i}}{\partial X_j}(x)\right), \qquad i,j = 1, \dots, n. \tag{I.18}$$

I.3.4.1. La méthode de Newton et ses variantes :

On peut étendre la méthode de Newton au cas vectoriel :

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ Étant donné x,

Pour $k = 0, 1, \dots,$ jusqu'à convergence:

Résoudre $J_F(x^k)\delta x^k = -F(x^k)$ (I.19)

Poser $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$ (I.20)

On doit donc résoudre un système linéaire de matrice $J_F(x^k)$ à chaque itération k.

I.3.4.2. Méthode de Newton modifiée :

Ce résultat ne donne pas d'indication constructive sur la manière de calculer les incréments *h*.

En diminuant les *h*, on peut diminuer l'erreur de troncature commise dans Méthodes de type sécante.

I.3.4.3. Méthode de Point Fixe :

On suppose que $G: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ possède un point fixe x à l'intérieur de D et que G est continument différentiable dans un voisinage de p

On note J_G la jacobéenne de G et on suppose que le rayon spectral $\rho(J_G(p)) < 1$

Alors il existe un voisinage S de x tel que $S \subset D$ et, pour tout

$x^{(0)} \in S$, la suite définie avant demeure dans D et converge vers x .

I.3.5. Systèmes asservis possédant un seul élément non linéaire :

Dans de nombreux cas, un seul élément non linéaire, et l'on peut généralement le séparer (hypothèse de séparabilité) des autres éléments linéaires du système. On peut montrer que l'étude de tels systèmes à un élément non linéaire séparable peut toujours se ramener à l'étude d'un système non linéaire canonique, constitué dans la chaîne directe d'un élément non linéaire isolé (bloc avec la double bordure) suivi d'un système linéaire noté $L(p)$ (qui regroupe l'ensemble des termes linéaires), et d'un retour unitaire.[3].

I.3.6. Méthodes d'études des systèmes asservis non linéaires :

La méthode du premier harmonique est une généralisation de la méthode harmonique classique utilisée pour les systèmes linéaires. Le principe consiste à réaliser une linéarisation dans le domaine fréquentiel afin de généraliser la notion de fonction de transfert au cas non linéaire. C'est une méthode approchée qui s'applique pour des systèmes à une non-linéarité séparable et qui suppose que la partie linéaire du système asservi se comporte comme un filtre passe bas.

La méthode du plan de phase est un cas particulier (dimension 2) de la méthode très générale de l'espace de phase. Cette méthode est rigoureuse et permet d'étudier des systèmes non linéaires quelconques. En revanche, il est souvent difficile de trouver les solutions de façon analytique. L'intérêt actuel de cette méthode est lié à la puissance des calculateurs, qui permettent d'intégrer numériquement les équations et de calculer soit numériquement soit graphiquement les solutions.[4].

I.3.7. Asservissement à plusieurs non linéarités :

Il n'y a pas de méthode générale pour étudier les systèmes à plusieurs non linéarités. L'idée consiste à essayer de fusionner les éléments non linéaires afin de se ramener à un système canonique.

I.3.7.1. Méthode du premier harmonique :

Une fois un système non linéaire séparé, il est possible d'appliquer la méthode dite du premier harmonique pour aboutir à des mises en équation, donc à des conditions d'études, similaires à celles déjà abordées dans le cas des systèmes linéaires.

Le système est considéré comme séparable s'il est possible d'isoler, dans le modèle de fonctionnement global de la boucle, les éléments linéaires possédant une fonction de transfert, d'une part, et les éléments possédant une caractéristique $s = f(e)$ non linéaire et indépendante de la fréquence, d'autre part. Dans l'étude qui suit, nous considérerons donc des systèmes pouvant être placés sous la forme correspondant au schéma de la figure ci-dessous

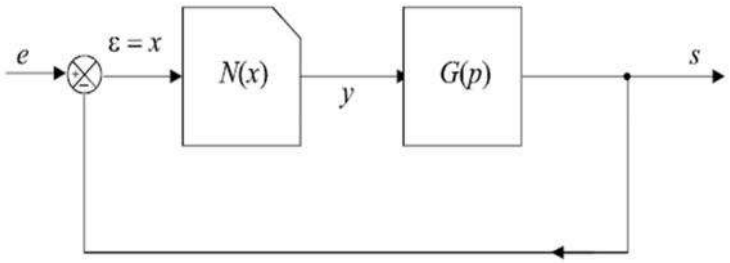


Figure (I.2) - Système non linéaire séparable.

Il est très facile d'identifier l'une des principales différences entre le fonctionnement d'un système linéaire et celui d'un système non linéaire. À une entrée sinusoïdale, le premier est caractérisé par une réponse sinusoïdale de même pulsation mais d'amplitude différente et présentant en général, un déphasage par rapport à l'entrée, ce que matérialise la notion de gain complexe $G(j\omega) = G(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$ Pour une même entrée sinusoïdale, le système non linéaire fournira une réponse périodique de même période que la sinusoïde d'entrée, mais non sinusoïdale, à l'instar de ce qui est démontré pour le cas d'une saturation sur les deux figures suivantes :

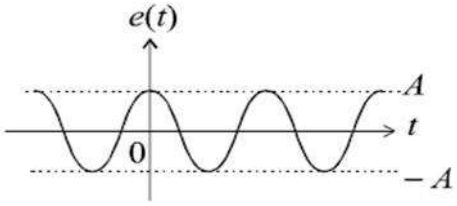


Figure (I.3) - L'entrée de système.

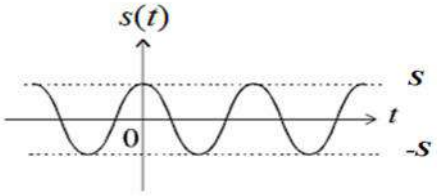


Figure (I.4) -La réponse d'un système linéaire

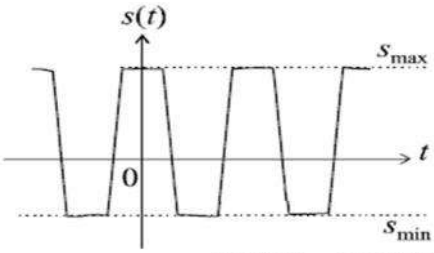


Figure (I.5) -La réponse à système non linéaire

D'une manière générale, si on injecte un signal sinusoïdal $x(t) = x0\,sin\omega t$ à l'entrée de l'élément non linéaire $N(x)$, le signal de sortie $y(t)$ pourra donc se décomposer en série de Fourier. Nous supposerons, pour simplifier la présentation, que cette décomposition se limite à :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \qquad (I.21)$$

La méthode du premier harmonique consiste à approcher l'expression du signal de sortie $y(t)$ en ne retenant que le terme d'ordre 1, soit :

$$y(t) \sim y1\,sin(\omega t + \varphi_1) \qquad (I.22)$$

I.3.7.1.1. Gain complexe équivalent :

En adoptant l'approximation du premier harmonique, on peut définir le concept de gain complexe équivalent de l'élément non linéaire. Le rapport des amplitudes entre la sinusoïde d'entrée et l'approximation sinusoïdale en sortie étant égale à $y1/x0$ et le déphasage entre elles valant φ_1, on peut écrire, tout en considérant que ces deux grandeurs, gain et déphasage, varient en fonction de ω et de x_0:

$$N(x_0,\omega) = \frac{y_1}{x_0}(x_0,\omega)e^{j\varphi_1(x_0,\omega)} \qquad (I.23)$$

I.3.7.1.2. Notion de lieu critique :

Le lieu critique d'un dispositif non linéaire est défini par le tracé, dans le plan complexe, du lieu en coordonnées polaires des points M d'affixes $-\frac{1}{N(x_0)}$ lorsque x_0 varie.

I.3.7.1.3. Méthode de calcul approché du gain complexe équivalent :

On peut s'affranchir du calcul de la décomposition en série de Fourier pour déterminer une approximation de l'amplitude du premier harmonique, dans le cas de certaines non-linéarités. La méthode de Cypkin, outre le fait qu'elle permet d'accéder rapidement à la fonction $N(x_0)$, permet également de concevoir des éléments non linéaires pour qu'ils présentent telle ou telle fonction $N(x_0)$. Elle sert donc à la fois à l'analyse des systèmes et à leur synthèse.

Selon Cypkin, le gain complexe équivalent d'un élément non linéaire possédant une caractéristique

$y = f(x)$ à symétrie impaire et univoque (cas le plus fréquent) peut être approché par la relation :

$$N(x_0) = \frac{2}{3x_0}\left[f(x_0) + f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right] \qquad (I.24)$$

I.3.7.1.4. Condition de validité :

Il faut vérifier deux conditions pour pouvoir appliquer la méthode du premier harmonique à un système asservi non linéaire :

A. Condition de séparabilité : le système asservis possède un seul bloc non linéaire qu'il est possible d'isoler. Les autres éléments sont supposés linéaires, au moins approximativement.

B. Condition de filtrage : la partie linéaire du système asservis, notée globalement $L(p)$, est un filtre passe-bas. Ce qui rend acceptable l'approximation au premier harmonique dans le calcul du développement en séries de Fourier.

La méthode du premier harmonique est une méthode applicable à la condition que les parties non linéaire et linéaire de l'asservissement soient séparables et que la partie linéaire se comporte comme un filtre passe-bas.

C'est une méthode approchée, puisqu'elle néglige les termes harmoniques d'ordre supérieur à 1, mais elle est malgré tout précise si ces conditions sont vérifiées.

I.3.7.2. Méthode du plan de phase :

La méthode du plan de phase est un cas particulier de la méthode de l'espace de phase, dans le cas où l'espace est de dimension 2. Cette méthode s'applique de façon très générale à tout système décrit par un ensemble d'équations différentielles. En revanche, il n'existe pas toujours de solutions analytiques aux trajectoires calculées dans l'espace des phases.

I.3.7.2.1. Principe :

On considère un système linéaire d'ordre deux régi par une équation différentielle que l'on écrit sous la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ou encore : $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ $(I.25)$

Si on pose $y = \dot{x}$ et $\dot{y} = f(x, y)$, il est possible de considérer que le couple (x, y) représente, dans un plan, les coordonnées d'un point M qui caractérise l'état du système à un instant *t*. L'état du système est en effet entièrement connu grâce à ces deux grandeurs puisque la dérivée seconde est une fonction de x et de $\dot{x}$.

Au cours du temps, le point M de coordonnées (x,y) évolue selon une courbe que l'on appelle la trajectoire de phase du système. La courbe sur laquelle évolue le système dépend bien évidemment des conditions initiales (donc des valeurs $x(0)$ et $\dot{x}(0)$) qui déterminent le point de départ M_0 de la trajectoire. A un système est donc associé un ensemble de trajectoires possibles. L'étude de la forme et des points singuliers des trajectoires de phase du système renseigne sur ses performances. Cette étude est menée en régime autonome, c'est-à-dire en absence de signal de consigne.

I.3.7.2.2. Analyse des trajectoires et diagnostic du système :

Pour étudier le comportement autonome d'un système, il convient surtout de rechercher la présence de points singuliers. Ces singularités sont au nombre de quatre :

- Les foyers sont définis comme les points d'arrivée des trajectoires. Si ce point possède des coordonnées finies, le foyer est dit stable. Une trajectoire qui termine sa course sur un foyer stable correspond à un système stable (compte tenu des conditions initiales qui ont été choisies). Si une trajectoire tend vers l'infini, le système est instable (ou les conditions initiales qui ont été choisies comme point de départ de la trajectoire sont des conditions d'instabilité).
- Les nœuds sont des foyers où convergent plusieurs (ou toutes) trajectoires. La présence d'un nœud permet de mettre en évidence la convergence inconditionnelle d'un système vers un même état quelles que soient ses conditions initiales.
- Les sommets sont des points autour desquels les trajectoires forment des courbes fermées ou finissent par former des courbes fermées. La présence de sommets est synonyme d'oscillations stables.
- Les cols sont des points sur lesquels l'état du système ne peut converger. La présence d'un col se traduit par un ensemble de trajectoires qui semblent « éviter » une certaine zone du plan.

La figure suivante présente sur un même plan l'ensemble de ces singularités.

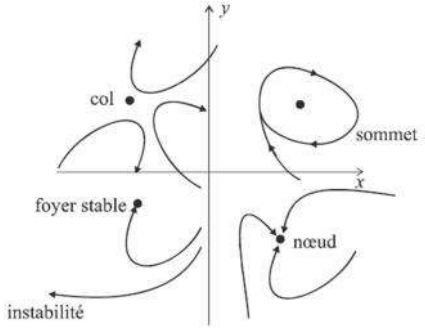


Figure (I.6) - Singularités d'un plan de phase.

On conclut sur le comportement général en tentant de faire une étude exhaustive des conditions d'évolution des trajectoires, autrement dit en choisissant plusieurs points M_0 dans chaque partie du plan. On constate alors, de visu, la manière dont le système se comporte.[9].

I.3.8. Stabilité des systèmes non linéaires :

Il n'existe malheureusement pas de méthode standard pour étudier les systèmes non linéaires. Chaque dispositif possède pratiquement sa propre méthode d'étude. Sans avoir la prétention d'établir une liste exhaustive des techniques existantes, nous proposons au lecteur de découvrir ici les méthodes les plus fréquemment rencontrées. Il n'est pas question d'acquérir une grande technicité pour chacune d'entre elles, mais plutôt d'être sensibilisé à la grande variété des méthodes d'étude.

I.3.8.1.Fonction de transfert généralisée :

Considérons, le schéma général d'un asservissement non linéaire séparable. On définit la fonction de transfert généralisée de ce système en boucle fermée par : $H(p) = \frac{N(\varepsilon)G(p)}{1+N(\varepsilon)G(p)}$
Sa fonction de transfert en boucle ouverte étant

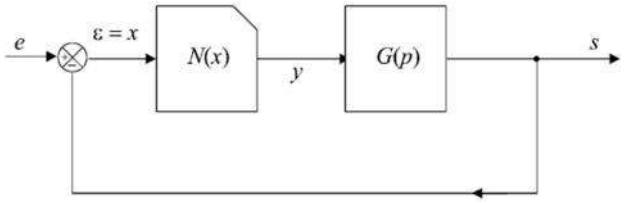


Figure (I.7) - Système non-linéaire.

En généralisant le critère fondamental de stabilité, on peut affirmer que le système est stable en boucle fermée si et seulement si le dénominateur de $H(p)$ ne possède aucune racine à partie réelle positive. L'étude graphique qui consistait à étudier la stabilité d'un système dans le plan de Nyquist à partir du critère du Revers, dans le cas où la fonction de transfert en boucle ouverte ne possède que des pôles à partie réelle positive peut être également généralisée. Le critère du Revers, en régime linéaire, permettait de diagnostiquer la stabilité en fonction de la position de $G(p)$ par rapport au point critique -1. La forme du nouveau dénominateur nous suggère ici d'étudier cette stabilité par rapport à $-1/N(\varepsilon)$.

I.3.8.1.1. Principe :

Lorsque le système évolue en boucle fermée, l'écart ε évolue dans le temps. Le point critique nouvellement défini, $-1/N(\varepsilon)$, est donc susceptible de parcourir le lieu critique. En traçant sur le même plan complexe, le lieu critique $-1/N(\varepsilon)$ et le diagramme de Nyquist de $G(p)$, on

pourra conclure à la stabilité du système en boucle fermée si le lieu de Nyquist de $G(p)$ ne coupe jamais le lieu critique et passe toujours, systématiquement à gauche de celui-ci lorsque l'on décrit le diagramme de Nyquist dans le sens des ω croissants. La figure ci-dessous illustre ce critère général de stabilité d'un système non linéaire.

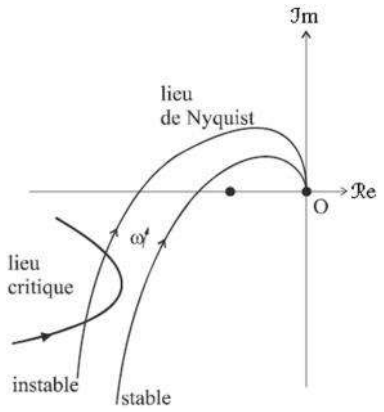


Figure (I.8) - Critère de stabilité d'un système non linéaire.

I.3.8.1.2. Méthode d'étude par le lieu de Cypkin :

La méthode du lieu de Cypkin est une méthode d'étude plus fine que celle du premier harmonique qui permet donc d'obtenir des résultats plus précis, mais qui ne s'applique qu'aux non linéarités de type relais.

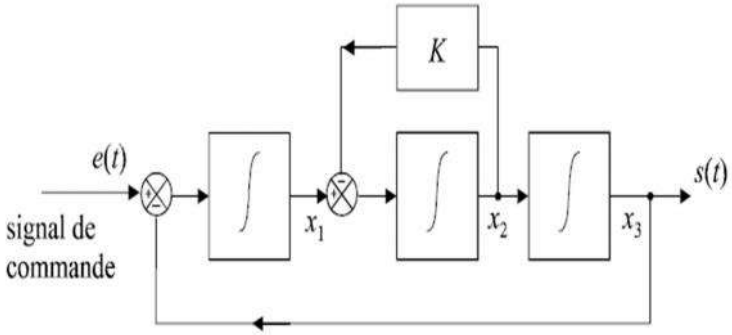
I.3.9. Représentation d'état des systèmes à temps continu :

La représentation d'état des systèmes est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

I.3.9.1. État d'un système et variables d'état :

Le système représenté sur la figure ci-dessous est composé d'une cascade d'éléments différents et la commande automatique d'un tel système peut aller beaucoup plus loin que la seule ambition de réguler le signal de sortie.

Un certain nombre de signaux, que l'on peut qualifier d'internes au système apparaissent nettement sur le schéma. Nous les avons noté x_1, x_2 et x_3.



Figure(I.9) - Exemple de représentation d'état d'un système.

L'état d'un système est en général représenté par un vecteur d'état que l'on note, en ce qui concerne notre exemple :

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (I.26)$$

Dans le cas le plus général où *n* variables d'états sont identifiés dans le système, on aura :

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (I.27)$$

I.3.9.2. Modélisation du fonctionnement de système :

Lorsqu'un système est modélisé sous la forme d'une représentation d'état, on montre qu'il est possible d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée à ce même instant et en fonction de son état précédent. Comme nous avons affaire à des variables continues du temps, la notion d'état précédent n'existe pas vraiment.

En revanche, ce concept est à rapprocher de l'évolution du système, autrement dit des variations de chaque variable d'état.

Cela signifie que, d'une manière générale, on peut exprimer l'évolution du système, modélisée par un vecteur constitué des dérivées premières des composantes du vecteur d'état, en fonction du vecteur d'état du système. L'objet qui lie ces deux vecteurs est appelé matrice de commande du système. Le vecteur d'état dépendant bien évidemment aussi du signal d'entrée, on a, pour notre exemple de la figure précédente la relation :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (\underline{\mathbf{B}})e(t) \qquad (I.28)$$

La matrice de commande $[\boldsymbol{A}]$ est une matrice carrée, dans notre cas de dimension 3×3 ; $(\boldsymbol{B})$ est un vecteur colonne.

À partir du schéma de la figure précédente, on peut facilement calculer la dérivée de chaque variable d'état et déterminer la matrice $[\boldsymbol{A}]$ et le vecteur $(\boldsymbol{B})$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e - s = e - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - kx_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \qquad (I.29)$$

Pour être complet, il convient d'exprimer le signal de sortie en fonction du vecteur d'état, afin de conserver une certaine unité au formalisme d'ensemble.

Comme $s = x_3$, on écrit : $s(t) = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{C}}(\underline{x})$ $\qquad (I.30)$

Dans le cas général, le système peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties. Soit n le nombre de variables d'état, m le nombre d'entrées et p le nombre de sorties.

Dans ces conditions, la matrice de commande est toujours une matrice $n \times n$, mais, cette fois, $[\boldsymbol{B}]$ est une matrice $n \times m$ et $[\boldsymbol{C}]$ est une matrice $p \times n$. Pour être complet, il faut tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice $[\boldsymbol{D}]$, de dimensions $m \times p$ représente ce lien. Signalons pour finir que les coefficients des différentes matrices peuvent être variables dans le temps.

On a alors :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\boldsymbol{A}(t)]\underline{x}(t) + [\boldsymbol{B}(t)]e(t) \Rightarrow \text{équation de commande} \\ \underline{s}(t) = [\boldsymbol{C}(t)]\underline{x}(t) + [\boldsymbol{D}(t)]e(t) \Rightarrow \text{équation d'observation} \end{cases} \qquad (I.31)$$

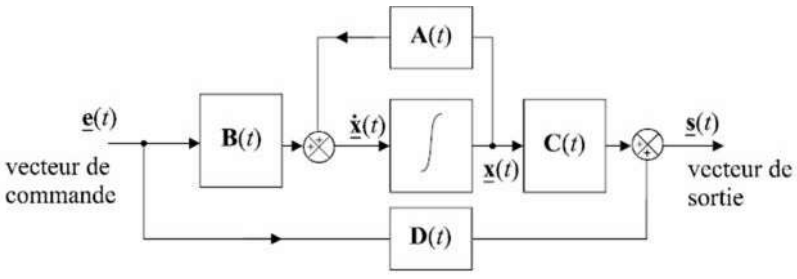


Figure (I.10) - Représentation schématique d'une modélisation d'état.

Si les coefficients de système sont constants, donc il est dit invariant

I.3.9.3. Résolution des équations d'état :

I.3.9.3.1. Généralisation au système vectoriel :

Si on a un système décrit par une simple équation différentielle, l'équation d'état soit :

$$\dot{x} = ax + be(t) \qquad (I.32)$$

La solution de l'équation différentielle est comme suit :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}be(\tau)d\tau \qquad (I.33)$$

La somme de la solution de l'équation correspondant au régime libre (ou autonome), soit $e^{at}x(0)$ et de la solution correspondant au régime forcé (ou commandé).

Pour le cas d'un système vectoriel; on considère le système différentiel représentant les équations d'état :

$$\underline{\dot{x}}(t) = [\boldsymbol{A}]\underline{x}(t) + (\underline{\boldsymbol{B}})e(t) \qquad (I.34)$$

Par généralisation du résultat précédent :

$$x(t) = e^{[\boldsymbol{A}]t}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{[\boldsymbol{A}](t-\tau)}(\underline{\boldsymbol{B}})e(\tau)d\tau \qquad (I.35)$$

$e^{[\boldsymbol{A}]t}$ représente une matrice exponentielle que l'on note en général $\Phi(t)$ et que l'on appelle matrice de transition du système.

I.3.9.3.2. Calcul de la matrice de transition :

L'opération la plus délicate, dans la résolution des équations d'état, consiste à calculer la matrice de transition.

a) Utilisation de la transformation de Laplace :

Appliquons la transformation de Laplace au système d'équations différentielles de la représentation d'état :

$$\underline{\dot{x}}(t) = [\boldsymbol{A}]\underline{x}(t) + (\underline{\boldsymbol{B}})e(t) \implies p\underline{\boldsymbol{X}}(p) - \underline{x}(0) = [\boldsymbol{A}]\underline{\boldsymbol{X}}(p) + (\underline{\boldsymbol{B}})E(p) \qquad (I.36)$$

Soit : $$(p\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{A}])\underline{\boldsymbol{X}}(p) = \underline{x}(0) + (\underline{\boldsymbol{B}})E(p) \qquad (I.37)$$

Où [**I**] représente la matrice carrée identité de dimension *n*, d'où :

$$\underline{\boldsymbol{X}}(p) = (p\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{A}])^{-1}\underline{x}(0) + (p\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{A}])^{-1}(\underline{\boldsymbol{B}})E(p) \qquad (I.38)$$

Il apparaît clairement, en confrontant cette expression à la solution générale déterminée dans le paragraphe précédent, soit :

$$x(t) = e^{[\boldsymbol{A}]t}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{[\boldsymbol{A}](t-\tau)}(\underline{\boldsymbol{B}})e(\tau)d\tau \qquad (I.39)$$

Que la matrice de transition $e^{[\boldsymbol{A}]t}$ possède pour transformée de Laplace la matrice $(p\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{A}])^{-1}$:

$$(p\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{A}])^{-1} = \frac{1}{p}\left(\boldsymbol{I} - \frac{[\boldsymbol{A}]}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{\boldsymbol{I}}{p} + \frac{[\boldsymbol{A}]}{p^2} + \frac{[\boldsymbol{A}]^2}{p^3} + \cdots + \frac{[\boldsymbol{A}]^n}{p^{n+1}} + \cdots\right) \qquad (I.40)$$

En appliquant la transformation de Laplace inverse

$$e^{[A]t} = \left(\boldsymbol{I} + [\boldsymbol{A}]t + \frac{[\boldsymbol{A}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\boldsymbol{A}]^n}{n!}t^n + \cdots \right) \qquad (I.41)$$

b) Application au calcul direct de la matrice de transition :

On peut utiliser directement l'expression du développement de Taylor à condition que la matrice de commande soit nilpotente.

Remarque : Une matrice carrée est dite nilpotente s'il existe un entier k positif tel que $[\boldsymbol{A}]^n = [\boldsymbol{0}]$ pour tout $n > k$. Bien évidemment, plus k est petit, le calcul direct est simple et rapide.

Par exemple la matrice de commande : $$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (I.42)$$

On a : $$[\boldsymbol{A}]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (I.43)$$

Par conséquent : $$[\boldsymbol{A}]^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \forall n \geq 2 \qquad (I.44)$$

On a donc :

$$e^{[A]t} = \left(\boldsymbol{I} + [\boldsymbol{A}]t + \frac{[\boldsymbol{A}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\boldsymbol{A}]^n}{n!}t^n + \cdots \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (I.45)$$

I.4. Conclusion :

On a vu à ce chapitre quelques méthodes de résolutions des systèmes soient linéaires ou bien non-linéaires, ces méthodes nous a aidés à résoudre et simplifier des grands systèmes bien compliqués, aussi bien que les remettre à des formes modestes. Aussi qu'on voit la stabilité des systèmes non linéaires avec sa représentation.

CHAPITRE II :

FILTRE DE KALMAN ET FILTRE DE KALMAN ETENDU

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre on va présenter les filtres utilisés pour l'estimation de la trajectoire d'un missile, commençant par une définition et calcul du filtre de Kalman suivie par sa version étendu qui est le filtre de Kalman étendu, d'où on définit ses propriétés et ses étapes de calcul.

II.2. Filtrage de Kalman :

Le filtre de Kalman est un observateur stochastique car on introduit dans son modèle des bruits d'état et de mesure.

II.2.1. Définition et propriétés de filtre de Kalman :

Le problème de filtrage linéaire a été résolu d'une façon élégante par un filtre récursif c'est le filtre de Kalman-Bucy.

Ce dernier se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles ou récurrentes, cette forme est facile à résoudre sur un calculateur, la réalisation de ce filtre fournie l'estimation optimale, et la variance de la réalisation de ce filtre fournie l'estimation optimale, et la variance de l'erreur d'estimation. C'est un estimateur minimisant la variance de l'erreur d'estimation.

Il généralise le filtrage optimal aux systèmes non stationnaire en présence des conditions initiales et d'entrées déterministe. C'est un outil de base dans le domaine aérospatial, ou il a été particulièrement appliqué pour la détermination des orbites et pour la navigation. Rappelons qu'un reconstructeur de l'état (ou d'un estimateur) est un système ayant (une estimation de l'état), comme les entrées et les sorties du processus réel et dont la sortie est l'estimation de l'état de ce processus.

Notre reconstructeur est un observateur dans le cas d'un modèle déterministe, c'est un filtre dans le cas stochastique. [13].

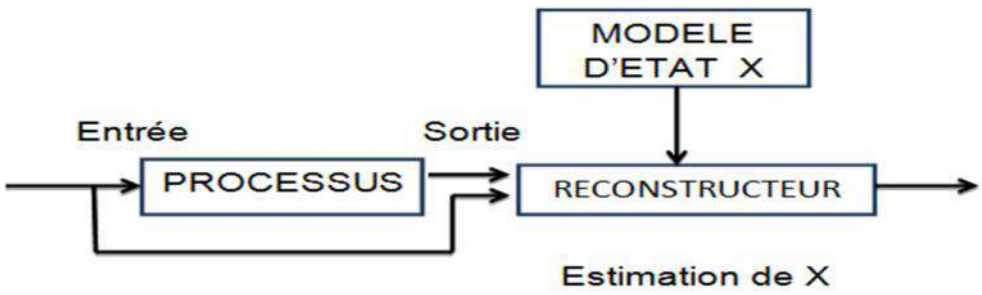


Figure (II.1) - Schéma de principe d'un estimateur d'état.

II.2.2. Principe du Filtre de Kalman :

Le problème de l'estimation de l'état X(t) d'un système dynamique soumis à des entrées déterministes et aléatoires à partir des mesures Z(t) bruité, peut être en trois classes distinctes selon l'intervalle d'observation [t0,tr] :

Delà on a trois problèmes :

- Un problème de prédiction pour : t0 > tr
- Un problème de filtrage pour t0 = tr
- Un problème de lissage pour : t0 < tr

Notons que le filtre de Kalman-Bucy permet de résoudre directement la prédiction et le filtrage, et il est à la base de la théorie du lissage.

Le filtre de kalman classique s'applique au système dynamique linéaire, continu ou discret dont le bruit de mesure est blanc.[10].

II.2.2.1. Le modèle de Kalman :

- L'évolution de l'état de système est décrite par un système d'équation différentielles.

- L'état du système est observé par la mesure Z(t) est lié à l'état X(t) par l'équation d'observation.

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + W(t) \quad \text{équation d'état} \quad (II.1)$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \quad \text{équation de mesure} \quad (II.2)$$

Avec :

$\dot{X}(t)$: Vecteur d'état de dimension (n).

$A(t)$: Matrice dynamique de la représentation d'état $(n \times n)$.

$B(t)$: Vecteur de commande de la représentation de l'état (n).

$C(t)$: Matrice d'observation de la représentation d'état.

$W(t)$: Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

$V(t)$: Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

$U(t)$: Vecteur d'entrée.

$X\ (t0)$: Etat initiale, aléatoire de statique comme gaussien, est de moyenne.

$E[X\ (t0)] = m0$. Indépendance de bruit $W(t)$.

II.2.2.2. La Formulation de filtre de Kalman :

Avant d'arriver à la formulation du filtre de Kalman différentes hypothèses et démonstrations permettent d'aboutir à ce filtre, on peut :

1) - Considérer que les grandeurs aléatoires U. W et X (t0) : sont gaussiennes et chercher l'estimé (a variance minimale) $\widehat{X}(t)$, qui minimise un critère d'écart quadratique :

$$E[(X(t) - \hat{X}(t))^T (X(t) - \hat{X}(t))] \quad \text{(II.3)}$$

2) - Déterminer le maximum a posteriori estimé, c'est-à-dire l'estime$\widehat{X}(t)$, qui minimise la densité de probabilité de X(t).

3) – Abandonner l'hypothèse gaussienne et chercher l'estime linéaire qui minimise les critères d'écart quadratique.

L'estimé a variance minimale est fournie par la moyenne conditionnelle de X(t), étant donné les observations Z(t), qui dans le cas gaussien est égale au maximum a posteriori et a l'estimé optimale linéaire.

Soit E(X/Z), La moyenne conditionnelle de l'état X(t) étant donné les observations Z(t), l'identité.

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)\right] = \mathrm{E}(\mathrm{X}) \quad \text{(II.4)}$$

Pour permette d'écrire :

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)\right] = \mathrm{E}[\mathrm{E}\left(\mathrm{X} - \widehat{\mathrm{X}}\right)^{\mathrm{T}} . \frac{A(\mathrm{X}-\hat{X})}{Z}] \quad \text{(II.5)}$$

Or :

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\mathrm{X} - \widehat{\mathrm{X}}\right)^{\mathrm{T}} . \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{X} - \widehat{\mathrm{X}}\right)}{\mathrm{Z}}\right]$$

$$= (\widehat{\mathrm{X}} - \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right))^{\mathrm{T}} . \mathrm{A}\left(\widehat{\mathrm{X}} - \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)\right) + \mathrm{E}. \mathrm{A}\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}. \mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)\right) - (\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)^{\mathrm{T}} . \mathrm{A}. \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}\right)) \quad \text{(II.6)}$$

Pour minimiser le critère, il suffit de minimiser l'expression (2.3) qui est toujours positive.

Ce minimum est obtenu pour : $\widehat{\mathrm{X}}(\mathrm{t}) = \mathrm{E}[\mathrm{X}(\mathrm{t})/\mathrm{Z}(\mathrm{t})]$ (II.7)

Cet estimé n'est pas biaisé car : $$E[\widehat{X}] = E\left[E\left(\frac{X}{Z}\right)\right] = E(X) \quad (II.8)$$

Alors, la formulation du filtre de Kalman est simplement obtenue par le calcul de la moyenne conditionnelle.

Avec A : matrice de pondération.

II.2.2.3. Détermination de Filtre :

Supposons que l'on connaisse l'état X_k a l'instant k, l'état a l'instant (k+1) est donné par l'équation d'évolution :

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k \quad (II.9)$$

Le bruit W_k étant blanc a moyenne nulle, indépendant des X_1 précédents, la meilleure prédite du bruit W_k est nulle, et la meilleure prédiction de l'état X_{k+1} est donnée par :

$$\widehat{X}_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k \quad (II.10)$$

La variance de prédiction de l'erreur est égale à cette du bruit Wk :

$$E\left[\left(X_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k}\right)\left(X_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k}\right)^T\right] = E\left[W_k W_k{}^T\right] = Q_k \quad (II.11)$$

Si l'on ne dispose que d'une estimation $\widehat{X}_{k/k}$ à l' instant k, ne faisant pas d'observation entre l'instant k+1, rien ne permet d'améliorer cette estimation et la meilleure prédiction est donnée par :

$$\widehat{X}_{k+1/k} = A_k \widehat{X}_{k/k} + B_k U_k \quad (II.12)$$

- La variance de l'erreur de prédiction $P_{k+1/k}$ s'en déduit :

$$P_{k+1/k} = E\left[\left(X_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k}\right)\left(X_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k}\right)^T\right]$$
$$= A_k P_{k/k} A_k{}^T + Q_k \quad (II.13)$$

Cette variance dépond de la précision de l'estimation précédente $P_{k/k}$ et de la taille du bruit Q_k.

La prédiction de l'observation est alors :

$$\widehat{Z}_{k+1/k} = C_{k+1} \widehat{X}_{k+1/k} \quad (II.14)$$

Lorsqu'on effectue la mesure Z_{k+1} à l'instant k + 1, La différence entre la valeur mesurée Z_{k+1} et la valeur prédite $\hat{Z}_{k+1/k}$ fournit une indication sur l'erreur d'estimation dont on peut tenir compte pour améliorer l'estimation, si on connait la variance des bruits ainsi :

Si le bruit de mesure est nul, la meilleur estimé de $C_{k+1}.X_{k+1}$ est fournie par la mesure de Z_{k+1}.

Si la variance $P_{k+1/k}$ de la prédiction $\hat{X}_{k+1/k}$ est nulle, il n'y a pas d'erreur de prédiction, la meilleur estimé $\hat{X}_{k+1/k+1}$ est fournie par la prédiction, sans tenir compte de l'observation Z_{k+1} .C'est le cas d'un bruit W_k nul et de condition initiales nulles.

Si la variance de bruit est $P_{k+1/k}$ sont différent de zéro, on effectuera une correction proportionnelle à l' écart entre la valeur mesurée $\hat{Z}_{k+1}$ et la valeur prédite $\hat{Z}_{k+1/k}$:

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k}.K_{k+1}.Z_{k+1}.Z_{k+1/k} \quad \text{(II.15)}$$

Avec K_{k+1} est un gain dépendant des variances.[11,13].

II.2.2.4. Le filtre de Kalman continu :

Les équations du d'évolution et d'observation sont toutes les deux continues :

$$\dot{X} = A(t).X(t) + B(t).U(t) + W(t) \quad \text{(II.16)}$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \quad \text{(II.17)}$$

Avec

$$\left\{\begin{array}{c} E[W(t).W^T(t+\tau)] = Q(t).\delta(\tau) \\ E[V(t).V^T(t+\tau)] = R(t).\delta(\tau) \\ E[W(t).W^T(t+\tau)] = 0 \\ E[W(t)X^T(t_0)] = E[W(t)X^T(t_0)] = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(II.18)}$$

$Q(t)$: Matrice définie non négative.

$R(t)$: Matrice définie non négative.

Les équations du filtre Kalman continu peuvent être obtenues plus simplement en remplaçant l'hypothèse gaussienne par la recherche d'un filtre linéaire non biaisé, à variance minimale et le filtre linéaire est de la forme :

$$\widehat{X}(t) = A_1(t).\widehat{X}(t) + B_1(t).U(t) + K(t).Z(t) \quad \text{(II.19)}$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} E\left[\hat{X}(t)\right] = E[X(t)] \\ E = E[\dot{X}(t)] \end{Bmatrix} \quad \text{(II.20)}$$

Soit en prenant la moyenne des expressions (2.10) et (2.12) :

$$A_1(t)E[X(t)] + B_1\,U(t) + K(t)C(t)E[X(t)] = A(t)E[X(t)] + B(t)U(t) \quad \text{(II.21)}$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} A(t) = A(t) - K(t).C(t) \\ B_1(t) = B(t) \end{Bmatrix} \quad \text{(II.22)}$$

L'expression du filtre : $X(t)$

$$X(t) = A(t).\hat{X}(t) + B(t).U(t) + K(t)[Z(t) - C(t).\hat{X}(t)] \quad \text{(II.23)}$$

Dans laquelle la matrice de gain $K(t)$ doit minimiser la variance de l'erreur exprimée par :

$$\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} - \widetilde{\mathrm{X}} \quad \text{(II.24)}$$

Cette erreur $\widetilde{\mathrm{X}}$ vérifie l'équation différentielle suivante obtenue à partir des relations (II.25), (II.11), (II.13).

$$\tilde{X}(t) = [A(t) - K(t).C(t)].\tilde{X}(t) + W(t) - K.V(t) \quad \text{(II.25)}$$

Avec $\widetilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t})$: est donc la sortie d'un système linéaire ayant pour entrée le bruit blanc $(W(t) - K(t).V(t))$ qui a comme variance : $\mathrm{Q} + \mathrm{KRK}^{\mathrm{T}}$

La variance P de l'erreur est solution de l'équation différentielle (équation de Riccatti)

$$P(t) = (A - K.C)P + P(A - K.C) + Q + KRK^T \quad \text{(II.26)}$$

« On peut montrer que pour minimiser la variance de l'erreur, il suffit de minimiser P »

C'est-à-dire choisir :

$$K(t) = P(t).C^T(t).R^{-1}(t) \quad \text{(II.27)}$$

Finalement, les équations du filtre continu sont :

$$X(t) = A(t).\tilde{X}(t) + B(t).U(t) + K(t).Z(t) - C(t).\tilde{X}(t) \quad \text{(II.28)}$$

$$\mathrm{p(t)} = \mathrm{A(t).P(t)} + \mathrm{P(t).A(t)} - \mathrm{P(t).}C^T\mathrm{(t).R_1(t).P(t)} + \mathrm{Q(t)} \quad \text{(II.29)}$$

$$K(t) = p(t).C^T(t).R^{-1}(t) \quad \text{(II.30)}$$

II.2.2.5. La structure de filtre de Kalman-Bucy continu :

La structure de filtre de kalman-Bucy continu est représentée par la figure (II.2).On retrouve encore la dynamique du système corrigée par l'erreur d'estimation de la mesure.

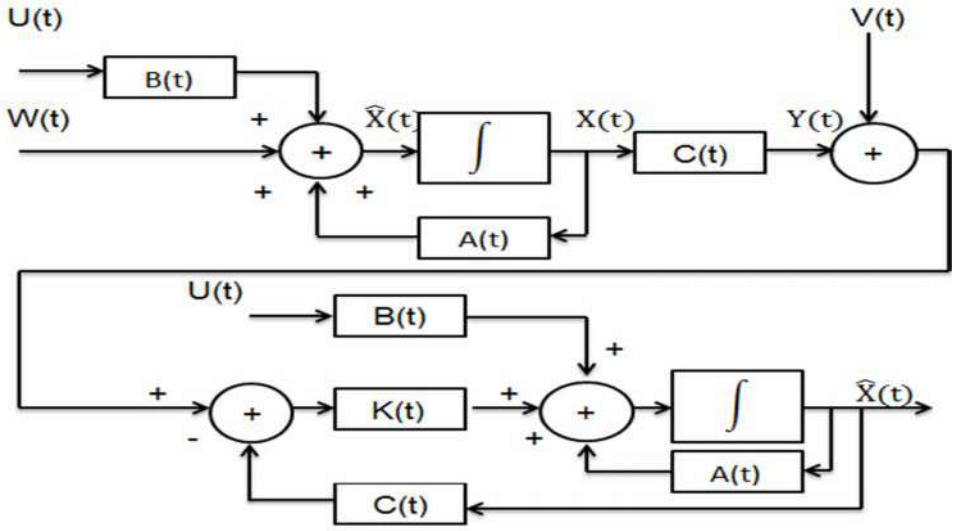


Figure (II.2) - Schéma fonctionnel du filtre de kalman continu.

II.2.2.6. Filtre de Kalman discret : les équations du modèle sont :

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k \quad \text{(II.31)}$$

$$Z_k = C_k + V_k \quad \text{(II.32)}$$

Avec :

$$\begin{cases} E(X_0) = m_0 \\ E(W_k) = 0 \\ E\left(W_k W_i^T\right) = Q_k \delta_{kj} \\ E(V_k) = 0 \\ E(V_k V_j^T) = R_k \delta_{kj} \end{cases} \quad \text{(II.33)}$$

L'expression du filtre de kalman peut s'obtenir simplement, de manière itérative en calculant la moyenne conditionnelle :

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = E[X_{k+1}/Z1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots Z_{k+1} \quad \text{(II.34)}$$

Comme l'état et les observations sont gaussiens, l'estime est une fonction linéaire des observations, indépendante de l'erreur d'estimation :

$$X_{k+1/k+1} = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k+1} \quad \text{(II.35)}$$

Avec :

$\hat{X}_{k/K}$: Le meilleur estimé de X_k à partir des observations $Z \ldots . Z_k$

$P_{k/k}$: La variance de l'erreur d'estimation à l' instant k.

$$\hat{X}_{k+1/K} = E[X_k / Z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z_k] \quad \text{(II.36)}$$

$$P_{k/k} = E[(X_k - \hat{X}_{k/k})(X_k - \hat{X}_{k/k}) / Z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots Z_k] \quad \text{(II.37)}$$

A l'instant K+1, l'estime de X_{k+1} à partir des observations $Z \ldots . Z_k$

Est la meilleure prédiction $\hat{X}_{k+1/K}$ de X_k

$$\hat{X}_{k+1/K} = E[X_{k+1} / Z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z_{k+1}] \quad \text{(II.38)}$$

Cette prédiction s'obtient, en prenant la moyenne conditionnelle de l'équation d'évolution (II.16).

$$X_{k+1/k} = A_k X_{k/k} + B_k U_k \quad \text{(II.39)}$$

La variance de l'erreur de prédiction est :

$$P_{k+1/k} = E[(X_{k+1} - X_{k+1/k})(X_{k+1} - X_{k+1/k})^T / Z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots Z_k] \quad \text{(II.40)}$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{K+1} C_{k+1} P_{k+1/k} \quad \text{(II.41)}$$

$$K_{K+1} = P_{k+1/k} C_{k+1}{}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}{}^T + R_{k+1})^{-1} \quad \text{(II.42)}$$

Avec $P_{k+1/k+1}$: Variance de l'erreur d'estimation, C'est une matrice symétrique positive définie

Finalement les équations du filtre de Kalman discret sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/K} + K_{K+1}(Z_{k+1} - C_{k+1} . \hat{X}_{k+1/K}) \\ K_{K+1} = P_{k+1/k} C_{k+1}{}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}{}^T + R_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1/k+1} = (1 - K_{K+1} C_{k+1}) P_{k+1/k} \\ P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k{}^T + Q_k \end{array} \right\} \quad \text{(II.43)}$$

Le filtre obtenu est linéaire, il peut être schématisé par la figure (II.3), et II permet un calcule récursive en temps réel de l'estimation, satis stockage des observations et des commandes passées.

La structure de filtre de kalman discret est représentée par la figure (II.3).

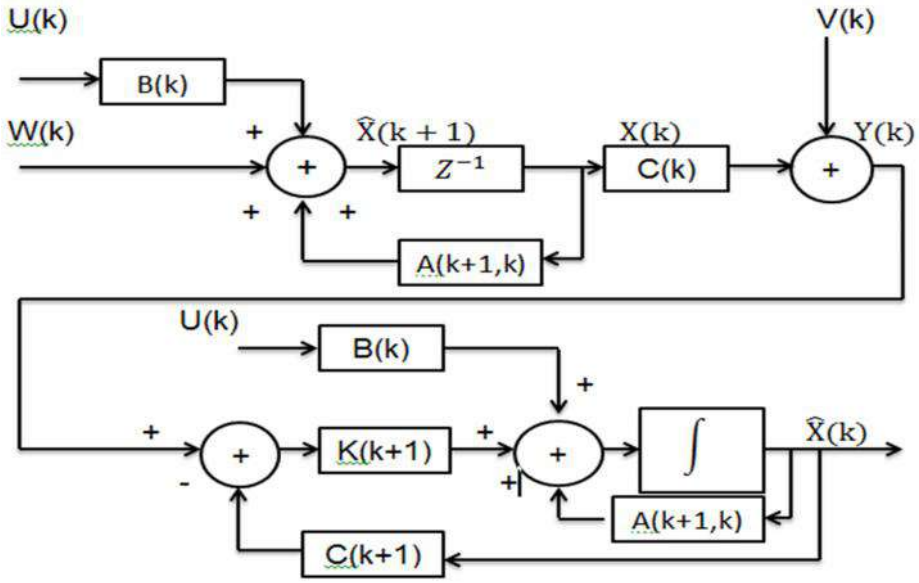


Figure (II.3) - Schéma fonctionnel du filtre de Kalman discret.

II.2.3. Le Filtre de Kalman Etendu (EKF) :

Le filtre de kalman étendu est une adaptation du filtre de Kalman aux problèmes non linéaire. Le principe est d'approximer les fonctions non linéaire par linéarisation afin de pouvoir appliquer les équations du filtre de kalman classique. Bien que couramment utilisé, ce filtre n'est pas idéal car il propage la moyenne à travers les équations non linéaire (fonction f du modèle dynamique) alors que la covariance est calculée avec les matrices linéarisé (matrice de transition Φ calculée à l'aide de la matrice dynamique du système F obtenue par dérivation de la fonction f). Ainsi, en cas de comportement non linéaire durant le pas de temps d'intégration, cette méthode s'avère inexacte car une approximation de premier ordre est effectuée. Dans ce cas, un filtre de kalman étendu itératif permet de diminuer les erreurs introduites lors de la linéarisation.

On s'ait que le calcul récursif de la statistique d'ordre deux dans le cas d'un modèle linéaire avec des hypothèses de gaussianité des états, a trouvé une solution sous la forme du filtre de Kalman. Son principal intérêt réside dans l'implémentation récursive, qui répartit le cout de calcul sur l'ensemble des observations, réalisant en même temps une minimisation de l'erreur par rapport à un critère d'EQM (Erreur quadratique moyenne).

La majorité des méthodes d'estimation récursive proposées jusqu'à présent, pour résoudre le problème de filtrage dans le cas non-linéaire, font des approximations du modèle ou au niveau des hypothèses des statistique initiales. Chronologiquement la première solution proposée a été le Filtre de Kalman étendu (EKF- Extended Kalman Filter). Cette solution repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation qui forment le modèle. Ainsi le Filtre de Kalman étendu est défini en utilisant la linéarisation au premier ordre dans le développement de Taylor pour les non-linéarités correspondantes aux équations de processus et /ou observation. [13]

II.2.3.1. Modèle Générale De Filtre De Kalman Etendu :

II.2.3.1.1. Filtre De Kalman Etendu Discret :

On considère le modèle d'estimation suivant :

$$X_{k+1} = f(X_K) + W_k \tag{II.44}$$

$$Z_k = h(X_k) + V_k \tag{II.45}$$

Où $\{f(X_k).hX_k\}$ désignent des fonctions non-linéaires et où les bruits additifs $\{W_k, V_k\}$ sont considérés centrés, gaussiens et avec une inter-corrélation nulle :

$$\begin{Bmatrix} E(W_k) = 0 \\ E(W_k {W_j}^T) = Q_k \delta_{kj} \\ E(V_k {V_j}^T) = R_k \delta_{kj} \\ E(W_k {W_j}^T) = 0 \\ E(V_k {V_j}^T) = 0 \end{Bmatrix} \tag{II.46}$$

Comme dans le cas de filtre de Kalman standard (modèle linéaires) l'estimation à l'instant k sera accomplie par approximation à l'ordre deux de la statistique des états :

- Etat estimé : $\hat{X}_{k/k} \approx E[X_k/Z^k]$
- Matrice de covariance : $P_{k/k}$

Supposons qu'il est possible de générer une trajectoire de référence x_k On peut donc écrire le système :

$$X_{k+1} = f(X_K) - f(X_K) + f(X_K) + W_k \quad \text{(II.47)}$$

Si la distance entre x_k et l'état réel X_k est suffisamment petite alors il est possible de faire une approximation du système linéaire en utilisant le développement en séries de Taylor

$$f(X_K) - f(x_K) = f_k(X_K - x_k) \quad \text{(II.48)}$$

Avec

$$(f_k)_{ij} = \{\delta(f_k(X_k))_i / \delta(x_k)_j\} \quad \text{(II.49)}$$

Supposons un cas plus général :

$$X_{k+1} = f(X_K + W_{k+1}) \quad \text{(II.50)}$$

Avec une équation d'observation non linéaire :

$$Z_k = h(X_k, V_k) \quad \text{(II.51)}$$

On fait donc une linéarisation des fonctions non linéaire :

$$F_k = \delta f / \delta x \big| x_{k-1/k-1} \quad \text{(II.52)}$$

$$H_k = \delta h / \delta x \big| x_{k/k-1} \quad \text{(II.53)}$$

Et on donne l'algorithme du filtre de Kalman étendu :

- La prédiction

$$\hat{X}_{k+1/k} = f(\hat{X}_{k/k}) \quad \text{(II.54)}$$

$$P_{k+1/k} = \Phi_k P_{k/k} \Phi_k{}^T + Q_k \quad \text{(II.55)}$$

- Calcul du gain du filtre optimal (qui peut être calculé a priori) :

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} . H_k{}^T (H_k . P_{k+1/K} H_k{}^T + R)^{-1} \quad \text{(II.56)}$$

- Mise à jour de la matrice de covariance de l'état :

$$P_{k+1/k+1} = (1 - K_{k+1} H_k) P_{k+1/k} \quad \text{(II.57)}$$

- Réactualisation de l'estimation de l'état :

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k \left(Z_k - h\left(\hat{X}_{k+1/k}\right) \right) \quad \text{(II.58)}$$

La structure de filtre de Kalman discret étendu est représentée par la figure (II.4)

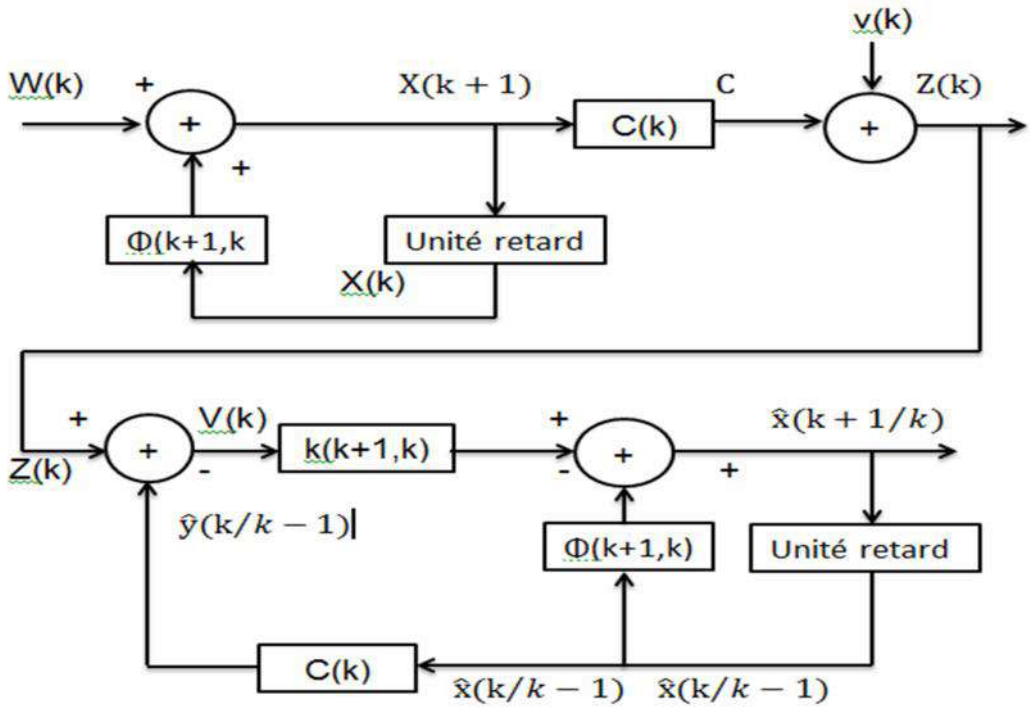


Figure (II.4) - Schéma fonctionnel du filtre de Kalman discret étendu.

II.2.3.1.2. Filtre De Kalman étendu Continu :

On considère le modèle suivant :

$$X(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + W(t) \quad \text{(II.59)}$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \quad \text{(II.60)}$$

Avec :

$$E[W(t)] = E[V(t)] = 0 \quad \text{(II.61)}$$

$$E[W(t).W^T(t+\tau)] = Q(t).\delta(\tau) \quad \text{(II.62)}$$

$$E[V(t).V^T(t+\tau)] = R(t).\delta(\tau) \quad \text{(II.63)}$$

$$E[W(t).V^T(t+\tau)] = E[W(t).X^T(t_0)] = E[V(t).X^T(t_0)] = 0 \quad \text{(II.64)}$$

- La prédiction

$$X(t/t) = A(t).X(t/t) + K(t).P(t) \quad \text{(II.65)}$$

$$P(t) = Z(t) - C(t).X(t/t) \quad \text{(II.66)}$$

- Calcul du gain

$$K(t) = P(t/t).C^T(t)R^{-1}(t) \quad \text{(II.67)}$$

- Calcul de la variance

$$P(t/t)A(t).P(t/t)P(t/t).A^T(t)B(t)p(t)B^T(t)\ P(t/t).C^T(t)R^{-1}(t)$$

$$C(t)\ P(t/t) \quad \text{(II.68)}$$

La structure de filtre de Kalman continu étendu est représentée par la figure (II.5)

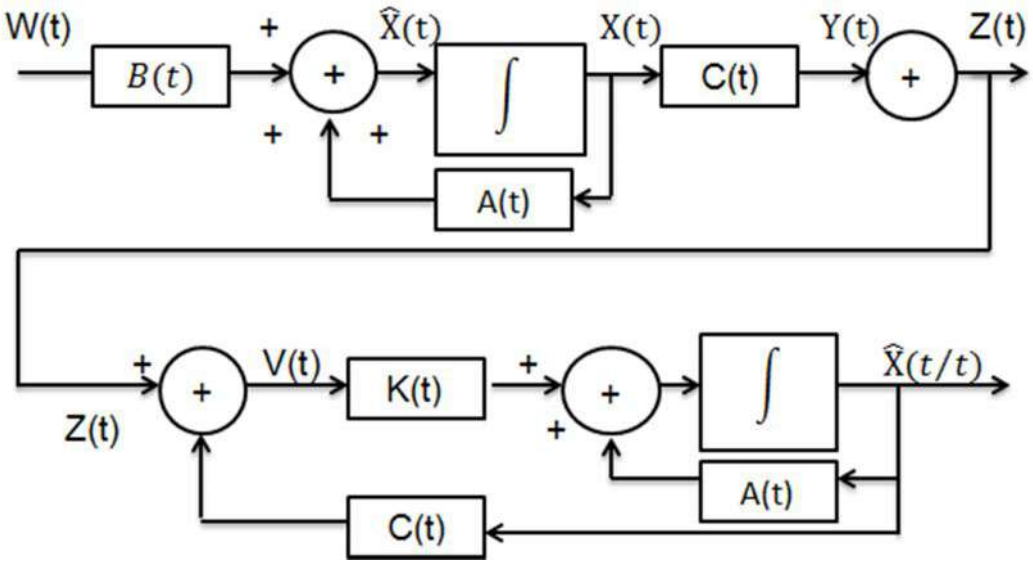


Figure (II.5) - Schéma fonctionnel du filtre de Kalman continu étendu.

II.3.2. Principe du filtre de Kalman Etendu (EKF) :

Le schéma général qui présente la structure récursive de l'algorithme de Kalman Étendu est proposé en figure (II.6). Ainsi de façon similaire au filtre de Kalman classique le mécanisme d'estimation est divisé en deux parties :

- L'étape de mise à jour temporelle qui réaliser l'évaluation de la statistique d'ordre deux de l'état prédit.
- L'étape de mise à jour par des observations qui donne la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé.

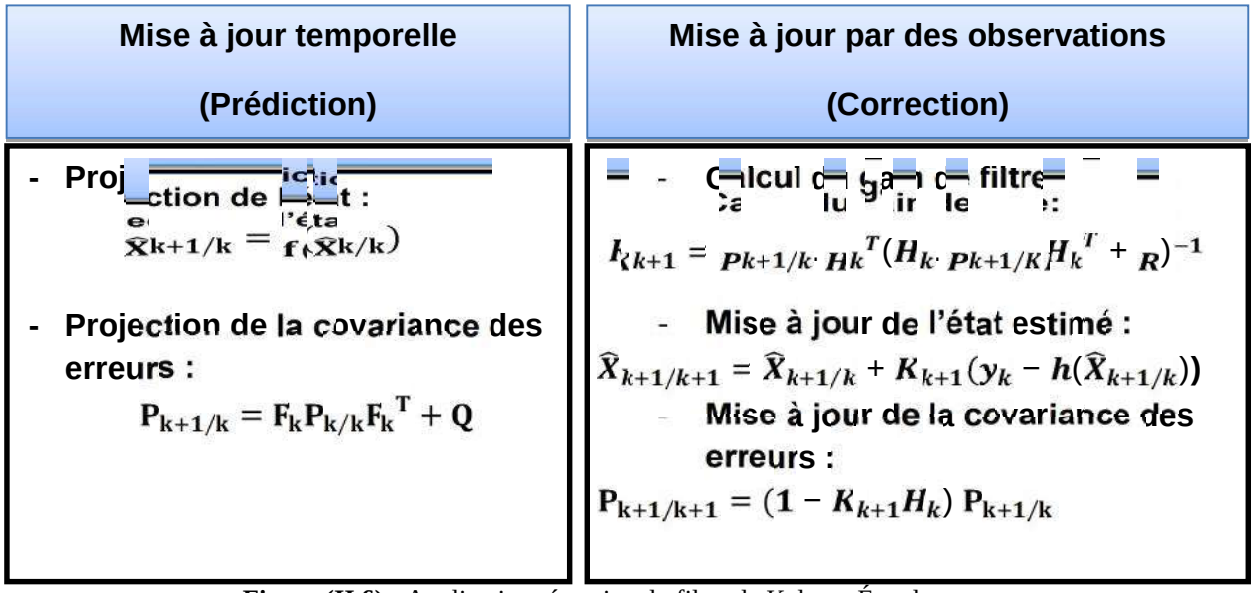


Figure (II.6) - Application récursive du filtre de Kalman Étendu.

Toute méthode de filtrage de Kalman peut être écrite comme une application récursive d'une transformation de la statistique de l'état au cours du temps. Ainsi pour une méthode de filtrage quelconque l'algorithme est écrit sous la forme de deux transformations successive, l'une pour implémenter les équations de mise à jour temporelle et l'autre pour la propagation de la statistique de l'état prédit à travers le modèle d'observation.

En utilisant l'observation courante on peut calculer le vecteur d'innovation et estimer la nouvelle statistique de l'état. La transformation non-linéaire est définie comme une application destinée au calcul de la statistique d'une variable aléatoire x qui subit une transformation à travers la fonction f :

$$y = f(x) \tag{II.69}$$

On va juste présenter la transformation non-linéaire considérée par l'EKF pour mettre en place le mécanisme de filtrage. Ainsi, en utilisant le modèle de propagation donné par l'équation (2.20), la linéarisation effectuée dans la série de Taylor va mener aux expressions suivantes des moments d'ordre un et deux :

$$F_k = \partial f / \partial x | x_{k-1/k-1} \tag{II.70}$$

$$H_k = \partial h / \partial x | x_{k/k-1} \tag{II.71}$$

II.3.3. Itération de Filtre de Kalman Etendu IEKF:

Une méthode permettant d'améliorer le processus d'estimation correspond au calcul successif des états prédits $\hat{X}_{k+1/k+1}K_{k+1}$ et $P_{k+1/k+1}$, en effectuant chaque fois une linéarisation autour de l'état le plus récent. Pour développer l'algorithme on va utiliser les notations : $\hat{X}_{k+1/k+1}{}^{\{i\}}K_{k+1}{}^{\{i\}}$ et $P_{k+1/k+1}{}^{\{i\}}$, i = 0,1,…….

Pour désigner les paramètres estimés à la i^{ême} étape. En appliquant le même principe dans le filtre de Kalman Étendu, et les équations récursives pour le filtre IEKF (iterated extended Kalman filter) sont :

1- Initialisation du filtre :

$$\hat{X}_{k+1/k+1}{}^{\{0\}} = \hat{X}_{k+1/k} \quad \text{(II.72)}$$

$$P_{k+1/k+1}{}^{\{0\}} = P_{k+1/k} \quad \text{(II.73)}$$

2- Calcul récursif :

$$\hat{X}_{k+1/k+1}{}^{\{i+1\}} = \hat{X}_{k+1/k} + K_{k+1}{}^{\{i\}}(y_k - h\left(\hat{X}_{k+1/k+1}{}^{\{i\}}\right) - H_{k+1,i}(\hat{X}_{k+1/k} - \hat{X}_{k+1/k+1}{}^{\{i+1\}}) \quad \text{(II.74)}$$

$$K_{k+1}{}^{\{i\}} = P_{k+1/k}H_{k+1,i}{}^{T}(H_{k+1,i}P_{k+1/k}H_{k+1,i}{}^{T} + R)^{-1} \quad \text{(II.75)}$$

$$P_{k+1/k+1}{}^{\{i\}} = (I - K_{k+1}{}^{\{i\}}H_{k+1,i})P_{k+1/k} \quad \text{(II.76)}$$

- Récupération des états estimés, après la i^{ême} itération :

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k+1}{}^{\{i\}} \quad \text{(II.77)}$$

$$P_{k+1/k} = P_{k+1/k+1}{}^{\{i\}} \quad \text{(II.78)}$$

Le nombre des i étapes successives à effectuer dépend du critère d'optimisation considéré. Ainsi par exemple une solution est représentée par l'application de l'algorithme jusqu'à la détection d'un changement minimal par rapport à l'étape précédente. Par contre il faut bien préciser que chaque itération joue sur le coût total de calcul nécessaire à la mise en œuvre du filtre.

Si les équations récursives des filtres EKF et IEKF sont obtenues avec la prise en compte des premiers termes dans la série de Taylor, ce principe peut être étendu pour le traitement des problèmes où les non-linéarités sont plus importantes.

II.4. Conclusion :

On conclut que l'idée principale de ce chapitre est d'approximer la définition du filtre de kalman (KF) et ses propriétés, ainsi que la citation de différents types de ce filtre à l'aide des équations caractérisées et avec les figures qui représentent les blocs et fonctionnelles de ces dernières , on suit ça par la définition du filtre de kalman étendu, bien que les propriétés de ce dernier.

CHAPITRE III :

LES MISSILES ET LES CAPTEURS

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons parler sur les missiles ; et on veut donner une idée concernant la définition d'un missile et son guidage avec ses types. D'ailleurs on injecte quelques notions ont une relation au champ de missile afin d'exprimer la démarche de cette entité et approximer la vision envers le monde de missiles.

III.2. Définition de missile :

Un missile est un projectile autopropulsé et guidé, constitué de d'un propulseur qui est moteur fusée, réacteur généralement statoréacteur, une fusée donnant l'impulsion de départ, avant d'être relayée par un statoréacteur, et aussi un système de guidage ; qu'il soit externe (téléguidage) ou indépendant (autoguidage).Ansi il contient une charge utile qui peut être une charge militaire (explosive, incendiaire, chimique, biologique, etc.), un système électronique (drone de reconnaissance, missile scientifique ou expérimental) voire un simple poids pour équilibrer l'engin (missile cible) ou une masse inerte (missile de propagande transportant des tracts).

III.3. Propulsions :

Différents types de propulsions ont été ou sont utilisés. Ce sont principalement des fusées, des réacteurs ou des engins mixtes.

III.3.1. Fusées :

Dans les fusées, on trouve :

III.3.1.1. ***À carburant solide*** **:** c'est encore le propulseur le plus courant pour les petits missiles. En particulier les missiles individuels anti-char.

III.3.1.2. ***À carburant liquide*** **:** la dangerosité des carburants et comburants employés a été la cause de leur abandon progressif. Ce type de propulsion est cependant extrêmement efficace pour l'envoi de « gros » missiles utilisant une technologie moyenne voire faible. Le premier missile réussi utilisant cette propulsion a été le V2 allemand de la Seconde Guerre mondiale.

III.3.2. Réacteurs :

III.3.2.1. ***Simple flux :*** des essais ont été effectués après la Première Guerre mondiale, abandonnés à cause du prix de revient de tels missiles. Éventuellement double-flux ou turbo-fan ou modèle plus moderne que le simple flux.

III.3.2.2. ***Statoréacteur :*** le propulseur actuellement le plus courant sur les missiles. Bon marché, faciles à fabriquer et solides, les statoréacteurs sont devenus le principal mode de propulsion des missiles non semi-balistiques (une fusée est nécessaire pour la sortie de l'atmosphère)

III.3.3. Fusée / Statoréacteur : Ce couple de propulseurs est classique pour les missiles Sol-Air, Sol-Mer et Sol-Sol. La fusée donne au statoréacteur la vitesse qui lui est nécessaire pour fonctionner, puis il est éjecté. À contrario, de nombreux missiles Air-Air, Air-Mer, Air-Sol ne sont propulsés que par un statoréacteur, la vitesse initiale permettant l'ignition du statoréacteur étant la vitesse de l'avion tirant le missile.

III.4. Classification des missiles:

Les missiles peuvent être catégorisés en fonction de nombreux critères.

En fonction de leur profil de mission (plate-forme de tir et objectif) :

- ***Missile sol-sol*** : attaque d'une cible fixe ou mobile sur terre à partir d'une plate-forme de tir terrestre
- ***Missile sol-air*** : attaque d'une cible aérienne à partir d'une plate-forme de tir terrestre
- ***missile air-sol*** : attaque d'une cible fixe ou mobile sur terre à partir d'un aéronef (avion ou hélicoptère)
- ***Missile air-air*** : attaque d'un avion par un autre avion (combat aérien)
- ***Missile mer-mer*** : attaque d'un navire par un autre navire.

Uniquement en fonction de leur cible :

- ***Missile anti-char :*** destiné à détruire un char
- ***Missile anti-navire :*** destiné à détruire un navire
- ***Missile anti-aérien :*** destiné à détruire un aéronef
- ***Missile anti-satellite*** et ainsi de suite.

En fonction de leur portée :

- ***Très courte portée :*** quelques kilomètres maximum.
- ***Courte portée :*** quelques dizaines de kilomètres maximum.
- ***Longue portée :*** jusqu'à une centaine de kilomètres voire.

En fonction de leur type de vol :

- ***missile balistique***
- ***missile de croisière***

En fonction de leur système de guidage (voir ci-dessous).

Ces différentes catégorisations se recoupent partiellement et rendent une classification des différents missiles relativement complexe : ainsi, par exemple, un missile mer-sol peut être soit un missile balistique soit un missile de croisière, et un missile anti-char n'est qu'une version spécialisée du missile air-sol.

III.5. Le guidage d'un missile :

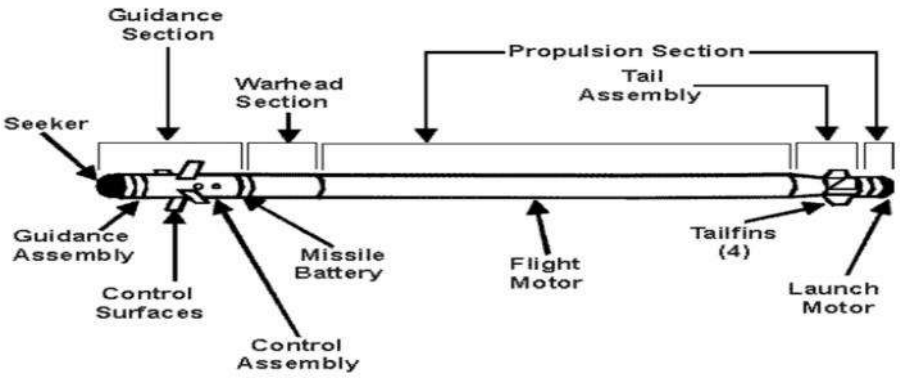


Figure (III.1) - Composition d'un missile.

Le guidage de missile est la méthode par laquelle le missile reçoit ses ordres afin de se diriger le long d'une trajectoire pour atteindre une cible. Sur certains missiles, ces ordres sont générés en interne par le pilote automatique du missile. Sur d'autres, les ordres sont transmis au missile par une source externe.

Le détecteur ou capteur du missile, est un composant qui produit des informations traitées par l'ordinateur du missile. Ces données sont utilisées pour diriger le missile. Les types de détecteur communément utilisés aujourd'hui sont l'infrarouge, le radar et le système GPS. Basé sur la position relative entre le missile et la cible à n'importe quel moment de la trajectoire, le pilote automatique des ordres aux surfaces de contrôle pour ajuster la trajectoire du missile. [17].

III.5.1. Phases de guidages :

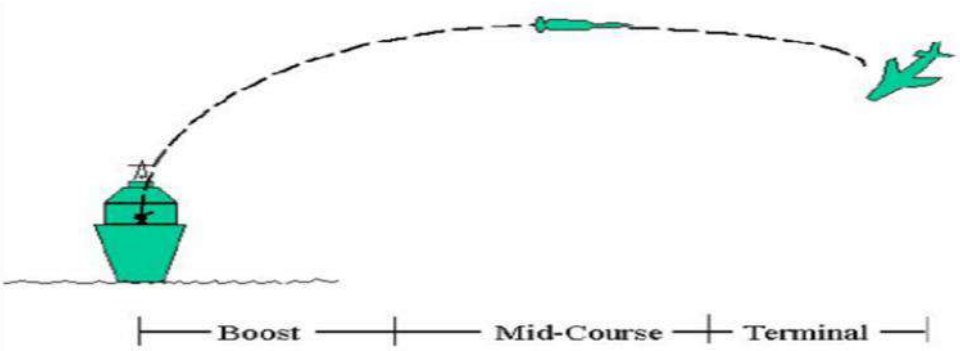


Figure (III.2) - Phases de guidages.

Dans beaucoup de missiles, le guidage est divisé en trois phases. La première est une phase de lancement ou d'augmentation de vitesse dans laquelle le système de guidage est inactivé pour permettre au missile de s'éloigner en toute tranquillité de sa plate-forme de lancement. La majorité du vol se fait en phase de guidage mi-course, pendant laquelle le missile fait des ajustages légers de sa trajectoire pour arriver au voisinage de la cible. La dernière phase est le guidage final, quand le missile utilise un système de pistage extrêmement précis pour effectuer des manœuvres rapides afin d'intercepter la cible. Beaucoup de missiles utilisent un type de guidage différent dans la phase mi-course par rapport à la phase finale, comme on le verra plus tard.

III.5.2. Téléguidage Beam Rider :

Le guidage Beam Rider fait appel à une plate forme de transmission terrestre ou navale qui transmet un rayon d'énergie radar vers la cible. Le radar de surface pistant la cible, transmet aussi un faisceau de guidage vers le missile et règle son angle en fonction de la trajectoire de la cible dans le ciel.

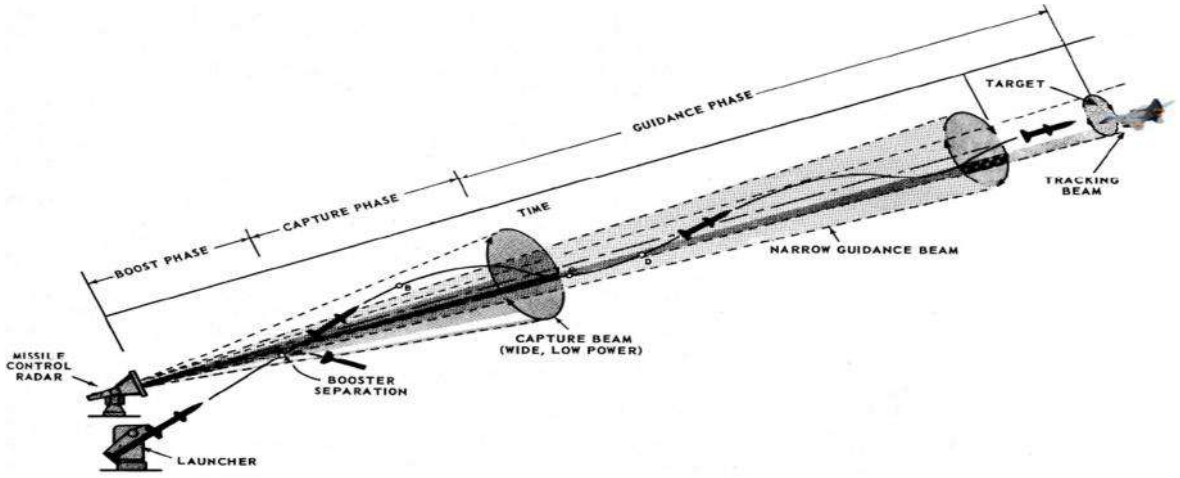


Figure (III.3) - Système de guidage Beam Rider.

Le missile est lancé dans ce faisceau de guidage et l'utilise pour se diriger. Un système de scan embarqué détecte la présence du faisceau et le missile détermine à quelle distance il se trouve par rapport au bord du faisceau. Ces renseignements sont utilisés pour commander les surfaces de contrôle afin de garder le missile dans le rayon. De cette manière, le missile chevauche le rayon radar dirigé vers la cible.

Le faisceau émis était souvent utilisé sur les premiers missiles air sol, mais on a constaté qu'il devenait inexact à longue distance. Une amélioration limitée était possible par l'utilisation de deux différents rayons radar basés au sol, mais la méthode Beam Rider a été abandonnée. La technique a été utilisée sur le missile Terrier de la marine des Etats-Unis dans les années 1950. [16].

III.5.3. Téléguidage commandé :

Le téléguidage commandé est similaire au Beam Rider par le fait que la cible est traquée par un radar externe au missile. Cependant, un deuxième radar piste le missile. Les données de pistage des deux radars sont introduites dans l'ordinateur basé à terre qui calcule les trajectoires de ces derniers.

Cet ordinateur détermine aussi quels ordres à envoyer aux surfaces de contrôle du missile pour le diriger sur une course d'interception. Ces ordres sont transmis à un récepteur sur le missile, afin qu'il règle sa course. Un exemple de téléguidage commandé est le missile air sol SA-2 russe utilisé contre les avions américains dans le Nord Viêt Nam.

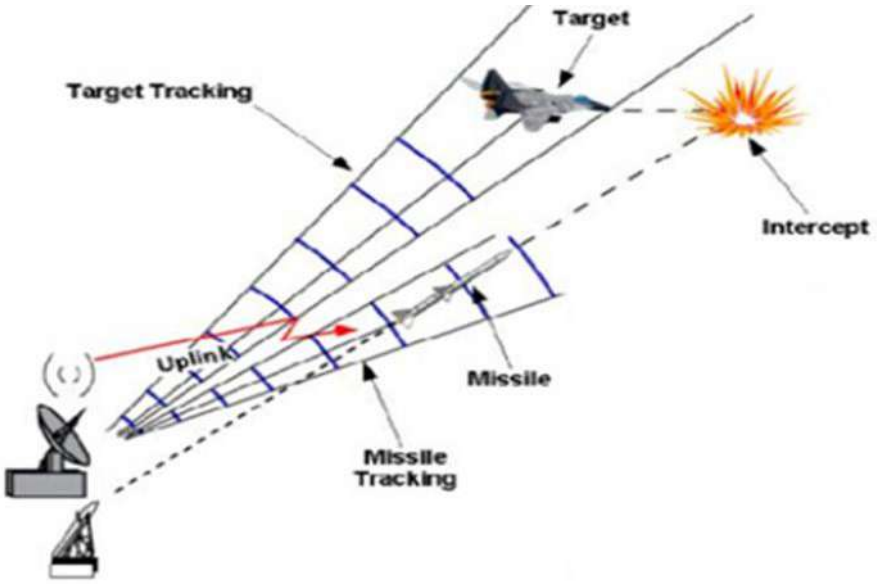


Figure (III.4) - téléguidage commandé.

Le téléguidage commandé n'est pas limité qu'au radar. Une autre méthode qui tombe sous la méthode de téléguidage commandé est l'utilisation de systèmes guidés par fil. Dans cette technique, les ordres sont envoyés au missile par un fil conventionnel ou une fibre optique qui de déroule à l'arrière du missile. Les guidages à câbles métalliques sont souvent utilisés sur les missiles antichars,

qui peuvent être lancé par des véhicules de terre ou des hélicoptères. Beaucoup de torpilles navales lancées par sous-marin utilisent aussi des câbles métalliques.

III.5.4. Guidage HOMING :

Le guidage Homing est la forme de guidage la plus communément utilisée dans les missiles antiaériens actuels. Trois formes primaires de guidage existent sous cette forme. Semi-actif, actif et passif. Nous discuterons chacune d'entre elles à tour de rôle, ainsi qu'une forme plus inhabituelle appelée la retransmission ou la piste via le missile homing.

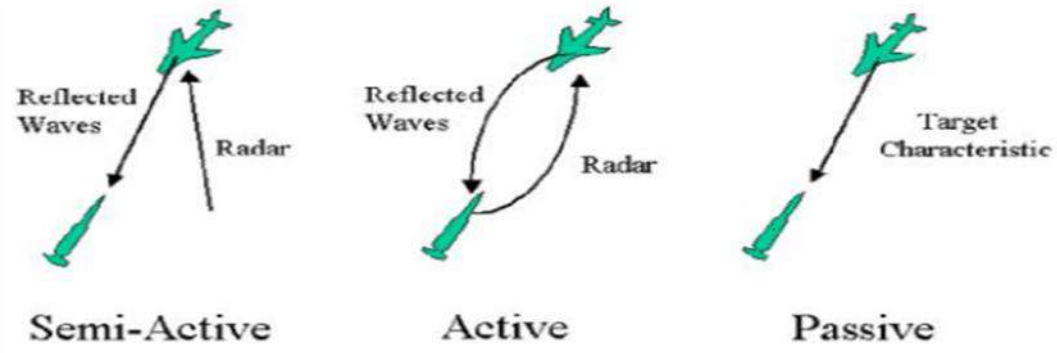


Figure (III.5) - Types de guidage Homing.

III.5.4.1. Guidage Homing Semi-actif :

Un système semi-actif est semblable au guidage commandé, puisque le missile compte sur une source externe pour éclairer la cible. L'énergie reflétée par cette cible est interceptée par un récepteur du missile. La différence entre le guidage commandé et homing semi-actif est que le missile a un ordinateur intégré dans ce cas-là.

L'ordinateur utilise l'énergie recueillie par son récepteur radar pour déterminer la trajectoire relative de la cible et envoyer des ordres de correction aux surfaces de contrôle pour que le missile intercepte la cible.

L'exemple illustré montre la méthode de guidage utilisée sur un missile air-air comme le Sparrow. Ce missile compte sur l'énergie radar transmise par l'avion lanceur pour pister et se diriger vers la cible.

Ce système est aussi appelé parfois bi-statique, signifiant que les ondes radar qui interceptent la cible et celles reflétées par la cible vers le missile ont des angles différents.

Cependant, il devrait être noté que les guidages semi-actifs sont utilisés par d'autres types de traceurs en plus du radar. Les armes guidées laser comme le Paveway peuvent aussi être considérées comme armes semi-actives parce que l'énergie laser que ces bombes pistent est fournie par une source externe. La source pourrait être un pod de désignation laser sur l'avion de lancement, sur un deuxième avion, ou émise par un soldat à terre.

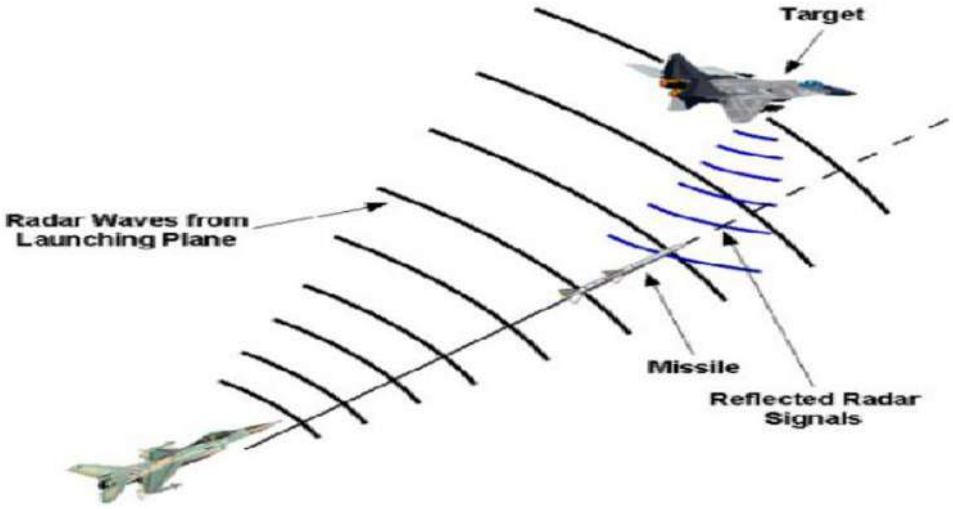


Figure (III.6)- Guidage Homing Semi-actif

III.5.4.2. Guidage Homing Actif :

Le homing actif travaille comme le semi-actif sauf que l'énergie de pistage est maintenant transmise et reçue par le missile lui-même. Aucune source externe n'est nécessaire. C'est pour cette raison que l'on appelle souvent des missiles homing actifs "tire-et-oublie" parce que l'avion de lancement ne doit pas continuer à éclairer la cible une fois que le missile est lancé.

Les missiles homing actifs utilisent typiquement des traqueurs radars pour pister leur cible. On les appelle aussi quelquefois systèmes mono-statiques parce qu'à la différence des guidages semi-actifs, les ondes transmises et reflétées ont le même angle par rapport à la ligne de visée entre le missile et la cible.

Les exemples de missiles à homing actif incluent les missiles air-air AMRAAM et antinavire d'Exocet.

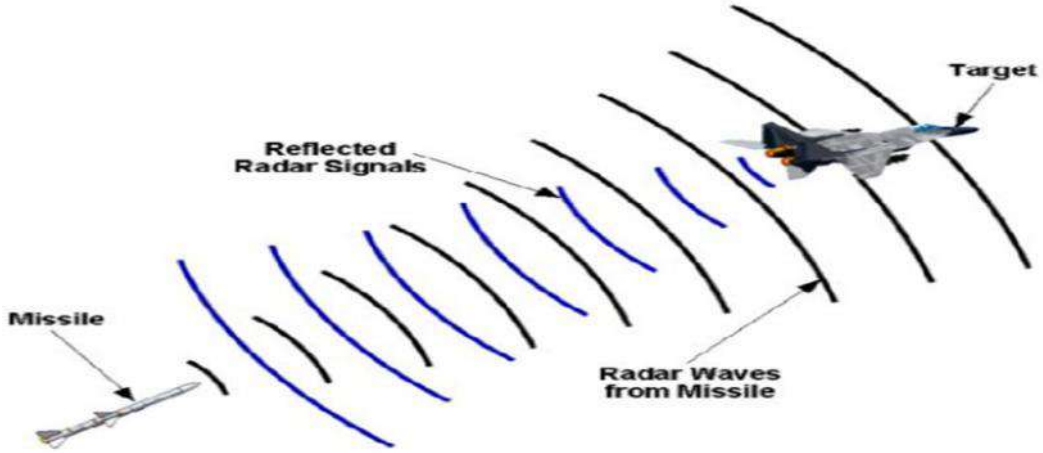


Figure (III.7) - Guidage Homing Actif.

III.5.4.3. Guidage Homing Passif :

Un système homing passif est comme un système actif, le missile étant indépendant par rapport à un système de guidage externe et comme un système semi-actif puisqu'il reçoit seulement des signaux et ne peut pas en émettre.

Les missiles passifs comptent plutôt sur une forme d'énergie qui est transmise par la cible et peut être pistée par le traqueur du missile.

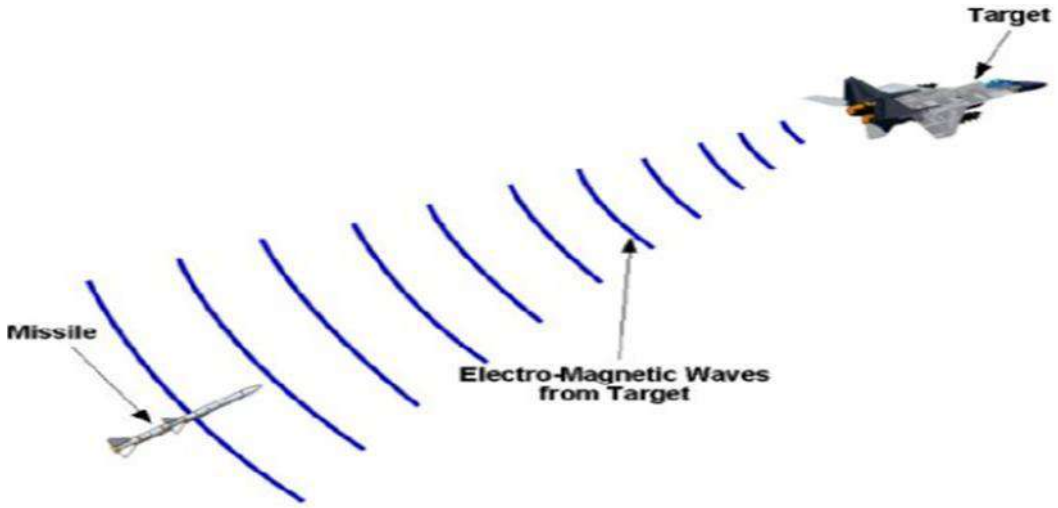


Figure (III.8) - Guidage Homing Passif.

Cette énergie peut prendre beaucoup de formes comme par exemple, les capteurs infrarouges utilisés sur le Sidewinder détectant la signature de chaleur produite par une cible. Les missiles anti radar comme le HARM pistent l'énergie des radiofréquences transmise par les stations radar basées à terre. Les torpilles passives utilisent le sonar, ou les ondes acoustiques, créées par les moteurs de navires pour attaquer leurs cibles. Les détecteurs Electro-optiques utilisés sur le Maverick comptent sur les images visuelles pour se guider vers une cible.

III.5.4.4. Guidage Homing Retransmit :

Un exemple plus inhabituel de guidage homing est la méthode de retransmission. Cette technique est en grande partie semblable au guidage commandé, mais avec une boucle de commande.

La cible est pistée via un radar externe, le signal reflété est intercepté par un récepteur à bord du missile, comme dans homing semi-actif.

Cependant, le missile n'a aucun ordinateur intégré pour traiter ces signaux. Les signaux sont plutôt transmis à la plate-forme de lancement pour le traitement. Les ordres sont alors retransmis au missile pour qu'il puisse orienter ses surfaces de contrôle pour régler sa trajectoire.

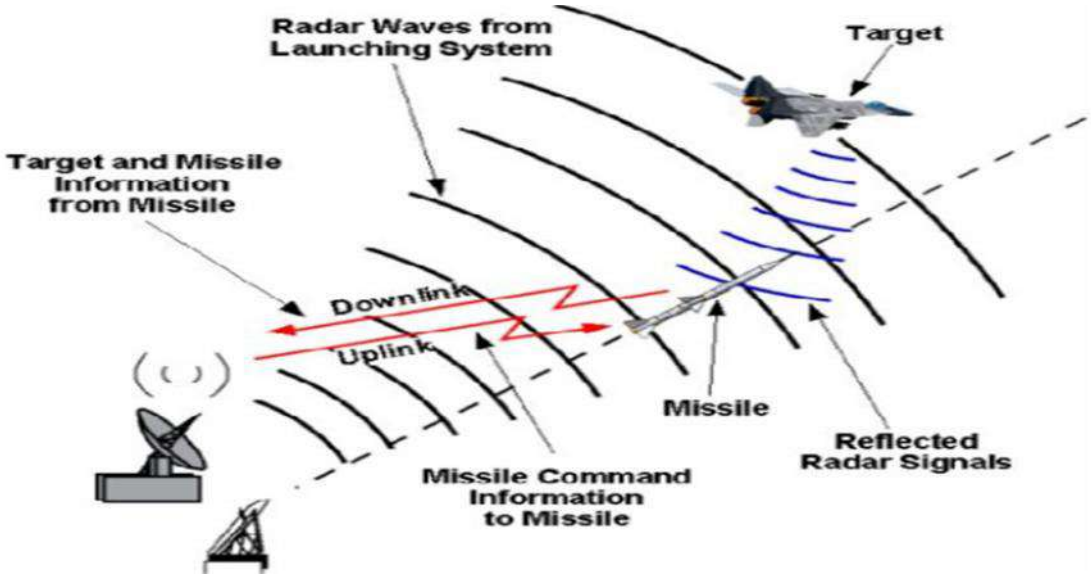


Figure (III.9) - Guidage Homing Retransmit.

On appelle aussi cette méthode "track via le missile" (TVM) puisque le missile agit comme un canal de transmission de données de la cible à la station de contrôle au sol. L'avantage de TVM homing est que la plupart du matériel cher, de suivi et du traitement est localisé au sol où il peut être réutilisé pour d'autres lancements futurs plutôt qu'être détruit.

Malheureusement, la méthode exige d'excellents liens de communication à haute vitesse entre le missile et la station de contrôle, en limitant le système aux gammes de fréquences courtes. La retransmission homing est utilisée sur le missile air-air Patriote.

III.5.5. Guidage en navigation :

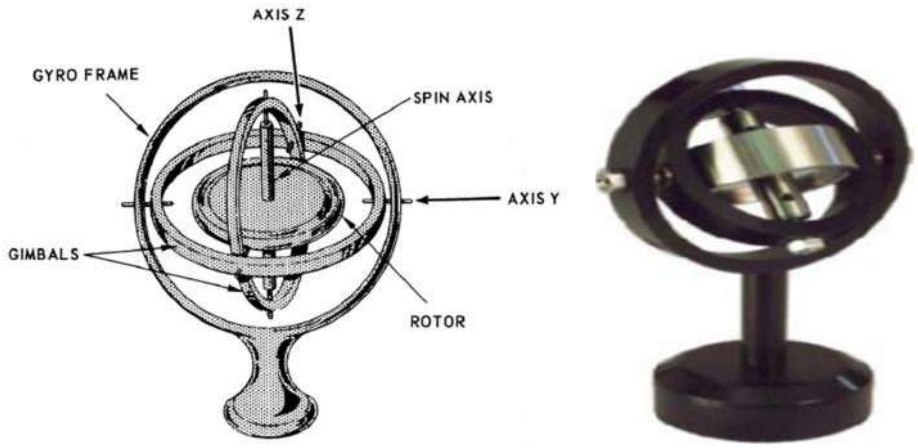
Comme les guidages homing, les guidages en navigation incluent plusieurs sous-catégories. Dans cette section, nous décrirons des techniques de navigation inertielles, variant, célestes et géophysiques.

III.5.5.1. Guidage en Navigation Inertielle :

La navigation inertielle compte sur des appareils embarqués qui détectent le mouvement et l'accélération du missile dans différentes directions. On appelle ces appareils les gyroscopes et les accéléromètres. [19].

III.5.5.1.1. Gyroscope :

L'un des instruments plus importants dans le système de contrôle d'un missile, il est défini comme un instrument mécanique.



Figure(III.10) - Gyroscope.

Le but d'un gyroscope est de mesurer la rotation angulaire et différentes méthodes ont été conçues pour cela. Un gyroscope mécanique classique est sensible à la stabilité d'une masse monté dans un système de cadrans. Les gyroscopes à anneaux laser et à fibre optique sont basés sur l'interférence entre rayons laser. Les avances actuelles dans les Systèmes Micro-électromécaniques (MEMS) offrent la possibilité de développer des gyroscopes qui sont très petits et bon marchés.

Pendant que les gyroscopes mesurent le mouvement angulaire, les accéléromètres mesurent le mouvement linéaire.

Les accélérations de ces appareils sont traduites en signaux électriques traités par l'ordinateur du missile. Quand un gyroscope et un accéléromètre sont combinés dans un appareil simple avec un mécanisme de contrôle, on l'appelle unité de mesure inertielle (IMU) ou un système de navigation inertiel (INS).

III.5.5.1.2. Accéléromètre :

Un accéléromètre est un capteur fixé à un mobile ou tout autre objet, permet de mesurer l'accélération linéaire de ce dernier. On parle encore d'accéléromètre même s'il s'agit en fait de 3 accéléromètres qui calculent les 3 accélérations linéaires selon 3 axes orthogonaux.

a. Principe :

Le principe de la plupart des accéléromètres est basé sur la loi fondamentale de la dynamique

$$F = m \cdot a$$

F : Force (N), m: masse (kg), a : accélération (m/s^2) aussi notée γ.

Plus précisément, il consiste en l'égalité entre la force d'inertie de la masse sismique du capteur et une force de rappel appliquée à cette masse. On distingue deux grandes familles d'accéléromètres : les accéléromètres à asservissement et les accéléromètres non asservis.

b. Accéléromètres à asservissement :

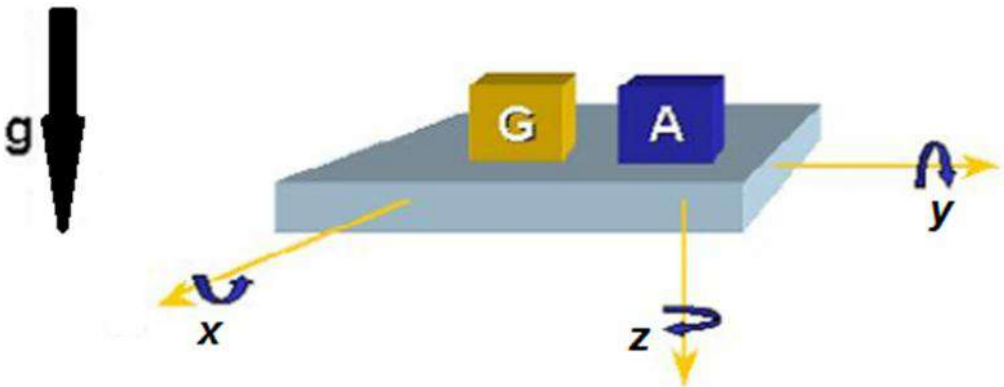
Pour les accéléromètres à asservissement, l'accélération est mesurée à la sortie d'une boucle à contre-réaction (asservissement) comportant un correcteur type P.I. (Proportionnel Intégral : type de correcteur améliorant la précision). Un capteur à détection de déplacement (type non asservis) permet la mesure de l'accélération immédiate. Elle est la valeur d'entrée de notre boucle d'asservissement. En sortie de cette boucle, l'accélération est obtenue par la lecture de l'énergie nécessaire à la force de rappel permettant le retour de la masse sismique à sa position initiale.

Dans les centrales inertielles, pour une application en guidage, utilisé généralement en aéronautique ou en astronautique, ce type de technologie est généralement favorisé. En effet, les mobiles ont une certaine masse et leur centre de gravité subit des vibrations de fréquence relativement faible, de l'ordre de 0 à 10Hz. Cela permet donc l'utilisation de capteurs à asservissement. Ceux-ci sont classés en fonction de leur force de rappel, qui peut être de type électromagnétique ou électrostatique. Ou bien en fonction de leur type de détection, qui peut être capacitive, inductive ou optique.

c. Accéléromètres non asservis :

Sur les capteurs de type non asservis (boucle ouverte), l'accélération est mesurée par son image « directe » : le déplacement de la masse sismique (masse d'effort ou encore masse d'épreuve) du capteur pour atteindre l'égalité entre la force de rappel et sa force d'inertie.

III.5.5.2. Concept de navigation inertiel :



Figure(III.11) - Concept de navigation inertiel.

L'INS utilise deux appareils; sont le gyroscope et l'accéléromètre afin de détecter un mouvement par rapport à un point d'origine. La navigation inertielle travaille en indiquant sa position au missile, au moment du lancement et comment il devrait bouger en termes de distance et rotation au cours de son vol.

L'ordinateur du missile utilise des signaux de l'INS pour mesurer ces mouvements et assure que le missile voyage le long de la trajectoire programmée. Les systèmes de navigation inertiels sont largement utilisés sur toutes sortes de véhicules aérospatiaux, incluant armes, avions militaires, avions de ligne commerciale et vaisseau spatial. Beaucoup de missiles utilisent des méthodes inertielles pour le guidage mi-course, par exemple : AMRAAM, Storm Shadow, Meteor, et Tomahawk.

III.5.5.3. Guidage en navigation à distance :

À la différence de la navigation inertielle, qui est contenue entièrement à bord du véhicule, la navigation à distance dépend des signaux externes de guidage. La première forme d'une telle navigation était l'utilisation de radiophares développés essentiellement pour le service aérien commercial. Ces balises transmettent des signaux radio reçus par un avion pendant le vol. Basé sur la direction et la force des signaux, l'avion peut calculer sa position par rapport aux balises et naviguer en conséquence.[16][17].

III.5.6. Global Positioning System (GPS) :

Le GPS ou bien système de localisation mondial ; est un système radionavigation d'une base spatiale tel qu'il est créé par U.S.Air Force (USAF), il peut détecter n'importe quel point à la terre. Le GPS a développé comme un système de force militaire.



Figure (III.12) - GPS satellites.

Le GPS a démontré son efficacité en domaine civil par ces diverses applications. La venue du système de positionnement global (GPS) a remplacé en grande partie des radiophares tant dans

l'utilisation militaire que dans civile. GPS se compose d'une constellation de 24 satellites en orbite géosynchrone autour de la Terre. Si un récepteur GPS à Terre peut recevoir les signaux d'au moins quatre de ces satellites, il peut calculer une position tridimensionnelle exacte avec une grande précision.[17],[18],[20].

Les missiles comme JSOW et la série de bombes guidées JDAM profitent des signaux GPS pour se localiser par rapport à leur cible. Au cours de son vol, l'arme utilise ces renseignements pour envoyer des ordres aux surfaces de contrôle et régler sa trajectoire.

III.5.6.1.Composition de GPS :

Les trois segments du GPS sont : l'espace, le contrôle, l'utilisateur

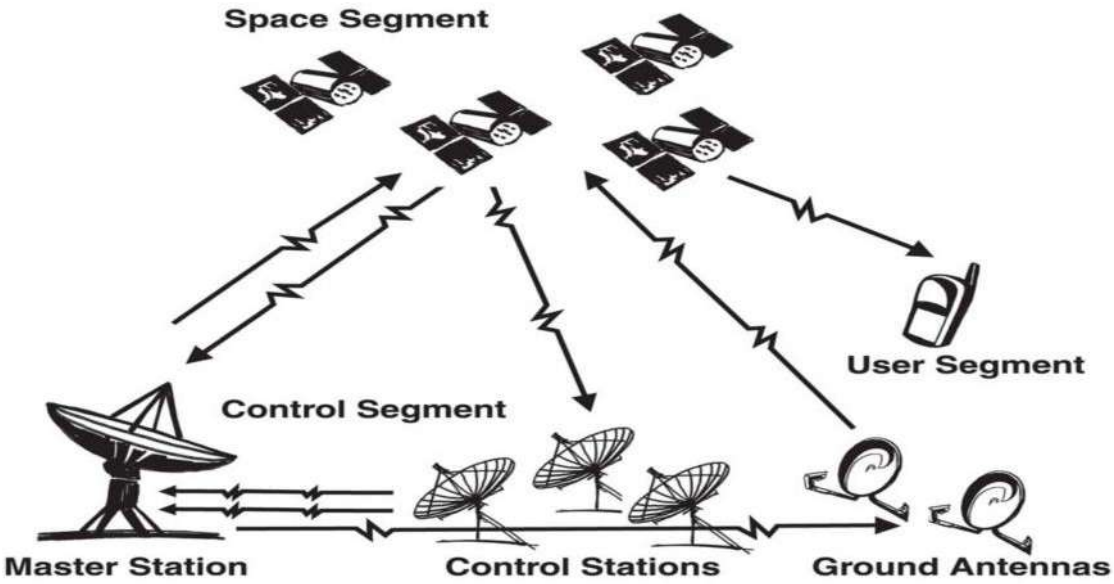


Figure (III.13)- Les trois segments du GPS.

- **Le segment spatial :** Il est constitué d'une constellation de 30 satellites NAVSTAR. Ces satellites évoluent sur 6 plans orbitaux ayant une inclinaison d'environ 55° sur l'équateur. Ils suivent une orbite quasi-circulaire à une altitude de 20 000 à 20 500 km qu'ils parcourent en 11 h 58 min 2 s, soit un demi-jour sidéral. Ainsi, les satellites, vus du sol, reprennent la même position dans le ciel au bout d'un jour sidéral.
- **Le segment de contrôle :** C'est la partie qui permet de piloter et de surveiller le système. Il est composé de cinq stations au sol du 50th Space Wing de l'Air Force Space Command. Leur rôle est de mettre à jour les informations transmises par les satellites (éphémérides, paramètres d'horloge) et contrôler leur bon fonctionnement.
- **Le segment utilisateur :** Il regroupe l'ensemble des utilisateurs civils et militaires qui ne font que recevoir et exploiter les informations des satellites ; de ce fait le système ne peut être saturé et le nombre maximum d'utilisateurs GPS est illimité.

III.5.6.2. Principe de fonctionnement :

Le GPS fonctionne grâce au calcul de la distance qui sépare un récepteur GPS de plusieurs satellites. Les informations nécessaires au calcul de la position des satellites étant transmises régulièrement au récepteur, celui-ci peut, grâce à la connaissance de la distance qui le sépare des satellites, connaître ses coordonnées. L'algorithme le plus utilisé pour les GPS est celui de Dijkstra qui, généralement, sert à résoudre ce problème dans plusieurs domaines.

III.5.7.Guidage en navigation céleste :

La navigation céleste est une des premières formes de navigation conçue par les humains et a abondé lors des voyages des grands explorateurs maritimes.

La navigation céleste utilise les positions des étoiles pour déterminer l'endroit, surtout la latitude, à la surface de la Terre. Cette forme de navigation exige la bonne visibilité des étoiles, donc est utilisé uniquement la nuit ou à la très haute altitude. Par conséquent, la navigation céleste est rarement appliquée aux missiles, bien qu'elle ait été utilisée sur beaucoup de missiles balistiques. Le missile compare les positions des étoiles à une image conservée dans la mémoire pour déterminer sa trajectoire de vol.

III.5.8. Guidage en navigation géophysique :

Peut-être encore plus vieux que la navigation céleste est la navigation géophysique, qui compte sur des mesures terrestres pour naviguer. Les méthodes qui tombent sous cette catégorie incluent l'utilisation de boussoles et de magnétomètres pour mesurer le champ magnétique de la Terre aussi bien que gravitomètres pour mesurer le champ gravitationnel de la Terre.

Tandis que ces méthodes n'ont pas trouvé beaucoup d'application sur les missiles, une technique plus utile est l'appariement de terrain. Cette méthode utilise un altimètre radar pour déterminer l'altitude du missile. Comparant les contours du terrain par rapport aux données stockées à bord du missile, le pilote automatique peut naviguer vers un endroit déterminé.

On appelle une technique apparentée mais plus exacte, l'appariement de scène numérique. Les missiles profitent de cette technique en comparant l'image vue au-dessous de l'arme aux photos satellites ou aériennes conservées dans la mémoire du missile. Si les scènes ne s'accordent pas, l'ordinateur envoie des ordres pour régler la course du missile jusqu'à ce que les images soient en accord. L'appariement de scène numérique est utilisé sur les missiles de croisière Tomahwak.

III.6. Radar :

III.6.1. Définition :

Le radar est un système qui utilise les ondes électromagnétiques pour détecter la présence et déterminer la position ainsi que la vitesse d'objets. Les ondes envoyées par l'émetteur sont réfléchies par la cible, et les ondes de retour sont captées et interprétées par un récepteur, souvent situé au même endroit que l'émetteur. La distance et la position de l'objet volant sont estimée grâce au temps de retour du signal et à la position angulaire de l'antenne. La vitesse est mesurée à partir du décalage de fréquence du signal de retour.

III.6.2. Origine du mot "radar" :

Le mot radar est un néologisme issu de l'acronyme anglais RAdio Detection And Ranging, que l'on peut traduire par « détection et estimation de la distance par ondes radio », « détection et télémétrie radio », ou plus simplement « radiorepérage ». Cet acronyme d'origine américaine - qui est aussi un palindrome - a remplacé le sigle anglais précédemment utilisé : RDF (Radio Direction Finding, que l'on peut traduire par « radiocompas »). [21].



Figure (III.14) - Principe du sondage radar.

III.6.3. Composantes d'un système radar :

Un radar est formé de différentes composantes:

- L'émetteur qui produit l'onde radio.
- Un guide d'onde qui amène l'onde vers l'antenne sur les radars à hyperfréquences (fréquences supérieures au gigahertz).
- Le duplexeur, un commutateur électronique, dirige l'onde vers l'antenne lors de l'émission puis le signal de retour depuis l'antenne vers le récepteur lors de la réception quand on utilise un radar monostatique.
- L'antenne dont le rôle est de diffuser l'onde électromagnétique vers la cible avec le minimum de perte.

- Le récepteur qui reçoit le signal incident (cible - antenne - guide d'ondes - duplexeur), le fait émerger des bruits radios parasites, l'amplifie, le traite.
- Un étage de traitement de signal permettant de traiter le signal brut afin d'en extraire des données utiles à l'opérateur (détection, suivi et identification de cible; extraction de paramètres météorologiques, océanographiques, etc.). Le tout est contrôlé par le système électronique du radar, programmé selon un logiciel de sondage. Les données obtenues sont alors affichées aux utilisateurs.

III.6.4. Types de radar :

III.6.4.1. Configuration monostatique :

L'émetteur et le récepteur du radar partagent une électronique et une antenne commune permet de réduire l'encombrement et les coûts de synchronisation entre l'émetteur et le récepteur, ce qui explique pourquoi l'immense majorité des radars sont monostatiques. En contrepartie, seul le signal rétrodiffusé par la cible est reçu par le radar. D'autre part, dans un contexte militaire, l'émetteur peut être détecté par l'ennemi et détruit.

III.6.4.2. Configuration bistatique :

Le récepteur est distinct de l'émetteur et totalement passif, donc moins facilement détectable par un ennemi potentiel. En plus d'émetteurs radar spécialisés, il est également envisagé d'utiliser des émetteurs dits d'opportunité comme des antennes-relais GSM, ou de télévision, ou des satellites GPS dont le signal est détourné de leur utilisation primaire pour effectuer à moindres frais et de manière discrète un travail de mesure habituellement laissé aux radars. Enfin, la possibilité de positionner l'émetteur et le récepteur à volonté permet d'explorer d'autres configurations de réflexion permettant d'augmenter le volume d'informations disponibles sur la cible.

Lorsque l'on parle de radar bistatique, on suppose implicitement que l'émetteur et le récepteur sont réellement séparés. Si l'émetteur et le récepteur sont distincts physiquement (antennes différentes) mais situés presque au même endroit, le signal reçu est qualitativement proche d'un signal monostatique. On parle ainsi de configurations fortement bistatiques ou faiblement bistatiques pour intégrer ces deux possibilités.

III.7. Conclusion :

Ce chapitre tourne autour du terme missile, tel qu'il nous a donné une idée agréable et proche contient la définition puis ses propriétés. Bien que nous avons vu les manières de guidages

CHAPITRE IV :

RESULTATS ET SIMULATIONS

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, on va présenter les résultats de simulation du modèle de trajectoire de missile et son estimé basé sur le filtre de kalman comparaissant avec le filtre de kalman étendu à l'aide d'un langage développé et modeste ; dit le langage matlab pour la simulation des données et obtenir les résultats numériques ainsi que les tracés des courbes de signal actuelle et d'estimation.

IV.2. Description du langage Matlab :

IV.2.1. Définition :

Matlab (MATrix LABoratory) est un logiciel pour le calcul scientifique, orienté vers les vecteurs et les listes de données. Matlab est un langage interprété, chaque ligne d'un programme Matlab est lue, interprétée et exécutée. [22].

IV.2.2. Accès au Matlab :

Pour entrer dans Matlab cliquez sur Start/Programmes/Matlab sous l'environnement Windows, ou tapez matlab au prompt de la shell sous Unix. Matlab se présente avec un environnement interactif et un prompt (généralement >>) dans lequel on peut introduire des commandes. Par exemple, pour sortir de Matlab tapez la commande:

```
>> quit
```

IV.3. Le modèle de missile :

Horizontalement :

Commençant par la loi d'inertie (2^{ieme} loi de Newton) [24].

$$F_x.\vec{\imath} = m.a_x.\vec{\imath} = m.\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{\imath} = m.\frac{dv_x}{dt}.\vec{\imath} = \vec{0} \qquad (IV.1)$$

Avec $m \neq 0$ où a_x représente la valeur absolue de l'accélération horizontale.

Ce qui permet d'écrire $\frac{dv_x}{dt} = 0$. Par intégration directe : $v_x(t) = K_{1x}$ où K_{1x} est une constante.

Détermination de la constante : $v0x = vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha)$.

Donc $v = x(t) = v0 \cdot cos(\alpha)$.

Alors $\frac{dx}{dt} = v_0.\cos(\alpha)$ qui par intégration donne $x(t) = v_0.\cos(\alpha).t + K_{2x}$.

Les conditions initiales permettent d'écrire

$$x(t) = v_0.\cos(\alpha).t \qquad (IV.2)$$

Verticalement :

La même loi pour trouver la coordonnée verticale [24].

$$F_y.\vec{j} = m.a_y.\vec{j} = m.\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} = m.\frac{dv_y}{dt}.\vec{j} = m.g.\vec{j} \qquad (IV.3)$$

Avec $m \neq 0$, où a_y représente la valeur absolue de l'accélération verticale et $g = 9.81\ m.s^{-1}$ une approximation de l'accélération de la pesanteur terrestre.

Ce qui permet d'écrire $\frac{dv_y}{dt} = -g$

On intègre directement et on trouve : $v_y(t) = -g.t + K_{1y}$, où K_{1y} est une constante.

Détermination de la constante : $v_{0y} = v_y(0) = v_0.\sin(\alpha)$.

Donc $v_y(t) = -g.t + v_0.\sin(\alpha)$.

Alors $\frac{dy}{dt} = -g.t + v_0.sin(\alpha)$ après l'intégration ; on trouve :

$$y = \left(-\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.sin(\alpha).t\right) + K_{2y} \qquad (IV.4)$$

Les conditions initiales permettent d'écrire :

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g.t^2 + v_0.sin(\alpha).t \qquad (IV.5)$$

En éliminant *t* entre les expressions *(VI.2)* et *(VI.5)*, on trouve l'équation de trajectoire d'un missile, qui est la suivante :

$$y(x) = -\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{v_0^2.cos^2(\alpha)} + x.\tan(\alpha) \qquad (IV.6)$$

Et notre modèle de missile est comme suit :

$$\begin{cases} x(t) = v_0.\cos(\alpha).t & (IV.7) \\ y(t) = -\frac{1}{2}\,g.t^2 + v_0.sin(\alpha).t & (IV.8) \end{cases}$$

Et la figure (IV.1) montre la trajectoire du missile

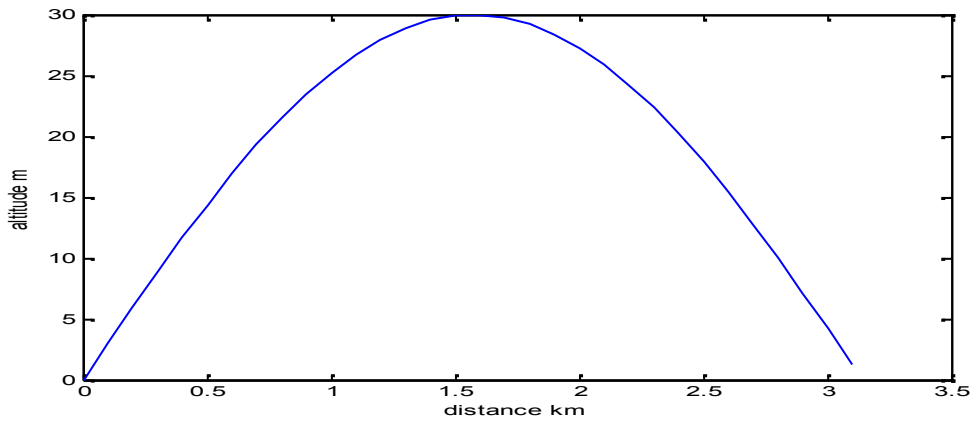


Figure (IV.1) - Trajectoire de missile.

IV.4. Les résultats de simulation avec le filtre de kalman et le filtre de kalman étendu:

Dans cette partie, on va présenter les résultats des simulations de l'estimation pour la première trajectoire.

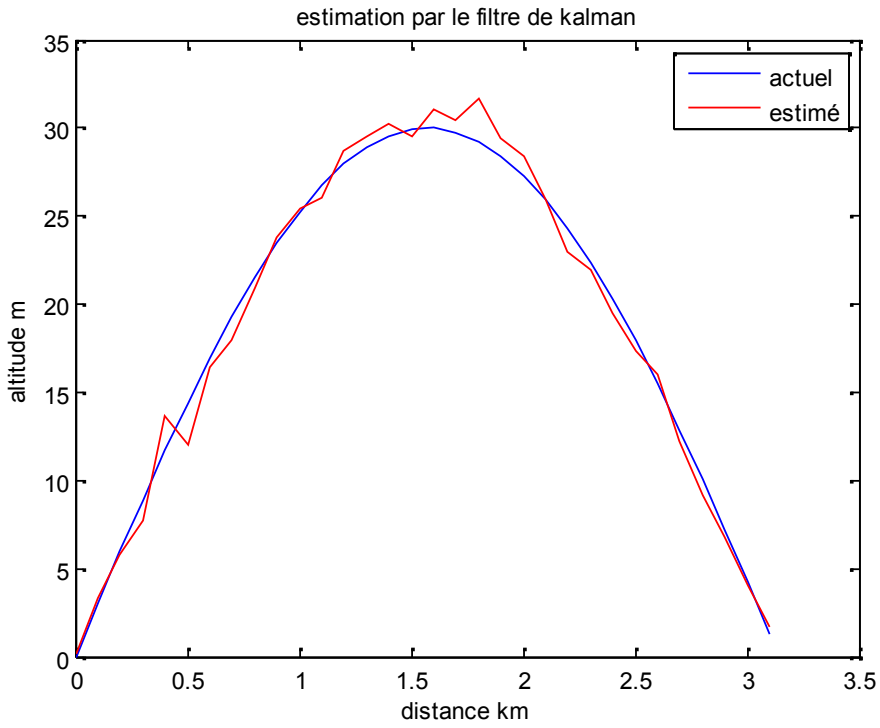


Figure (IV.2) - Estimation du trajectoire du missile par le filtre de kalman.

Cette figure représente la trajectoire d'un missile et son estimé par le filtre de kalman , et on voit que la trajectoire est bien estimée.

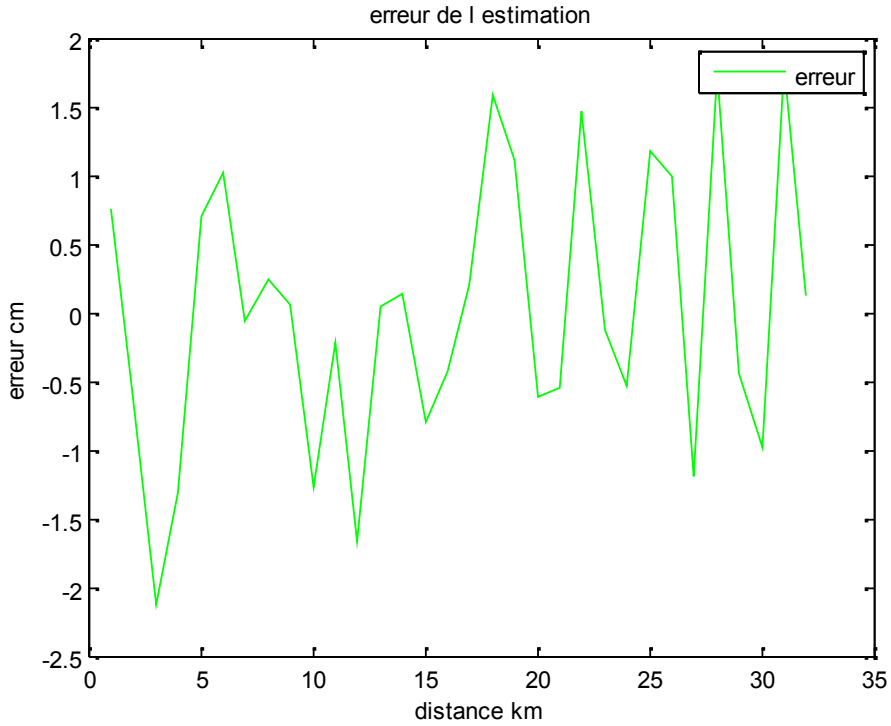


Figure (IV.3) - L'erreur de l'estimation.

Cette figure représente l'erreur de l'estimation ; qui est très petite et en tour de zéro.

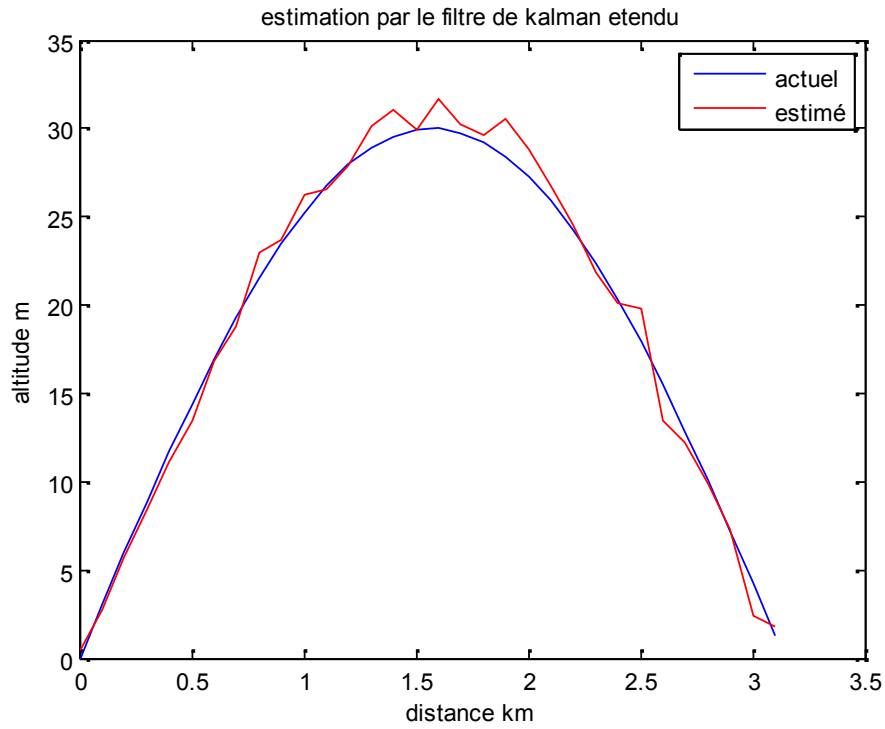


Figure (IV.5) - L'estimation de la trajectoire d'un missile par le filtre de kalman étendu.

L'estimation suivant le filtre de kalman étendu est représenté dans cette figure, et la trajectoire est bien estimée.

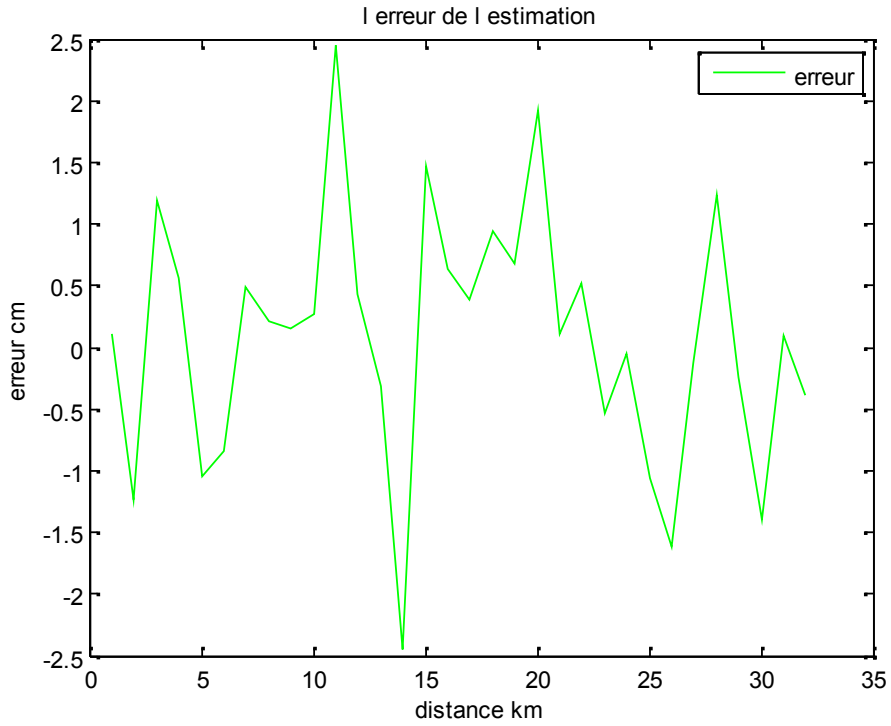


Figure (IV.6) - L'erreur de l'estimation par le filtre de kalman étendu.

Cette figure représente l'erreur de l'estimation ; et elle montre qu'elle est petite et autour de zéro.

Le deuxième trajectoire est la décroissance d'un missile, qui est représenté dans la figure suivante :

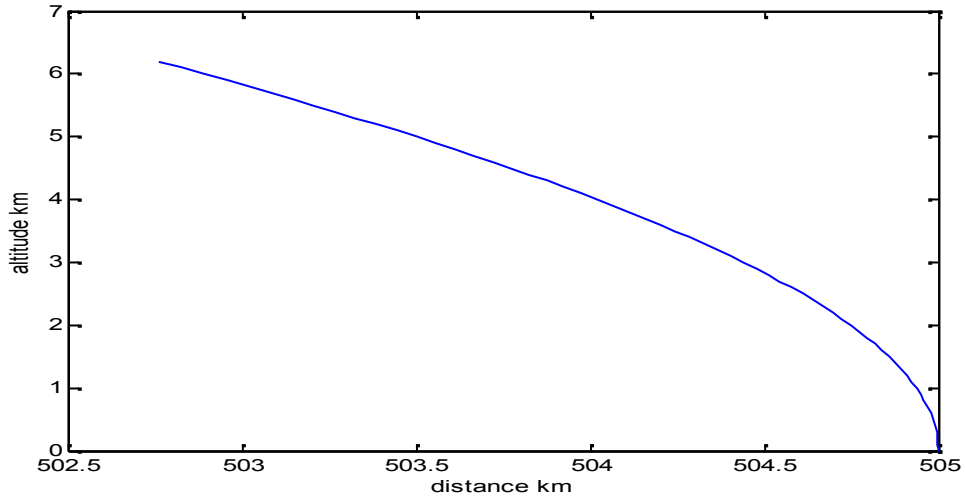


Figure (IV.8) – Trajectoire de décroissance d'un missile.

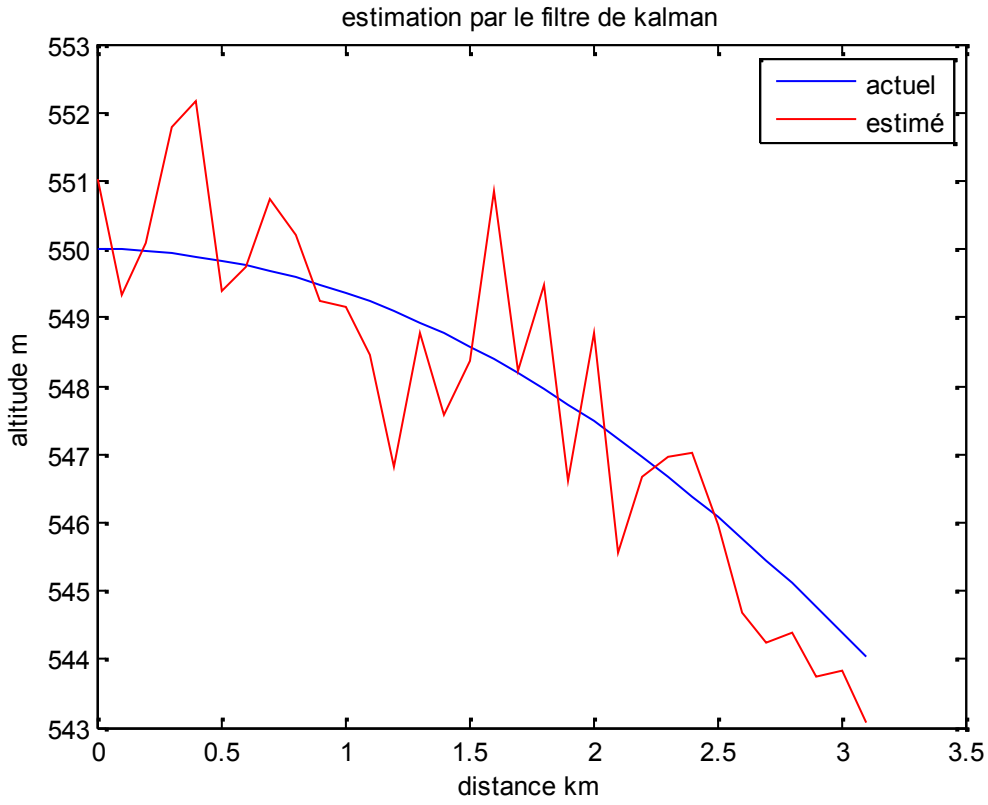


Figure (IV.9) - L'estimation de trajectoire de décroissance d'un missile par le filtre de kalman.

Cette figure représente l'estimation de trajectoire de décroissance d'un missile par le filtre de kalman, et on note que la trajectoire est très bien estimée.

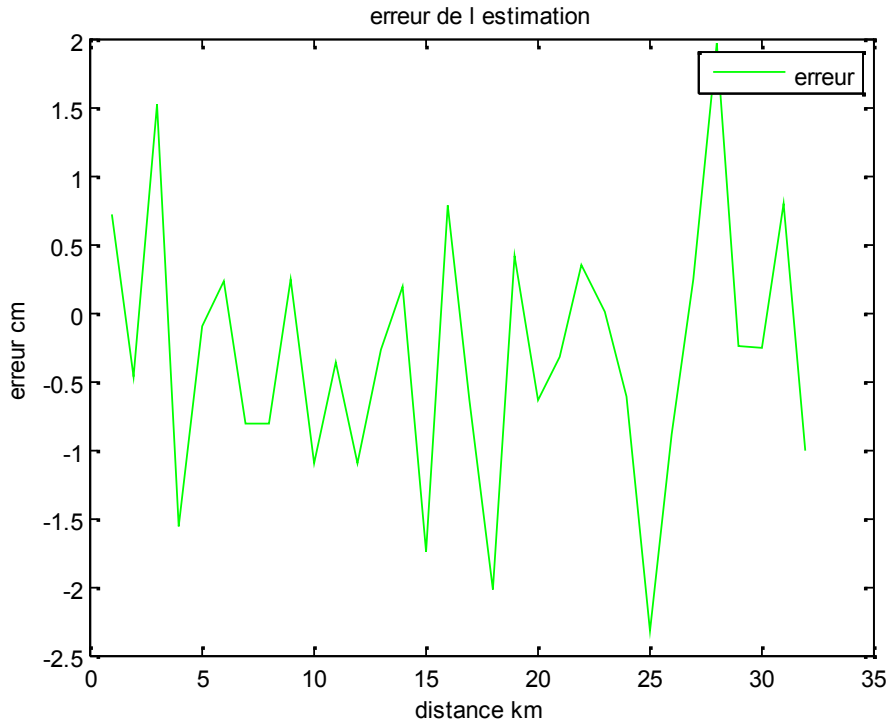


Figure (IV.10) - L'erreur de l'estimation de trajectoire de décroissance d'un missile par le filtre de kalman.

Cette figure représente L'erreur de l'estimation de trajectoire de décroissance d'un missile par le filtre de kalman, est-elle s'apparait très petite.

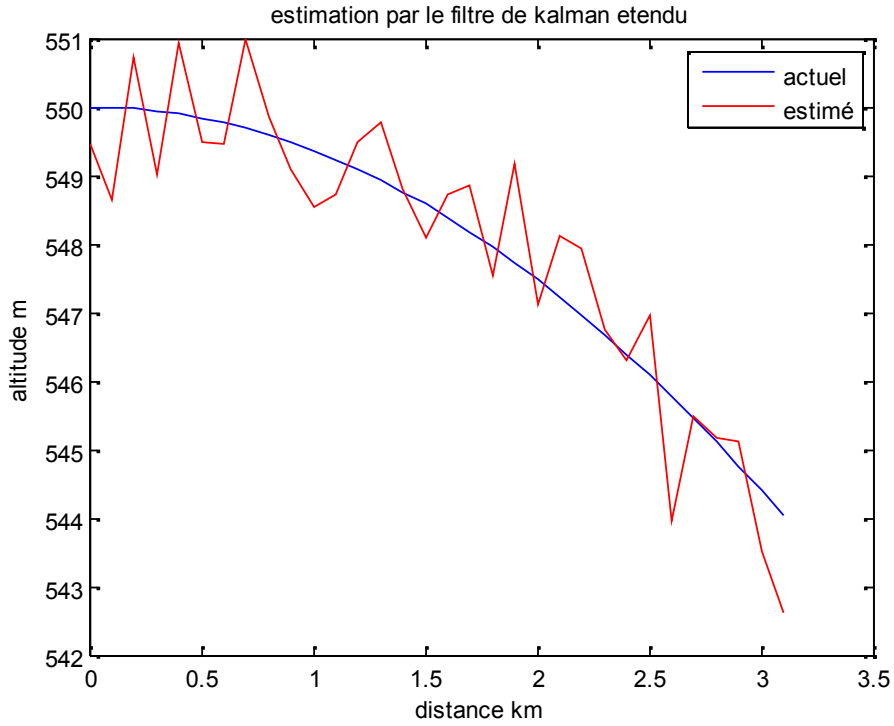
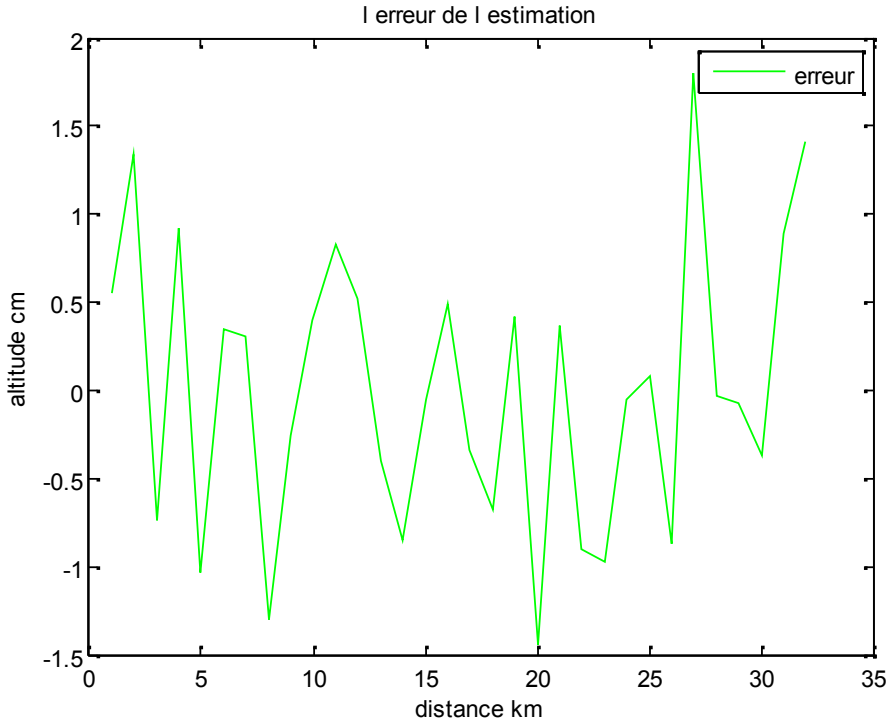


Figure (IV.12) - Estimation de la trajectoire de chute d'un missile par le filtre de kalman étendu.

Cette figure représente l'estimation de la trajectoire de chute d'un missile par le filtre de kalman étendu.



Fig(IV.13) : L'erreur de l'estimation de trajectoire de chute d'un missile par le filtre de kalman étendu.

Cette figure montre l'erreur de l'estimation de trajectoire de chute d'un missile par le filtre de kalman étendu, est qu'elle soit proche au zéro..

L'erreur carrée soit toujours positive, ne change sauf que l'amplitude.

IV.5. Comparaison entre l'estimation par le filtre de kalman et le filtre de kalman étendu :

Le premier point apparait si on comparait les résultats des deux estimateurs, c'est l'approximation d'estimation ; telle qu'elle surgit plus précise si on utilise l'algorithme de filtre de kalman étendu (EKF) d'ailleurs elle est moins précise si on utilise l'algorithme de filtre de kalman (KF). Cette estimation a un effet direct sur l'erreur (amplitude) de coté, et sur l'erreur carrée de l'autre coté.

IV.6. Conclusion :

Après le travail fait avec les deux algorithmes d'estimation ; le filtre de kalman (KF) et le filtre de kalman étendu (EKF) sur deux trajectoires choisis le premier d'un missile est le deuxième est de chute ou décroissance d'un missile, on a pu faire un sommaire de comparaison son contenu est que le deuxième algorithme (EKF) a donné une bonne estimation et précise comparant à celle donnée par l'algorithme (KF).

CONCLUSION GENERALE :

Dans ce travail on a étudié les systèmes linéaires qui sont très importants dans différents système automatique coté stabilité et aussi les systèmes non linéaires. Et on a étudié aussi le filtre de kalman étendu (EKF) qu'est le meilleure filtre par rapport le filtre kalman classique, car il donne des très bonne résultats dans le cadre des systèmes faiblement non linéaires.

Mais lorsque les systèmes sont fortement non linéaires, les performances du filtre de kalman étendu sont mauvaises. Et on a présenté le filtre de kalman (KF) et on a parlé aussi autour de terme missile, tel qu'il nous a donné une idée agréable et proche contient la définition puis ses propriétés. Bien que nous avons vu les manières de guidages.

A la fin de ce travail, nous avons obtenir des informations globale sur le sujet discutable.

D'ailleurs, on a pu faire l'étude comparative et atteindre les résultats de comparaison, et on a aussi découvrir un grand domaine de programmation ; qui sont les estimateurs et la manière d'évolution de ce type des programmes. Par contre, on conclut que la comparaison nous a aidée à choisir les programmes qui ont des bonnes performances.

Enfin, on dit que le travail est ouvert pour le traduit avec d'autres simulateurs ou bien d'autres algorithmes.

Listes des annexes :

Annexe A :

1. **Définitions**……i
   - **1.1.Signal** ……i
   - **1.2.Bruit** ……..i
   - **1.3.Le traitement de signal** ……i
   - **1.4.Relation entrée-sortie** ……..i
2. **Classification des systèmes** ……...i
   - **2.1.Classification phénoménologique** ……..i
   - **2.2.Classification énergétique** ……ii
   - **2.3.Classification morphologique** ……...ii
3. **Signaux particuliers** ……iii
   - **3.1.Fonction signe** ……...iii
   - **3.2.Fonction échelon** ……...iii
   - **3.3.Fonction rampe** ……iii
   - **3.4.Fonction rectangulaire ou porte** ……..iii
   - **3.5.Fonction triangulaire** ……....iv
   - **3.6.Impulsion de Dirac** ……iv
   - **3.7.Fonction sinus cardinal** ……...iv

Annexe B

1. **Définition** ……..v
2. **Principe** …….....v
3. **Linéarité** ……....v
4. **Sensibilité à conditions extérieures** ……v
5. **Bruit de mesure** …….....v
6. **Hystérésis** …….....vi
7. **Types de capteurs** ……vi
   a. **Capteurs analogiques** ……vi
   b. **Capteurs numériques** ……...vii
   c. **Capteurs logiques** …….....vii
8. **Types de détection** …….....vii

Annexe C

1. **Définition de filtre** …….....viii
2. **Paternité du filtre de kalman** …….....viii
3. **Filtre de kalman** …….....viii
   - **3.1. Prédiction** …….....ix
   - **3.2. Mise à jour** …….....ix
4. **Application** …….....x

ANNEXE A

GENERALITE SUR LES SIGNAUX

1. Définitions :

1.1. Signal :

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie sa source à son destinataire. La description mathématique des signaux est l'objectif de la théorie du signal. Elle offre les moyens d'analyser, bien que concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

1.2. Bruit :

Un bruit est un phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal, tel qu'il va déformer la structure du signal.

1.3. Le traitement de signal :

C'est la discipline technique s'appuyant sur les ressources de l'électronique et de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs de l'information. Son application se situe dans tous les domaines concernés par la transmission des informations par ces signaux.

1.4. Relation entrée – sortie :

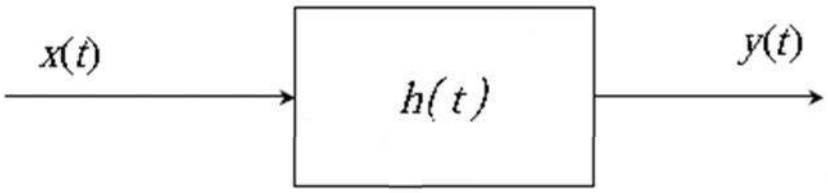


Figure (A.1) - Relation entrée-sortie.

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$x(t)$: Entrée du système.

$h(t)$: Fonction du système.

$y(t)$: Sortie du système.

2. Classification des systèmes

2.1. Classification phénoménologique :

On considère l'évolution du signal en fonction du temps, il apparait deux types des signaux :

- **Les signaux déterministes (certains) :** Leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. Cette classe contient les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc.
- **Les signaux aléatoires :** Leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire

2.2. Classification énergétique :

On considère l'énergie des signaux. On distingue :

- **Les signaux à énergie finie :** il possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie.
- **Les signaux à puissance moyenne finie :** il possède une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable.
- **Energie et puissance d'un signal :**

  Energie d'un signal $x(t)$: $W_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$.

  Puissance d'un signal $x(t)$: $P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$.

2.3. Classification morphologique :

On distingue les signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.

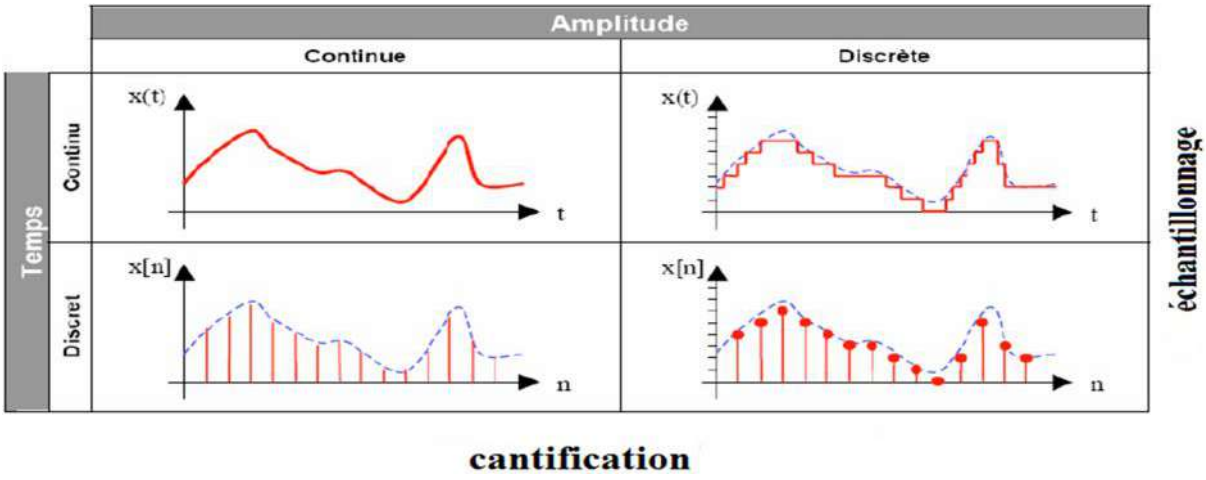


Figure (A.2) - Classification monographique.

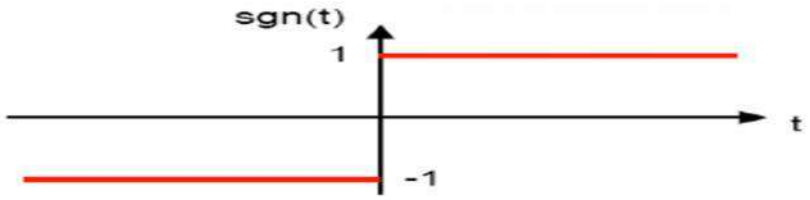
Donc on a quatre classes de signaux, sont :

- **Les signaux analogiques :** dont l'amplitude et le temps sont continus.
- **Les signaux qualifiés :** dont l'amplitude est discrète et le temps continu.
- **Les signaux échantillonnés :** dont l'amplitude est continue et le temps discret.
- **Les signaux numériques :** dont l'amplitude et le temps sont discrets.

3. Signaux particuliers :

3.1. Fonction signe :

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t > 0 \end{cases}$$



Figure(A.3) - Fonction signe.

3.2. Fonction échelon :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$

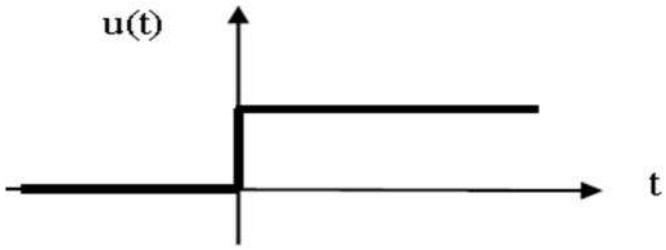


Figure (A.4) - Fonction échelon.

3.3. Fonction rampe :

$$r(t) = t.u(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t \leq 0 \\ 1 & pour \quad t > 0 \end{cases}$$

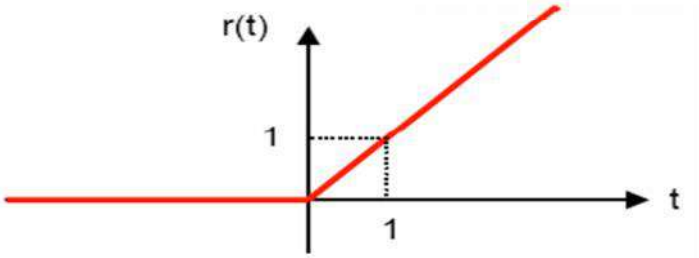


Figure (A.5) : Fonction rampe.

3.4. Fonction rectangulaire ou porte :

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & pour \quad |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & pour \quad |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

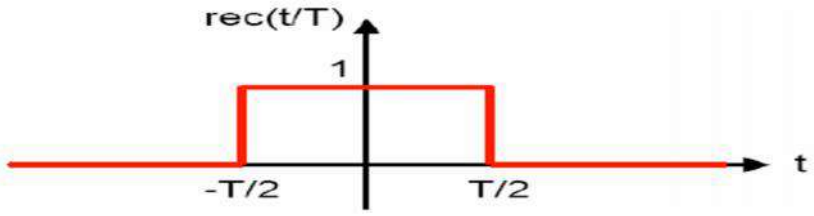


Figure (A.6) - Fonction rectangulaire.

3.5. Fonction triangulaire :

$$\begin{cases} tri(t) = 1 - |t| & si \quad |t| < 1 \\ tri(t) = 0 & si \quad |t| > 1 \end{cases}$$

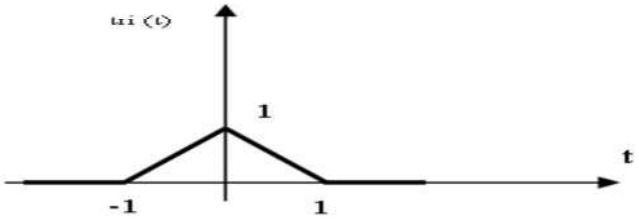


Figure (A.7) - Fonction triangulaire.

3.6. Impulsion de Dirac :

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & pour \quad t = 0 \\ 0 & pour \quad t \neq 0 \end{cases}$$

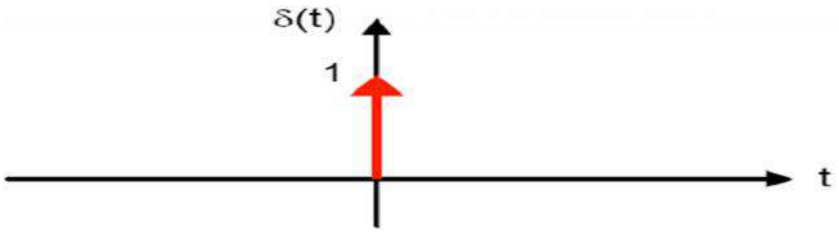


Figure (A.8) - Impulsion de Dirac.

3.7. Fonction sinus cardinal :

$$sinc(t) = \frac{\sin\ (\pi t)}{\pi t}$$

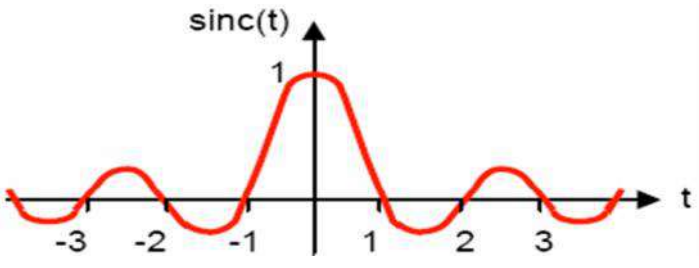


Figure (A.9) - Fonction sinus cardinal.

ANNEXE B

LES CAPTEURS

1. Définition :

Un capteur est un système permettant un couplage entre une grandeur physique à mesurer et une grandeur physique mesurable encore appelée signal de mesure.

2. Principe :

Notons y la grandeur à mesurer et y_m le signal de mesure. Idéalement, on s'attend à ce que le signal de mesure soit une fonction aussi simple que possible de la grandeur à mesurée. Notons $y_m = f(y)$ cette fonction. Il faut que cette fonction soit inversible, ce qui permet de déterminer la grandeur physique à partir du signal : $y = f^{-1}(y_m)$. Par exemple, si le signal de mesure varie linéairement en fonction de la grandeur physique, c'est-à-dire que la fonction s'écrit $f(y) = a * y$, alors on détermine la grandeur par $y_m = \frac{1}{a} y$.

3. Linéarité :

Il est courant que la caractéristique d'un capteur soit légèrement non-linéaire. Par exemple, au delà d'une certaine valeur, un phénomène de saturation peut être rencontré. Ces non-linéarité, si elles ne sont pas compensées, limite la précision du capteur. Dans une certaine limite, ces non-linéarités peuvent être compensées.

4. Sensibilité aux conditions extérieures

On souhaite que le signal de mesure ne soit sensible qu'à la grandeur à mesurer.

En réalité, il sera sans doute sensible à d'autres phénomènes (par exemple la température). Notons z un phénomène perturbateur. La loi de mesure s'écrit alors $y_m = g(y, z)$ et, en théorie, il est impossible de déterminer y sans connaitre z. Notons $\sigma_y(y, z) = \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}$ la sensibilité par rapport à la grandeur à mesurer et $\sigma_z(y, z) = \frac{\partial g(y,z)}{\partial z}$ la sensibilité par rapport à la perturbation.

5. Bruit de mesure :

La mesure peut-être entachée d'un bruit de mesure considéré comme un signal stochastique (aléatoire). Notons e cette erreur ; la mesure s'écrit alors $y_m = f(y) + e$ si on considère une erreur additive. En considérant des mesures effectuées aux instants t_k, les mesures s'écrivent

$y_m(t_k) = f(y(t_k)) + e(k)$ ou $e(k)$ sont des réalisations d'un processus aléatoire. Pour caractériser ce bruit de mesure, on peut préciser différentes propriétés

- Un signal est stationnaire si ses propriétés n'évoluent pas dans le temps.
- L'espérance $\xi(e(k))$ est estim_ee en prenant la moyenne sur un nombre important de mesures.
- La variance est $\sigma^2 = \xi(e(k) - \xi(e(k)))^2$
- L'écart-type σ est égal à la racine-carrée de la variance.
- Un bruit est gaussien s'il sa distribution statistique est gaussienne.
- Un bruit est banc si son spectre est uniforme.
- Si le bruit n'est pas blanc, il être coloré, c'est-à-dire que la puissance varie en fonction de la puissance.

Par nature, il n'est pas possible de compenser une erreur aléatoire, à moins qu'elle soit issue d'un modèle. Par contre, des techniques de filtrages peuvent être appliquées afin de réduire son impact.

6. Hystérésis :

Partant d'une valeur de la grandeur à mesurée $y1$ pour laquelle la mesure donne y_m1, que l'on fasse ensuite varier y puis que l'on revienne à la valeur initiale $y1$ mais que dans ce cas on obtienne une nouvelle valeur de la mesure y_m2 différente de la première. On se trouve alors dans une situation où à une même valeur de la grandeur physique correspond plusieurs valeurs du signal de mesure. Inversement, pour une même valeur du signal de mesure peut correspondre plusieurs valeurs de la grandeur physique, ce qui rend difficile le problème de mesure.

Le phénomène que nous venons de décrire correspond généralement à une hystérésis. Il se rencontre notamment en magnétisme (hystérésis de la courbe induction/champ magnétique) et dans les jauges de déformation généralement utilisées pour les mesures de force.

7. Types de capteurs :

7.1. Capteurs analogiques :

La sortie est une grandeur électrique dont la valeur est proportionnelle à la grandeur physique mesurée par le capteur. La sortie peut prendre une infinité de valeurs continues. Le signal des capteurs analogiques peut être du type :

- Sortie tension ;
- Sortie courant ;
- Règle graduée, cadran, jauge (avec une aiguille ou un fluide) ;
- etc.

7.2. Capteurs numériques :

La sortie est une séquence d'états logiques qui, en se suivant, forment un nombre. La sortie peut prendre une infinité de valeurs discrètes. Le signal des capteurs numériques peut être du type :

- Train d'impulsions, avec un nombre précis d'impulsions ou avec une fréquence précise.
- Code numérique binaire.
- Bus de terrain.

  Etc.

7.3. Capteurs logiques :

La sortie est un état logique que l'on note 1 ou 0. La sortie peut prendre ces deux valeurs. Le signal des capteurs logiques peut être du type :

- courant présent/absent dans un circuit.
- potentiel, souvent 5 V/0 V.
- DEL allumée/éteinte.
- signal pneumatique (pression normale/forte pression) ;
- etc.

8. Type de détection :

- **détection avec contact** (le capteur doit entrer en contact physique avec un phénomène pour le détecter)
- **détection sans contact** (le capteur détecte le phénomène à proximité de celui-ci).

ANNENE C

LE FILTRE DE KALMAN

1. Définition de filtre :

Opération qui consiste à estimer l’´état d’un système dynamique à partir d’observations partielles et bruitées.

2. Paternité du filtre de kalman :

Le filtre de Kalman doit son nom à Rudolf Kalman bien que Thorvald Nicolai Thiele et Peter Swerling aient développé un algorithme similaire avant lui. La paternité du filtre fait l'objet d'une petite controverse dans la communauté scientifique. Le filtre a été décrit dans diverses publications par Swerling (1958), Kalman (1960) et Kalman-Bucy (1961).

Stanley Schmidt est reconnu comme ayant réalisé la première implémentation du filtre. C'était lors d'une visite de Rudolf Kalman au NASA Ames Research Center qu'il vit le potentiel de son filtre pour l'estimation de la trajectoire pour le programme Apollo. Ceci conduisit à l'utilisation du filtre dans l'ordinateur de navigation.

Une grande variété de filtres de Kalman ont été, depuis, développés à partir de la formulation originale dite filtre de Kalman simple. Schmidt développa le filtre de Kalman étendu, Bierman, Thornton et bien d'autres développèrent toute une gamme de filtres racine carrée. Le filtre le plus utilisé est vraisemblablement la phase-locked loop, largement répandue dans les radios, ordinateurs, équipement de communication, etc.

3. Filtre de kalman :

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seule l'estimation de l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires.

L'état du filtre est représenté par 2 variables :

- $\hat{X}_{(k|k)}$ l'estimation de l'état à l'instant *k*
- $P_{(k|k)}$ La matrice de covariance de l'erreur (une mesure de la précision de l'état estimé).

Le filtre de Kalman a deux phases distinctes : Prédiction et Mise à jour. La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation de

l'état courant. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

3.1. Prédiction :

$$\hat{x}_{(K|K-1)} = F_K \hat{x}_{(K-1|K-1)} + B_k u_{k-1}$$ (État prédit)

$$P_{(K|K-1)} = F_K P_{(K-1|K-1)} F_K^T + Q_k$$ (Estimation prédite par la covariance)

Avec

- F_K : matrice qui relie l'état précédent k-1 à l'état actuel k.
- u_k : entrée de commande.
- B_k : matrice qui relie l'entrée de commande u à l'état x.
- $P_{(K|K-1)}$: matrice d'estimation a priori de la covariance de l'erreur.
- Q_k : matrice de covariance du bruit de processus.

3.2. Mise à jour :

$$\tilde{y}_k = z_k - H_k \hat{x}_{(k|k-1)}$$ Innovation

$$S_k = H_k P_{(k|k-1)} H_k^T + R_k$$ Covariance de l'innovation

$$K_k = P_{(k|k-1)} H_k^T S_k^{-1}$$ Gain de Kalman optimal

$$\hat{x}_{(k|k)} = \hat{x}_{(k|k-1)} + K_k y_k$$ État mis à jour

$$P_{(k|k)} = (I - K_k H_k) P_{(k|k-1)}$$ Covariance mise à jour

Avec :

- z_k : observation ou mesure du processus à l'instant k
- H_k: matrice qui relie l'état $\mathbf{x}_k$ à la mesure $\mathbf{z}_k$
- P_k : matrice d'estimation *a posteriori* de la covariance de l'erreur
- R_k : matrice de covariance du bruit de mesure
- I : matrice identité aux dimensions adéquates

La formule de la mise à jour de la covariance est valide uniquement pour un gain de Kalman optimal. L'utilisation d'autres valeurs de gains nécessite des formules plus complexes.

4. Application :

Le filtre de kalman est applicable dans certains domaines, on site quelques-uns :

- Pilote automatique
- Centrale inertielle
- Systèmes de localisation dynamique
- Cartographie et localisation simultanées (SLAM)
- Système de positionnement par satellites.

BIBLIOGRAPHIQUES :

[1] Systèmes asservis non linéaires**:** Université Joseph Fourier, Aout 2006.

[2] Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état : Yves Granjon, l'ENSEM à Nancy

[3] Systèmes non-linéaires : Université Aix-Marseille 1, R. Herbin, Février 2012

[4] Analyse et Commande des systèmes non –linéaires : J. Lévine, Centre Automatique et Systèmes école des Mines de Paris, Mars 2004

[5] Systèmes linéaires **:** Bernard Ycart, Université Joseph Fourier, Novembre 2011

[6] Systèmes linéaires : Lycée Chateaubriand - BCPST 1B.

[7] Systèmes linéaires : Université Paris-Dauphine, Novembre 2009.

[8] Traitement numérique des signaux aléatoires : Steven L. Kay ; l'université de Rhodes Island.

[9] Commande robuste et systèmes non-linéaires : Launay Ffédéric.

[10] Etude de cas : Filtre de Kalman :Casasola Enzo, Clanzig Kellya, Deville Thibaut ;Mars 2010.

[11] Filtrage de Kalman : INRS-EMT J. Benesty.

[12] Filtrage de données accélérométriques et GPS par le filtre de kalman : Mame Awa Loum DIOP**.**

[13] filtre de kalman étendu et filtre de kalman sans parfums, Bayasli Omar, 2005.

[14] Filtre de Kalman : Nicolas Petit , Centre Automatique et SystèmesUnité Mathématiques et Systèmes, MINES ParisTech, Avril 2011.

[15] Le guidage des missiles : EVAC , Octobre 2010

[16] Missile guidance and control : GMM , 2001.

[17] Le système GPS : Gérard Debionne, Janvier 2007.

[18] Système GPS : Ministère des Ressources naturelles, de la Faune et des Parcs , Décembre 2004.

[19] An introduction to inertial navigation : Olivier.J.Woodman, Aout 2007.

[20] Global Positioning System Standard Positioning Service Signal Specification : NAVASTAR , Juin 1995.

[21] Radar fundamentals: Naval Postgraduate School, David Jenn,

[22] Elément du Matlab : Université de Genève , Alfred A. Manuel, Octobre 2004.

[23] Le bruit dans les systèmes électroniques : Jean Phillipe Muller, Juillet 2002.

[24] Balistique, trajectoire d'un projectile: Juin 2007.

[25] Généralités sur les signaux : Sondes Abdelmouleh.

[26] Les capteurs : H. Buyse, Université catholique de Louvain.

[27] Cours des capteurs : Karim Elmokhtari, Faculté des Sciences et Techniques, Tanger, Novembre 2004.