République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr.Yahia Farès de Médéa
Département de Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option:

Recherche Opérationnelle

Thème

L'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b-chromatique

Par

Mostefaoui asma et Saker bochra

soutenu devant le jury composé de:

K. Tablennehas	MAA	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Président
R. Lemdani	MAA	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Examinateur
M. Bouzefrane	MAA	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Examinateur
M. Zamime	MCB	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Promoteur

Date de soutenance: 29/09/2020

Résumé

Ce mémoire a pour but de faire une étude sur l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b-chromatique.

Soit $G = (V, E)$ et $e \in E(G)$. $G - e$ est le graphe partiel de G, obtenu à partir de G par la suppression d'une arête. Une coloration propre d'un graphe G consiste a attribué une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes. Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre minimum de couleur pour colorer les sommets de G. Une b-coloration est une coloration propre telle que toute classe de couleur contient un sommet qui a des voisins dans toutes les autres classes de couleurs. Le nombre b-chromatique, noté $b(G)$, est le nombre maximum de couleurs dans une b-coloration de G.

Dans la première partie, nous allons présenter quelques définitions, théorèmes et propositions sur des bornes et des valeurs exactes de coloration propre et b-coloration, qui nous seront utiles tout au long du mémoire.

Dans la deuxième partie, on présent une borne supérieure de $b(G-e)$ par rapport à $b(G)$. Dans ce contexe nous caractérisons quelques graphes atteignant cette borne, qui sont: les chaînes, les cycles, le graphe milieu d'une chaine et cycle, le graphe totale d'une chaine et cycle, la couronne du cycle, la roue, le prisme, le graphe complet, le graphe biparti complet, le graphe biparti complet moins couplage parfait et le hexaédrique.

Abstract

This memory is for the purpose to study the effect of removing an edge on the b-chromatic number.

Let $G = (V, E)$, and $e \in E(G)$. $G - e$ is the partial graph of G obtained by deleting a edge of G. A proper coloring of G consists in assigning a color to each of its vertices so that two vertices connected by an edge are with different color. The chromatic number $\chi(G)$ is the minimum number of colors to coloring the vertices of G. A b-coloring is a proper coloring such that any color class contains a vertex which has neighbors in all the other color classes. The b-chromatic number, note $b(G)$, is the maximum number of colors in b-coloring of G.

In the first part, we are going to present some definition, theorem and proposition on the bounds and exact values of proper colorating and b-coloring, which will be useful to us throughout the brief.

In the second part, we are going to present an upper bound for $b(G - e)$ compared by $b(G)$. In this context we characterize the graphs archiving this bound, which are: paths, cycles, middle graph of path and cycle, total graph of path and cycle, the sun let graph of cycle, the wheel graph, the prism graph, the complet graph, the complet biparty graph, the complet biparty graph minus a perfect coupling graph and the hexadriq graph.

Remerciements

On remercie **ALLAH** le tout puissant pour la volonté de mener à terminer ce mémoire.

En tout premier lieu, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur **Mohamed Zamime** maître de conférences à l'université Dr.Yahia Farés de Médéa, pour la qualité de son encadrement exeptionnel, pour sa patience et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous remercions Monsieur **Kamel Tablennehas** maître Assistant à l'université Dr.Yahia Farés de Médéa, Monsieur **Rachid Lemdani** maître Assistant à l'université Dr.Yahia Farés de Médéa, Monsieur **Mohamed Bouzefrane** maître Assistant à l'université Dr.Yahia Farés de Médéa pour leur acceptation de juger et évaluer notre travail.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à nos ensignants de département mathématiques et informatique, pour tous les efforts déployés pour notre formation durant notre cursus de formation.

Nos remerciement s'adresse également à toute l'equipe pédagogique de l'universite de Dr.Yahiya Fares de Médea. pour leurs aides tout au long de nos anéés universitaire.

En fin, un merci spéciale à nos familles et nos parents pour leur patience, leur soutien et leur motivation depuis toujours.

Dédicace

Je dédie mon travail :

À qu'elle essaie toujours de me rendre heureuse ma chère maman.

À qui je porte fièrement son nom et la source de ma force mon cher papa.

À qu'elle est le secret de mon bonheur ma soeur yousra.

À mes grand-parents Ali et Amina.

Â tous mes amis.

Merci d'être toujours là pour moi.

Bochra

Dédicace

je dédie ce modeste travail

À mes chérs parents, ma mére et mon pére pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

Â ma soeur rihab.

Â toute ma famille.

Â mes amis.

À tous ceux et toutes celles qui me connaissent et qui m'aiment .

Asma

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Table des figures **ix**

Introduction **xi**

1 Concept de base de la thèorie des graphes **1**

1.1 Quelques définitions 1

1.2 Minimalité et Maximalité d'un ensemble 3

1.3 Chaînes et cycles 3

1.4 Voisinages,degrés,distances et diamétres 5

1.5 Complémentarité 5

1.6 Connexité 6

1.7 Quelques classes des graphes 6

1.8 Quelques invariants des graphes 10

1.9 Complexité algorithmique 11

1.10 Quelques opérations de graphes 11

2 b-coloration **13**

2.1 Coloration propre et nombre chromatique 13

2.1.1 Nombre chromatique des quelques graphes classiques 14

2.1.2 Quelques résultats existences sur le nombre chromatique 14

2.2 b-coloration et b-chromatique 15
2.2.1 b-coloration de certains graphes particuliers 15
2.2.2 Quelques bornes de b(G) 23

3 L'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b-chromatique 25
3.1 Borne supérieure pour b(G-e) 26
3.1.1 Les chaînes 27
3.1.2 Les cycles 28
3.1.3 Les graphes $T(P_n)$ et $M(P_n)$ 29
3.1.4 Les graphes $T(C_n)$ et $M(C_n)$ 30
3.1.5 Le graphe complet 31
3.1.6 La roue 31
3.1.7 Le graphe biparti complet 33
3.1.8 Le graphe biparti complet moins un couplage 33
3.1.9 Hexaédrique 34
3.1.10 Graphe $C_r(C_n)$ 35
3.1.11 Graphe Prisme 38

Conclusion 40

Table des figures

Figure 1.1	Graphe simple G	2
Figure 1.2	Graphe G et son sous graphe H	3
Figure 1.3	Chaîne P_5	4
Figure 1.4	Cycle C_6	4
Figure 1.5	Graphe C_5 et son complémentaire	5
Figure 1.6	Graphe complet K_5	6
Figure 1.7	Graphe biparti.	7
Figure 1.8	Graphe biparti complet $K_{3.3}$.	8
Figure 1.9	Graphe 3-regulier, hexaédrique	9
Figure 1.10	Un arbre T	9
Figure 1.11	$K_2 \square K_3$.	12
Figure 2.1	Graphe milieu d'un cycle d'ordre 3, $M(C_3)$.	18
Figure 2.2	Graphe milieu de P_5, $M(P_5)$.	18
Figure 2.3	Graphe totale de P_5, $T(P_5)$	19
Figure 2.4	Graphe totale de C_4, $T(C_4)$	19
Figure 2.5	Roue de (C_6 et C_3)	20
Figure 2.6	Couronne de C_6	21
Figure 2.7	Prisme de C_4	22
Figure 2.8	Graphes 3-régulier dont le nombre b-chromatique est infèrieur à 4	22
Figure 3.1	Exemple de la suppression d'une arete uv d'un graphe G	26
Figure 3.2	Un graphe G et $G-e$, $b(G-e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$	27
Figure 3.3	Une b-coloration de W_5 avec 3 couleurs	32
Figure 3.4	Une b-coloration de $K^*_{4,4}$ et $K^*_{4,4} - e$	34
Figure 3.5	Une b-coloration du hexaédrique et hexaédrique moins arête	35
Figure 3.6	Une b-coloration de $C_r(C_3)$ avec 3 couleurs	36
Figure 3.7	Une b-coloration de $C_r(C_4)$ avec 4 couleurs	37
Figure 3.8	Une b-coloration de $C_r(C_5)$ avec 3 couleurs	38
Figure 3.9	Une b-coloration de G_3 avec 3 couleurs	39

Introduction

La recherche opérationnelle est une science de la décision, on l'appelle la programmation mathématique, il utilise des processus et méthodes pour parvenir à une solution optimale aux problèmes, ce domaine a des applications dans les sciences de l'ingénierie, de l'économie, de l'administration et du marketing Dans la recherche opérationnelle, des méthodes de modélisation mathématique et d'analyse statistique sont utilisées pour trouver la solution optimale et prendre des décisions. Elle consiste en un ensemble de méthodes différentes (probléme de transport, programmation linéaire, programmation réseau, ...). La recherche opérationnelle nécessite plusieurs compétences mathématiques, dont les plus importantes sont le calcul matriciel, la science des probabilités et la théorie des graphes.

La théorie des graphes est un domaine en mathématiques et en informatique qui étudie un groupe d'objets sont appelés sommets, liés les uns aux autres par des arêtes ou arcs, qui peuvent être dirigés par des flèches (graphe orienté) où sans flèches (graphe non orienté). Ce domaine concerne plusieurs problématiques, dont les plus importants sont les problèmes combinatoires.

La coloration des graphes est l'une des problématiques les plus étudiées en théorie des graphes. Les premiers résultats liés à ce problème sont les plans plats à l'époque, le problème était sous la forme de la coloration de la carte, et lors d'une tentative de couleur des provinces d'Angleterre, Francis Guthrie a lancé l'hypothèse des quatre couleurs, et c'est parce qu'il a remarqué que quatre couleurs suffisent pour colorer toutes les provinces afin qu'il n'y ait pas deux provinces voisines qui partagent la même couleur. Cette hypothèse a été envoyée par le frère de Francis Guthrie à son professeur de l'Université de Londres, Augustus de Morgan, et il l'a plus tard mentionnée à Hamilton dans une lettre en 1852. Plus tard, Arthur Kaylee a présenté le problème à la London Mathematical Society en 1879. La même année, Quimby

a affirmé qu'il avait fourni une solution au problème et pendant une décennie entière, tout le monde pensait que le problème avait expiré, et pour cela, il a été élu membre de la London Mathematical Society et plus tard président de la Société.

Notre recherche suit le plan de travail suivant :

- Chapitre 1: Nous avons défini des concepts et des termes connexes aux théorie des graphes et nous présentons quelques classes de graphes et la complexité algorithmique, la plupart des notions ont été étudié en cours de Master 1 et 2.
- Chapitre 2: Basé sur la détermination de $b(G)$ de quelque graphe et des bornes supérieueres et inférieures pour ce paramètre.
- Chapitre 3: Nous étudions l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b-chromatique et nous basons sur la borne supérièur de $b(G-e)$ par rapport $b(G)$.

Ce mémoir séchère par une conclusion.

Chapitre 1

Concept de base de la thèorie des graphes

Avant d'entreprendre une étude, il est nécessaire de se rappeler les définitions de base liées au domaine d'étude. Dans ce chapitre, on rappelle des concepts de base de la théorie des graphes.

Nous avons présenté quelques concepts et définitions de base dont nous aurons besoin dans le reste de ce mémoire.

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par un ensemble $V = \{v_{1,}v_{2,...,}v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets et d'un ensemble fini $E = \{e_{1,}e_{2,...,}e_n\}$ avec $E(G)$ est une ensemble de paire du sommets appelés arêtes.*

- Une arête $e \in E$ est définie par une paire non ordonnée des sommets appelés les extrémités de e, si l'arête e relie les sommets v_i et v_j on dira que ces sommets sont adjacents ou incidents avec e ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets v_i et v_j.

- Si G est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête est dit sans arête multiple.

Définition 1.1.2 *Le cardinal de V est appelé l'ordre de G noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G noté par $m(G)$.*

Définition 1.1.3 *Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

Définition 1.1.4 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.*

Exemple 1.1.1 *Dans la Figure* 1.1 *on a G un graphe simple, avec $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$ et $E(G) = \{zx, xy, yz, zu, uv\}$.*

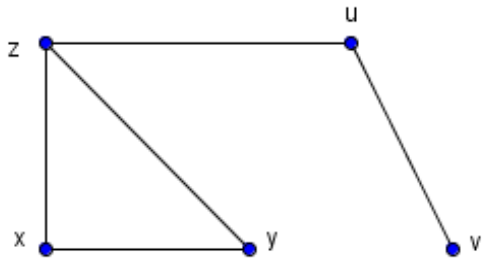


Figure 1.1. *Graphe simple G*

Remarque 1.1.1 *Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.*

Définition 1.1.5 *On appelle un sous-graphe de $G = (V, E)$, un graphe $H = \left(\grave{V}, \grave{E}\right)$ telle que $\grave{V} \subset V$ et $\grave{E} \subset E$ avec l'ensemble des arêtes est formé de toute les arêtes de G ayant*

leurs extrémités dans $V(H)$. (voir Figure 1.2).

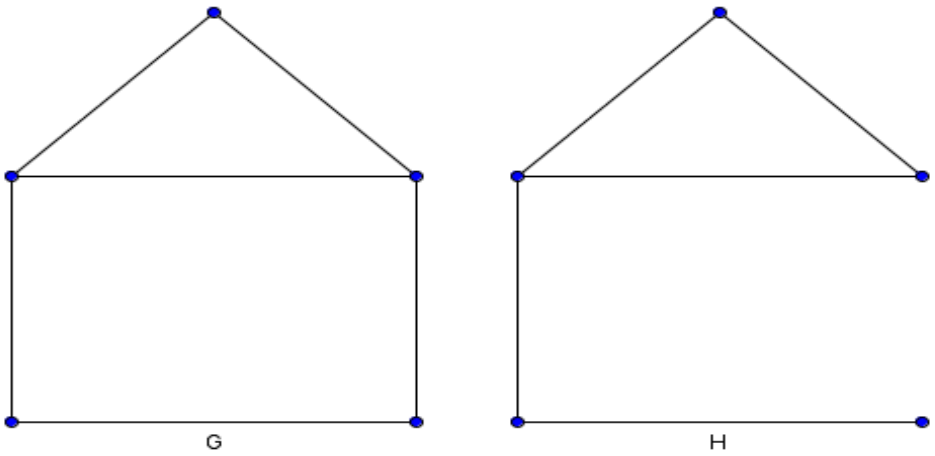


Figure 1.2. Graphe G et son sous graphe H

1.2 Minimalité et Maximalité d'un ensemble

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Définition 1.2.1 *On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimale (respectivement maximal), par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset A$ (resp $A \subset B$) qui verifie la proprieté P.*

Définition 1.2.2 *On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimum où de taille minimale (resp maximum ou de taille maximal) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset V$ telle que $G[B]$ vérfier la propriété P et $|B| < |A|$(resp $|B| > |A|$).*

1.3 Chaînes et cycles

Définition 1.3.1 *Dans un graphe $G = (V, E)$, une chaîne P est une séquence finie de sommets $v_1, v_{2,\ldots,}v_k$ tell que pour tout i, $1 \leq i \leq k-1$, v_iv_{i+1} est une arête de G pour tout*

$i \neq j$. Les sommets v_1 et v_k appelés les extémités de P et les sommets $v_2, v_3, ..., v_{k-1}$ les sommets intérieures de P. L'entier $k-1$ représente la longeur de P (au sens des arêtes).

- Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple.
- Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire. (voir Figure 1.3).

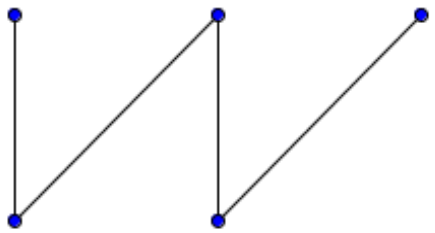


Figure 1.3. Chaîne P_5

Définition 1.3.2 *Un cycle C_n est une chaîne élémentaire de longueur $n-1$, dont le sommet de départ et le sommet d'arrivé se confondent. L'entier n représente la longeur du cycle C_n . (voir Figure* 1.4 *).*

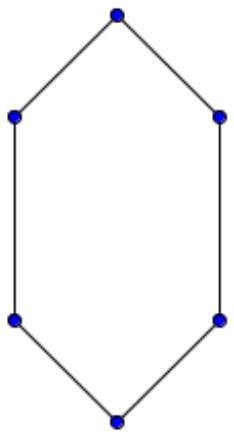


Figure 1.4. *Cycle C_6*

Définition 1.3.3 *La maille d'un graphe G, noté $g(G)$ est la longueur d'un plus petit cycle de G.*

1.4 Voisinages,degrés,distances et diamétres

Définition 1.4.1 *Le voisinage ouvert d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V, uv \in E\}$ et le voisinage fermé de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.*

Pour un sous-ensemble $S \subset V$ le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage fermé est $N_G[S] = N_G(S) \cup S$.

Définition 1.4.2 *Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert. On note par $N_S(x) = N_G(x) \cap S$ et $d_{G(v)} = |N_S(x)|$.*

- On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement le degré maximum et le degré minimum de G. Un sommet de degré nulle sera dit sommet isolé, un sommet de degré égal à un sera dit sommet pendant. Un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet support. Une arête incidente à un sommet pendant est appelée arête pendante.

Définition 1.4.3 *La distance entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne entre eux.*

Définition 1.4.4 *Le diamètre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets de ce graphe*

1.5 Complémentarité

Définition 1.5.1 *Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ et le graphe $\bar{G} = \left(V\left(\bar{G}\right), E\left(\bar{G}\right)\right)$ avec $V\left(\bar{G}\right) = V(G)$ et $uv \in \bar{G}$ si et seulement si $uv \in G$ pour $u \neq v$. (voir Figure 1.5).*



*Figure*1.5. *Graphe C_5 et son complémentaire*

1.6 Connexité

Définition 1.6.1 *Un graphe G est dit connexe si et seulement si pour toute paire de sommet u et v de G il existe une chaîne reliant u à v. Un graphe non connexe est constitué de l'union disjointe des graphes connexes appelés composantes connexes de G.*

Définition 1.6.2 *Un Istheme est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.*

1.7 Quelques classes des graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Définition 1.7.1 *Un graphe complet d'ordre n, noté K_n, est un graphe simple dont tous les sommets sont de degré $n - 1$. (voir Figure 1.6)*

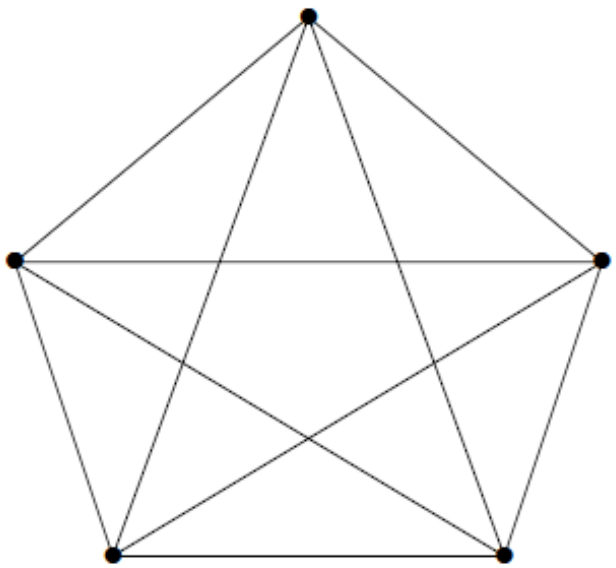


Figure 1.6. Graphe complet K_5

Définition 1.7.2 *Un graphe discret est un graphe est un graphe sans arête.*

Définition 1.7.3 *Un graphe G est dit biparti si et seulement s'il existe une partition en deux sous-ensembles indépendants X_1 et X_2 de ses sommets tels que chaque arête de G a une extrémité dans X_1 et une autre dans X_2 (voir Figure* 1.7*). Un graphe biparti G est dit complet si et seulement si tout sommet de X_1 est voisin de tous les sommets de X_2, un tel graphe est noté $k_{|x,|y||}$ (voir Figure* 1.8*).*

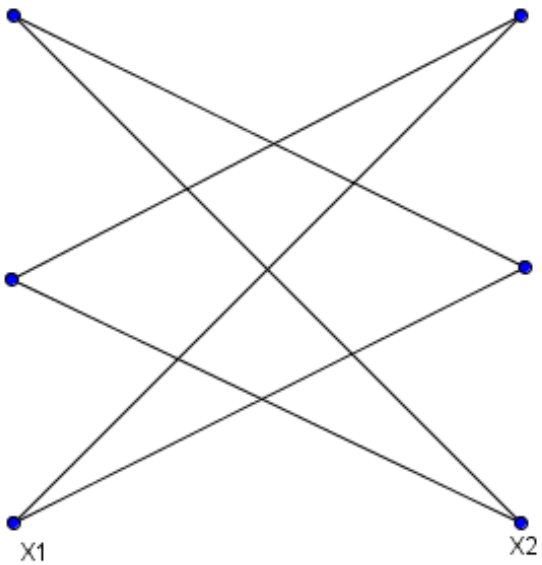


Figure 1.7. *Graphe biparti*

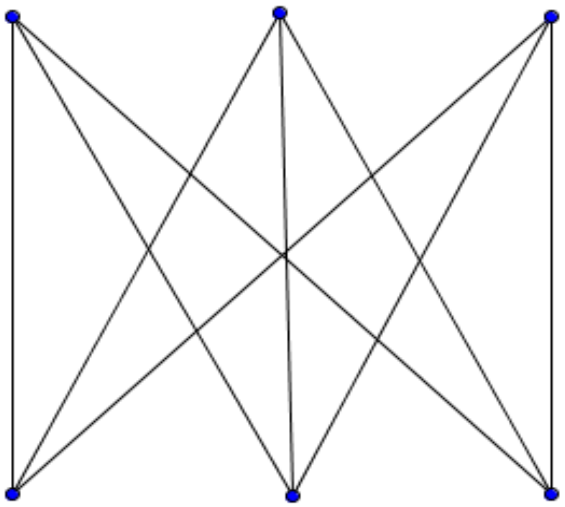


Figure 1.8. *Graphe biparti complet* $K_{3.3}$

Définition 1.7.4 *Un graphe* $G = (V, E)$ *est régulier si tous ses sommets sont de même degré, Un graphe est dit* k*-régulier si tous ses sommets sont de degré* k*, c'est-à-dire,* $d_G(x) =$

k pour tout $x \in V$. (voir Figure 1.9).

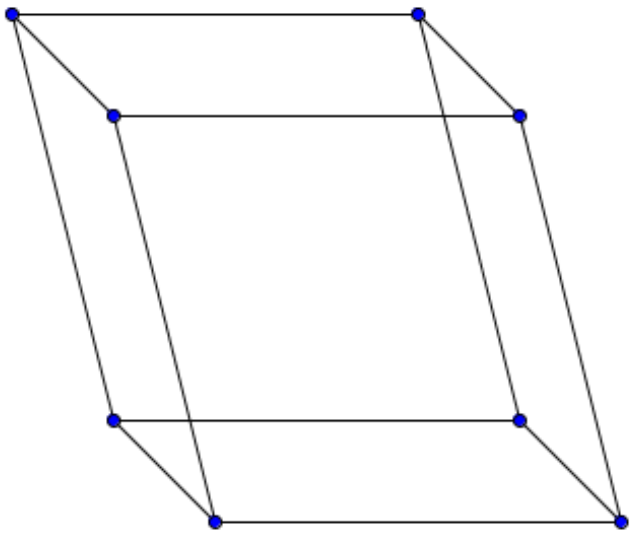


Figure 1.9. Graphe 3-régulier, hexaédrique

- *Un hexaédrique est un graphe 3-régulier de maille 4, possèd 8 sommets et 12 arêtes .*

Définition 1.7.5 *Le graphe adjoint de G (ou graphe de ligne) est le graphe obtenu en associent un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.*

Définition 1.7.6 *Un arbre est un graphe connexe sans cycle, il contient exactement $(n-1)$ arêtes, et noté T. (voir Figure 1.10).*

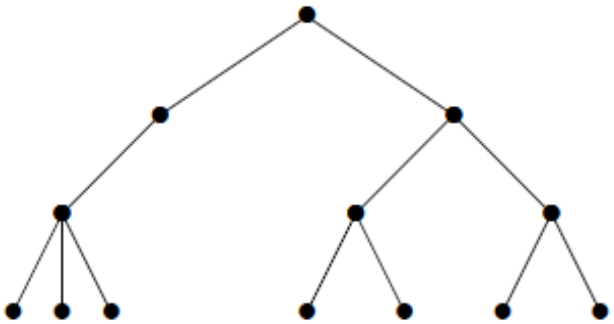


Figure 1.10. Un arbre T

Définition 1.7.7 *On appelle étoile noté par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles.*

Définition 1.7.8 *Un graphe sans griffe est un graphe qui n'admet pas de $k_{1,3}$ comme sous-graphe induit.*

Définition 1.7.9 *Une forêt est un graphe qui ne contient aucun cycle et les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.*

Définition 1.7.10 *Un cactus est un graphe ou chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit unicycle.*

1.8 Quelques invariants des graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe

Définition 1.8.1 *Un stable S dans G ou ensemble indépendant est un ensemble des sommets deux à deux non adjacents, le cardinale d'un stable maximum de G est égal au nombre des sommets qu'il contient, noté $\alpha(G)$ et est appelé nombre de stabilité de G.*

Définition 1.8.2 *Un couplage M dans un graphe G est un ensemble des arêtes deux à deux non adjacents, un sommet v de G est saturé par le couplage M si v est l'extrémité d'une arête de M, noté $\alpha_0(G)$.*

- Un sommet appartenant à une arête d'un couplage est dit saturé.
- Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G.

Définition 1.8.3 *Une clique est un sous-graphe complet d'un graphe G, l'ordre de la plus grande clique de G noté $\omega(G)$.*

1.9 Complexité algorithmique

L'origine du terme algorithme remontre au savant Abou Jaafar Mohammed Iben Moussa El khawarismi , aux environs de 825 aprés J.C, ce terme signifie l'utilisation des régles au d'instructions pour obtenir un résultat en un nombre limité d'étapes, en 1965 le concept algorithme polynomial a été introduit, Edmonds [8] a lancé une définition à la classe (P) des problèmes dits "faciles" au polynomiaux, ensuite Cook [7], puis Karp [17] qui ont défini la classe NP-complets ou diffficiles .

Un algorithme pour résoudre un problème de classe (P), est une procédure peut être divisé en opérations principales.

Un algorithme est dit polynomail, si le nombre totale d'operation élémentaires effectuées pour atteindre à la solution est borné par un polynôme à la taille du problème dans lequel C et K deux constantes telle que $f(n) = C \times n^K$, et l'algorithme a une complexité $O\left(n^K\right)$ où opére en temps polynomial .

P: La classe des problèmes dans lesquels il existe un algorithme polynomiale pour le resoudre sur une machîne déterministe.

NP: La classe des problèmes dans lesquels il existe un algorithme polynomiale pour le resoudre sur une machine non déterministe.

problème facile: S'il appartient à la classe des problèmes P pour lesquels il existe un algorithme efficace pour les résoudre.

Problème de décision: Un problème de décision est un problème ayant deux réponses possibles: oui ou non.

problème d'optimisation: Appartient à la classe NP-difficille si son problème décisionnel à la classe NP-complet.

1.10 Quelques opérations de graphes

- Soit v un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. On note $G - v$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V \setminus \{v\}$ pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G - S$ le sous graphe engendré par $V \setminus S$. Soit e une arête de G. On note $G - e$ le graphe $G\prime = (V, E \setminus \{e\})$, en d'autr terme, $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en

suprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. Le graphe $G-e$ est obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés).

- Le produit cartésien de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$ est le graphe $G = (V, E)$ telle que $V(G) = \{(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$, $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$. (voir Figure 1.11).

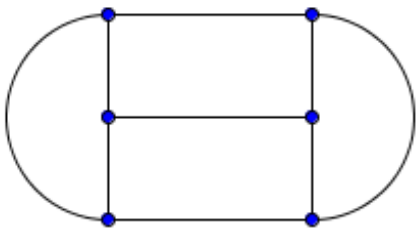


Figure 1.11. $K_2 \square K_3$

- Le produit direct $G_1 \times G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G_1) \times V(G_2)$ et dont deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont reliés par une arête si et seulement si $u_1 u_2 \in E(G_1)$ et $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

- Le produit fort où total $G_1 \boxtimes G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G_1) \times V(G_2)$ et dont deux sommets $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si $u_1 = u_2$ où $u_1 u_2 \in E(G_1)$, $v_1 = v_2$ où $v_1 v_2 \in E(G_2)$ ça signifier que $E(G_1 \boxtimes G_2) = E(G_1 \square G_2) \cup E(G_1 \times G_2)$.

- Soient G et H deux graphes. L'union de G et H est le graphe $G + H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G_1) \cup V(G_2)$ et l'ensemble des arêtes est $E(G) \cup E(H)$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG.

- Le joint de G et H est le graphe noté $G \vee H$ obtenu à partir de $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes entre G et H.

Chapitre 2

b-coloration

Dans ce chapitre nous nous intéressons à étudier certain aspects de la coloration qui a été introduit en 1852. Il y a plusieurs type de coloration des graphes (la coloration des sommets, la coloration des arêtes et coloration des sommets et des arêtes), la coloration des sommets est la plus connus en théorie des graphe de sorte que nous devons trouver une coloration qui satisfasse une certains conditions d'optimalité, ce problèmes dans les graphes vient des quatre couleurs posé par Francis Guthrie: "Est-il toujours possible de colorer les régions d'une carte de géographie avec seulement quatre couleurs sans que deux régions ayant une frontière commune soient coloriés avec la même couleur ?". Ce problème ne fut démontré qu en juin 1976 par deux chercheurs américains, Appel et Haken, d'université de Illinois, qui utilisèrent un ordinateur.

2.1 Coloration propre et nombre chromatique

Une k-coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c de V dans $\{1, 2, ..., K\}$ telle que $c(x) \neq c(y)$ pour tous $xy \in E(G)$. Notons que pour toute k-coloration propre de G, chaque ensemble de sommets correspondant à une couleur donnée est un stable.

Tout graphe possède une n-coloration propre, avec $|V(G)| = n$, donc une coloration propre est intéressante si elle utilise un nombre minimum de couleur, d'où la définition du nombre chromatique [24].

Définition 2.1.1 *Le nombre chromatique est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets de graphe et est noté par* $\chi(G)$.

2.1.1 Nombre chromatique des quelques graphes classiques

- G un graphe discret d'ordre n. Alors

$$\chi(G) = 1$$

- G un cycle d'ordre n. Alors

$$\chi(G) = 2 \text{ si } n \text{ pair et } 3 \text{ si } n \text{ impair}$$

- G un graphe complet d'ordre n. Alors

$$\chi(G) = n$$

- G un graphe biparti avec au moins une arête. Alors

$$\chi(G) = 2$$

2.1.2 Quelques résultats existences sur le nombre chromatique

Théorème 2.1.1 *[6] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Théorème 2.1.2 *[4] Tout graphe d'ordre n, satisfait*

$$\chi(G)\,\alpha(G) \geq n \text{ et } \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$$

Théorème 2.1.3 *[22] Soit G un graphe d'ordre n et $\bar{G}$ son complémentaire, alors*

$$\chi(G) + \chi\left(\bar{G}\right) \leq n + 1$$

2.2 b-coloration et b-chromatique

Le concept du nombre b-chromatique a été introduit par Irving et Manlove [14], malgré que ce concept est simple mais il est difficile de trouver les valeurs exactes, même pour les graphes connues. La determination de nombre b-chromatique est un problème NP-complet, mais Irving et Manlove ont prouvé qu'il est polynôme pour les arbre [14].

Définition 2.2.1 *Une b-coloration est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet qui a des voisins dans toutes les autres classes de couleurs $j \neq i$.*

- Ce sommet est appelé le sommet b-dominant.

Définition 2.2.2 *Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration, noté $b(G)$.*

Définition 2.2.3 *[14] Pour un graphe $G = (V, E)$, on suppose que les sommets de G soient ordonnés $v_1, v_2, ..., v_n$ de sorte que $d(v_1) \geq d(v_2) \geq ... \geq d(v_n)$. Le m-degré $m(G)$ de G défini par: $m(G) = \max\{1 \leq i \leq n : d(v_i) \geq i - 1\}$.*

2.2.1 b-coloration de certains graphes particuliers

Dans [12] Hoàng et Kouider ont caracterisé les graphes bipartis et p_4-sparse qui sont b-parfaits telle que chaque sous-graphe induit H de G: $b(H) = \chi(H)$. Ils ont également prouvé que tous graphes G (*sans* $2k_2$) et (*sans* $\bar{p}_5$) Possède: $b(G) = \chi(G)$.

Proposition 2.2.1 *[12] Un graphe biparti est b-parfait si et seulement s'il est sans P_5, sans $P_3 + P_4$ et sans $3P_3$.*

Proposition 2.2.2 *[18] Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes $C_1, C_2, ..., C_p$, $p \geq 2$ alors*

$$b(G) \geq \max\{b(c_i), 1 \leq i \leq p\}$$

Théorème 2.2.1 *[9] Soit $G = (V, E)$ un graphe d-régulier de maille au moins 5 et ne contenant pas des cycles d'ordre 6 alors le nombre b-chromatique de G est $d + 1$.*

Proposition 2.2.3 *[12] Soient G_1, G_2 deux graphes de sommets disjoints et $G = G_1 \vee G_2$ le joint de G_1 et G_2, alors*

$$b(G) = b(G_1) + b(G_2)$$

Théorème 2.2.2 *[16] Soit G et H deux graphes. Alors*

$$b(G \boxtimes H) \geq b(G)\, b(H)$$

Théorème 2.2.3 *[16] Soit H un graphe. Aors $b(P_n \boxtimes H) = 3(\Delta(H) + 1) = b(C_n \boxtimes H)$ pour tout $n \geq 3(\Delta(H) + 1) + 2$.*

- $b(P_n \boxtimes P_1) = 3$, $n \geq 5$.
- $b(P_n \boxtimes P_2) = 6$, $n \geq 8$.
- $b(P_n \boxtimes P_k) = 9$, $n \geq 11$, $k \geq 3$.
- $b(C_m \boxtimes C_l) = 9$, $m \geq 9$, $l \geq 3$.

Proposition 2.2.4 *[16] Si P_n est une chaîne avec n sommets et $K_{1,k}$ est une étoile avec $K + 1$ sommets, alors*

- $b(P_1 \boxtimes K_{1,k}) = 2$, $K \geq 1$.
- $b(P_2 \boxtimes K_{1,k}) = 4$, $K \geq 1$.
- $b(P_3 \boxtimes K_{1,k}) = \begin{cases} 4 \text{ pour } K = 1 \\ 5 \text{ pour } K = 2 \\ 6 \text{ pour } K \geq 3 \end{cases}$
- $b(P_4 \boxtimes K_{1,k}) = \begin{cases} 4 \text{ pour } K = 1 \\ 6 \text{ pour } K \geq 2 \end{cases}$
- $b(P_5 \boxtimes K_{1,k}) = 6$, $K \geq 1$.
- $b(P_n \boxtimes K_{1,k}) = n$, $K \geq n - 2 \geq 4$.

Proposition 2.2.5 *[16] Si C_n est un cycle avec n sommets et $K_{1,k}$ est une étoile avec $k+1$ sommets, alors*

- $b\left(C_3 \boxtimes K_{1.k}\right) = 6,\ k \geq 1$
- $b\left(C_4 \boxtimes K_{1.k}\right) = \begin{cases} 4 \text{ pour } k = 1 \\ 5 \text{ pour } k = 2,3 \\ 6 \text{ pour } k \geq 4 \end{cases}$
- $b\left(C_5 \boxtimes K_{1.k}\right) = 6,\ k \geq 1$
- $b\left(C_n \boxtimes K_{1.k}\right) = n,\ k \geq n-3 \geq 3.$

Théorème 2.2.4 *[16] Soit H un graphe avec au moins une arête. Alors*

$$b\left(P_n \times H\right) = 2\Delta\left(H\right) + 1$$

pour tout $n \geq 2\ \left(2\Delta\left(H\right)+1\right)+1$.

Conjecture 2.2.1 *[16] Soit G et H deux graphes. Alors*

$$b\left(G \times H\right) \geq \max\left\{b\left(G\right), b\left(H\right)\right\}$$

Proposition 2.2.6 *[18] Soient G un graphe d'ordre n et $\bar{G}$ son complémentaire. Alors*

$$b(G) + b(\bar{G}) \leq n+1 \text{ et } b(G)b(\bar{G}) \geq n$$

Définition 2.2.4 *[11] Soit $G = (V, E)$ un graphe où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$, est défini comme suit: L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V \cup E$. Deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- $x, y \in E$ et x, y sont adjacents dans G.

- $x \in V$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G. (voir Figures 2.1 et 2.2).

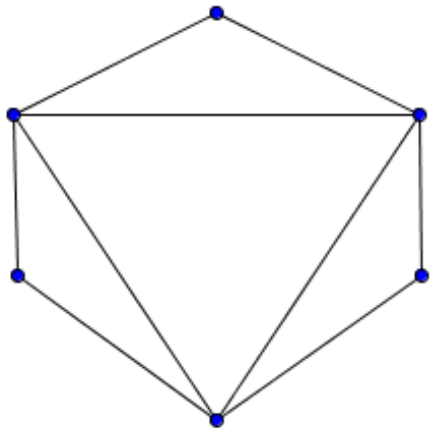


Figure 2.1. Graphe milieu d'un cycle d'ordre 3
$M(C_3)$.

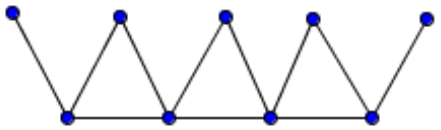


Figure 2.2. Graphe milieu de P_5, $M(P_5)$

Définition 2.2.5 *[3] Le graphe total de G, noté $T(G)$, est défini comme suit. L'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V \cup E$. Deux sommets x, y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- *$x, y \in V(G)$et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*

- $x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G. (voir Figures 2.3 et 2.4).

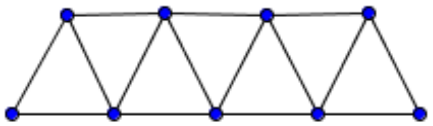


Figure 2.3.Graphe totale de P_5

$T(P_5)$.

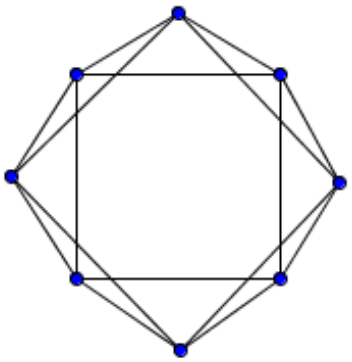


Figure 2.4. Graphe totale de C_4

$T(C_4)$.

Théorème 2.2.5 *[13] Pour toute chaine P_n d'ordre $n \geq 2$,on a:*

$$b\left(M\left(P_n\right)\right) = \begin{cases} 2 \ si \ n = 2 \\ 3 \ si \ n = 3.4 \\ 4 \ si \ n = 5.6.7 \\ 5 \ si \ n \geq 8 \end{cases} \qquad b(T(P_n)) = \begin{cases} 3 \ si \ n = 2, 3 \\ 4 \quad si \ n = 4 \\ 5 \ si \ n \geq 5 \end{cases}$$

Théorème 2.2.6 *[13] Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$,on a :*

$$b\left(M\left(C_n\right)\right) = b\left(T\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} n \ si \ n = 3, 4 \\ 5 \ si \ n \geq 5 \end{cases}$$

Proposition 2.2.7 *[18] Pour tout graphe complet d'ordre* $n \in \mathbb{N}$

$$b(K_n) = n$$

Proposition 2.2.8 *[18]Pour tout chaîne* P_n, $n \geq 2$, *on a:*

$$b(P_n) = \begin{cases} 2 \ n \leq 4 \\ 3 \ sinon \end{cases}$$

Proposition 2.2.9 *[18] Pour tout cycle* C_n, $n \geq 3$*on a:*

$$b(C_n) = \begin{cases} 2 \ si \ n = 4 \\ 3 \ sinon \end{cases}$$

Proposition 2.2.10 *[18] Pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$ *on a:*

$$b(K_{n,m}) = 2$$

où $K_{n,m}$ est un graphe biparti complet.

Définition 2.2.6 *Le graphe roue noté* W_{n+1} *est un graphe d'ordre* $n \geq 3$ *formé en ajoutant un sommet universelle " centre " adjacent à tous les sommets du cycle* C_n. *(voir Figure* 2.5*).*

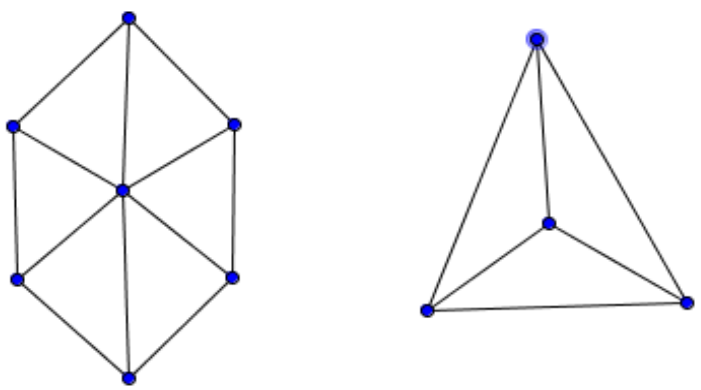


Figure 2.5. *Roue de* (C_6 *et* C_3)

Théorème 2.2.7 *[20] application trivial*

Si $b(C_n) = 3$ et $n \geq 5, W_{n+1}$ est la roue de C_n, alors

$$b\left(W_{n+1}\right) = 4$$

Définition 2.2.7 *On appelle couronne d'un graphe G noté $C_r(G)$ où $G \circ k_1$ le graphe obtenue en attachant à chaque sommet de G un sommet pendant et donc il est évident que l'ordre de $C_r(G)$ est égale $2\left|V(H)\right|$. (voir Figure 2.6).*

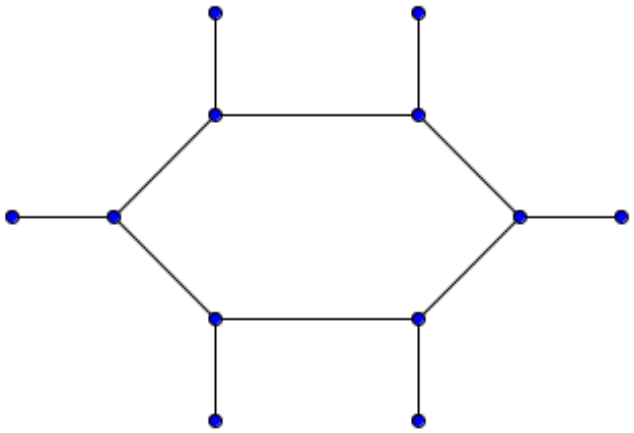


Figure 2.6. Couronne de C_6

Théorème 2.2.8 *[23] Soit $C_r\left(C_n\right)$ le graphe couronne d'un cycle C_n, $n \geq 6$. Alors*

$$b(C_r\left(C_n\right)) = 4.$$

Définition 2.2.8 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, on appelle prisme de G le graphe formé à partir de l'union disjointe de deux copies de G en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait*

entre les sommets correspandants. (voir Figure 2.7*).*

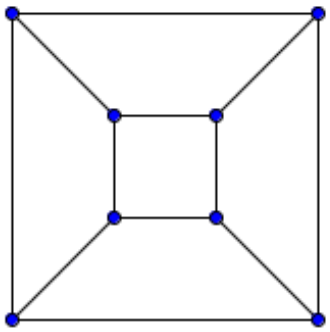


Figure 2.7. *Prisme de* C_4

Théorème 2.2.9 *[2] Soit* G_n *un prisme d'un cycle* C_n, $n \geq 4$. *Alors*

$$b(G_n) = 4.$$

Soit P le graphe de Petersen.

Théorème 2.2.10 *[15] Soit* G *un graphe connexe* 3*-régulier. Alors* $b(G) = 4$ *sauf si* $G = p$, $K_3 \square K_2$, $K_{3,3}$ *ou* G_1 *dans ces cas ,* $b(p) = b(K_3 \square k_2) = b\,(G_1) = 3$, $b\,(K_{3,3}) = 2$. *(voir Figure* 2.8*).*

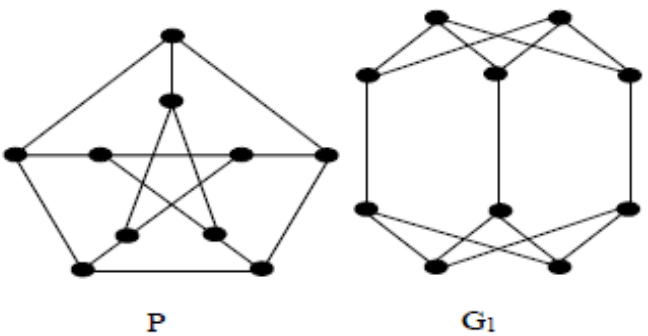


Figure 2.8. *Graphes* 3*-réguliers dont le nombre b-chromatique est inférieur à* 4.

Proposition 2.2.11 *[14] Soit G un graphe biparti complet $K_{n,n}$ moins un couplage parfait Alors*

$$b(G) = n.$$

2.2.2 Quelques bornes de b(G)

Proposition 2.2.12 *[14] Pour tout graphe G,*

$$b\left(G\right) \leq m\left(G\right).$$

Proposition 2.2.13 *[14, 21] Soit G un graphe et $\chi\left(G\right)$son nombre chromatique. Alors*

$$\chi(G) \leq b\left(G\right) \leq \Delta\left(G\right) + 1.$$

Proposition 2.2.14 *[18] Pour tout graphe $G = (V, E)$ d'ordre n,*

$$\frac{n}{\alpha\left(G\right)} \leq b\left(G\right) \leq \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left|E\right|}.$$

où $\alpha\left(G\right)$ est le nombre de stabilité de G.

Théorème 2.2.11 *[5] Tout graphe G d'ordre n different d'un graphe complet satisfait:*

$$b\left(G\right) \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \right\rfloor.$$

avec $\omega(G)$ taille de sa clique maximum.

Théorème 2.2.12 *[1] Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum $\Delta\left(G\right)$ et de degré minimum $\delta\left(G\right)$.Alors*

$$b(G) \leq \left\lfloor \frac{2n - \Delta\left(G\right) - \delta\left(G\right) - 3}{3n - 2\Delta\left(G\right) - \delta\left(G\right) - 4} n \right\rfloor.$$

Corollaire 2.2.1 *[5] Si G est un graphe sans triangle d'ordre n différent de K_2, alors*

$$b(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

En particulier tout graphe biparti different de K_2 satisfait cette inégalité.

Théorème 2.2.13 *[19] Si G est un graphe sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, alors*

$$b(G) \leq (t-1)(\chi(G)-1)+1.$$

Ils ont également montré que cette borne est atteinte.

Proposition 2.2.15 *[19] Pourt tout entier $t \geq 3$ et k, il existe un graphe sans $K_{1,t}$ tel que*

$$\chi(G) = k \text{ et } b(G) = (t-1)(k-1)+1.$$

Si $t = 3$ alors G est dit sans griffe.

Corollaire 2.2.2 *[19] Si G est sans griffe, alors*

$$b(G) \leq 2\chi(G) - 1.$$

Chapitre 3

L'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b-chromatique

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet de la suppression d'une arête quelconque sur le nombre b-chromatique de certains graphes particulier comme celui du cycle C_n, la chaîne P_n, le graphe milieu et totale d'une chaîne et d'un cycle, le graphe complet K_n, la roue W_{n+1}, le graphe biparti complet $K_{n,m}$, le graphe biparti complet moins un couplage parfait $K^*_{n,m}$, le hexaédrique, la couronne du C_n et le prisme G_n.

Dans [10] T. Faik a montré que la suppresion d'une arête quelconque de G peut faire diminuer le nombre b-chromatique de G par au plus 1.

- Soit $e = uv$ une arête d'un graphe G et le graphe $G' = G - \{e\}$ est le graphe obtenu à partir de graphe G en supprimant l'arête e (les extrémites de e ne sont pas supprimés). (voir Figure 3.1).

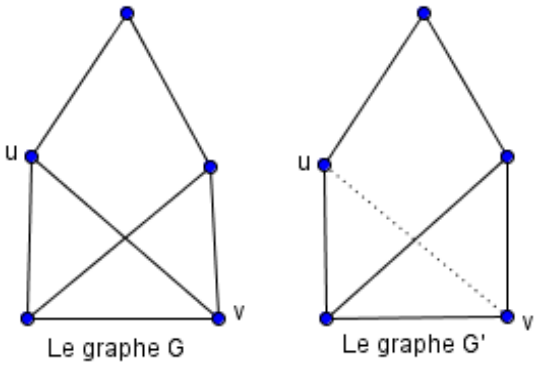


Figure 3.1. Exemple de la suppression
d'une arête uv d'un graphe G.

3.1 Borne supérieure pour b(G-e)

Nous présenterons dans cette partie une borne supérieure pour $b(G-e)$ en fonction de l'ordre du graphe G et le nombre b-chromatique de G.

Théorème 3.1.1 *[25] Pour tout graphe $G=(V,E)$ d'ordre $n \geq 2$, et pour $e \in E(G)$ on a :*

$$b(G-e) \leq b(G) + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2$$

Exemple 3.1.1 *(voir Fgure* 3.2*).*

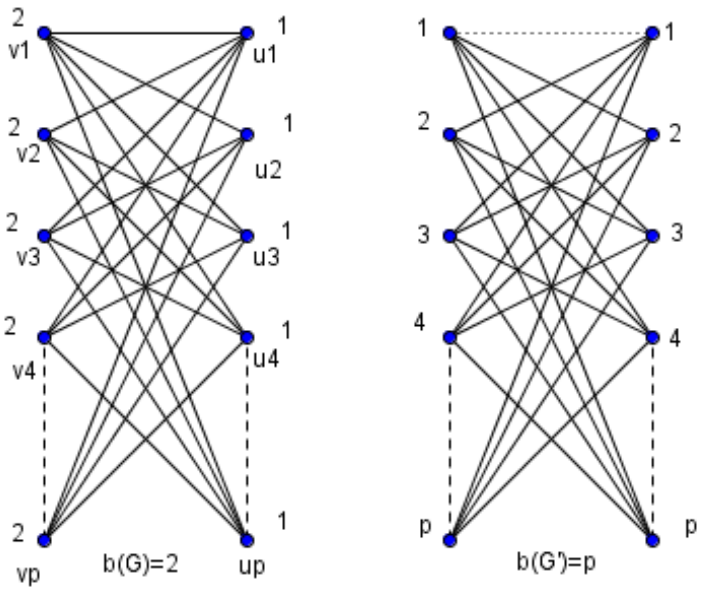


Figure 3.2. *Un graphe* G *et* $G-e$ *,*
$b(G-e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2.$

Remarque 3.1.1 *La différence entre* $b(G-e)$ *et* $b(G)$ *peut être trés large. Nous nous intéressons à caractériser quelques graphes pour lesquels cette différence est trés petite.*

3.1.1 Les chaînes

Proposition 3.1.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 2$*. Alors,* $\forall e \in E(G)$

$$b(P_n - e) \leq b(P_n)$$

preuve.

Posons $V(P_n) = \{v_1, v_2..., v_n\}$ et $E(P_n) = \{e_1, e_2..., e_{n-1}\}$ telle que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$.

Si $n = 2$

Il est facile de voir que le graphe P_n contient une seule arête, donc v_1, v_2 sont des sommets isolés dans $P_n - e$, alors $b(P_n - e) = 1$.

Si $3 \leq n \leq 5$

G' contient au moins deux sommets de degré au moins 1, mais il ne contient pas au moins 3 sommets de degré au moins 2, donc $m(G') = 2$ et d'après la Proposition 2.2.12, $b(G') \leq 2$.

Si $n = 6$

On a deux cas possibles:

- Cas 1: G' contient 3 sommets de degré 2, donc $m(G') = 3$ et d'après la Proposition 2.2.12, $b(G') \leq 3$.
- Cas 2: G' contient 2 sommets de degré 2, donc $m(G') = 2$ alors $b(G') \leq 2$.

Si $n \geq 7$

Dans ce cas, G'contient au moins 3 sommets de degré au moins 2, mais il ne contient pas au moins 4 sommets de degré au moins 3, donc $m(G') = 3$, alors $b(G') \leq 3$.

Dans tous les cas, d'après la Proposition 2.2.8, on a $b(P_n - e) \leq b(P_n)$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.2 Les cycles

Proposition 3.1.2 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors, $\forall e \in E(G)$*

$$b(C_n - e) \leq b(C_n)$$

preuve.

Il est facile de voir que $C_n - e$ est isomorphe à P_n. Ceci implique que $b(C_n - e) = b(P_n)$. D'après la Proposition 2.2.8, $b(C_n - e) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 3, 4 \\ 3 \text{ si } n \geq 5 \end{cases}$ et d'après la Proposition 2.2.9, $b(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 4 \\ 3 \text{ sinon} \end{cases}$ donc $b(C_n - e) \leq b(C_n)$, $\forall e \in E(G)$, $n \geq 3$.

3.1.3 Les graphes $T(P_n)$ et $M(P_n)$

Proposition 3.1.3 *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors ,$\forall e \in E(G)$*

$$\begin{aligned} i) b(T(P_n) - e) &\leq b(T(p_n)) \\ ii) b(M(P_n) - e) &\leq b(M(p_n)) \end{aligned}$$

preuve.

i)

Si $n = 2$

$T(p_n)$ est isomorphe à C_3, donc d'après la Proposition 3.1.2, on constate que $b(T(P_2) - e) = 2$, $\forall e \in E(G)$.

Si $3 \leq n \leq 4$

on pose $G' = T(P_n) - e$, $\forall e \in E(G)$, le graphe G' a au moins n sommets de degré au moins $n-1$ mais il ne contient pas au moins $n+1$ sommets de degré au moins n, donc $m(G') = n$, d'où $b(G') \leq n$.

Si $n \geq 5$

Il est claire que $\Delta(T(P_n) - e) = 4$ et donc d'après la Proposition 2.2.13, $b(T(P_n) - e) \leq 5$.

D'après le Théorème 2.2.5, on conclut que $b(T(P_n) - e) \leq b(T(p_n))$, $\forall e \in E(G)$.

ii)

Si $n = 2$

$M(P_2)$ est isomorphe à P_3 donc d'après la Proposition 3.1.1, $b(M(P_2) - e) = 2$, $\forall e \in E(G)$.

Si $3 \leq n \leq 4$

Il est facile de vérifier que le m-degré de G' est égal à 3 où 2, pour tout $e \in E(G)$, donc d'après la Proposition 2.2.12, on trouve que $b(M(P_n) - e) \leq 3$ où bien $b(M(P_n) - e) \leq 2$ $\forall e \in E(G)$ et $n \in \{3, 4\}$.

Si $n = 5$

G' contient un sous graphe complet d'ordre 3 et donc d'après le Théorème 2.2.11, on constate que $b(M(p_5) - e) \leq 3$, $\forall e \in E(G)$.

Si $n = 6, 7$

Il n'est pas difficile de voir que G'contient au moins 4 sommets de degré au moins 3 mais il contient pas au moins 5 sommets de degré au moins 4, donc $m(G') = 4$, la Proposition 2.2.12, donne $b(M(p_n) - e) \leq 4$, $\forall e \in E(G)$.

Si $n \geq 8$

Vu que le degré maximum de G' est égale à 4, et d'après la Proposition 2.2.13, on constate que $b(M(p_n) - e) \leq 5$, $\forall e \in E(G)$ et $n \geq 8$.

Dans tous les cas, en combinant Le Théorème 2.2.5, on obtient, $b(T(P_n) - e) \leq b(T(p_n))$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.4 Les graphes $T(C_n)$ et $M(C_n)$

Proposition 3.1.4 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors, $\forall e \in E(G)$*

$$\begin{aligned} i) b(T(C_n) - e) &\leq b(T(C_n)) + 1 \\ ii) b(M(C_n) - e) &\leq b(M(C_n)). \end{aligned}$$

preuve.

i)

Si $n = 3$

Il est facile de voir que $m(T(C_n) - e) = 4$, alors $b(T(C_n) - e) \leq 4$, $\forall e \in E(G)$.

Si $n \geq 4$

Puisque $\Delta(T(C_n) - e) = 4$, on conclut que $b(T(C_n) - e) \leq 5$, $\forall e \in E(G)$.

Dans les deux cas en combinant Le Théorème 2.2.6, on obtient, $b(T(C_n) - e) \leq b(T(C_n)) + 1$, $\forall e \in E(G)$.

ii)

Si $n = 3, 4$

Il n'est pas difficile de vérifier que G' contient au moins n sommets de degré au moins $n-1$, mais il ne contient pas au moins $n+1$ sommets de degré au moins n , donc $m(G') = n$, d'où $b(M(C_n) - e) \leq n$, $\forall e \in E(G)$.

Si $n \geq 5$

Comme le degré max de G' est égale à 4, on conclut que $b((M_n) - e) \leq 5$, $\forall e \in E(G)$ et $n \geq 5$, $\forall e \in E(G)$.

Dans les deux cas en combinant Le Théorème 2.2.6, on obtient, $b(M(C_n) - e) \leq b(M(C_n))$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.5 Le graphe complet

Proposition 3.1.5 *Soit K_n un graphe complet d'ordre $n \geq 2$. Alors $\forall e \in E(G)$*

$$b(K_n - e) < b(K_n)$$

preuve.

Si $n = 2$

K_2 est isomorphe à P_2, donc d'après la Proposition 3.1.1, on trouve $b(K_2 - e) = 1$ $e \in E(G)$.

Si $n = 3$

Il est claire de voir que K_3 est isomorphe à C_3, donc d'après la Proposition 3.1.2, on trouve $b(K_3 - e) = 2$, $\forall e \in E(G)$.

Si $n \geq 4$

Il est evident que G' défferent de graphe complet, et contient une clique d'ordre n-1, donc d'après le Théorème 2.2.11, on a $b(G') \leq n - 1$, $\forall e \in E(G)$.

D'aprés la Proposition 2.2.7, on constate que $b(K_n - e) < b(K_n)$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.6 La roue

Proposition 3.1.6 *Soit W_{n+1} la roue d'ordre $n \geq 3$. Alors, $\forall e \in E(G)$*

$$b(W_{n+1} - e) \leq b(W_{n+1})$$

preuve.

Si $n = 3$

Il est clair de voir que W_4 est isomorphe à K_4 et donc d'après la Proposition 3.1.5, $b\left(W_4 - e\right) \leq 3$, $\forall e \in E\left(G\right)$.

Si $n = 4$

L'ordre de W_5 et le m-degré son égaux à 5 et 4 rèspectivement, d'après la Proposition 2.2.12, $b(W_5) \leq 4$.

On suppose que $b(W_5) = 4$, pour cela on construit une b-coloration de manière suivante: Comme les sommets v_1, v_2, v_4 forment une clique, alors sans perte de généralité, colorons les sommets v_1, v_2, v_4 par des couleurs distinctes $1, 2, 3$. colorons v_3 par 4. Comme v_1 est un sommet b-dominant, alors la couleur 4 doit être présente dans son voisinage. Donc il faut colorer v_5 par 4. Contradiction. D'où $b(W_5) \leq 3$. Par ailleur la Figure 3.3 présente une b-coloration de W_5 avec 3 couleurs. Par conséquent $b(W_5) = 3$.

Il est claire que $|V\left(G'\right)| = 5$, $\omega\left(G'\right) = 3$ et G' défferent de graphe complet. D'après le Théorème 2.2.11, on a $b(G') \leq 3$, $\forall e \in E\left(G\right)$.

Par conséquent $b((W_5) - e) \leq b(W_5)$, $\forall e \in E\left(G\right)$.

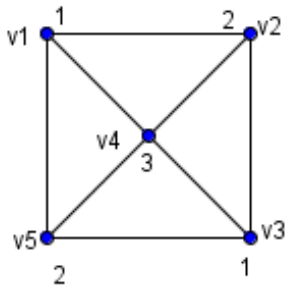


Figure 3.3. Une b-coloration de W_5
avec 3 couleurs.

Si $n \geq 5$

G' contient au moins 4 sommets de degré au moins 3, mais il ne contient pas 5 sommets de degré au moins 4, donc $m(G') = 4$. Alors on conclut que $b(G') \leq 4$, $\forall e \in E\left(G\right)$, alors d'après le Théorème 2.2.7, on constate que $b\left(W_{n+1} - e\right) \leq b\left(W_{n+1}\right)$, $\forall e \in E(G)$ et $n \geq 5$.

Dans tous les cas, $\left(W_{n+1} - e\right) \leq b\left(W_{n+1}\right)$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.7 Le graphe biparti complet

Définition 3.1.1 *[10] Un sommet v d'une classe X_i, $i = 1$ ou 2, d'un graphe biparti $G = (X_1, X_2, E)$ est dit charismatique si et seulement si $N(v) = X_J, j \neq i$, $j \in \{1, 2\}$.*

Théorème 3.1.2 *[10] Soit $G = (X_1, X_2, E)$ un graphe biparti connexe. Alors $b(G) = 2$, si et seulement si chaque classe de la bipartition contient au moins un sommets charismatique.*

Proposition 3.1.7 *Soit $K_{n,m}$ un graphe biparti complet pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Alors on a: $\forall e \in E(G)$*

$$b(K_{n,m} - e) = b(K_{n,m})$$

preuve.

Chaque partition X_1, X_2 dans G' contient au moins un sommet charismatique donc d'après le Théorème 3.1.2, on a $b(K_{n,m} - e) = 2$, $\forall e \in E(G)$.

D'après la Proposition 2.2.10, on result que $b(K_{n,m} - e) = b(K_{n,m})$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.8 Le graphe biparti complet moins un couplage

Proposition 3.1.8 *Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti complet moins un couplage parfait noté $K^*_{n,n}$. Alors, $\forall e \in E(G)$.*

$$b(K^*_{n,n} - e) \leq b(K^*_{n,n})$$

preuve.

G'contient au moins n sommets de degré au moins $n-1$ mais il ne contient pas au moins $n+1$ sommets de degré au moins n donc $m(G') = n$ alors que $b(G') \leq n$.

D'après la Proposition 2.2.11, on a $b(K^*_{n,n} - e) \leq b(K^*_{n,n})$, $\forall e \in E(G)$.

Exemple 3.1.2 *:*

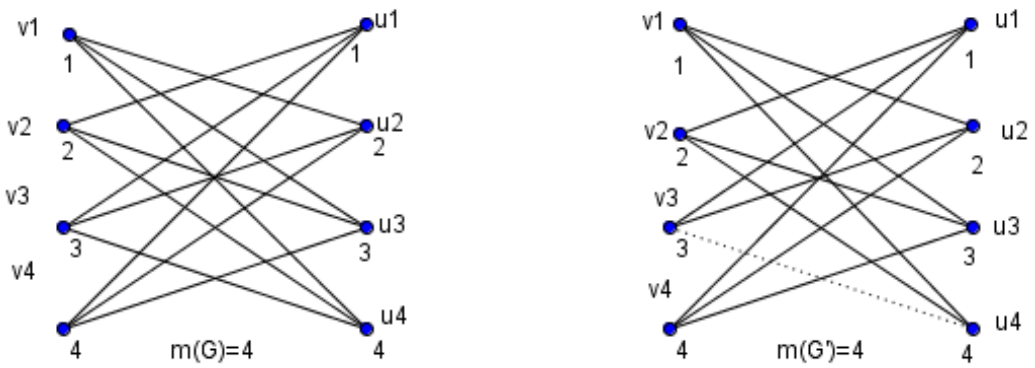


Figure 3.4. *Une b-coloration de* $K^*_{4,4}$ *et* $K^*_{4,4} - e$.

3.1.9 Hexaédrique

Proposition 3.1.9 *Soit* $G = (V, E)$ *un hexaédrique avec* $n = 8$. *Alors on a:* $\forall e \in E(G)$

$$b(G - e) = b(G)$$

preuve.

D'après la définition de graphe hexaédrique, G est 3-régulier, alors d'après le Théorème 2.2.10, on a $b(G) = 4$, il est claire de voir que chaque classe du couleur contient exactement 2 sommets b-dominant, et soit $G' = G - e$, $\forall e \in E(G)$ le m -degré de G'est égale à 4, et la

Figure 3.5 présente une b-coloration de G' avec 4 couleurs, d'où $b(G) = 4$,$\forall e \in E(G)$.

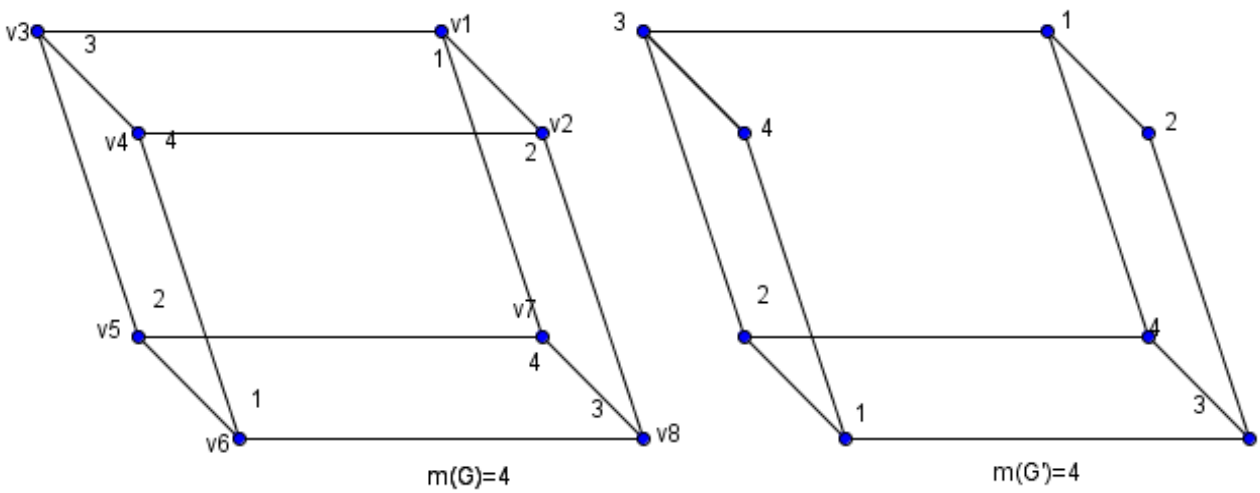


Figure 3.5 Une b-coloration du hexaédrique et hexaédrique moins arête.

3.1.10 Graphe $C_r(C_n)$

Proposition 3.1.10 *Soit $C_r(C_n)$ la couronne d'une $C_n, n \geq 3$. Alors, $\forall e \in E(G)$*

$$b(C_r(C_n) - e) \leq b(C_r(C_n)) + 1$$

preuve.

Soit $G_n = C_r(C_n)$ la couronne d'un C_n avec $2n$ sommets et $2n$ arêtes.

Si $n = 3$

La Figure 3.6 présente une b-coloration de $C_r(C_3)$ avec 3 couleurs, par ailleur m-degré de $C_r(C_3)$ égale 3 et par conséquent $b\left(C_r(C_3)\right) = 3$.

Il est facile de voir que le m-degré de G' égale à 3. D'où, $b(G') \leq 3$, $\forall e \in E(G)$.

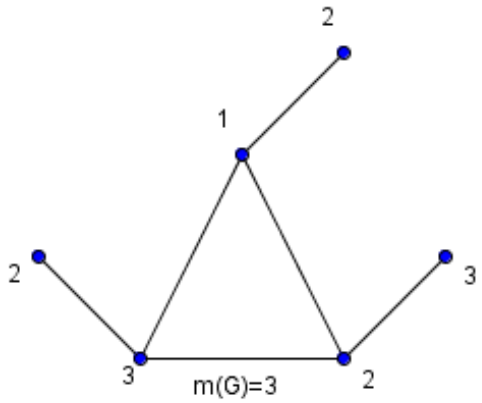


Figure 3.6. Une b-coloration de
$C_r\,(C_3)$ avec 3 couleurs

Si $n = 4$

La figure 3.7 présente une b-coloration de $C_r(C_4)$ avec 4 couleurs, par ailleur m-degré de $C_r(C_4)$ égale 4 par conséquent $b\,(C_r(C_4)) = 4$.

Il est facile de voir que $\Delta(G') = 3$ et donc $b(G') \leq 4$, $\forall e \in E(G)$.

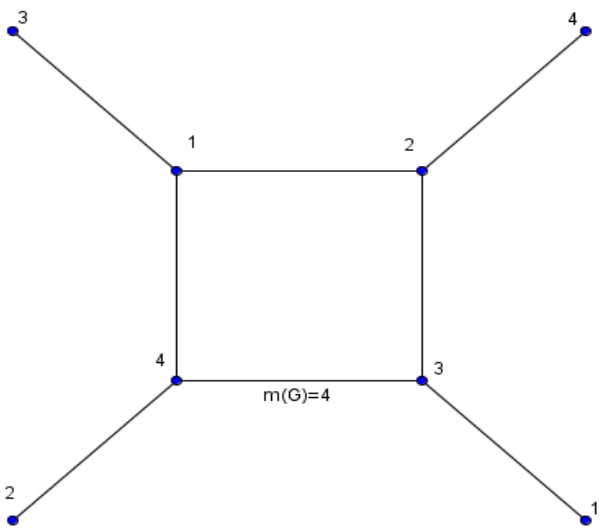


Figure 3.7. Une b-coloration de $C_r(C_4)$ avec 4 couleurs.

Si $n = 5$

Posons $G = C_r(C_5)$. Il est clair que G contient 5 sommets de degré 3 et 5 sommets de degré 1 et donc $m(G) = 4$. Par conséquent $b(G) \leq 4$. on suppose alors que $b(G) = 4$ et on consédère une b-coloration de la manière suivante: Colorons v_i par i, $i = \overline{1,4}$ (v_i sont des b-sommet), colorons les sommets u_1, u_2, u_3, u_4, v_5 par la couleur $4, 3, 4$, 1 et 2 rèspectivement. Dans ce cas, la couleur 2 se répète dans le voisinage de v_4. Donc v_4 a deux couleurs manquantes dans son voisinage. D'où $b(G) \leq 3$. Par ailleur la Figure 3.8 présente une b-coloration de graphe $C_r(C_5)$ avec 3 couleurs. Par conséquent, $b(C_r(C_n)) = 3$.

Comme le degré maximum de G' égale 3 et d'aprés la Proposition 2.2.13, on a $b\,(G') \leq 4$, par conséquent $b(C_r(C_5) - e) \leq b(C_r(C_5)) + 1$, $\forall e \in E(G)$.

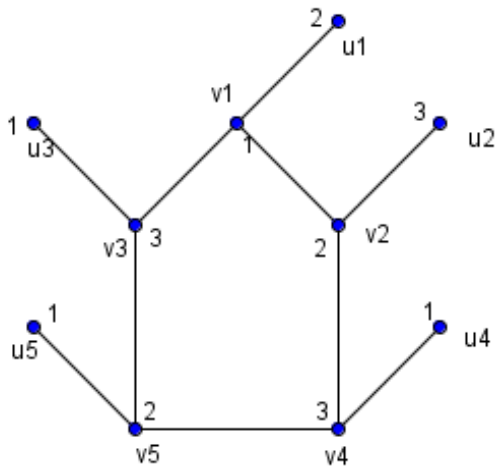


Figure 3.8 Une b-coloration de $C_r(C_5)$ avec 3 couleurs.

Si $n \geq 6$

D'aprés le Théorème 2.2.8, on a $b(C_r(C_6)) = 4$.

On pose $G' = (C_r(C_6) - e)$, $\forall e \in E(G)$ et $n \geq 6$. Il est clair que G'contient au moins 4 sommets de degré au moins 3 mais ne contient pas au moins 5 sommets de degré au moins 4, donc $m(G') = 4$. D'après la Proposition 2.2.12, on a $b(C_r(C_6)) \leq 4$, $\forall e \in E(G)$.

Dans tous les cas, on a $b(C_r(C_n) - e) \leq b(C_r(C_n)) + 1$, $\forall e \in E(G)$.

3.1.11 Graphe Prisme

Proposition 3.1.11 *Soit G_n le prisme du cycle C_n, pour tout $n \geq 3$. Alors , $\forall e \in E(G)$*

$$b\left(G_n - e\right) \leq b\left(G_n\right) + 1$$

preuve.

Il est clair que G_n contient $2n$ sommets et $3n$ arêtes.

Si $n = 3$

On pose $G_3 = C_3C_3$, l'ordre de G_3 est 6 et son m-degré est 4. D'après 2.2.12, on constate que $b\left(G_n\right) \leq 4$. Suppose que $b\left(G_n\right) = 4$. On considère une b-coloration c de

G_3 avec 4 couleurs: Comme les sommets v_1, v_2, v_3 forme une clique, alors sans perte de généralité, colorons v_i par i, $1 \leq i \leq 3$. Colorons v_4 par la couleur 4. Comme les sommets v_4, v_5, v_6 forment une clique, alors les deux sommets v_5, v_6 ne peuvent pas être colorer par 4. D'où, b$(G_3) \leq 3$. Par ailleurs, la Figure 3.9 présente une b-coloration de graphe G_3 avec 3 couleurs d'où b$(G_3) = 3$.

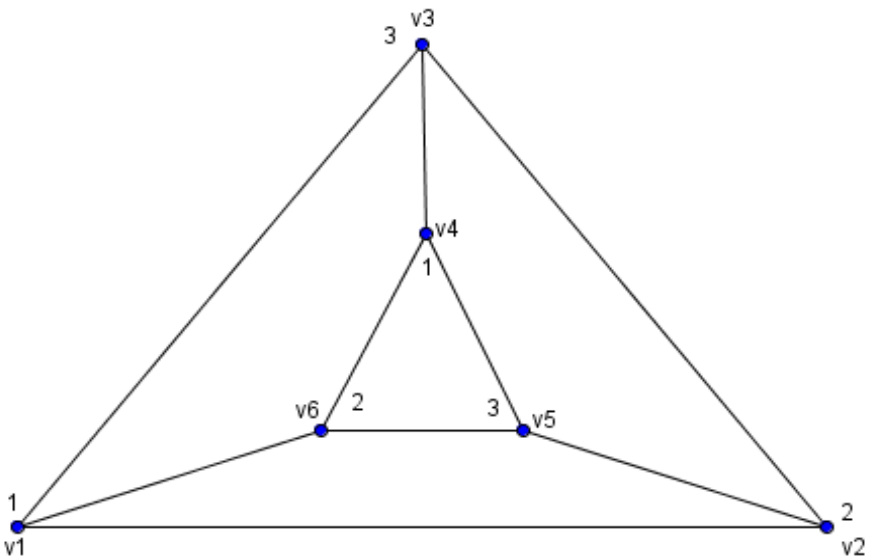


Figure 3.9. Une b-coloration de G_3 avec 3 couleurs.

Comme G'_3 contient 4 sommets de degré 3 et 2 sommets de degré 2 alors $m(G'_3) = 4$ donc $b(G'_3) \leq 4$.

Si $n \geq 4$

G'_n contient $2n - 2$ sommets de degré 3 et 2 sommets de degré 2 et donc $m(G'_n) = 4$. D'où $b(G'_n) \leq 4, \forall e \in E(G)$, et comme $b(G_n) = 4$, si $n \geq 4$. Alors, $b(G_n - e) \leq b(G_n)$.

Dans tous les cas, on constate que $b(G_n - e) \leq b(G_n) + 1$, $\forall e \in E(G)$.

Conclusion

Tout au long de la préparation de notre mémoire, nous avons essayé autant que possible d'utiliser tous nos gains que nous avons acquis au cours de nos études universitaires, en particulier ceux liés à la recherche operationelle et la theorie des graphes.

On a abordé dans notre projet de fin d'études les modifications sur le nombre b-chromatique pour certains graphes quand on supprime une arête, ceci nous amené à découvrir de nouveau résultats sur la b-coloration qui a enrichi notre savoir.

Ce travail s'est basé sur la borne superiéure de $b(G-e)$ par rapport à $b(G)$, à partir de là nous trouvons l'un des résultats suivants:

- Caractériser les graphes G tels que pour toute arete $e \in E(G)$, $b(G-e) \leq b(G)$.
- Caractériser les graphes G tels que pour toute arete $e \in E(G)$, $b(G-e) \leq b(G)+1$.

Bibliographie

[1] M. Alkhateeb, A. Kohl, Upper bounds on the b-chromatic number and results for restricted graph classes, DiscuccionesMath. Graph Theory 31 (2011) 709-735.

[2] N. Ansari, RS. Chandel, R. Jamal: On b-chromaique number of prism graph Families. [PDF]. (March 30, 2018), disponible surhttp://www.pvamu.edu/mathematics/wp-content/uploads, page consulté le 1/09/2020.

[3] M. Behzad: A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb. Philos. Soc. 63: 679- 681, 1967.

[4] C. Berge. Graphs. North Holland, 1985.

[5] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf F. Maffray. b-coloring of some bipartite graphs, AustralasianJ. Combin 53 (2012) 67-76.

[6] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, 37 (1941) 194-197.

[7] S. A. COOK The complexity of theorem proving procedures. Proc. $3rd$. ACM Symp. On theory of Computing (1971) pp. 151-158.

[8] J. EDMONDS Paths, trees and flowers, Canad. J. Math. 17 (1965) 449-467.

[9] A. El Sahili, M. Kouider. About b-colorings of regular graphs, Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.)

[10] T. Faik. La b-continuité des b-colorations: complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.

[11] T. Hamada, I. Yoshimura: Traversability and connectivity of the middle graph ofa-graph. Discrete Math. 14 : 247- 256, 1976.

[12] C. T. Hoàng, M. Kouider. On the b-dominating coloring of graphs.Discrete Appl.Math.152: 176, 186, 2005.

[13] N. Ikhlef Eschouf. Etude de la b-coloration dans les graphes: Graphes exrémaux et graphes critiques. Thèse de Doctorat, Université Saad Dahlab de Blida, 2012, 111p.

[14] R. W. Irving, D.F. Manlove, The b-chromatic number of a graph, Discrete Appl.Math. 91 (1999) 127-141.

[15] M. Jakovac, S. Klavuzar. The b-Chromatic Number of Cubic Graphs. Graphs and Combinatorics 26 (2010) 107 118.

[16] M. Jakovac, I. Peterin. On the b-chromatic number of some graph products. Studia Sci. Math. Hungar. 49 (2012) 156-169.

[17] R. M. KARP Reducibility among combinatorial problems; Dans R.E Miller et J.W Tacker eds, complexity of compter computations (plenum press, New-york) 1972, 85-104.

[18] M. Kouider, M.Mahéo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph.Discrete Math. 256 : 267_277, 2002.

[19] M. Kouider, M. Zaker. Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs.Discrete mathematics, vol. 306, no 7, pp. 617 - 623, 2006.

[20] J. Kok, N. Sudev: The b-Chromatic Number of Certain Graphe and Digraphs. [PDF]. (2 Nov 2015), disponible sur https: // arxiv.org / pdf /1511.00680. pdf, page consulté le 10/07/2020.

[21] D. F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems: a partial order based approach. PhD thesis, technical report tr-1998_ 27 of the Computing Scienc Departmen Glasgow University, 1998.

[22] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 (1956) 175-177.

[23] J. Vernold Vivin, M.Vekatachalam: On b-chromatic number of sun let graph and wheel graph families. [PDF]. (july 2015), disponible sur https: //www. sciencedirect. com / science / article / pii /$S1110256X14000686$, page consulté le 4/4/2020.

[24] M. Zamime. Contribution à l'étude des problèmes de la b-coloration dans les graphes. Thèse de Doctorat, université de Houari Boumediene (Alger), 2015, 92p

[25] M. Zamime, M. Kouider, H. Ait Haddadène. On the b-coloring of $G-e$. Discrete Applied Mathematics. 188(2015) 41-50.