REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE Dr : YAHIA FARES DE MÉDÉA



FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
Dept de Génie des procèdes et environnement
Projet de fin d'étude en vue de l'obtention du Diplôme de Master
Filière : Génie des Procédés

OPTION : **pollution chimique et gestion environnementale**

Thème :

Etude des transferts de chaleur et de masse dans une cavité carrée inclinée remplie d'un milieu poreux.

Présenté par :
ALLOUTI HAFIDHA
HERICHE YASMINA

Promoteur :
M^r^ . HADIDI. N.

Promotion : 2012 / 2013

Remerciement

*Ce travail n'aurait pu se réaliser sans l'aide de *Allah le tout puissant* qui nous a donné la volonté, la patience et surtout le courage de surmonter tous les problèmes afin de terminer ce travail, puis celle de toutes les personnes qui ont contribuées de prés et de loin.*

Nos sincères remerciements s'adressent à :

- Notre promoteur Mr Hadidi .N pour avoir accepté la charge d'encadrer ce travail et pour tous ses conseils et ses observations.

- Nos remerciements s'adressent aux honorables membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'évaluer ce mémoire :

- *M qui nous a fait l'honneur de présider notre jury ;*
- *Melle et M pour avoir accepté d'examiner notre travail.*

Enfin, nos agréables remerciements aux personnes qui nous ont aidées de prés ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

Hafidha et Yasmina.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers, en particulier :

A ma mère ma source de tendresse pour son soutien, sa patiente, sa présence à mes cotés et son inquiétude pour ma réussite "que Dieu te garde pour nous" ;

*A mon cher père, pour avoir toujours été présent pour moi, pour son amour, et ses encouragements et pour m'avoir appris à donner le meilleur de moi-même et à ne jamais baisser les bras devant les difficultés *que Dieu le protège* ;*

A mes très chers frère : Mohamed, M'hamed, Hamid ;

A mes très chères sœurs : Fatiha, Khadîdja, Hamida, Samira ;

*A mon très cher mari Mohamed *que Dieu le protège* qui m'a tellement soutenu et qui a fait preuve de beaucoup de patience et de compréhension jusqu'au bout de mon travail ;*

A mes très chers grands parents et toute ma famille : mes oncles, mes tantes, tous mes cousins et mes cousines ;

A mon amie et binôme Yasmina pour son attachements et surtout pour sa patience ;

A mes chers amis spécialement : Hiazia, Samira, Naima, Madina, Safia, Lobna, Faiza, Samia, Souad, Yasmina, Rabia, Salima, Karima, Amina, Samir, Abdelkader, Belgacem, Kamel, elhadi ;

A tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin dans l'élaboration de ce modeste travail ;

A toute la promotion de pollution chimique et gestion enviromenntale : 2012/2013.

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

" Hafidha"

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers, en particulier :

A ma mère ma source de tendresse pour son soutien, sa patiente, sa présence à mes cotés et son inquiétude pour ma réussite "que Dieu te garde pour nous" ;

*A mon cher père, pour avoir toujours été présent pour moi, pour son amour, et ses encouragements et pour m'avoir appris à donner le meilleur de moi-même et à ne jamais baisser les bras devant les difficultés *que Dieu le protège* ;*

A mon très cher frère : yahia ;

A mes très chères sœurs : Souad, Leila, Siham, F.Zohra, Amina, Hizia, et leurs enfants

*A mon très cher mari Ahmed *que Dieu le protège* qui m'a tellement soutenu et qui a fait preuve de beaucoup de patience et de compréhension jusqu'au bout de mon travail ;*

A mes très chers grands parents et toute ma famille : mes oncles, mes tantes, tous mes cousins et mes cousines ;

A mon amie et binôme Hafidha pour son attachements et surtout pour sa patience ;

A mes chers amies spécialement : Safia, Aicha, Lobna, Faiza ;

A tous les travailleurs de polyclinique d'Ouled Brahim ;

A tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin dans l'élaboration de ce modeste travail ;

A toute la promotion de pollution chimique et gestion enviromenntale : 2012/2013.

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

" Yasmina "

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الانتشار الحراري و الكتلي في تجويف مربع الشكل و مائل يحتوي علي وسط مسامي و متجانس و مشبع بنفس المحلول تخضع الحواف الناشطة لشروط حرارة و تركيز ثابتين و كذا كظوم و غير نفوذ كل المعادلات الأساسية المسيرة لهذه الظاهرة الفيزيائية تحل رقميا بواسطة طريقة الحجم المتناهي و هذه النتائج تحلل علي شكل خطوط السيل خطوط تساوي الحرارة و التركيز و كذا متوسط ثابتين نسلت وشرود

كلمات دالة : تجويف مائل وسط يسهل اختراق الحرارة و الكتلة بتركيز محدود

Résumé

Ce mémoire présente une étude des transferts de chaleur et de masse générée dans une cavité carré inclinée renfermant une couche poreuse. La couche poreuse est considérée homogène et isotrope et saturée par le même fluide. Les parois actives suivant l'axe x sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois actives suivant l'axe y sont adiabatiques et imperméables. Les équations de base décrivant la convection double diffusive au sein de l'enceinte sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats numériques sont analysés en termes de lignes de courant, des isothermes, des isoconcentrations et des nombres de Nusselt et Sherwood moyens.

Mots clés : transferts de chaleur et de masse, convection thermosolutale, milieux poreux, cavité inclinée.

Summary

This paper presents the results of a numerical study of heat and mass transfer in an inclined square enclosure filled with porous layer with contacts of active walls. *The porous layer is considered homogeneous, isotropic and saturated with the same fluid.* Two parallel walls *are subjected to uniform temperature and concentration whereas the horizontal walls are assumed to be adiabatic and impermeable. The set of equations governing the double-diffusive convection in the porous enclosure are solved numerically using the control volume approach. The numerical results are presented and analyzed in terms of streamlines, isotherms, isoconcentrations lines and average Nusselt and Sherwood numbers.*

Keywords: heat and mass transfer, thermosolutale convection, porous medium, inclined cavity

Nomenclature

a	Diffusivité thermique, [m^2s^{-1}]
C	Concentration dimensionnelle du soluté
D_a	Nombre de Darcy,
k	Conductivité thermique, W/m°C
K	Perméabilité du milieu poreux
L	dimension de la cavité, m
Le	Nombre de Lewis,
N	Rapport des forces de volume,
Nu_b	Nombre de Nusselt
p	Pression, [Pa]
P	Pression adimensionnelle,
Pr	Nombre de Prandtl,
Ra	Nombre de Rayleigh,
R_v	Rapport de la viscosité effective à celle du fluide,
Sh_b	Nombre de Sherwood moyen
S	Concentration adimensionnelle,
u	Vitesse axiale, (m/s)
U	Vitesse adimensionnelle suivant la direction X, $U = uL/a$
v	Vitesse transversale, [m/s]
V	Vitesse adimensionnelle suivant la direction Y, $V = vL/a$
x	Coordonnée axiale, [m]
X	Coordonnée horizontale adimensionnelle, $X = x/L$
y	Coordonnée transversale, [m]
Y	Coordonnée verticale adimensionnelle, $Y = y/L$

Symboles Grecs

α	Angle d'inclinaison de la cavité,
β_T	Coefficient d'expansion thermique, [K^{-1}]
β_S	Coefficient d'expansion solutale
ρ	Masse volumique, [Kg m^{-3}]
μ_{eff}	Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman, [Kg m^{-1} S^{-1}]
ν	Viscosité cinématique, [m^2 s^{-1}]
ε	Porosité
τ	Tortuosité
θ	Température adimensionnelle, $\theta = \left(T - (T_0 + T_L)/2\right) / \left(T_0 - T_L\right)$
ϕ	Variable dépendente
Γ	Coefficient de diffusion
ΔT	différence de température, $\Delta T = T_0 - T_L$, [°C]
Δc	Différence de concentration, $\Delta c = c_0 - c_L$

Indices

b	Moyen
E, e	Est
eff	Effectif
f	Fluide
N, n	Nord
Nb	Nœuds voisins
P	Nœud principal
S, s	Sud

Liste des figures

Figure I.1 : Milieux poreux consolidés 04

Figure I.2 : Milieux poreux non consolidés 04

Figure I.3 : Volume élémentaire représentatif 05

Figure I.4 : Définition schématique de la tortuosité 09

Figure I.5 : Modèle série de la conductivité thermique effective 10

Figure I.6 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective 10

Figure II.1 : Transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux 14

Figure II.2: Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale 18

Figure II.3 : Géométrie du problème 19

Figure III.1 : Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle 28

Figure III.2 : Volume de contrôle représentatif 29

Figure III.3 : Représentation d'un maillage décalé 34

Figure III.4 : Volume de contrôle pour U et V 35

Figure III.5 : Volume de contrôle lié à P 37

Figure III.6 : Schéma du volume de contrôle pour U 43

Figure III.7 : Schéma du volume de contrôle pour V 44

Figure III.8 : Schéma du volume de contrôle pour P 45

Figure IV.1 : Les lignes de courants , isothermes et isoconcentrations pour $Da=10^{-4}$,$Ra=10^{6}$,N=10,Pr=7et Le=10 et diffentes valeurs de α 50

Figure IV.2 : Les lignes de courants ,isothermes et isoconcentrations pour $Da=10^{-4}$,$Ra=10^{6}$,N=10,Pr=7 et Le=10 et diffentes valeurs de α 50

Figure IV.3 : Les lignes de courants ,isothermes et isoconcentrations pour $Da=10^{-4}$,$Ra=10^{6}$,N=10,Pr=7 et Le=10 et diffentes valeurs de α 50

Figure IV .4 : : Représente Nombre de Nusselt en fonction de perméabilité pour les différentes valeurs de α 51

Figure IV.5 : Représente Nombre de Sherwood en fonction de perméabilité pour les différentes valeurs de α 52

Figure IV .6 : Représente les effets du Nombre de Ra sur le transfert de chaleur pour différente valeurs de perméabilité. 53

Figure IV.7 : Représente les effets du Nombre de Ra sur le transfert de masse pour différente valeur de perméabilité. 53

Figure IV.8 : Représente les effets du Nombre de Lewis sur le transfert de chaleur pour différente valeur de perméabilité. 54

Figure IV.9 : Représente les effets du Nombre de Lewis sur le transfert de masse pour différente valeur de perméabilité. 55

Figure IV.10 : Représente les effets N sur le transfert de chaleur pour différente valeur de perméabilité. 56

Figure IV.11 : Représente les effets du N sur le transfert de masse pour différente valeur de perméabilité. 56

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux 03

Tableau I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux 07

Tableau I.3 : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux, O.Reynolds et Dullien [7,8] 08

Tableau III.1 : Définition des différents termes des équations de conservation 29

Tableau III.2 : Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations 31

Tableau III.3 : Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation. 41

Tableau IV.1 : Sensibilité du code de calcul au maillage cas de la cavité inclinée renferment une couche poreuse pour $Ra=10^6$, $Pr=7$,$\alpha=30$, $Le=10$, $Da=10^{-3}$,$\mathcal{E}=0.6$ 48

Tableau IV.2 : Comparaison du nombre de Nusselt dans le cas du régime de Darcy-Brinkman en convection thermique pour $Pr=0.71$ 49

SOMMAIRE :

Introduction Générale 01

Chapitre I : Notions sur les milieux poreux et leurs applications

I.1. Introduction 02

I.2. Définition relative aux milieux poreux 04

I.2.1. Milieu poreux 04

I.2.2. Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) 05

I.2.3. Propriétés structurales et thermo physique d'un milieu poreux 06

I.2.3.1. La porosité 06

I.2.3.2. La perméabilité 07

I.2.3.3. La tortuosité 08

I.2.3.4. Conductivité thermique effective 09

I.3. Modèles d'écoulement en milieux poreux 11

I.3.1. La loi de Darcy 11

I.3.2. Formulation de Forchheimer 11

I.3.3. Modèle général 12

I.4. Conclusion 12

Chapitre II : Formulation mathématique

II.1. Introduction 13

II.2. Le transfert de masse par diffusion moléculaire 14

II.2.1. Equations de la diffusion massique 16

II.3. Couplage avec la convection thermique 17

II.4. Modèle physique 19

II.5. Hypothèses simplificatrices 2

II.6. Equations gouvernantes 20

II.6.1. Equation de continuité 21

II.6.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement 21

II.6.3. Equation de l'énergie 21

II.6.4. Equation de concentration 21

II.7. Conditions aux limites 22

II.7.1. Conditions aux limites dynamiques 22

II.7.2. Conditions aux limites thermiques 23

II.8. Adimensionnement des équations 23

II.8.1. Equation de continuité 24

II.9. Conditions aux limites adimensionnelles 24

II.10. Coefficients de transfert de chaleur et de masse 25

II.11. Conclusion 26

Chapitre III : Méthode numérique

III .Principe de la méthode des volumes finis

III.1. Equation différentielle gouvernante 27

III.1.1. Equation de continuité 27

III.1.2. Maillage et volume de contrôle 27

III.1.3. Discrétisation des équations de conservation 28

III.1.3.1. Flux de diffusion –convection 30

III.1.3.2. Simplification de l'expression du flux 30

III.1.3.3. Linéarisation du terme source 31

III.1.3.4. Equation finale de discrétisation 32

III.1.3.5. Méthode de résolution des équations algébriques 33

III.1.4. Considérations pour le champ dynamique 33

III.1.4.1. Notion de maillage décalé 34

III.1.5. Discrétisation des équations dynamiques 34

III.1.5.1. Equations du mouvement 34

III.1.5.2. Correction des vitesses et pression 35

III.1.5.3. Equation de correction de pression 36

III.2. Algorithme SIMPLER 38

III.3. Technique de sous –relaxation 39

III.4. Critère de convergence 40

III.5. Schémas d'interpolation 40

III.6. Application de la méthode des volumes finis à notre problème 41

III.6.1. Discrétisation des équations du mouvement 42

III.6.1.1. Equation du mouvement en X 42

III.6.1.2. Equation du mouvement en Y 43

III.6.2. Equation de correction de pression 45

III.6.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie 46

III.6.4. Discrétisation de l'équation du soluté 47

Chapitre IV : Résultats et Discussions

IV.1.Introduction 48

IV.2. procédure numérique 48

IV.3.Conclusion 57

Conclusion générale et perspective 58

Références bibliographiques 59

Introduction Générale

Introduction Générale

Jusqu'à ces dernières décennies, peu d'auteurs se sont préoccupés d'analyser le problème du transfert simultané et couplé de chaleur et de matière dans les milieux poreux. Etant donné son implication dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels, les chercheurs s'intéressent de plus en plus à ce problème et plus précisément aux transferts de chaleur et de masse qui se développent dans les enceintes fermées, souvent en convection naturelle. Parmi ces applications , l'isolation thermique , le séchage , la récupération de l'énergie géothermique , la déshumidification , la lubrification , la filtration , la séparation des espèces chimiques , convertisseurs catalytiques pour la réduction de la pollution de l'air des produits de combustion , et de nombreux procèdes de l'industrie chimique mettent en œuvre des réacteurs hétérogènes dans lesquels un fluide , gaz ou liquide, traverse un lit fixe de particules solides, avec ou sans réaction à la surface.

Notre étude porte essentiellement sur la mise en évidence de l'influence des paramètres adimensionnels (le nombre de Rayleigh fluide Ra, le nombre de Darcy Da, la perméabilité K de la couche poreuse) ainsi que l'angle d'inclinaison sur la structure de l'écoulement, le transfert de chaleur et masse dans le système.

Ce manuscrit est structuré comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions générales des milieux poreux et leurs applications.

Le deuxième chapitre est dédié aux équations mathématiques qui gouvernent le phénomène physique.

Le troisième chapitre et réservé à la présentation de la modélisation numérique dans les cavités poreuses basé sur des méthode classique des volumes finis.

Le quatrième chapitre, on y présente l'essentielle des résultats obtenus avec discussion. Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre I :

Notions sur Les milieux poreux Et leurs applications

I. Notions sur les milieux poreux et leurs applications.

I.1. Introduction :

Durant les dernières années, les écoulements dans les milieux poreux n'ont cessé d'avoir une importance de plus en plus grandissante jusqu'à devenir un pôle d'attraction durant la dernière décennie .En effet un grand nombre de chercheurs ont porté un intérêt particulier aux milieux poreux. Ceci est dû au fait que le transfert massiques et thermique dans ces milieux occupe une place de plus en plus importante dans plusieurs secteurs de l'industrie et des technologies avancées.

Les premières recherches qui ont été menées dans ce domaine ont toutes portées sur des écoulements monophasiques, pour ensuite englober les écoulements polyphasiques durant ces dernières années.

Les phénomènes de transfert massiques et thermiques dans les milieux poreux (en monophasiques où en polyphasiques) interviennent dans de nombreuses applications et touches à des domaines multiples tel que représenté ci-dessous :

Tableau I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux

Domaine d'utilisation	**Application**
Mécanique	-Isolement thermique -Capacité de séchage -Récupération de l'énergie géométrique -Accroissement du transfert de chaleur par modification de surface -Lubrification Réacteurs nucléaires utilisant des gaz de refroidissement s'écoulant à travers des particules radioactives -Fusion et solidification des alliages binaires -Déshumidification -Pré chauffeurs et stabilisateurs de flamme poreux -Stockage de l'énergie solaire -Pots catalytiques dans le domaine de l'automobile
Génie-chimique	-Réacteurs chimiques -Filtration

	-Adsorption -L'échange d'ion -Les réactions catalytiques sur une surface solide -Séchage Réacteurs chromatographiques -Convertisseurs catalytiques pour la réduction de la pollution de l'air des produits de combustion -Transfert de masse à travers les membranes
Environnement	-Ecoulement des eaux souterraines -contamination des eaux souterraines -Ecoulement d'eau, de vapeur d'eau et d'air à travers des matériaux de construction -Recyclage de déchets nucléaires -Irrigation -Nettoyage des sols par injection de vapeur
Géologie	-Migration des eaux et minéraux -Exploitation de l'énergie géothermique
Pétrole	-Ecoulement de gaz et pétrole dans les réservoirs -Accroissement de la production de gaz naturel
Médecine	-Stimulation du transport des gaz dans l'organisme, H.P.C.Darcy [1].

Un exemple concret, d'application des écoulements polyphasiques en milieux poreux, est l'exploitation des gisements d'hydrocarbures qui fait appel à différents procédés, parmi lesquels on trouve des méthodes thermiques qui consistent à injecter un fluide chaud (eau chaude, vapeur chaude, gaz….) au sein du gisement. Ces méthodes tendent à faciliter l'écoulement des fluides dans le réservoir en réduisant la viscosité dans l'huile brute. Actuellement, l'injection de vapeur est la plus utilisée. En 1988 par exemple, aux états unis, 72%de la production par l'application des méthodes améliorées était faite de vapeur par A.E.Scheidegger [2].

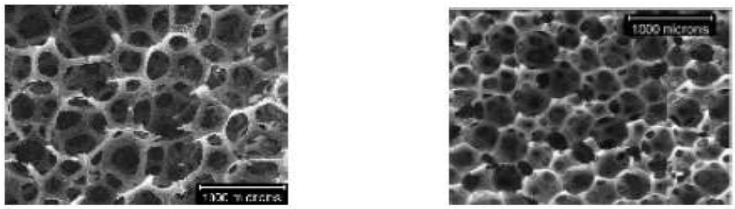
Autre exemple le cas d'un écoulement dans un milieu poreux avec changement de phase (ébullition). Phénomène qui se rencontre entre autres lors de la stimulation d'accidents nucléaires (désintégration du cœur radioactif en débris poreux, particulièrement ou entièrement saturés en liquide de refroidissement**, I**. F.Macdonald et al [3].

I.2. Définition relative aux milieux poreux

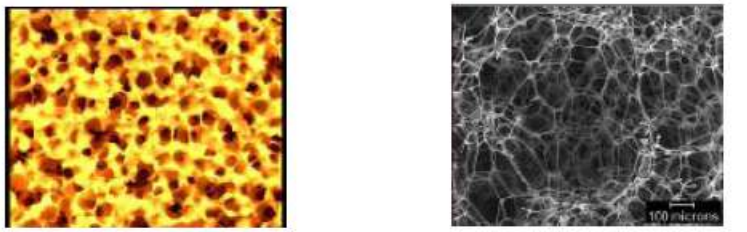
I.2.1. Milieu poreux :

Un milieu poreux est un massif formé de cavités de volume et de surface variées, interconnectées, partiellement ou totalement entre eux par des petits canaux, en prenant comme exemple de formation de particules sphériques, de textures fibreuses, etc., entre lesquels les vides forment l'espèce proprement dit (les vides sont appelés pores).

- Un milieu poreux se présente généralement sous les deux formes suivantes: Milieux poreux consolidés, dans lesquels la phase solide est formée de grains cimentés (fig.I.1) [4], (calcaire, grés, la céramique….).
- Milieux poreux non consolidés, dans lesquels la phase solide est formée de grains non soudés entre eux (fig.I.2) [4], (fibres métalliques, gravier, sable, billes….).

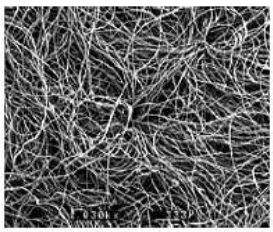


Une mousse de polyuréthanne.



Une mousse de cuivre. Une mousse de mélanine.

Figure I.1: milieux poreux consolidés



Fibres métalliques.

Figure I.2 : milieux poreux non consolidés

Les milieux poreux incluent entre autres: les filtres à sable dans l'industrie de traitement de l'eau, les roches réservoirs d'hydrocarbures et les matériaux de génie civil.

Une des caractéristiques majeures de la plupart des corps poreux est de permettre la circulation des fluides dans les cavités du milieu poreux, on distingue pour cela deux (02) types de milieu poreux :

- Le milieu poreux saturé, où la matrice solide est complètement remplie par les fluides comme le sol imbibé d'eau.

- Le milieu poreux où plusieurs fluides, miscibles ou non, coexistent au sein des cavités, comme le sol partiellement saturé d'eau, le mélange eau-huile dans les roches pétrolières (écoulement polyphasiques).

I.2.2. Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R).

En pratique, l'utilisation des équations différentielles à l'échelle macroscopique d'un milieu poreux s'avère impossible à cause de la géométrie de ce milieu qui se caractérise par la non uniformité de la dimension du vide et de distribution dans la partie centrale de la matrice poreuse. Il est par conséquent nécessaire d'effectuer un changement d'échelle.

On définit ainsi un volume élémentaire représentatif de grande dimension par rapport aux dimensions moyennes des pores où les grandeurs et paramètres telles que la vitesse, la pression, la température, la porosité, sont de valeurs moyennes.
Autrement dit on peut considérer, par la suite, que le milieu poreux est un ensemble de V.E.R. Cette conceptualisation introduite par J. Bear permet de raisonner en terme de milieu continu équivalent.

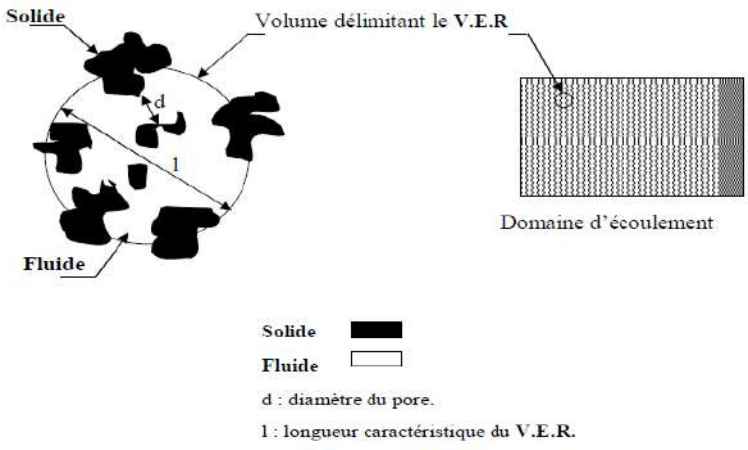


Figure I.3:Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

I.2.3. Propriétés structurales et thermo physique d'un milieu poreux

Différentes grandeurs géométriques et thermo-physiques sont utilisées pour caractériser l'écoulement et le transfert de chaleur se produisant dans un milieu poreux, nous pouvons citer :

I.2.3.1. La porosité :

La porosité totale (ε_T) dans un milieu poreux est définie comme étant le rapport du volume occupé par les espèces vides au volume total (matrice + vide) correspondant :

$$\varepsilon_T = \frac{V_P}{V_T} \qquad \textbf{(I.1)}$$

Où

V_P : Volume des espèces vides

V_T : Volume total

En général, la porosité totale ne présente pas d'intérêt, car seuls les pores accessibles jouent un rôle actif. On définit donc la porosité effective ou utile :

$$\varepsilon_e = \frac{V_{PU}}{V_T} \qquad \textbf{(I.2)}$$

Où :

V_{PU} : Volume des pores accessibleps ou utiles (c'est à dire communiquant entre eux).

Le tableau (I.2) donne quelques valeurs de la porosité de certains matériaux d'après les résultats expérimentaux d'A.E.Scheidrgger [5].

Tableau I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux.

SUBSTANCE	POROSITE
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 – 0,93
Fil à tisser	0,68 – 0,76
Grain de silice	0,65
Poudre d'ardoise noire	0, 57 – 0,66
Cuir	0,56 – 0,59
Terre	0,43 – 0,54
Sable	0,37 – 0,70
Empilement de sphères	0,36 – 0,43
Filtre à cigarette	0,17 – 0,49
Brique	0,16 – 0,34

I.2.3.2. La perméabilité :

Elle caractérise l'aptitude du milieu poreux à laisser circuler le fluide à travers les pores dans le cas de la présence d'un gradient de pression.

Lorsque le milieu poreux ne contient qu'un seul liquide, la perméabilité absolue K, est donnée par la loi de H.Darcy [6].

$$K = \frac{-\left(\frac{Q}{S}\right)\cdot\mu}{\partial P / \partial x} \qquad \textbf{(I.4)}$$

$\frac{Q}{S}$: Vitesse de filtration (vitesse Darcienne) dans le milieu poreux ;

Q : Débit s'écoulant à travers le milieu poreux ;

S : Surface de la section droite ;

μ : Viscosité dynamique de pression dans le sens de l'écoulement.

$\frac{\partial P}{\partial x}$: Gradient de pression dans le sens de l'écoulement.

L'unité de la perméabilité est le m², mais elle est souvent exprimée en Darcy:

1 Darcy= 9.87×10^{-13} m².

.La perméabilité est déterminée expérimentalement en fonction des paramètres géométriques.

Le tableau (I.3) représente certains valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux [6].

Tableau I.3: Les valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux, O. Reynolds et **Dullien** [7,8]

SUBSTANCE	PERMEABILITE
Briques	$4,8\ 10^{-15}$ à $2,2\ 10^{-13}$
Cuir	$9,5\ 10^{-14}$ à $1,2\ 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$8,9\ 10^{-14}$ à $1,2\ 10^{-13}$
Terre	$2,9\ 10^{-13}$ à $1,4\ 10^{-11}$
Fibre de verre	$2,4\ 10^{-11}$ à $5,1\ 10^{-11}$
Sable	$2,0\ 10^{-11}$ à $1,8\ 10^{-08}$
Fibre à tisser	$3,8\ 10^{-09}$ à $1,0\ 10^{-08}$
Cigarette	$1,0$ à 10^{-09}

I.2.3.3. La tortuosité

Dans un milieu poreux formé d'un empilement de grains solides, la vitesse réelle locale du fluide n'est pas tout à fait parallèle à la direction moyenne de l'écoulement du fait des obstacles constitués par la phase solide. Le fluide contourne les différentes particules s'opposant à son passage.

Le trajet suivi par un filet fluide est $L_m > L$ où L est la longueur du milieu poreux.

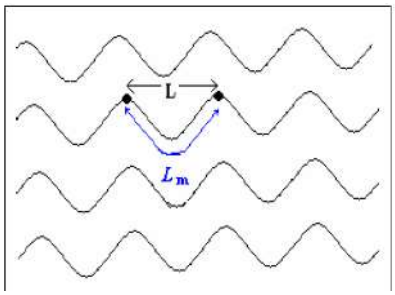


Figure I.4: Définition schématique de la tortuosité

On appelle tortuosité le rapport entre la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide et la longueur de l'échantillon.

$$\tau = \frac{L_m}{L} \qquad \text{(I.5a)}$$

Dans le cas des milieux poreux constitués d'empilement de particules sphériques, la tortuosité varie peu et reste sensiblement égale à $\pi/2$.

I.2.3.4. Conductivité thermique effective

Vu la complexité de la structure des milieux poreux ainsi que la présence des différentes phases (solide et fluide), la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective k_e. En effet, les phases solides et fluide présentes dans le milieu poreux contribuent généralement avec des proportions différentes au mode de conduction (le plus souvent $k_{solide} > k_{fluide}$).
Cette conductivité effective dépend de la porosité et des conductivités thermiques des phases solides k_s et fluide k_f.

De manière générale, il n'existe pas de modèles exacts de conductivité thermique effective qui peuvent être appliquées aux cas pratiques d'écoulement dans les milieux poreux. Les modèles existants sont plutôt des modèles approchés construits pour des géométries simples en utilisant des hypothèses simplificatrices et en se basant sur des données expérimentales. Les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles série et parallèles basés sur l'analogie électrique.

- Dans le modèle en série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du milieu est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases; (Fig. I.5b).

$$\frac{1}{k_C} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{1-\varepsilon}{k_s} \qquad \textbf{(I.5b)}$$

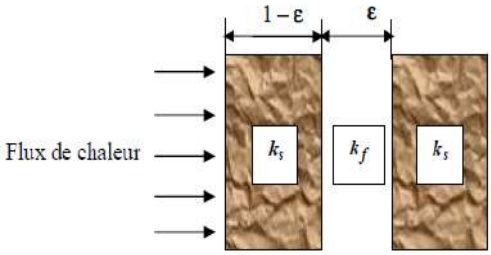


Figure I.5 : Modèle série de la conductivité thermique effective

➢ Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse en même temps les deux phases qui sont parallèles. La conductivité effective est égale à la somme des conductivités thermiques dans chacune des phases; (Fig. I.6).

$$k_e = (1-\varepsilon)k_S + \varepsilon k_f \qquad \textbf{(I.6)}$$

La conductivité thermique effective est toujours comprise entre celle du fluide et celle du solide.

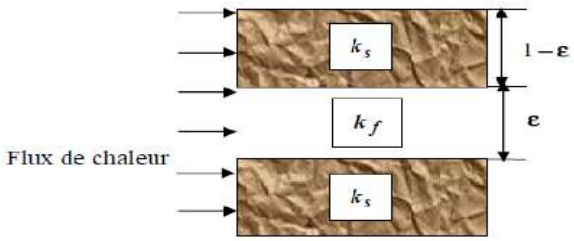


Figure I.6 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective

❖ **Conductivité thermique équivalente**

La conductivité équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent. Pour plus de détail sur l'évaluation de la conductivité, nous pouvons citer les travaux de, Tobbal et Bennacer [9], Beji [10].

I.3. Modèles d'écoulement en milieux poreux

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'aux phénomènes à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées.

I.3.1.La loi de Darcy

Établie par Darcy sur la base d'observations expérimentales, c'est une relation empirique qui décrit macroscopiquement les écoulements dans les milieux poreux, moyennant la vitesse de filtration.

$$\vec{V} = \frac{k}{\nu}\left(-\frac{\vec{\nabla} P}{\rho}\right) + \vec{g} \qquad \textbf{(I.7)}$$

où k est la perméabilité et ν la viscosité cinématique du fluide. L'équation de Darcy a été vérifiée pour les écoulements de faible vitesse. La valeur du nombre de Reynolds est utilisée comme critère pour caractériser la transition d'un régime d'écoulement laminaire à un régime turbulent. Pour cela on a défini un nombre de Reynolds de pore pour les écoulements en milieu poreux. En définissant d comme longueur caractéristique qui représente la dimension caractéristique des pores, le nombre de Reynolds s'écrit :

$$R_e = V.\frac{d}{\nu} \qquad \textbf{(I.8)}$$

En termes de détermination de d, Collins a proposé l'expression $d = \sqrt{k/\varepsilon}$ alors que Ward a plutôt suggéré que $d = \sqrt{k}$ quelle que soit la porosité.

I.3.2.Formulation de Forchheimer

La formulation de Darcy-Forchheimer la plus couramment utilisée, pour décrire l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène et isotrope, en régime stationnaire et en présence de pesanteur, est la suivante :

$$\nabla P = \rho g - \frac{\mu}{k} V + \frac{b\rho}{\sqrt{k}} |V| \, V \qquad \textbf{(I.9)}$$

où **b** est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, appelé paramètre de Forchheimer. Résultant de la prise de moyenne sous fortes hypothèses, cette formulation introduit un terme convectif qui exprime la contribution inertielle devenant importante avec les **(** Re **)** croissant.

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman, fortement utile pour le cas des hautes porosités. Le premier terme de droite de l'équation ci

dessus contenant la viscosité μ est le terme de Darcy et le deuxième contenant la viscosité effective μ_{eff} est appelé le terme de Brinkman. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff}. En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité du milieu mais aussi de sa géométrie (tortuosité). Brinkman a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide ($\mu_{eff} \approx \mu$). Cette approximation a été prouvée expérimentalement et elle est en accord avec les travaux de Neale et Nader [11] et Beckermann et Viskanta [12]. Le modèle de Brinkman permet ainsi d'imposer la condition de non glissement au champ de vitesse de filtration, au niveau des parois imperméables.

I.3.3.Modèle général

On généralise les trois dernières équations en introduisant un terme transitoire et le terme convectif $(V\ \nabla)V$ ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\rho}{\varepsilon^2}(V\ \nabla)V\ =-\nabla P+\rho g-\frac{\mu}{k}V+\frac{b\rho}{\sqrt{k}}|V\ |V+\mu_{eff}\nabla^2 V \qquad \textbf{(I.10)}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Navier Stokes issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide. Il faut également noter que la complexité d'un écoulement en milieu poreux peut être le résultat des effets d'inertie et de viscosité, et d'une variation importante de la porosité au niveau des parois.

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base et les principales caractéristiques qui se rapportant aux milieux poreux et leurs applications dans divers domaines.

Le prochain chapitre sera consacré aux formulations mathématiques de notre problème physique.

Chapitre II :

Formulation Mathématique

Formulation Mathématique

II.1 Introduction:

Le transport d'un constituant d'une solution fluide d'une région de haute concentration à une région de concentration plus faible est appelé transfert de masse. On peut comprendre son mécanisme en faisant une analogie avec la transmission de chaleur. La masse est diffusée dans une direction où le gradient de concentration existant va en diminuant et cesse lorsque le gradient de concentration s'annule. Dans ce chapitre, nous présentons brièvement les notions de base du transfert de masse utilisées dans notre étude.
Le transfert de masse peut s'effectuer en phase gazeuse ou en phase liquide, soit par diffusion moléculaire dans des fluides au repos (la diffusion solutale), soit par des courants dans des fluides en écoulement (la convection solutale).

Les mouvements de convection de double-diffusion ou convection thermosolutale sont générés par les gradients de densité qui sont dus à la fois au champ de température, et au champ de concentration peut apparaître dans un fluide ayant deux (ou plusieurs) composants diffusant dans le mélange à différentes vitesses et qui contribuent au gradient vertical de densité. Ce phénomène de convection double diffusive apparaît dans des situations réelles diverses: croissance de cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, processus de séchage, processus de fusion-solidification de mélanges binaires, stockage des gaz liquide ou oxydation des surfaces métalliques, diffusion souterraine des polluants, enfouissement souterrain des déchets radioactifs, stockage de certains produits agricoles, extraction de pétrolières.... On estime actuellement que ce phénomène des transferts convectifs de masse et de chaleur constitue un domaine très actif et d'importants travaux ont été effectués encore très récemment tant au niveau expérimental que numérique. La diversité des configurations et le nombre important de paramètres qui interviennent dans ce type d'écoulement nous donne un grand choix de domaine d'études.

La plupart des études existantes traitent de la convection d'origine thermique et sont basées sur le modèle de Darcy. De plus ces études supposent le caractère isotrope et homogène des matériaux poreux. Dans beaucoup de cas, la loi de Darcy se trouve inadéquate et l'anisotropie géométrique des grains ou des fibres est rencontrée dans de nombreux milieux poreux, comme les formations rocheuses, les sols sédimentaires, les matériaux d'isolation thermique et les structures dendritiques formées lors de la solidification de mélanges à

plusieurs composants. La majorité des travaux antérieurs qui se sont intéressés à la description des phénomènes de convection double diffusive traitent de la convection naturelle thermosolutale dans les milieux formés de couches poreuses horizontales ou verticales thermiquement et/ou hydrauliquement anisotropes .Des études thermiquement et/ou hydrauliquement anisotropes récentes prennent en compte le caractère anisotrope et hétérogène des milieux poreux. L'absence d'études qui traitent de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte constitué de milieux poreux multi-couches avec différentes perméabilités dans des cavités carrée inclinée nous a motivés pour rechercher des résultats concernant ce type de cavité. Notre étude porte plus particulièrement sur l'influence, à des nombres de Rayleigh modérés, de certains paramètres géométriques et physiques, nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse.

Dans un premier temps nous donnons quelques notions fondamentales sur le transfert de masse et son couplage avec la convection thermique. Nous présentons par la suite notre modèle mathématique et la méthode numérique de résolution.

Nous nous intéressons à la convection double diffusive générée dans une cavité carrée inclinée, infiniment longue, constituée d'un milieu poreuses multi-couches (deux couches de milieu poreux), de propriétés physiques différentes. Avec des conditions limites classiques (conditions de Dirichlet en température et concentration sur les parois verticales), et en régime stationnaire.

II.2 Le Transfert de masse par diffusion moléculaire

Le transfert de masse par diffusion moléculaire est analogue à la transmission de chaleur par conduction. Il peut avoir lieu dans un fluide au repos mais également dans un fluide en écoulement. Si l'on considère par exemple une cavité contenant deux gaz A et B à la même température, même pression et séparés initialement par une cloison (Fig. II.1):

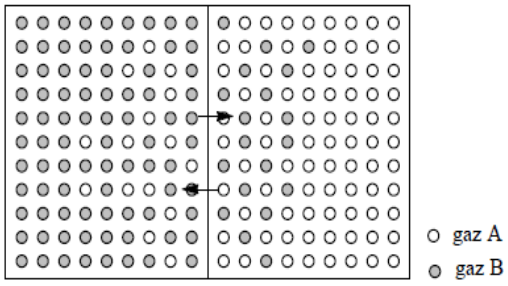


Figure. II.1: transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux.

Un transfert de masse s'effectue, dés qu'on met ces deux gaz en contact, dans le sens décroissant de la concentration.

En régime permanent, la concentration en chaque point ne varie pas avec le temps, et suivant la loi de Fick:

$$\vec{m}_A = -D_{AB}\overrightarrow{gradC_A} \tag{II.1}$$

où $\vec{\dot{m}}_A$ est la densité de flux massique en kg/s m^2.

Cette équation est appelé la loi de Fick et relie la densité du flux massique $\dot{m}_A$ échangé par diffusion solutale au gradient de concentration et à la diffusivité massique D_{AB} du composant A dans B.

Remarquons que la loi de Fick est analogue à celle de Fourrier qui détermine la densité du flux thermique transféré par conduction dans un milieu homogène de conductivité λ:

$$\vec{q} = -\lambda\overrightarrow{gradT} \tag{II.2}$$

$\vec{q}$ est la densité du flux thermique exprimée en W/m^2

λ: est la conductivité thermique exprimée en W/m.K

T est la température

La diffusion solutale peut être influencée par des paramètres extérieurs, tel que les gradients de température (effets de Soret, effet Dufour), les gradients de pression où les réactions chimiques.

Dans notre étude, nous supposerons que ces effets extérieurs sont négligeables et que la diffusion solutale ne dépend que du gradient de concentration.

En diffusion solutale, on travaille généralement sur le concept de concentration d'un élément e dans un mélange. Cette concentration représente la masse de l'élément e dans le mélange de volume V_d et elle est exprimée en kg de solvant (l'élément e) par m^{3}de solution (le mélange).

$$C_e = \frac{m_e}{V_d} = \rho_e \tag{II.3}$$

La densité de flux massique locale d'un élément e dans un mélange s'exprime.

$$\vec{\dot{m}}_e = \rho_e \vec{V_e} \tag{II.4}$$

Où V_e représente la vitesse des particules du composant e dans un système de coordonnées fixes.

La vitesse moyenne massique $\vec{V}$ est alors définie comme le rapport de la somme des flux massiques élémentaires à la densité totale du mélange.

$$\rho.\vec{V} = \vec{\dot{m}} = \sum \vec{\dot{m}} = \sum \rho_e \vec{V_e} \tag{II.5}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum \rho_e \vec{V_e} \tag{II.6}$$

On définit alors le flux massique de l'élément e relativement par rapport à un repère se déplaçant à la vitesse massique moyenne par:

$$\vec{\dot{M}}_e = \rho_e \left(\vec{V_e} - \vec{V} \right) \tag{II.7}$$

Si $\vec{\dot{m}}$ est le flux absolu de l'élément e, $\vec{\dot{M}}$ est le flux diffus; il représente le mouvement de l'élément relativement au mouvement moyen du mélange et on peut écrire:

$$\vec{\dot{m}}_e = \vec{\dot{M}}_e + \rho_e \vec{V} \tag{II.8}$$

L'équation (II.8) nous montre qu'il y a deux contributions pour le flux absolu de l'élément e, l'une due à la diffusion (mouvement de l'élément e par rapport au mouvement moyen du mélange) et l'autre due au mouvement moyen du mélange.

II.2.1 Equations de la diffusion massique

L'équation de conservation de la masse globale du mélange s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho_e \vec{V} \right) = 0 \tag{II.9}$$

soit, encore, en distinguant la contribution de chacun des éléments: L'équation relative à l'ensemble des éléments du mélange s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\sum \rho_e \vec{V_e} \right) = 0$$

(II.10)

L'équation de la conservation de la masse pour chaque élément e du mélange sur un volume de contrôle est:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \overrightarrow{V_e}\right) = 0 \qquad \text{(II.11)}$$

En tenant compte de l'équation (II.7), l'équation (II.11) s'écrira:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}\right) = -\nabla \overrightarrow{\dot{M}_e} \qquad \text{(II.12)}$$

En remplaçant le flux massique M_e par son expression donnée par la loi de Finck (II.1) et en introduisant le concept de la concentration défini par l'équation (II.3), on obtient l'équation de la diffusion de chaque constituant e du mélange.

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C_e = \mathrm{D}\,\Delta\, C_e \qquad \text{(II.13)}$$

Dans notre étude le mélange ne contient qu'un seul élément, dans tout ce qui va suivre on omettra l'indice e pour la concentration, on écrira donc l'équation (II.14) comme suit:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C = D\Delta C \qquad \text{(II.14)}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est assez faible pour contribuer au transfert de masse, l'équation (II.15) s'écrit sous la forme réduite suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla T \qquad \text{(II.15)}$$

De même cette diffusivité est analogue à la conductivité thermique (exprimée en kj/kg.K), si on compare la loi de Finck (II.1) et la loi de Fourrier (II.2) donnant respectivement la densité du flux solutal et la densité du flux thermique.

II.3. Couplage avec la convection thermique.

Pour expliquer le comportement de deux écoulements dus simultanément à la diffusion thermique et à la diffusion solutale, prenons l'exemple simple d'une plaque plane verticale maintenu à une température Tp et baignant dans un fluide à une température T∞. si Tp> T∞, le fluide près de la paroi s'échauffe ce qui entraîne une diminution de sa densité, et par conséquent un mouvement ascendant s'établit le long de la paroi, du fait de la poussée d'Archimède. C'est le cas de la convection thermique pure. Supposons maintenant que ce même fluide contient un constituant d'une concentration C∞ et que la plaque est soumise à une concentration Cp de ce même constituant, Quatre cas peuvent intervenir suivant la nature

du fluide et des conditions aux limites, en effet le comportement du fluide le long de la paroi est influencé par le signe d'expansion solutal du constituant (soluté) βc et par le taux de concentration de la paroi par rapport à la solution. Selon ces paramètres les forces de volumes thermiques et solutales peuvent coopérer ou s'opposer suivant les configurations suivantes:

- Le cas où le fluide prés de la paroi est moins concentré (Cp<C∞), sa densité plus faible entraînerai un mouvement ascendant, cet écoulement solutal qui est du à un gradient de concentration coopère avec l'écoulement thermique si βc >0 et s'oppose si βc <0.
- Le cas où le fluide prés de la paroi est plus concentré (Cp>C∞), il devient plus lourd et descend le long de la plaque, cet écoulement se trouve confronté à l'écoulement thermique

si βc >0 mais s'entraident si βc <0.

Les quatre configurations sont représentées sur la figure II.2

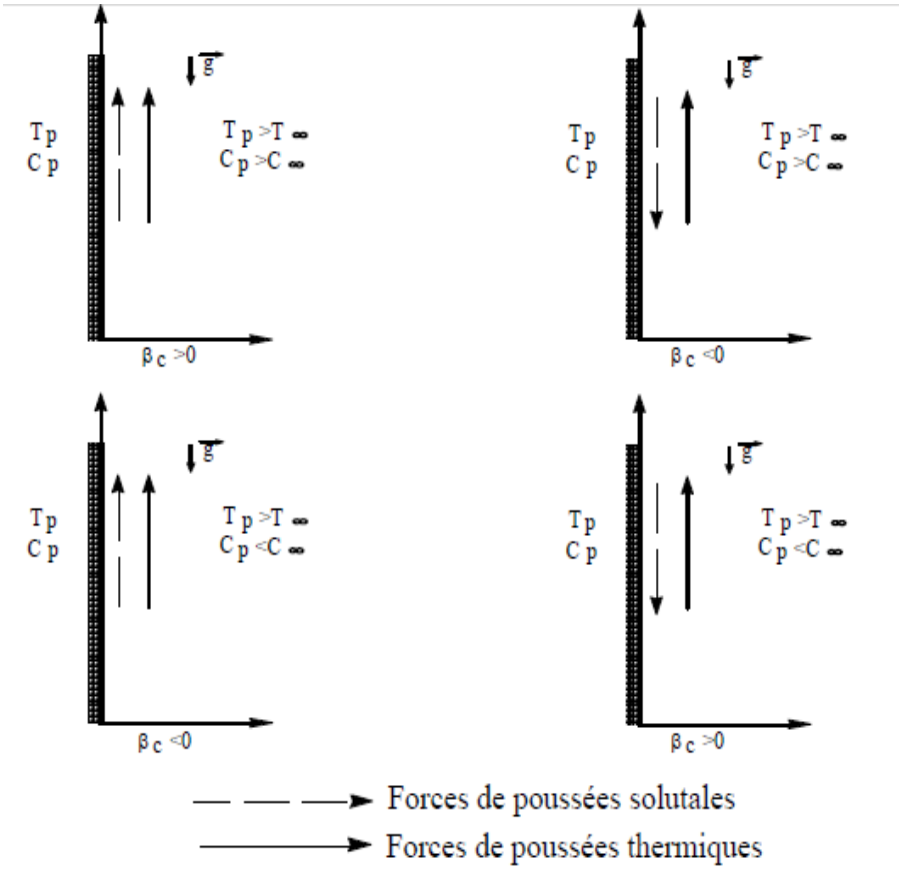


Figure. II.2: Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale.

Bejan [13] présente des résultats concernant ce même type d'écoulement naturel d'un fluide le long d'une plaque verticale soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration.

Nous considérons dans notre étude que le transfert de chaleur et de masse ne sont couplé que par la vitesse de l'écoulement et n'interagissent pas entre eux directement. Dans le cas contraire nous serons en présence de l'effet de Soret et Dufour. Ce phénomène apparaît lorsque les gradients de température et de concentration sont élevés.

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

II.4 Modèle Physique:

Le modèle physique étudié est représenté sur la figure (II.1). Cavité carré inclinée renfermant une couche poreus disposées verticalement .Les parois verticales sont soumises à des conditions de Dirichlet en température et concentration, respectivement T_1etC_1, T2etC_2 avec $T_2 < T_1$ et $C_2 < C_1$ tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques et imperméables (conditions de Neuman).

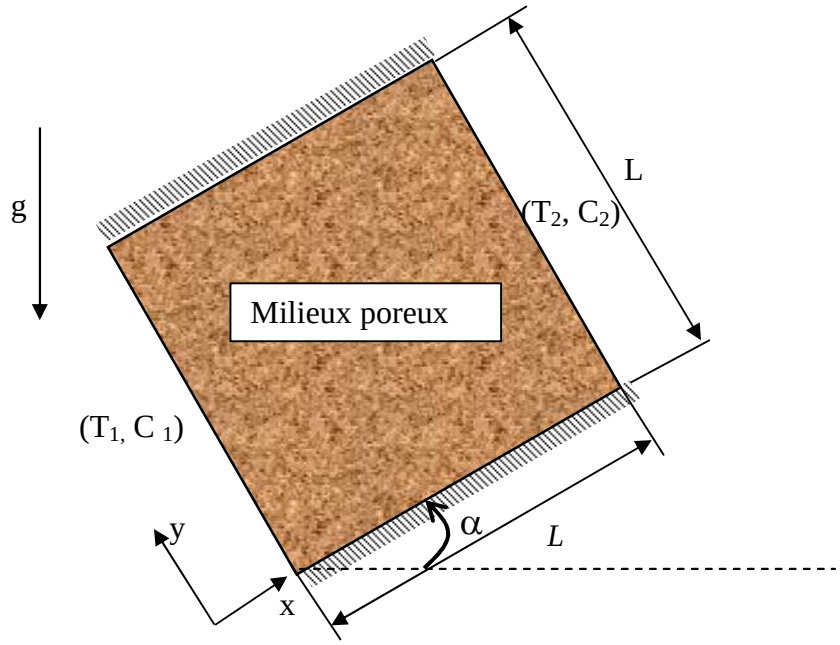


Figure II.3: Géométrie du problème.

II.5. Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices retenues dans notre étude des phénomènes de convection naturelle sont les suivantes:

- Convection naturelle laminaire bidimensionnelle.
- Régime stationnaire.
- Fluide newtonien et incompressible.
- Chaque couche de milieu poreux est considérée homogène, isotrope, et saturée et en équilibre thermodynamique avec le même fluide.
- Propriétés physiques constantes sauf la masse volumique qui varie dans le terme de poussée (hypothèse de Boussinesq).
- L'écoulement du fluide au sein de la cavité est laminaire, permanent bidimensionnel
- Milieu poreux et fluide en équilibre thermique.
- L'enceinte est remplie avec une couche de milieu poreux, ayant des perméabilités différentes.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes dans la gamme de température et de concentration étudiée.
- La conductivité thermique est la même partout, de même pour la porosité.
- La dissipation visqueuse et le terme de compression dans l'équation d'énergie sont négligés.
- Les effets Soret et Dufour sont négligeable.
- Pas de réaction chimique dans la matrice poreuse.
- Le mouvement du fluide dans les milieux poreux est régi par le modèle de Darcy-Brinkman.

Compte tenu des hypothèses émises précédemment, les équations classiques de conservation sont les suivantes :

II.6.Equations gouvernantes

Le phénomène physique est gouverné par un seul type d'équation qui est spécifique aux milieux poreux.

II.6.1.Equation de continuité

Dans une couche du milieu poreux, l'équation de la continuité s'écrit de la manière suivante:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \tag{II.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{II.17}$$

II.6.2.Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'écoulement est régi par le modèle de Darcy_brinkman.

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2}\vec{v}.\vec{\nabla}.\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu_f}{K}\vec{v} + \mu_{eff}\nabla^2\vec{v} \tag{II.18}$$

II.6.3.Equation de l'énergie

$$(\rho.cp)_f \vec{v}.\vec{\nabla}T = k\nabla^2 T \tag{II.19}$$

II.6.4.Equation de concentration

$$\vec{v_i}.\vec{\nabla}C = D\nabla^2 C \tag{II.20}$$

Après projection des équations suivant les coordonnées cartésiennes (x, y) on obtient:

a)Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{II.21}$$

b) Equation de conservation de la quantité de mouvement

- **Suivant x**

$$\rho_f\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon^2\frac{\mu_f}{K}u + \varepsilon^2\mu_{eff}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \varepsilon^2\left(\beta_T\left(T - T_{ref}\right) + \beta_C\left(C - C_{ref}\right)\right)\rho_f.g.\sin\varphi$$

(II.22)

❖ **Suivant y**

$$\rho_f\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial y}-\varepsilon^2\frac{\mu_f}{K}v+\varepsilon^2\mu_{eff}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\varepsilon^2\left(\beta_T\left(T-T_{ref}\right)+\beta_C\left(C-C_{ref}\right)\right)\rho_f.g.\cos\varphi \quad \text{(II.23)}$$

c) Equation de l'énergie

$$(\rho.cp)_f\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \quad \text{(II.24)}$$

d) Equation de concentration

$$\left[u_i\frac{\partial C}{\partial x}+v_i\frac{\partial C}{\partial y}\right]=D\left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right] \quad \text{(II.25)}$$

II.7.Conditions aux limites

Pour la résolution du problème physique, nous avons besoin d'associer aux équations mathématiques régissant le phénomène de convection naturelle, un nombre adéquat de conditions aux limites.

II.7.1.Conditions aux limites dynamiques

Pour faciliter la notation on a supprimé l'indice i, dans ce cas les conditions aux limites s'écrivent :

La condition d'adhérence aux parois impose des vitesses nulles.

$x = 0 \quad , 0 \le y \le L \qquad \begin{cases} u(0,y)=0 \\ v(0,y)=0 \end{cases}$ (II.26)

$x = L \quad , 0 \le y \le L \qquad \begin{cases} u(L,y)=0 \\ v(L,y)=0 \end{cases}$ (II.27)

$y = 0 \quad , 0 \le x \le L \qquad \begin{cases} u(x,0)=0 \\ v(x,0)=0 \end{cases}$ (II.28)

$y = L \quad , 0 \le x \le L \qquad \begin{cases} u(x,L)=0 \\ v(x,L)=0 \end{cases}$ (II.29)

II.7.3.Conditions aux limites Thermiques:

$x = 0 \ , 0 \le y \le L$ $\quad T(0,y) = T_1$ imposé (II.30)

$x = L \ , 0 \le y \le L$ $\quad T(L,y) = T_2$ imposé (II.31)

$y = 0 \ , \ 0 \le x \le L$ $\quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{(x,0)} = 0$ adiabatique (II.32)

$y = L \ , 0 \le x \le L$ $\quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{(x,L)} = 0$ adiabatique (II.33)

II.8 adimensionnement des équations:

En général, l'adimensionnement est une méthode qui peut permettre de réduire le nombre de paramètres influençant les phénomènes physiques et de généraliser les résultats à obtenir.

Afin de ne pas alourdir les équations gouvernantes par l'indice i, on a omis l'indice i. Ainsi en introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes:

L : Longueur de la cavité.

$\Delta T = T_1 - T_2$: Ecart de température de référence entre les parois.

$\Delta C = C_1 - C_2$: Ecart de Concentration de référence entre les parois.

α : Diffusivité thermique.

$$X^* = \frac{x}{L} \quad ; \quad Y^* = \frac{y}{L} \quad ; \quad U^* = \frac{uL}{\alpha} \quad ; \quad V^* = \frac{vL}{\alpha} \quad ; \theta = \frac{T - T_{ref}}{T_1 - T_2} \quad ; \quad S = \frac{C - C_{ref}}{C_1 - C_2} \quad ;$$

$$P^* = p \frac{L^2}{\left(\frac{\rho_f . \alpha^2}{\varepsilon^2}\right)}$$

Avec:

$$T_{ref} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad ; \quad C_{ref} = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

Afin de ne pas trop encombrer l'écriture des équations les exposants (*) relatifs aux variable adimensionnelles seront omis par la suite.

Dans ces conditions, les équations gouvernantes adimensionnelles s'écrivent sous la forme:

II.8.1. Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \qquad \text{(II.34)}$$

b) Equation de conservation de la quantité de mouvement

- **Suivant x**

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial X}-\frac{\Pr}{Da}.U+R_v\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right)+Ra\,\Pr[\theta+NS]\sin\varphi \qquad \text{(II.35)}$$

- **Suivant y**

$$U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial Y}-\frac{\Pr}{Da}.V+R_v\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+Ra\,\Pr[\theta+NS]\cos\varphi \qquad \text{(II.36)}$$

c) Equation de l'énergie

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X}+V\frac{\partial \theta}{\partial Y}=\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \qquad \text{(II.37)}$$

d) Equation de concentration

$$U\frac{\partial S}{\partial X}+V\frac{\partial S}{\partial Y}=1/Le.\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\right) \qquad \text{(II.38)}$$

II.9 Conditions aux limites adimensionnelles:

a) Les conditions dynamiques, thermiques et solutales sont :

Pour Y=0 $0\le X\le 1$ U=V=0 $\left.\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right|=0$ $\left.\frac{\partial S}{\partial Y}\right|=0$ (II.39)

Pour Y=1 $0\le X\le 1$ U=V=0 $\left.\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right|=0$ $\left.\frac{\partial S}{\partial Y}\right|=0$ (II.40)

Pour X= 0 $0\le Y\le 1$ U=V=0 $\theta=0.5$ S=0.5 (II.41)

Pour X= 1 $0\le Y\le 1$ U=V=0 $\theta=-0.5$ S=-0.5 (II.42)

II.10 :Coefficients de transfert de chaleur et de masse

Les transferts de chaleur et de masse sont représentés, respectivement, par les nombres de Nusselt et Sherwood qui décrivent l'importance des transferts convectifs de chaleur et de soluté, par rapport aux transferts conductif et diffusif, en un point donné.

$$\begin{cases} Nu(x) = \dfrac{hx}{k} \quad ; \quad \text{avec} \quad h = \dfrac{q(x)}{\Delta T} \\ Nu(y) = \dfrac{hy}{k} \quad ; \quad \text{avec} \quad h = \dfrac{q(y)}{\Delta T} \end{cases} \tag{II.43}$$

Où:

h : Coefficient du transfert convectif.

q: Flux de chaleur.

Par conséquent, après adimensionnement, on obtient une forme finale du nombre de Nusselt:

$$Nu(x) = -\left.\frac{\partial \theta}{\partial X}\right|_{x=0,1} ; Nu(y) = -\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=0,1)} \tag{II.44}$$

Par analogie, le nombre de Sherwood, caractérisant le transfert massique, s'écrit:

$$Sh(x) = -\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=0,1} ; Sh(y) = -\left.\frac{\partial S}{\partial y}\right|_{y=0,1)} \tag{II.45}$$

De même, on définit le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood moyens comme étant respectivement:

$$Nu_{m/X} = \int_0^1 Nu(X).dX \quad ; Nu_{m/Y} = \int_0^1 Nu(Y).dY \tag{II.46}$$

$$Sh_{m/X} = \int_0^1 Sh(X).dX \quad ; \mathrm{Sh}_{m/Y} = \int_0^1 Sh(Y).dY \tag{II.47}$$

II.11 Conclusion:

Une fois les équations régissant le problème posé, avec les conditions aux limites associées, et mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme d'équations aux dérivées partielles ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique.

Celle-ci permettra de transformer en équations aux dérivées en équations algébriques plus simples à résoudre. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III :

Méthode Numérique

III. Principe de la méthode des volumes finis

III.1. Equation différentielle gouvernante

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement d'un fluide, le transfert de chaleur et le transfert de masse, sont gouvernés par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie, des espèces chimiques,... etc. Ces principes sont exprimés par des équations différentielles. Si on note par ϕ la variable dépendante, les équations de conservation possèdent une forme commune, qui est donnée par:

$$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)=\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)+S \qquad \text{(III.1)}$$

Avec:

$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)$: Terme convectif.

$\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)$: Terme de diffusion.

S : Terme source.

Γ: Coefficient de diffusion.

ϕ: EST la variable dépendante généralisée (vitesse, température, Concentration).

III.1.1. Equation de continuité

La difficulté majeure dans le calcul du champ de vitesse, réside dans le champ de pression, qui est inconnu. Cependant, ce champ de pression est implicitement spécifié dans l'équation de continuité.

Quand ce champ de pression est substitué dans les équations du mouvement, le champ de vitesse résultant satisfait l'équation de continuité. Le couplage entre le champ de pression et le champ de vitesse est utilisé dans l'élaboration d'une procédure de calcul pour le champ dynamique.

III.1.2. Maillage et volume de contrôle

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle. Il existe plusieurs types de maillage, on peut citer le maillage uniforme, le maillage non uniforme et aussi le maillage à zones ; et c'est pour le maillage à zones que nous avons opté dans notre travail avec des pas très petits. La figure III-1 indique la subdivision d'un domaine en volume de contrôle.

La variable dépendante considérée est calculée en ces points. Les équations algébriques définies en ces nœuds, sont obtenues par intégration des équations de conservation à travers les volumes de contrôle, pour chaque nœud.

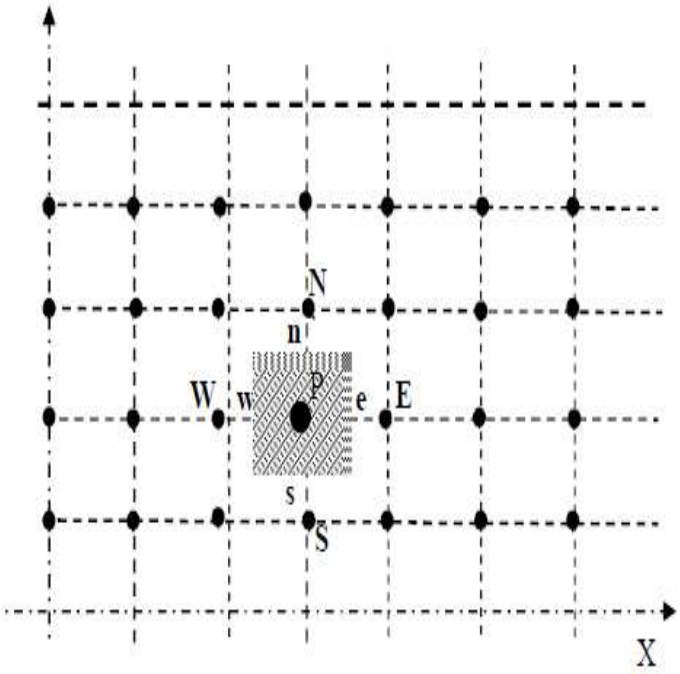


Figure III.1: Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle

III.1.3. Discrétisation des équations de conservation

Pour une situation bidimensionnelle, en régime permanent, l'équation différentielle (III.1) peut s'écrire, en considérant une direction i, sous la forme suivante:

$$\rho.u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \qquad \text{(III.2)}$$

En combinant les flux convectifs et diffusifs (III.1), le flux total (convection-diffusion) J_i s'écrit alors:

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \qquad \text{(III.3)}$$

Avec

$$J_i = \rho.u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad \text{(III.4)}$$

Les différents termes des équations de conservation obtenues dans notre cas sont rapportés dans le tableau (III-1).

Tableau III.1: Définition des différents termes des équations de conservation.

Equation	ϕ	Γ	S
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\Pr}{Da}U + Ra \Pr[\theta + NS]\sin\alpha$
Mouvement/Y	V	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\Pr}{Da}V + Ra \Pr[\theta + NS]\cos\alpha$
Energie	θ	R_k	0
Concentration	S	$1/Le$	0

En intégrant l'équation (III.3) à travers le volume de contrôle représenté dans la figure (III.2), on obtient:

$$J_W A_W - J_e A_e + J_S A_S - J_n A_n = \overline{S}\Delta V = \overline{S}\Delta X \Delta Y \qquad \text{(III.5)}$$

Dans l'équation (III.5), les quantités Je, w, n, s représentent les flux totaux sur les faces des volumes de contrôle; S est le terme source, et ΔV le volume. Les $A_{e,w,n,s}$ sont les aires de chaque face du volume de contrôle.

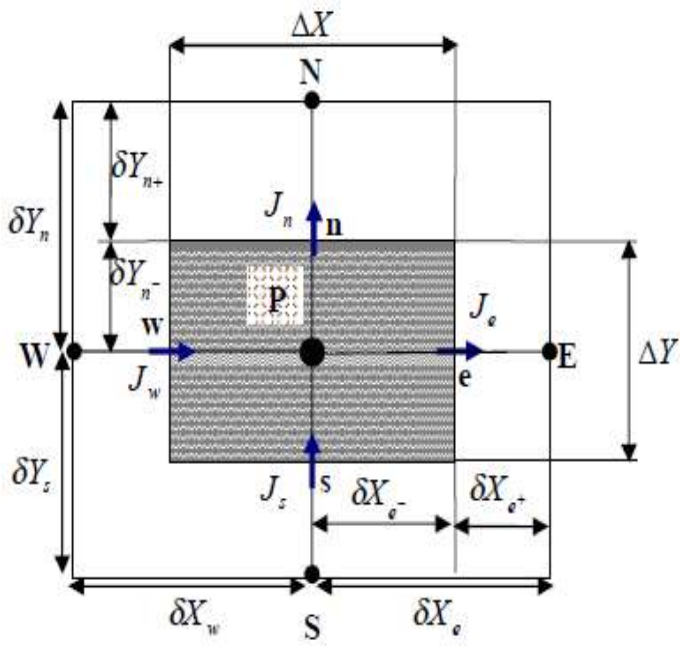


Figure III.2: Volume de contrôle représentatif

Avec :

$$J_e = \int_n^s (J_X)_e \, dY = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_e \Delta Y \quad \text{(III.6)}$$

$$J_w = \int_n^s (J_X)_w \, dY = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_w \Delta Y \quad \text{(III.7)}$$

$$J_n = \int_w^e (J_Y)_n \, dX = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]_n \Delta X \quad \text{(III.8)}$$

$$J_s = \int_w^e (J_Y)_S \, dX = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]_s \Delta X \quad \text{(III.9)}$$

III.1.3.1. Flux de diffusion -convection:

Considérons la région entre les points P et E de la figure (III.2).Si un problème unidimensionnel de convection - diffusion est résolu entre les points P et E, un profil exponentiel de ϕ est obtenu comme solution exacte. La solution exponentielle conduit à:

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_E)}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad \text{(III.10)}$$

Où le nombre de Peclet, P_e est donné par:

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad \text{(III.11)}$$

$F_e = \rho U_e A_e$ est le débit d'écoulement, et D_e la conductance de diffusion.

Le coefficient de diffusion Γ_e est évalué par une moyenne harmonique [14] à travers le volume de contrôle. L'expression de D_e est alors:

$$D_e = A_e \left(\frac{(\delta X_{e^-})}{\Gamma_P} + \frac{(\delta X_{e^+})}{\Gamma_E} \right)^{-1} \quad \text{(III.12)}$$

Les distances δX_{e^-} et δX_{e^+} [14] sont représentées sur la figure (III.2).

III.1.3.2. Simplification de l'expression du flux:

L'équation (III.12) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$J_e = F_e \phi_p + \{ D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \} (\phi_P - \phi_E) \quad \text{(III.13)}$$

Avec

$$A(|P_e|) = \frac{|P_e|}{(\exp(|P_e|) - 1)} \qquad \text{(III.14)}$$

Le calcul des exponentielles est assez long, de plus il n'est pas exact pour les situations bidimensionnelles et tridimensionnelles avec terme source. Pour ces raisons, des approximations pour l'expression du flux ont été utilisées [14].

III.1.3.3. Linéarisation du terme source:

Souvent le terme source S dépend de la variable ϕ. Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_P. La méthode de la tangente [14] est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire:

$$\overline{S} = \overset{*}{S} + \left[\frac{dS}{d\phi}\right]^{*} (\phi_P - \phi_E) \qquad \text{(III.15)}$$

la formule de linéarisation peut s'écrire alors:

$$\overline{S} = Sc + S_P \phi_P \qquad \text{(III.16)}$$

S_P est le coefficient de ϕ_P est Sc est la partie de S qui ne dépend pas explicitement de ϕ_P .Le symbole * est utilisé pour noter la valeur de ϕ_P à une itération donnée. Il est souhaitable lors de la linéarisation que S_P soit négatif, car un S_P positif peut causer une divergence.

Les valeurs des termes sources linéarisés (Sc et S_P) pour les différentes équations sont résumées dans le tableau (III.2).

Tableau III.2: Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations.

Equation	ϕ	Sc	Sp
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$-\frac{\partial P}{\partial X} + Ra\,\mathrm{Pr}[\theta + NS]\sin\varphi$	$-\frac{\mathrm{Pr}}{Da_i}$
Mouvement/Y	V	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + Ra\,\mathrm{Pr}[\theta + NS]\cos\varphi$	$-\frac{\mathrm{Pr}}{Da_i}$
Energie	θ	0	0
Concentration	S	0	0

III.1.3.4. Equation finale de discrétisation:

L'intégration de l'équation de continuité donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

Où F_e, F_w, F_n et F_s sont les débits volumiques à travers les faces du volume de contrôle.
Multiplions l'équation (III-10) par ϕ_p elle devient :

$$F_e\phi_P - F_w\phi_P + F_n\phi_P - F_s\phi_P = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

D'autre part, la linéarisation du terme source donne :

$$\overline{S} = Sc + S_P\phi_P \qquad \text{(III.19)}$$

La combinaison entre les équations (III-5) et (III-11) donne :

$$\left(J_e - F_e\phi_P\right) - \left(J_w - F_w\phi_P\right) + \left(J_n - F_n\phi_P\right) - \left(J_s - F_s\phi_P\right) = \left(Sc + S_P\phi_P\right)\Delta X\Delta Y \qquad \text{(III.20)}$$

Sachant que :

$$J_e - F_e\phi_P = \phi_E\left(\phi_P - \phi_E\right) \qquad \text{(III.20a)}$$

$$J_w - F_w\phi_P = \phi_W\left(\phi_W - \phi_P\right) \qquad \text{(III.20b)}$$

$$J_n - F_n\phi_P = \phi_N\left(\phi_P - \phi_N\right) \qquad \text{(III.20c)}$$

$$J_S - F_s\phi_P = \phi_S\left(\phi_S - \phi_E\right) \qquad \text{(III.20d)}$$

On obtient l'équation discrétisée:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + b \qquad \text{(III.21)}$$

Avec:

$$a_E = D_e A\left(\left|P_e\right|\right) + \left[-F_e, 0\right] \qquad \text{(III.21a)}$$

$$a_W = D_w A\left(\left|P_w\right|\right) + \left[-F_w, 0\right] \qquad \text{(III.21b)}$$

$$a_S = D_s A\left(\left|P_s\right|\right) + \left[-F_s, 0\right] \qquad \text{(III.21c)}$$

$$a_N = D_n A\left(\left|P_n\right|\right) + \left[-F_n, 0\right] \qquad \text{(III.21d)}$$

$$b = Sc\Delta X\Delta Y \qquad \text{(III.21e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P\Delta X\Delta Y \qquad \text{(III.21f)}$$

Le symbole [a, b] représente le maximum entre a et b et $A\left(\left|P_i\right|\right)$ la fonction d'interpolation qui diffère d'un schéma à un autre.

Avec :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta X_e}\Delta Y \quad , F_e = U_e \Delta Y \quad , \; P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta X_w}\Delta Y \quad , F_w = U_w \Delta Y \quad , \; P_w = \frac{F_w}{D_w} \qquad \text{(III.22)}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta Y_n}\Delta X \quad , F_n = V_n \Delta X \quad , \; P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta Y_s}\Delta X \quad , F_s = V_s \Delta X \quad , \; P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

D_i, F_i et P_i représentent respectivement la diffusion, le débit volumique et le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion.

L'équation (III.14) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \qquad \text{(III.23)}$$

L'indice nb note les nœuds voisins de P, et la sommation est faite à travers tous les nœuds voisins (e, w, n, s).

III.1.3.5.Méthode de résolution des équations algébriques:

La méthode de résolution adopté dans la présente étude est la technique ligne par ligne; qui combine entre une méthode directe (algorithme de Thomas) et une méthode itérative (Gauss Seidel) [14-15], est utilisée pour la résolution des équations algébriques. Elle consiste à appliquer l'algorithme de Thomas pour trouver les valeurs de S pour une direction et une position données. Les valeurs de ϕ des nœuds des positions avoisinantes sont estimées lorsque toutes les positions seront considérées, une itération est accomplie par la technique ligne par ligne. Le processus peut être répété en choisissant les positions dans l'autre direction.

III.1.4. Considérations pour le champ dynamique

L'analyse des équations gouvernantes pour les composantes de vitesse u_i révèle que ces dernières ne peuvent être obtenues directement par la résolution des équations du mouvement. En effet, ces équations contiennent le gradient de pression $-\frac{\partial P}{\partial x_i}$ qui est un terme

source important, lequel n'est pas exprimé en terme de u_i ou d'autres variables. Cependant, la pression est indirectement spécifiée à travers l'équation de continuité. Une autre difficulté surgit aussi pour les équations du mouvement et de continuité. Si les vitesses et les pressions sont calculées aux mêmes nœuds, plusieurs champs physiques irréels peuvent être considérés comme solutions. L'un des remèdes pour cet inconvénient est le maillage décalé proposé par Patankar.

III.1.4.1.Notion de maillage décalé:

La figure (III.3) montre une partie d'un maillage adapté au cas bidimensionnel. Dans le maillage décalé, les composantes de vitesse sont portées sur les faces des volumes de contrôle. Toutes les autres variables ϕ, y compris la pression, sont calculées aux nœuds principaux.

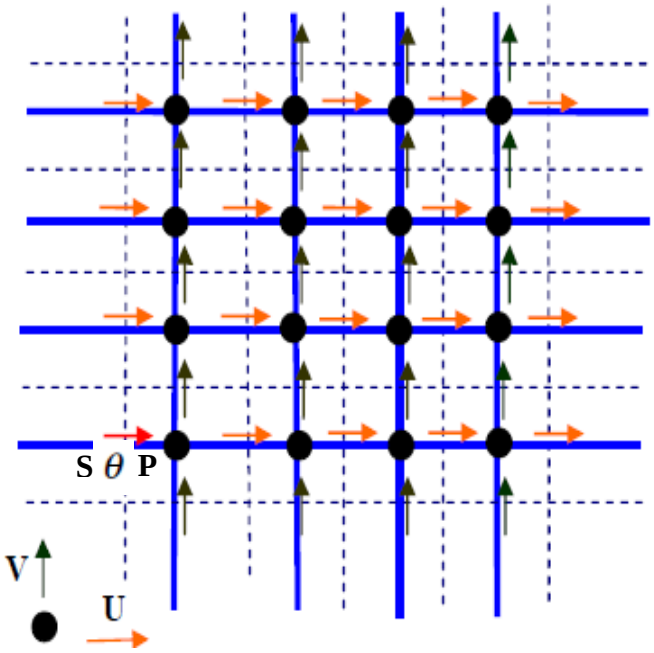


Figure III.3: Représentation d'un maillage décalé

III.1.5. Discrétisation des équations dynamiques

III.1.5.1. Equations du mouvement:

Les volumes de contrôle correspondant à U et V sont mentionnés dans la figure (III.4) l'équation du mouvement discrétisée au nœud (e) s'écrit alors:

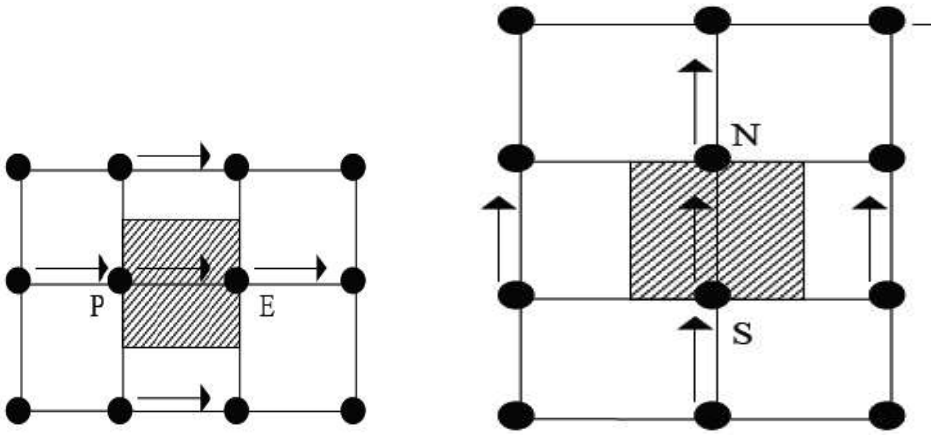


Figure III.4: Volume de contrôle pour U et V

L'intégration des deux équations de quantité de mouvement suivant les directions X et Y donne :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e$$

(III.24)

$$a_n V_n = \sum a_{nb} V_{nb} + b + (P_P - P_N) A_n$$

A_e, A_n représentent les surfaces sur les quelles agissent les forces de pression.

$(P_P - P_E)A_e$, $(P_P - P_N)A_n$: Sont les forces de pression agissant sur les deux faces verticale et horizontale.

La résolution nécessite la connaissance de la pression.

Le champ de vitesse obtenu ne satisfera l'équation de continuité que si la pression est correcte.

Au choix initial $P*$ correspond la solution $U*, V*$

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e$$

(III.25)

$$a_n V_n^* = \sum a_{nb} V_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) A_n$$

III.1.5.2.Correction des vitesses et pression

L'objectif est de corriger la pression estimée P^* telle que la vitesse obtenue U^*, V^*

s'approchera progressivement de la valeur qui satisfera l'équation de continuité.

Soit P la pression exacte :

$$\begin{aligned} P &= P^* + P' \\ U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \end{aligned} \qquad \text{(III.26)}$$

P' : Correction de pression et U', V' :correction des vitesses.

Nous avons:

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \qquad \text{(III.27)}$$

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e \qquad \text{(III.28)}$$

Faisons la soustraction entre ces deux équations :

$$a_e U_e' = \sum a_{nb} U_{nb}' + (P_P' - P_E') A_e \qquad \text{(III.29)}$$

L'une des hypothèses simplificatrices introduites par Patanker est de supposer que le terme $\sum a_{nb} U'_{nb\ e}$ est négligeable.

$$a_e U_e' = (P_P' - P_E') A_e \qquad \text{(III.30)}$$

Où: encore $U_e' = (P_P' - P_E') d_e$ (III.31)

L'équation (III-26) représente la formule de correction de vitesse, avec $d_e = \dfrac{A_e}{a_e}$

Donc : $U_e = U_e^* + (P_P' - P_E') d_e$ (III.32)

De la même manière $V_e = V_e^* + (P_P' - P_N') d_n$ (III.33)

Avec: $d_n = \dfrac{A_n}{a_n}$

III.1.5.3.Equation de correction de pression:

Le problème maintenant est comment trouver la correction de pression P' ?

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(III.34)}$$

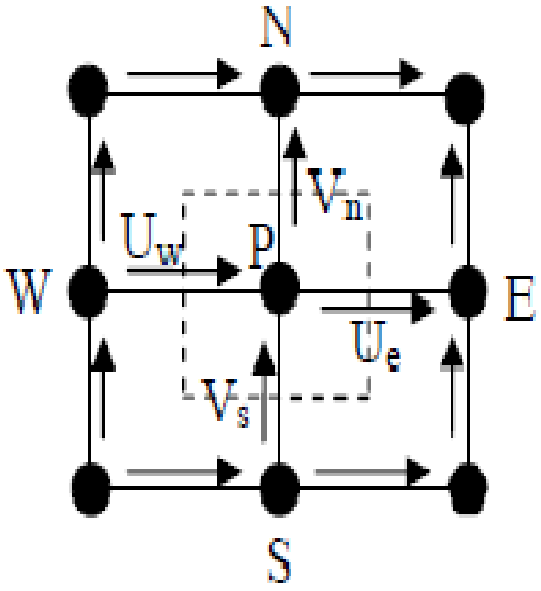


Figure III.5: Volume de contrôle lié à P

Intégration sur un volume de contrôle autour de P donne :

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \qquad \text{(III.35)}$$

Substitution des vitesses par $U = U^* + U'$, $V = V^* + V'$

D'où :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \qquad \text{(III.36)}$$

$$a_E = d_e \Delta Y \qquad \text{(III.36a)}$$

$$a_W = d_w \Delta Y \qquad \text{(III.36b)}$$

$$a_N = d_n \Delta X \qquad \text{(III.36c)}$$

$$a_S = d_s \Delta X \qquad \text{(III.36d)}$$

$$b = (U_w^* - U_e^*)\Delta Y + (V_s^* - V_n^*)\Delta X \qquad \text{(III.36f)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad \text{(III.36e)}$$

Le terme b devrait tendre vers zéro à la convergence.

III.2.Algorithme SIMPLER

(SIMPLER: Semi **I**mplicit **M**ethod for **P**ressure **L**inked **E**quation **R**evised), l'algorithme est développé pour permettre d'améliorer la vitesse de convergence.

- **Equation de pression**

Equation du mouvement :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \quad \text{(III.37)}$$

Où

$$U_e = \left(\frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e} \right) + (P_P - P_E) d_e \quad \text{(III.38)}$$

On définit $\hat{U}_e$ pseudo vitesse comme :

$$\hat{U}_e = \left(\frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e} \right)_e \quad \text{(III.39)}$$

Donc $$U_e = \hat{U}_e + (P_P + P_E) d_e \quad \text{(III.40)}$$

D'une manière similaire:

$$V_e = \hat{V}_e + (P_P - P_N) d_n \quad \text{(III.41)}$$

- **L'équation de continuité :**

L'intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle donne lieu à :

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \quad \text{(III.42)}$$

Substitutions U_i et V_i par $\hat{U}_i + (P_P - P_E) d_i$ et $\hat{V}_{\hat{i}} + (P_P - P_N) d_i$ tel que i représente e, w, n, et s. D'où l'équation de pression :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b \quad \text{(III.43)}$$

Avec:

$$a_E = d_e \Delta Y \quad \text{(III.43a)}$$

$$a_W = d_w \Delta Y \quad \text{(III.43b)}$$

$$a_N = d_n \Delta X \quad \text{(III.43c)}$$

$$a_S = d_s \Delta X \quad \text{(III.43d)}$$

$$b = \left(\hat{U}_w - \hat{U}_e\right)\Delta Y + \left(\hat{V}_s - \hat{V}_n\right)\Delta X \quad \text{(III.43e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{(III.43f)}$$

Remarque :

Aucun terme n'a été négligé pour aboutir à l'équation de pression.

Dans le cas de la convection naturelle, le champ dynamique est couplé avec le champ thermique. Les différentes étapes de l'algorithme Simple, dans ce cas, sont les suivants :

1- Choix initial des vitesses U^* ,V^* et de température θ^* de soluté S^* .

2- Calculer les coefficients des équations du mouvement et obtenir les pseudos vitesses

$$\hat{U}_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e}$$

3- Calculer les coefficients dans les équations de pression et résoudre celles-ci pour obtenir P.

4- Utiliser cette pression comme choix initial P^* et résoudre les équations du mouvement pour obtenir U^*, V^*.

5-Calculer le terme b et résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir P'.

6- Corriger les vitesses $U_i = U_i^* + \left(P_P' - P_i'\right)$mais non pas la pression.

7-Résoudre les équations d'énergie et solutale pour obtenirθ, S.

8- Prendre ces valeurs comme nouveau choix initial et retourner à l'étape 2.

9- Répéter le processus jusqu'à convergence.

III.3. Technique de sous-relaxation

Les coefficients de sous relaxation sont utilisés dans les équations algébriques pour éviter la divergence du système fortement non linéaire.

Elle consiste à diminuer la variation de la grandeur physique ϕ d'une itération à une autre par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ .

Toutes les équations de conservation sont écrites après discrétisation sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad \text{(III.44)}$$

Si nous notons ϕ_P^* la valeur de ϕ_P à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\phi_P = \phi_P^* + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} \right] - \phi_P^* \qquad \text{(III.45)}$$

Le terme entre parenthèses de cette équation représente le changement survenu à ϕ_P pendant une itération. Cette variation peut être alors amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_ϕ de la manière suivante :

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} \right] - \phi_P^* \qquad \text{(III.46)}$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et la convergence lente. Mais plus ils sont élevés, plus la sous relaxation est faible avec des risques d'instabilités et divergence du processus itératif.

Il n'existe pas de règles pour choisir les coefficients de sous relaxation, cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des volumes de contrôle ainsi que de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour aboutir à la convergence du processus itératif.

III.4. Critère de convergence

On dit qu'un processus itératif atteint la convergence lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif sur les variables dépendantes ϕ. Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé critère de convergence qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul.

Un critère de convergence est imposé en terme d'erreur relative pour les variables U, V, P, et θ . Et qui décrit pour chaque variable :

$\max \left| \frac{\phi - \phi^*}{\phi^*} \right| \leq 10^{-4}$, ainsi que pour le terme b, avec $|b| \leq 10^{-5}$

III.5. Schémas d'interpolation

Dans les coefficients de l'équation algébrique (III-15), nous avons rencontré le terme $A(|P_i|)$qui représente la fonction d'interpolation utilisée pour l'évaluation de la variable dépendante ϕà une interface du volume de contrôle.

$A(|P|)$ Prendra une fonction selon le schéma choisi et qui est récapitulée dans le tableau III-3.

Tableau III.3: Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation.

Schéma	$A\|P\|$
Centré	1-0.5$\|P\|$
Upwind	1
Hybride	$[0,(1-0.5\|P\|)]$
Power-Law	$[0,(1-0.5\|P\|)^5]$
Exponentiel	$\frac{P}{\exp\|P\|-1}$

Limitations :

- **Le schéma centré :** il est limité aux problèmes à faible nombre de Peclet, $|P| \leq 2$
- **Le schéma Upwind :**

- non approprié pour le faibles nombre de $|P|$
- Pour les grandes valeurs de $|P|$**,** la diffusion est surestimée (normalement $\frac{d\phi}{dX} \to 0$).

- **Schéma hybride :** Le schéma hybride est une combinaison de deux schémas précédents, il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|P| < 2$, et devient identique au schéma Upwind lorsque $|P| > 2$. L'erreur maximale est pour $|P| \approx 2$
- **Schéma Power-law** : Ce schéma est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, il s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte. Dans notre cas, nous avons utilisé le schéma Power-law.

III.6. Application de la méthode des volumes finis à notre problème

On rappelle les équations qui régissent le mouvement:

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \qquad \text{(III.47)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}\right]=-\frac{\partial P}{\partial X}-\frac{\Pr}{Da}.U+R_v\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right)+Ra\,\Pr[\theta+NS]\sin\varphi \qquad \text{(III.48)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}\right]=-\frac{\partial P}{\partial Y}-\frac{\Pr}{Da}.V+R_v\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+Ra\,\Pr[\theta+NS]\cos\varphi \qquad \text{(III.49)}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X}+V\frac{\partial \theta}{\partial Y}=\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \qquad \text{(III.50)}$$

$$U\frac{\partial S}{\partial X}+V\frac{\partial S}{\partial Y}=1/Le\cdot\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\right) \quad \text{(III.51)}$$

III.6.1 Discrétisation des équations du mouvement

III.6.1.1. Equation du mouvement en X

Comme on l'a déjà signalé, l'équation du mouvement dans la direction X sera intégrée dans le volume de contrôle décalé vers la droite, figure (III.6). D'après cette figure, on peut noter que les nœuds w', P' et e' correspondent respectivement aux nœuds P, e et E. L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction X à travers le volume de contrôle de la figure (III.6) et après arrangement donne:

$$a_{P'}U_{P'}=a_{E'}U_{E'}+a_{W''}U_{W'}+a_{N'}U_{N'}+a_{S'}U_{S'}+(P_P-P_E)\Delta Y'+b' \quad \text{(III.52)}$$

Les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), alors que les expressions des conductances diffusives et les débits volumiques sont donnés par:

$$\left.\begin{aligned} D_{e'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta X'}\right)_{e'}\Delta Y' & F_{e'}&=U_{e'}\Delta Y'\\ D_{w'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta X'}\right)_{w'}\Delta Y' & F_{w'}&=U_{w'}\Delta Y'\\ D_{n'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta Y'}\right)_{n'}\Delta X' & F_{n'}&=V_{n'}\Delta X'\\ D_{s'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta Y'}\right)_{s'}\Delta X' & F_{s'}&=V_{s'}\Delta X' \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.53)}$$

Avec $\Gamma=R_v\,\mathrm{Pr}$, $b'=Sc\Delta X'\Delta Y'$ et les valeurs de Sc et Sp sont données dans le tableau (III.2)

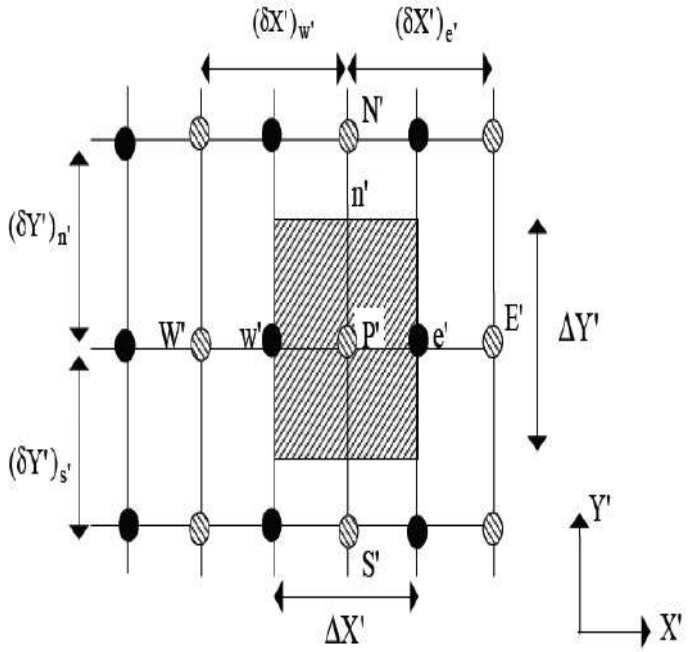


Figure III.6: Schéma du volume de contrôle pour U.

III.6.1.2. Equation du mouvement en Y

L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction Y est faite dans le volume de contrôle décalé vers le haut, figure (III.7), et les nouveaux nœuds seront désignés par P", E", W" et N" et les interfaces par e",w", n" et s". D'après cette figure, on peut noter que les nœuds s", P", et n" correspondent respectivement aux nœuds P, n et N.

En utilisant les mêmes démarches d'intégration qu'en X, la discrétisation de l'équation du mouvement dans la direction Y est obtenue comme suit:

$$a_{P''}U_{P''} = a_{E''}U_{E''} + a_{W''}U_{W''} + a_{N''}U_{N''} + a_{S''}U_{S''} + (P_P - P_N)\Delta Y'' + b'' \qquad \text{(III.54)}$$

Où les coefficients a_i " sont définis dans les équations (III.14), et les expressions des flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} D_{e''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X''}\right)_{e''} \Delta Y'' & F_{e''} &= U_{e''}\Delta Y'' \\ D_{w''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X''}\right)_{w''} \Delta Y'' & F_{w''} &= U_{w''}\Delta Y'' \\ D_{n''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y''}\right)_{n''} \Delta X'' & F_{n''} &= V_{n''}\Delta X'' \\ D_{s''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y''}\right)_{s''} \Delta X'' & F_{s''} &= V_{s''}\Delta X'' \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.55)}$$

Avec $\Gamma = R_v \,\mathrm{Pr}$, et le terme source est donné par:

$$b'' = Sc\Delta X''\Delta Y'' \quad \text{(III.56)}$$

La valeur de $\theta_{P''}$ et $S_{P''}$ aux interfaces sera calculée de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} \theta_{P''} &= fe\,\theta_P + (1-fe)\theta_N \\ S_{P''} &= fe\,S_P + (1-fe)S_N \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.57)}$$

et fe est un facteur d'interpolation [16] définis par:

$$fe = \frac{(\delta X'')_{n''}}{2(\Delta Y'')} \quad \text{(III.58)}$$

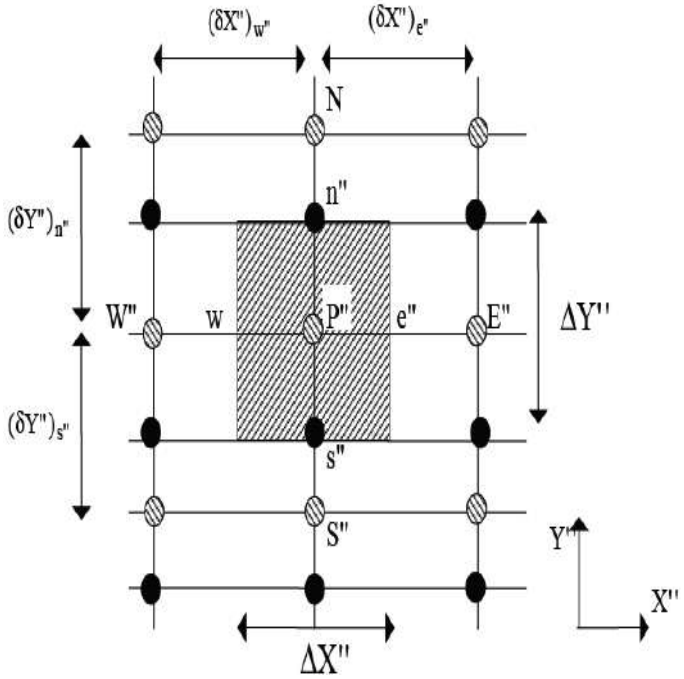


Figure III.7: Schéma du volume de contrôle pour V

III.6.2. Equation de correction de pression

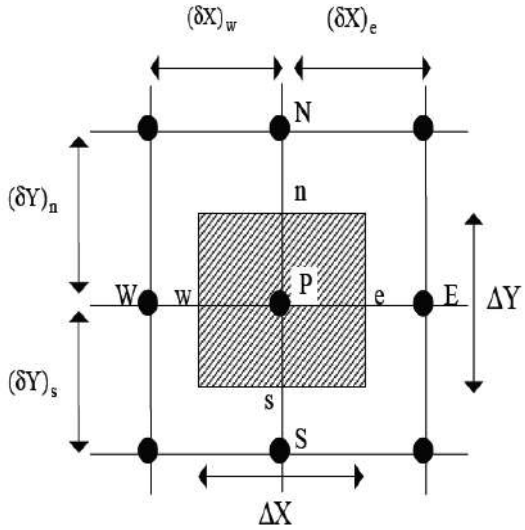


Figure III.8: Schéma du volume de contrôle pour P

L'intégration de l'équation de continuité pour le volume de contrôle de la figure (III.8) donne:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial U}{\partial X} dXdY + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial V}{\partial Y} dXdY = 0 \qquad \text{(III.59)}$$

soit après intégration et simplification, et en utilisant les mêmes démarches que celles faites dans c), l'équation précédente prend la forme:

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b_{P'} \qquad \text{(III.60)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad \text{(III.61)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \\ a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_S \Delta X \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.62)}$$

Avec:

$$\left.\begin{aligned} d_e &= \frac{A_e}{a_e} = \frac{\Delta Y}{a_e} \\ d_w &= \frac{A_w}{a_w} = \frac{\Delta Y}{a_w} \\ d_n &= \frac{A_n}{a_n} = \frac{\Delta X}{a_n} \\ d_s &= \frac{A_s}{a_s} = \frac{\Delta X}{a_s} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.63)}$$

Avec

$$b_{P'} = \left(U_w^* - U_e^*\right)\Delta Y + \left(V_s^* - V_n^*\right)\Delta X \quad \text{(III.64)}$$

L'indice (*) désigne la valeur des variables de l'itération précédente. On fait le même raisonnement pour obtenir le champ de pression, on obtient alors :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b_P \quad \text{(III.65)}$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \\ a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_s \Delta X \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.66)}$$

Avec :

$$b_P = \left(\hat{U}_w - \hat{U}_e\right)\Delta Y + \left(\hat{V}_s - \hat{V}_n\right)\Delta X \quad \text{(III.67)}$$

Avec:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{(III.68)}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_{P'} &= \frac{\sum_{nb'} a_{nb'} U_{nb'}}{a_{P'}} \\ \hat{V}_{P''} &= \frac{\sum_{ab''} a_{nb''} V_{nb''}}{a_{p''}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.69)}$$

III.6.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'intégration de l'équation de l'énergie est faite dans le volume de contrôle correspondant aux nœuds principaux, figure (III.8).

$$\int_s^n \int_w^e U \frac{\partial \theta}{\partial X} dX dY + \int_s^n \int_w^e V \frac{\partial \theta}{\partial Y} dX dY = R_k \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad \text{(III.70)}$$

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme:

$$a_P \theta_P = a_W \theta_W + a_E \theta_E + a_S \theta_S + a_N \theta_N \quad \text{(III.71)}$$

Où les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_e \Delta Y & F_e &= U_e \Delta Y \\ D_w &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_w \Delta Y & F_w &= U_w \Delta Y \\ D_n &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_n \Delta X & F_n &= V_n \Delta X \\ D_s &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_s \Delta X & F_s &= V_s \Delta X \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.72)}$$

$$\Gamma = R_k$$

III.6.4. Discrétisation de l'équation du soluté

L'intégration de l'équation du soluté est faite dans le volume de contrôle correspondant aux nœuds principaux, figure (III.8).

$$\int_s^n \int_w^e U \frac{\partial S}{\partial X} dXdY + \int_s^n \int_w^e V \frac{\partial S}{\partial Y} dXdY = \frac{1}{Le} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \right) dXdY \quad \text{(III.73)}$$

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme:

$$a_P S_P = a_W S_W + a_E S_E + a_S S_S + a_N S_N \quad \text{(III.74)}$$

Où les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_e \Delta Y & F_e &= U_e \Delta Y \\ D_w &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_w \Delta Y & F_w &= U_w \Delta Y \\ D_n &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_n \Delta X & F_n &= V_n \Delta X \\ D_s &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_s \Delta X & F_s &= V_s \Delta X \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.75)}$$

$$\Gamma = \frac{1}{Le}$$

Chapitre IV :

Résultats et Discussions

Résultats et Discussions

IV.1. Introduction

Dans le présent chapitre sont présentés les résultats de la simulation numérique se rapportant aux transferts de chaleurs et de masse générée dans une cavité carrée inclinée renfermant une couche poreuse.

IV.2. Procédure numérique

L'ensemble des équations aux dérivées partielles gouvernant la situation physique, est traduit en équations algébriques par utilisation de la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLER a été adopté pour la séquence des étapes de résolution. Le schéma en loi de puissance a été retenu pour l'évaluation des termes convectifs. Le système d'équations algébriques est résolu itérativement par l'algorithme de Thomas. Un maillage décalé non uniforme, de 82×82 nœuds a été utilisé. Il donne un bon compromis entre le temps d'exécution et la précision des calculs. La sensibilité du code de calcul au maillage est présentée dans le tableau (IV.1). Un critère de convergence est imposé en termes d'erreur relative pour les variables U, V, P, θ et S en termes de résidu de masse. Les calculs sont stoppés pour une erreur relative inférieure à 10^{-4} et un résidu de masse inférieur à 10^{-5}. Le code de calcul est validé par rapport à plusieurs cas limites de la littérature. Une très bonne concordance est à noter. Les résultats comparatifs sont résumés dans les tableaux (IV.2)

Tableau IV.1. Sensibilité du code de calcul au maillage cas de la cavité inclinée renferment une couche poreuse pour $Ra=10^6$, Pr=7, $\alpha = 30^\circ$, N=10, Le=10, $Da=10^{-3}$, $\varepsilon = 0.6$

Maillage	22x22	42x42	62x62	82x82	102x102
Nu	6.59	7.03	7.12	7.14	7.14
Sh	37.76	43.98	45.15	45.63	45.67

TableauIV.2. Comparaison du nombre de Nusselt dans le cas du régime de Darcy-Brinkman en convection thermique pour Pr = 0.71

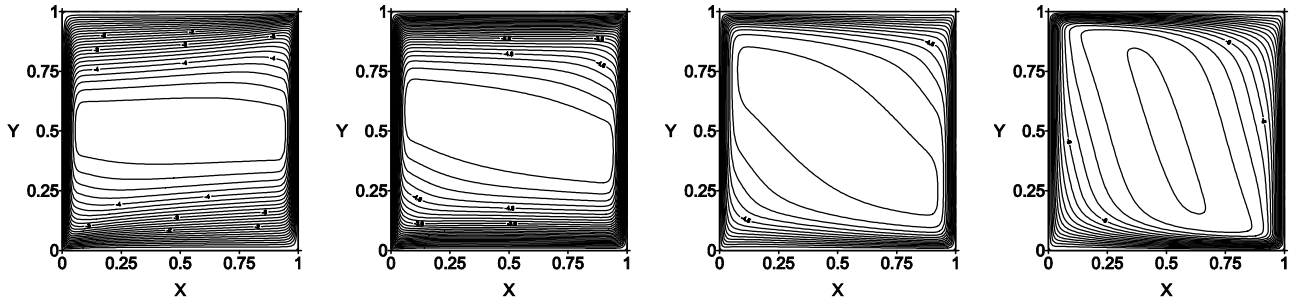
	Da	10^{-8}	10^{-5}	10^{-2}
Bennacer et al (2002) [17]	Ra_m = 500	8.80	8.37	3.26
Lauriat et al (1987) [18]		8.84	8.41	3.30
Présent code		8.94	8.42	3.26
Bennacer et al (2002) [17]	Ra_m= 10^3	13.48	12.26	4.18
Lauriat et al (1987) [18]		13.41	12.42	4.26
Présent Code		13.51	12.41	4.18

Dans toutes les simulations de cette étude, nous considérons une solution aqueuse comme fluide saturant la couche poreuse (Pr=7). La porosité, la conductivité thermique de la couche poreuse, le nombre de Lewis et le rapport des forces de volume (N) sont respectivement fixés à 0.6, 1, 10 et 10.

L'étude de l'effet de variation des paramètres sus cités, sur les transferts de matière et de chaleur est analysée. Nous avons pris une large étendue de perméabilité K qui varie de 10^{-9} à 10^{-1}, le nombre de Rayleigh varie de 10^2 à 10^6, le nombre de Lewis pour les deux cas gaz et liquide 3 et 10, respectivement, le rapport des forces de volume dans cette deuxième partie varier N de 0 à 15 et l'angle de l'inclinaison prend les valeurs suivantes 0°,10°,30°et 60°.

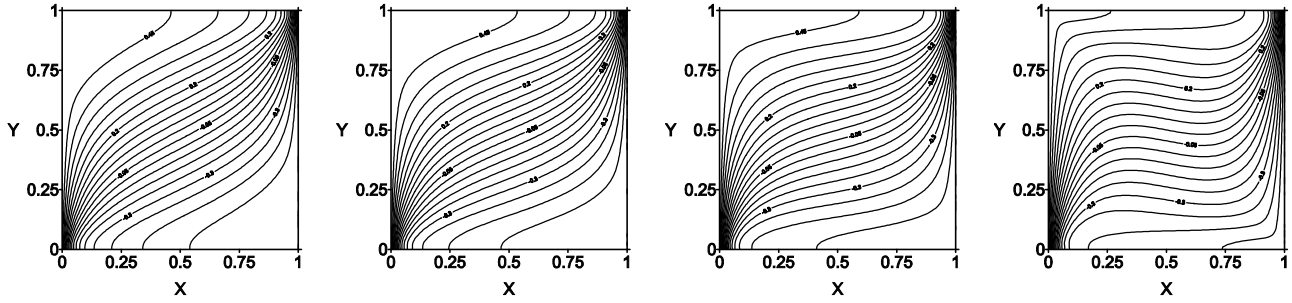
En premier lieu nous avons analysé l'effet de l'inclinaison de la cavité sur les transferts indépendamment des autres paramètres. Ensuite nous avons étudié les effets de permeabilité, sur les transferts thermique et massique, du nombre de Rayleigh (Ra), du nombre de Lewis (Le), du rapport des forces du volume (N),Les résultats de la simulation numérique sont représentés sous forme de courbes et englobent l'allure des lignes de courant, des isothermes et des isoconcentrations. Les transferts thermique et massique sont traduits par les nombres de Nusselt et Sherwood moyens.

Les structures d'écoulement, des isothermes et des isoconcentrations sont présentées dans les figures (IV.1) à (IV. 3).



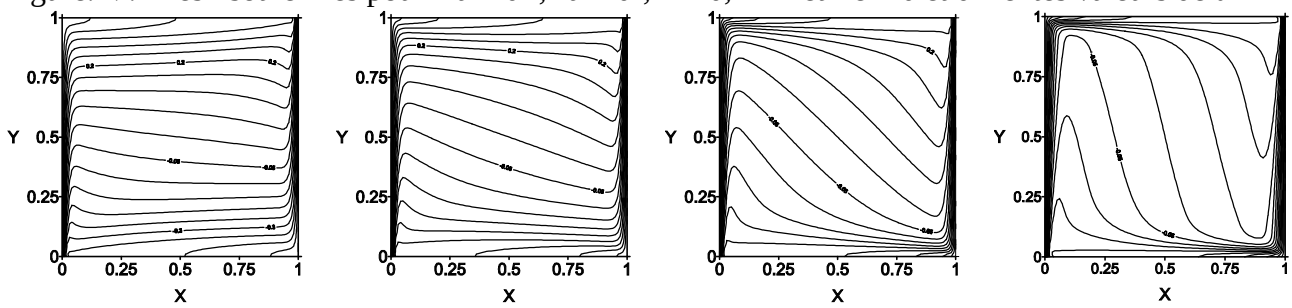
α=0° α=10° α=30° α=60°

Figure.IV.1 Les lignes de courants pour $Da=10^{-4}$,$Ra=10^{6}$,N=10,Pr=7 et Le=10 et diffentes valeurs de α



α=0° α=10° α=30° α=60°

Figure.IV.2 les isothermes pour $Da=10^{-4}$,$Ra=10^{6}$,N=10,Pr=7 et Le=10 et diffentes valeurs de α

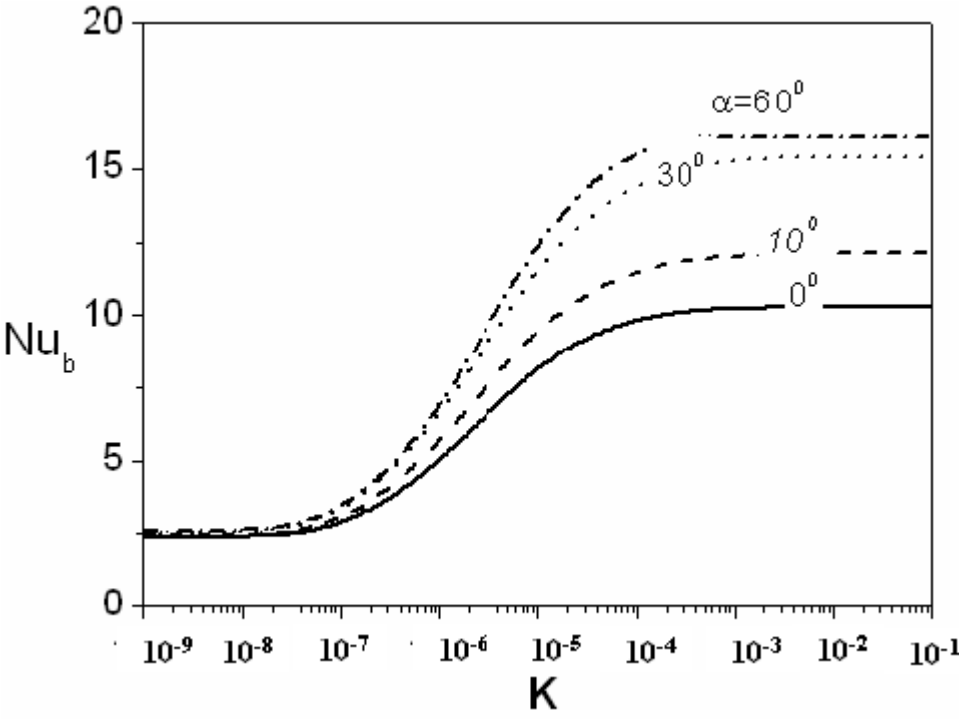


α=0° α=10° α=30° α=60°

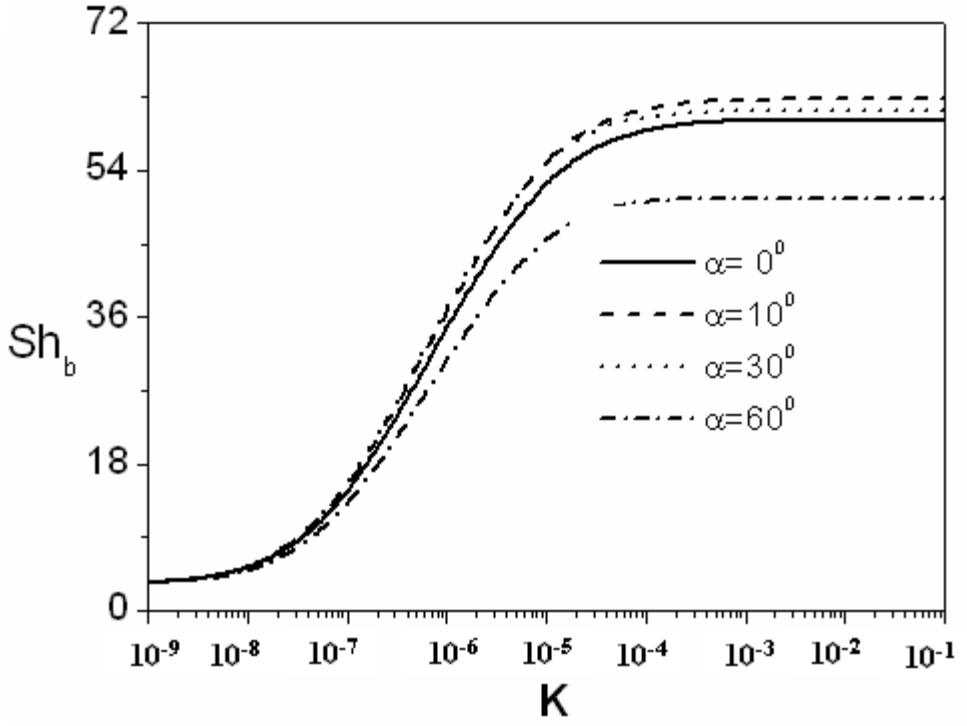
Figure.IV.3 Les isoconcentrations pour $Da=10^{-4}$,$Ra=10^{6}$,N=10,Pr=7 et Le=10 et diffentes valeurs de α

Les lignes de courant sont de forme elliptique prolongée et une cellule rotative remplit entièrement la cavité et dirigée vers la diagonale lorsque l'angle d'inclinaison augmente. La couche limite hydrodynamique prend place sur les parois. Les isothermes sont déformées et prennent place sur la diagonale pour toute la cavité, la couche limite thermique tend à se former, localisée respectivement sur les parties basses et hautes des parois latérales. Les isoconcentrations sont elles aussi déformées et prennent place sur toute la cavité avec un resserrement notable sur les parois verticales de la cavité. Une couche limite solutale prend place sur les parois latérales car le nombre de Lewis est élevé.

L'évolution des transferts thermique et massique de l'ensemble de la cavité poreuse en fonction des perméabilités K pour les différentes valeurs d'angle d'inclinaison envisager (0°,10°,30°,60°) est présentée dans les figures (IV.4) et (IV.5) respectivement.



Figure(IV.4) : Variation du Nombre de Nusselt en fonction de la perméabilité pour différentes valeurs de α



Figure(IV.5) : variation du Nombre de Sherwood en fonction de la perméabilité pour différentes valeurs de α

Les transferts thermique et massique n'augmentent qu'au-delà d'une certaine valeur de K, Pour une valeur fixée de K Les figures montrent que le transfert de chaleur croit avec l'accroissent de l'angle α, mais le transfert de masse augmente pour certaines valeurs d'angle d'inclinaison (α égale 10 et 30degré), et diminué pour α plus élevée (α égale 60 degré), ceci est dû à la forte perméabilité et un angle d'inclinaison plus élevé dont l'écoulement devient plus intense. L'effets de perméabilité sur les transferts sont notables. Pour les faibles valeurs de K et Ra faible figures (IV.6) et(IV.7).

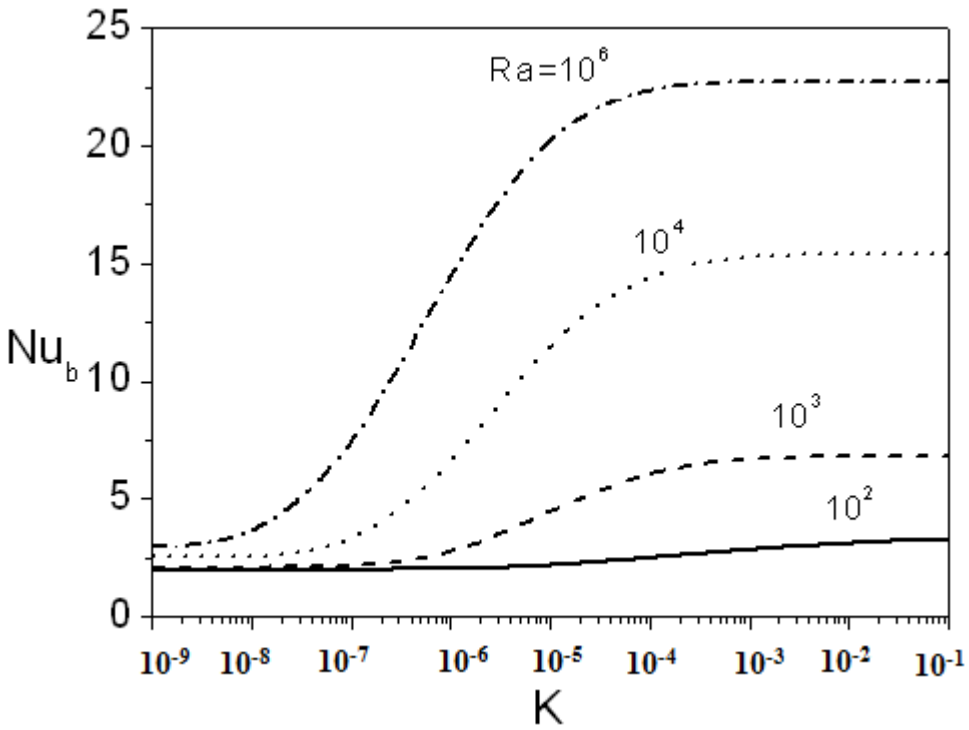
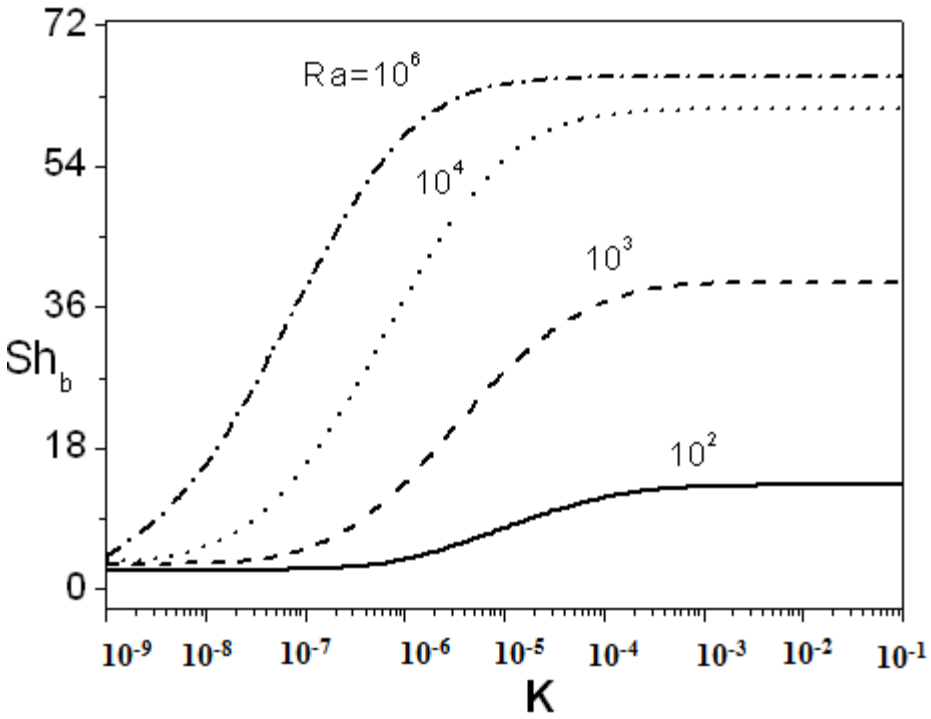
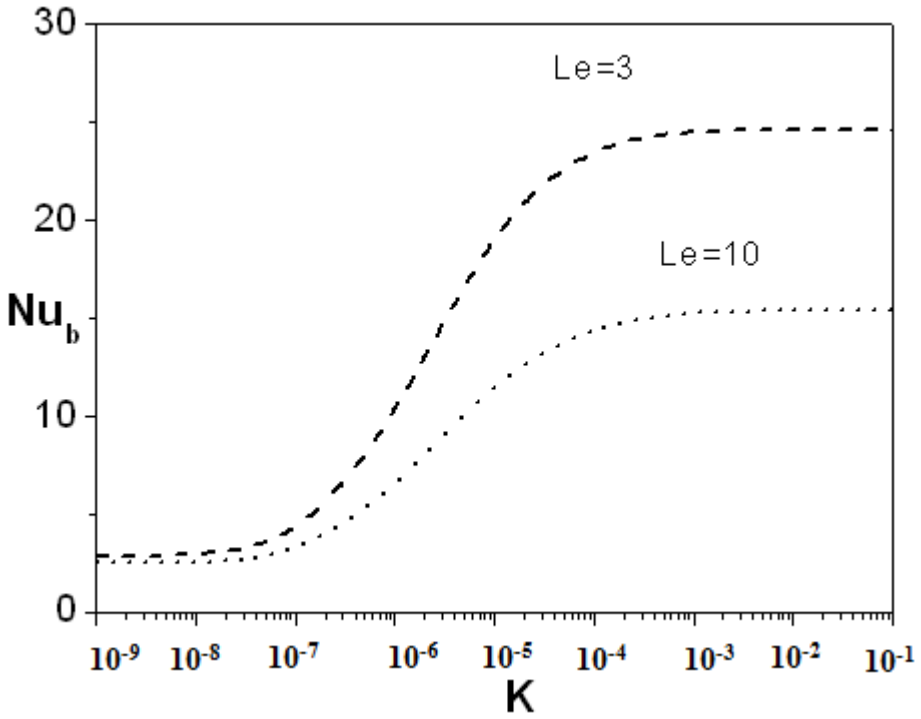


Figure (IV.6) : Variation du les effets du Nombre de Ra sur le transfert de chaleur pour différente valeurs de perméabilité.

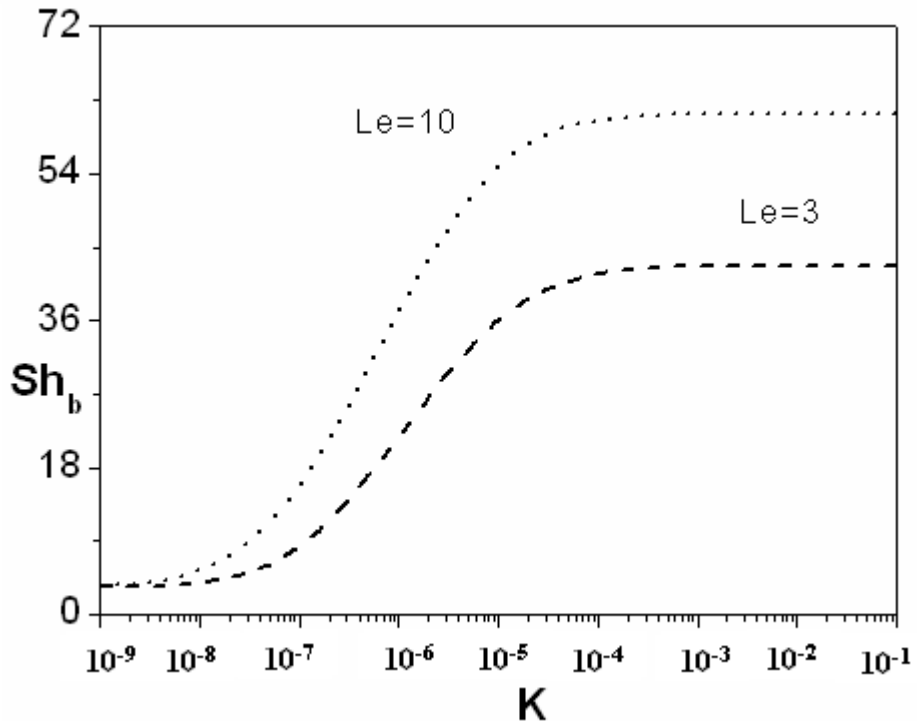


Figure(IV.7) : Variation du les effets du Nombre de Ra sur le transfert de masse pour différente valeur de perméabilité.

, les transferts sont principalement diffusifs. Ce comportement est dû à une faible perméabilité de la couche poreuse. L'écoulement convectif est alors de moins en moins prononcé avec la décroissance de K ce qui induit un régime conductif sur l'ensemble de la cavité. Le même cas est observé pour le transfert de masse pour K faible et les mêmes valeurs de Ra. Pour des valeurs de K supérieures les transferts s'intensifient et tendent vers des valeurs limites maximales constantes et indépendantes de perméabilité. Ces valeurs correspondent à un écoulement en couche limite. La variation de la perméabilité met donc en évidence trois régimes de transferts, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de K, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de K et un régime complètement couche limite indépendant de K. La transition entre les deux régimes convectifs se fait pour une valeur de raccordement notée K^{Cr}. Cette valeur critique est d'autant plus élevée que Ra est faible. Sauf pour le transfert de masse dans le cas où Ra égale 10^6, on constate pratiquement deux régimes d'écoulement sans diffusion Nous constatons qu'à K donnée, le transfert de matière est plus élevé que le transfert de chaleur. Les variations des nombres de Nusselt et Sherwood moyens en fonction de K pour différentes les valeurs de Lewis pour les cas de gaz et liquide sont présentées dans les figures (IV.8) et (IV.9).



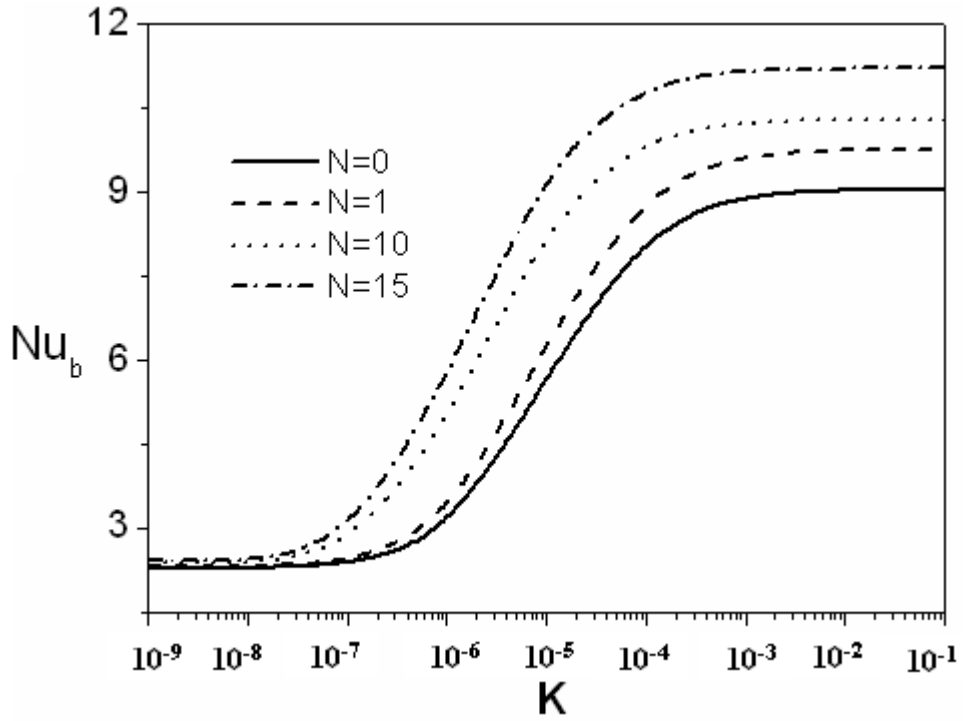
Figure(IV.8) : Variation du les effets du Nombre de Lewis sur le transfert de chaleur pour différente valeur de la perméabilité.



Figure(IV.9) : Variation du les effets du Nombre de Lewis sur le transfert de masse pour différente valeur de la perméabilité.

le transfert de masse croit nettement avec *Le* pour un K fixé, ce qui n'est pas le cas pour le nombre de Nusselt moyen. En effet, pour une perméabilité faible le transfert thermique est purement conductif, le Nu_b diminue lorsque le nombre de Lewis augmente.

Les figures (IV.10) et (IV.11) montrent l'évolution des nombres de Nusselt et Sherwood moyens en fonction de perméabilité pour différentes valeurs de N ces figures indiquent que pour une valeur fixée de N, les transferts thermique et massique n'augmentent qu'au-delà d'une certaine valeur de K. Pour une valeur fixée de K, Les transferts croient avec N. Cependant l'accroissement massique avec N est plus important.



Figure(IV.10) : Variation du les effets N sur le transfert de chaleur pour différente valeur de la perméabilité.

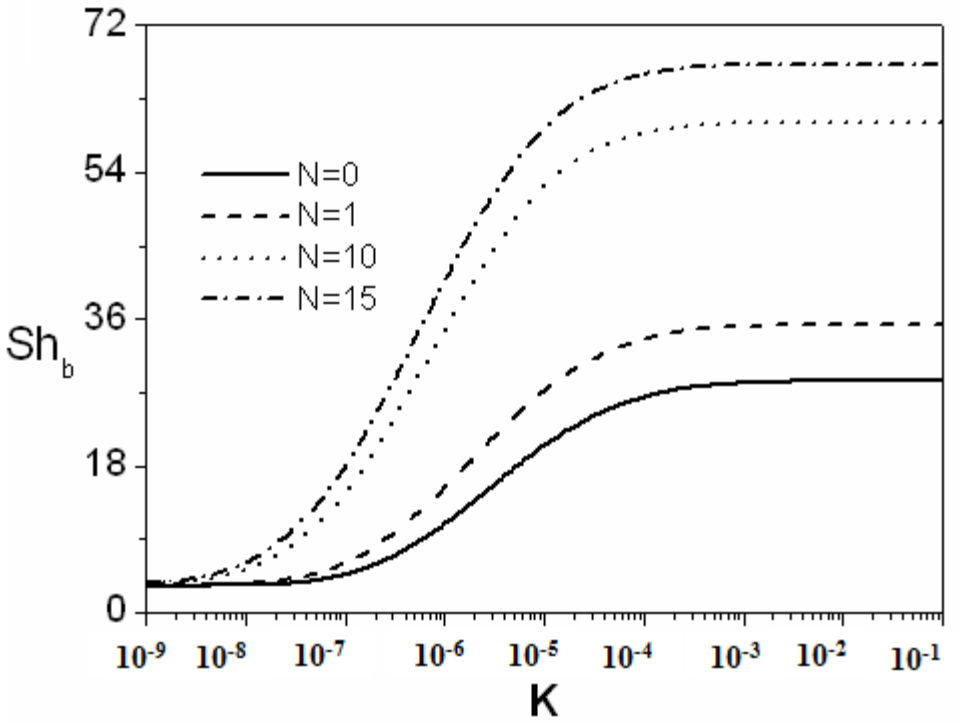


Fig (IV.11) : Variation du les effets du N sur le transfert de masse pour différente valeur de la perméabilité.

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité le transfert de chaleur et de masse enceinte poreuse inclinée renfermant une couche poreuse. Cette étude numérique a permis d'apporter un certain nombre de résultats correspondant à une gamme de paramètres très variée. Nous avons montré à travers cette mémoire que la variation de l'angle d'inclinaison et la perméabilité de la couche poreuse a un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et les transferts.

Conclusion Générale

Conclusion générale et perspective

Dans ce mémoire nous avons présenté une étude numérique des transferts de chaleur et de masse dans une cavité carrée inclinée, nous avons etudie l'effet de la variation de l'angle d'inclinaison de la cavité et la perméabilité de la couche poreuse sur les transferts. nous avons montré a travers cette étude que les paramètres sus citées ont un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et les transferts de chaleur et de masse , par ailleurs trois régimes de transferts ont été identifiés, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de perméabilité, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de K (pour K modéré) et un autre régime complètement couche limite indépendant de K (pour K élevés).A la lumière de résultats tout à fait remarquables, nous pouvons dire que la modélisation numérique basée sur la méthode classique des volume fini est l'un des outils parfaitement fiables et performants, pour l'étude et estimation du transfert massique dans les milieux poreux.

En perspective on pourra développer une l'étude des transferts de chaleur et de masse pour les multiphasiques et en régime transitoire et en trois dimension.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1] H.P.C.Darcy, "Les Fontaines Publiques De La Ville De Dijon". V. Dalmont, Paris (1956).

[2] A.E.Scheidegger,"The Physics Of Trough Porous Media". University Of Toronto (1960).

[3] I. F.Macdonald, M.S.El Sayed, K.Mow and F.A.L.Dullien, Ind. Eng. Chem. Fundamentals, 6, 393, (1979).

[4] Site internet: www. Heat Transfer. TORONTO. UC.COM

[5] A.E.Scheidrgger, “The physics of flow through porous media”, University of Toronto Press, 3rd edition (1974)

[6] F. A. L.Dullien, ″Porous Media: Fluid Transport And Pore Structure″, Academic Press New York (1979).

[7] O.Reynolds, ″Papers On Mechanical And Physical Subjects″ , Cambridge University Press (1900).

[8] A.L. Dullien, “Porous media, fluid transport and pore structure”, Academic Press, 2nd Edition (1992)

[9] A.Tobbal, R.Bennacer et R.Cabrillac, Effet de l’anisotropie des matériaux poreux sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse,Proceedings du 13ème Congrès Français de Mécanique, Vol. II, pp. 457-460, 1997.

[10] H.Beji, Etude Numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé : Modélisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynamique, thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1989.

[11] G.Neale et W.Nader, Practical significance of Brinkman’s extension of Darcy’s law: coupled parallel flows within a channel and bounding porous medium, The Canadian J. Chem. Eng., Vol. 52, pp. 475-478, 1974

[12] C.Beckerman et R.Viskanta, Double-diffusive convection during dendritic solidification of binary mixture, PhysicoChem. Hydrodyn., Vol . 10, pp.195-213, 1988.

[13] A.Bejan, Convection heat transfer, John Wiley and Sons 1984.

[14] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw-Hill, New York, 1980.

[15] D. Euvrard, Analyse numérique en mécanique des fluides.

[16] A. Bejan et K. R. Khair, Heat and mass transfer by natural convection in a porous medium.Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 28, pp. 909-918 (1985).

[17] R. Bennacer et al:On the thermal anisotropy affecting transfers in a multilayer porous medium . C. R. Acad. Sc. Mecanique 332, pp. 539-546 (2002).

[18] G. Lauriat et al. Prasad , Natural convection in a vertical porous cavity : a numerical study for Brinkman-extended Darcy formulation, J. Heat Transfer , 109, 688-696, 1987.