جامعة يحي فارس بالمدية
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم
التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة مقدمة من طرف:

الـدكـتـور:

معـوشـي عيـماد

محاضرات في:

الإحصاء الرياضي

STATISTIQUE MATHEMATIQUE

(مقرر: إحصاء 3)

مقدمة لطلبة الليسانس علوم إقتصادية، تخصص : إقتصاد كمي

ميدان: علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم تسيير

السنة الجامعية : 2017-2018



الإحصاء الرياضي

STATISTIQUE MATHEMATIQUE

(مقرر: إحصاء 3)

إعداد: د. معوشي عيماد

2018-2017

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

قائمة الأشكـال

قائمة المـلاحـق

مقدمة .....**أ–ب**

- **الفصل الأول: التجربة العشوائية وحساب الإحتمال** **1–23**

تمهيد 2

1- التجربة العشوائية والتجربة النظامية 3

2- المجموعة الأصلية والحوادث 5

3- طرق تعيين الإحتمالات 8

4- مسلمات ودساتير الإحتمال 16

تمارين 20

- **الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية وقانون توزيعها**.....24-52

تمهيد 25

1- المتغيرات العشوائية 26

2- قانون توزيع الإحتمالات 27

3- المتغير العشوائي المتقطع 29

4- المتغير العشوائي المستمر 39

تمارين 49

- **الفصل الثالث: قوانين التوزيع المتقطعة** 54-72

تمهيد 55

1- قانون بارنولي 56

2- قانون ثنائي الحد 57

3- التوزيع كثير الحدود 59

4- قانون بواسون 61

5- القانون الهندسي 63

6- القانون مافوق الهندسي 64

7- التوزيع مافوق الهندسي المتعدد 66
8- التوزيع ثنائي الحد السالب 67
9- القانون المنتظم المتقطع 68
تمارين 70

- **الفصل الرابع: قوانين التوزيع المستمرة 73-101**

تمهيد 74
1- القانون المنتظم المستمر 75
2- قانون توزيع "قاما" 76
3- قانون توزيع "بيتا" 79
4- القانون الأسي 83
5- القانون الطبيعي 84
6- قانون توزيع "كاي-تربيع" 90
7- قانون توزيع "ستيودنت" 92
8- قانون توزيع "فيشر" 94
9- نظرية النهاية المركزية 97
تمارين 99

خاتمة 103
المراجع 105-107
الملاحق 108-118

- **قائمة الأشكال:**

الرقم	عنوان الشكل	الصفحة
1-1	زهرة النرد (حجر النرد)	3
1-2	رسم بياني توضيحي لمفهوم الأمل الرياضي	32

- **قائمة الملاحق:**

الرقم	عنوان الملحق	الصفحة
1	قائمة الأحرف الإغريقية	109
2	التوزيع الطبيعي المعياري (Z)	110
3	توزيع ستيودنت (t): ذو الجانب الواحد	111
4	توزيع ستيودنت (t): ذو الجانبين	112
5	توزيع كاي-تربيع (χ^2)	113
6	توزيع فيشر (F): عند 5 %	114
	توزيع فيشر (F): عند 2.5 %	115
	توزيع فيشر (F): عند 1 %	116
7	مثلث باسكال (Pascal)	117
8	جدول الأرقام العشوائية	118

مقدمة

مقدمة

لمعرفة أساس ظهور الإحصاء الرياضي يجب العودة إلى نشأة نظرية الإحتمالات في منتصف القرن 17، حيث كان لعب القمار منتشرا بشكل واسع في المجتمع الفرنسي، ومن ثمة إرتبطت بحل مشاكل ألعاب الحظ وما تلاها من مسائل التأمين التي تعتبر أمثلة تقليدية للتجارب الإحتمالية، وخاصة ألعاب الحظ التي جنحت منذ البداية لبناء النماذج الرياضية لمختلف حالات اللعب، وتمكن اللاعب من خلال هذه النماذج استدلال سير اللعب ووضع حسابات للرهان وتقدير فرص الفوز، كما سمحت النماذج الرياضية ببرمجة وتخطيط نفقات ومداخيل شركات التأمين المختلفة. لقد صيغت مبادئ بناء النماذج الرياضية من خلال أعمال كل من باسكال، فيرمة، هيجنز. أما الأسس التقليدية لنظرية الاحتمالات والتي بقيت ثابتة نسبيا حتى اليوم فتعود إلى أعمال كل من برنولي ، موافر، لابلاس، بواسون، غوص وبايز. وكانت تلك الأبحاث والأعمال إستجابة لمتطلبات حل الكثير من مسائل العلوم الملحة آنذاك. يعود تاريخ نظرية الإحتمالات المعاصرة إلى سنة 1933 التي صدر فيها عمل الإحصائي كالماغوروف–من المدرسة الروسية : "المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمالات". حيث قدم في هذا العمل بناءا شاملا لنظرية الإحتمالات معتمدا على نظرية المجموعات، وهو ما جعل نظرية الإحتمالات في وقتنا المعاصر علما رياضيا هاما وشاملا في مختلف العلوم كالفيزياء، الهندسة، الطبيعة، الإقتصاد والإجتماع. وتزامنا مع هذه الفترة تقريبا تفرع عن نظرية الإحتمالات فرع جديد هو الإحصاء الرياضي، حيث وضعت المبادئ الأساسية التقليدية لهذا الفرع الجديد من قبل علماء المدرسة الإنجليزية–الأمريكية (بيرسون، فيشر، نيمان، ويلكوكسون، وليمان وغيرهم).

إذن فالإحصاء الرياضي أصبح يتبوأ مكانة بارزة بين الدراسات الرياضية لما له من إستخدامات تطبيقية واسعة ومفيدة في كل حقول البحث العلمي تقريبا، ونذكر بخاصة في مجال إتخاذ القرارات في النواحي الإدارية والإقتصادية. كما أن أسلوب التنبؤ وتحديد الإتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر إنما يعتمد على مبادئ نظرية الإحتمالات. وهذه النظرية ليست حديثة العهد بل أن التفكير في إستخدام مبادئها بدأ منذ ثلاثة قرون، خاصة في مجال ألعاب الحظ والتأمين، وتطور هذا الإستخدام واستمر حتى وصل إلى شكله الراهن بنظرية لها أصولها، قواعدها وقوانينها وأصبحت من الفروع الأساسية في العلوم الرياضية، ودخلت في مجالات إستخدام عديدة وبقوة كبيرة في مظاهر الحياة الحديثة.

لقد تضمنت هذه المطبوعة أربعة فصول مرتبة من حيث المنهجية العملية التي تساعد على تعلم أفضل لأسس الإحصاء الرياضي. حيث نحاول الحديث في الفصل الأول عن التجربة العشوائية وحساب الإحتمال وهو بمثابة تذكير لأهم القواعد الأساسية في حساب الإحتمالات والمسائل المرتبطة به وكذا مفهوم الحوادث والتجارب المرتبطة بالصدفة، ثم في الفصل الثاني نتكلم عن المتغيرات العشوائية وقوانين توزيعها حيث يتم فهم

سلوك المتغير العشوائي بنوعيه المتقطع والمستمر استنادا لإحتماله المقابل، أما الفصل الثالث فخصصناه لأهم قوانين التوزيع المتقطعة والفصل الرابع والأخير خصصناه لأهم التوزيعات المستمرة ومنها التوزيعات الخاصة الأكثر شهرة ومنها التي تعتمد على الجداول الإحصائية الجاهزة لحساب إحتمالاتها وإستخراج الإحصاءات الخاصة بها من هذه الجداول، نظرا لتعقيد دوال الكثافة الخاصة بها. وقد تضمن كل فصل مجموعة من الأمثلة التطبيقية التي تثبت فكرة النظريات والتعريفات عند الدارس لهذه المادة، بالإضافة إلى مجموعة من التمارين غير المحلولة في نهاية كل فصل تحوي على مسائل لما إحتواه كل فصل من أفكار، لنختتم المطبوعة بمجموعة من الملاحق الضرورية لما إشتملت عليه المطبوعة من محاور.

الفصل الأول

التجربة العشوائية

وحساب الإحتمال

تمهيد:

إن الفرع من الرياضيات الذي يدرس الإتجاه العام للظواهر العشوائية يدعى بنظرية الاحتمالات حيث يقوم الإحصاء باستخدام هذه النظرية في دراسة الظواهر الإقتصادية والاجتماعية ... الخ. الفكرة الأساسية أو المبدأ العام الذي ننطلق منه لدراسة وتفسير الإحتمال هو مفهوم التجربة العشوائية والذي يختلف عن معنى التجربة النظامية. حيث أنه في الأولى تكون النتيجة غير معروفة بل إحتمالية فقط وتخضع إلى مبدأ الصدفة، وهو ما نحاول في هذا الفصل توضيحه لكي تتضح الأمور فيما بعد عند التطرق لمفهوم الإحتمال وبالتالي يسهل علينا فهمه وتفسيره ومن ثمة معرفة استخداماته. والتعرف على بعض المصطلحات المهمة كالحوادث وأنواعها والعمليات عليها. بإمكاننا أن نلفت الإنتباه إلى أن كل حادث من المجموعة الشاملة يقابل مميزا عدديا يدعى بإحتمال هذا الحادث، ويحقق بعض المسلمات الخاصة به والتي نأتي على ذكرها في هذا الفصل، هذا المميز العددي يطرح علينا سؤالا جوهريا مفاده أن وفق أي قانون أو قاعدة يتم هذا الربط بين الحدث وقياسه الإحتمالي والذي يمكن التعبير عنه بتطبيق رياضي كذلك. يتوجب علينا في بادئ الأمر وفي إطار تعيين أو حساب الإحتمالات أن نفهم القواعد المنطقية والتجريدية (النظرية) لحساب إحتمال وقوع الحوادث الأساسية. أما إحتمالات الحوادث الأخرى تحدد إنطلاقا من الإحتمالات المعينة للحوادث الأساسية وبناءا على البديهيات والنظريات وخواص القياس الإحتمالي، بالإضافة إلى توظيف جبر الحوادث.

1- التجربة العشوائية والتجربة النظامية

1-1- تعريف التجربة العشوائية (الإحتمالية):

التجربة التي لا يمكن بتأكد تام توقع نتيجتها مسبقا تسمى التجربة العشوائية. وكذلك هي كل تجربة يمكن تكرارها أو تكون قابلة للتكرار (المشاهدة) عددا من المرات، وتكون نتائجها غير محددة سلفا لكونها تعتمد على الصدفة أو العشوائية رغم انطلاقنا من نفس جملة الشروط خلال تكرار التجارب فالمجرب (المشاهد) لا يستطيع أن يتنبأ مسبقا بالنتيجة وهذا ما يضفي الصبغة العشوائية على هذا النوع من التجارب[1].

1-2- تعريف التجربة النظامية:

هي كل تجربة يمكن أن نتوقع أو نحدد نتائجها سلفا على أساس القوانين العلمية المعروفة، وذلك إنطلاقا من جملة الشروط المرتبطة بالظاهرة والمتوفرة أثناء التجربة، والأمثلة كثيرة في مجال العلوم الدقيقة. والغاية في هذا النوع من التجارب هو إكتشاف قوانين أو الاستفادة من ما هو موجود لتحقيق بعض الاحتياجات العملية وهذا النوع من التجارب يخرج عن نطاق دراستنا[2].

- **أمثلة عن التجارب العشوائية:**

المثال التقليدي والأكثر إستخداما هو رمي زهرة النرد بالرغم من بساطته إلا أنه يعطينا إستدلالا ثريا عند التطرق لمفهوم الإحتمال. زهرة النرد هي مكعب ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

شكل 1-1 : زهرة النرد (حجر النرد)



وليس باستطاعتنا قبل رمي الزهرة التنبؤ بالوجه الذي سوف يظهر في الأعلى. نظرا لكثرة العوامل المؤثرة على حركتها (السرعة الابتدائية، القوة التي نرميها بها، درجة توازنها، الهواء المعيق لحركتها ... الخ) الشئ الوحيد المتأكدين منه هو أنه سيظهر أحد الوجوه الستة.

كذلك عند رمي قطعة نقود متجانسة لا يمكن توقع ظهور الوجه أو الظهر بل هناك إمكانية لظهور أحدهما دون الآخر في حالة رمية واحدة فقط.

طول عمر الإنسان هو تجربة عشوائية، حيث لا يمكن تحديد عمر أي شخص على قيد الحياة مسبقا.

التجارب العشوائية لا حصر لها وكمزيد من الأمثلة فإن مراقبة الظواهر التالية يعتبر تجربة عشوائية:

- عدد البكتيريا الموجودة في لحظة ما وفي وسط ما.
- عدد الحشرات المتواجدة على شجرة.

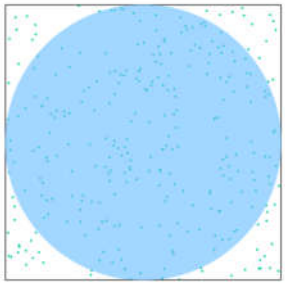
- حالة الجو ليوم الغد.
- عدد الطلبة الذين سيأخذون علامة أكبر من 10 في مادة الإحصاء.
- نتيجة مباراة في كرة القدم.
- ترتيب مجموعة من العدائين في السباق.
- عدد المكالمات التي تستقبلها في اليوم. ... الخ.

من الجدير بالذكر أن التجربة العشوائية قد تكون ناتجة عن فعلنا أي أنها تجرى تحت إشرافنا مثل رمي زهرة نرد أو رمي قطعة نقود، أو قد تكون من النوع الذي نكتفي بمراقبته أو ملاحظته فقط، مثل مراقبة سرعة الرياح، أو درجة الحرارة في منطقة ما ولحظة ما.

كل ما يهمنا في هذا النوع من التجارب هو ذلك الشك والارتياب المتعلق بالنتيجة، هذا الشك يكون نسبيا، حيث قد يكون ضئيلا أو كبيرا، فمثلا نكاد لا نشك في نتيجة مقابلة لكرة القدم بين فريق محترف وآخر لا يمكلك أي تجربة في لعب هذا النوع من المباريات. وعلى العكس من هذا يكون الإرتياب كبيرا جدا إذا ما تعلق الأمر بتوقع الأرقام الستة التي ستظهر في لعبة اللوطو القادم (من أصل 49 كريه).

وخلاصة القول أن هذا الشك كان ضئيلا أو كبيرا يدل على الخضوع لتأثيرات لا تقبل المراقبة ولا يمكن التحكم فيها لإظهار نتيجة ما دون غيرها، هذه التأثيرات تكون عشوائية ومنها أخذ هذا النوع من التجارب التسمية، فالتجارب هنا تحكمها الصدفة.

- إن أحد أهم **التطبيقات العملية** والتي يمكن إظهار دور الصدفة فيها هو تجربة الرمي العشوائي لعدد من النقاط داخل مربع جميع أضلاعه تكون مماسة لدائرة مرسومة داخلة:



نعلم أن مساحة القرص m الذي تحيط به الدائرة هو $m = \pi \cdot k^2$ حيث k هو نصف قطر الدائرة.

كذلك نلاحظ أن مساحة المربع n هي : $n = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2$

لدينا مما سبق: $\pi = \frac{m}{k^2}$ بضرب البسط والمقام في 4 نجد: $\pi = \frac{4 \cdot m}{4 \cdot k^2}$ يصبح $\pi = 4\frac{m}{n}$ إن العلاقة الأخير تدلنا في هذا المثال على أنه بقسمة عدد النقاط الواقعة داخل الدائرة m على العدد الكلي للنقاط n(التي بداخل المربع) نتحصل في كل مرة (في كل عينة) على تقدير لقيمة الثابت الرياضي (إحصاءة) ولكن هذا التقدير يكون جيدا أو يقترب من القيمة الحقيقية (كمعلمة غير معروفة بالضبط) كلما زاد عدد التجارب وهذا يعزى إلى

الصدفة وحدها. وهذا أحد الأهداف الرئيسية للإحصاءات في تقدير المعلمات غير المعروفة. ويستخدم المقدر قياسات وخصائص للتوقع لتقريب هذه المعلمات[3].

فإذا تم رمي 100 نقطة على سبيل المثال وتحصلنا على 82 نقطة داخل الدائرة، بتطبيق العلاقة الرياضية السابقة نجد 3.28 :

$\hat{\pi} = 4\frac{m}{n}$	$m = 82$ $n = 100$	$\hat{\pi} = 3.2800$

فإذا تم رمي 300 نقطة على سبيل المثال وتحصلنا على 238 نقطة داخل الدائرة، بتطبيق العلاقة الرياضية السابقة نجد 3.17 :

$\hat{\pi} = 4\frac{m}{n}$	$m = 238$ $n = 300$	$\hat{\pi} = 3.1733$

من أجل 1300 رمية نجد تقريب أفضل 3.14:

$\hat{\pi} = 4\frac{m}{n}$	$m = 1023$ $n = 1300$	$\hat{\pi} = 3.1477$

2- المجموعة الأصلية والحوادث

2-1- المجموعة الأصلية (فراغ العينة):

بالرغم أنه من غير الممكن توقع نتيجة تجربة عشوائية ما، إلا أننا نستطيع حصر جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية. وهذا بتصور كل المخارج التي تؤول إليها نتيجة هذه التجربة العشوائية. وهذا الأمر بالغ الأهمية عند حساب الإحتمال. قد تكون مجموعة فراغ العينة منتهية أو غير منتهية كما يمكن أن تكون منقطعة أو مستمرة[4].

- **أمثلة:**

– عند رمي زهرة نرد على سطح منبسط، نعلم أنه لا مجال لها إلا أن تستقر على أحد الوجوه الستة، فالنتائج الممكنة تكون أحد الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5، 6، إذن هذا ما يسمى بفراغ العينة أو فراغ الحوادث (المجموعة الأصلية)، ونرمز لها كما يلي:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

– إذا كانت التجربة العشوائية تكمن في مراقبة عدد الطلبة في فوج به 30 طالب، الذين سيتحصلون على المعدل في الإمتحان، فإن مجموعة الإمكانيات تكون الأعداد الطبيعية المحصورة بين 0 و30. ونكتب:

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$$

ويمكن الرجوع إلى نظرية المجموعات في الكتب المختصة –الرياضيات– لمعرفة طرق تعيين أو التعبير عن فراغ العينة كمجموعة، وكذلك مختلف أنواعه نظرا لصعوبة سرد جميع عناصره في كثير من الحالات.

2-2- الحـــوادث:

توجد عدة أنواع من الحوادث، نذكرها بنوع من التفصيل بالإضافة إلى التعبير الرياضي وباستخدام العمليات على المجموعات فيما يلي:

2-2-1- الحوادث البسيطة (الإبتدائية):

تسمى عناصر المجموعة الأصلية بالأحداث العنصرية أو الحوادث الأولية (الابتدائية أو البسيطة)، ومما تجدر الإشارة إليه أن التجربة العشوائية لا تحقق إلا حدثا عنصريا واحدا.

وكذلك نقول أن الحادث ω_i أنه حادث بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة أي هو بمثابة مجموعة جزئية من فراغ إمكانيات التجربة العشوائية ذات إمكانية (عنصر) وحيدة.

فعند رمي زهرة نرد مرة واحدة مثلا فظهور الرقم 2 هو حدث بسيط ولا يمكن أن نرى وجهين مختلفين يظهران أعلاها في نفس الوقت. وكذلك لا يمكن أن يكون الطلبة الذي ن تحصلوا على المعدل في فوج معين هو 30 و32 في آن واحد[5].

2-2-2- الحوادث المركبة:

نقول عن الحادث ω_i أنه حادث مركب إذا أمكن تفكيكه إلى حوادث أبسط، وكذلك يسمى حدث مركب إذا وجد جملة أحداث عنصرية بحيث وقوع أي منها يعني وقوعه كذلك[6].

فمثلا عند رمي زهرة نرد مرة واحدة فالحدث ظهور رقم فردي هو حدث مركب يتكون من ثلاثة حوادث بسيطة ونعبر عنه:

$$\omega_i = \{1, 2, 5\}$$

وكذلك الحوادث التالية هي حوادث مركبة في هذه التجربة:

- ظهور رقم أقل من 3.
- ظهور رقم من مضاعفات 2.
- ظهور رقم زوجي.

2-2-3- الحادث الأكيد:

نقول عن الحادث ω_i أنه حدث أكيد إذا كان تحققه مؤكدا بنتيجة التجربة E وبالتالي فهو حادث يحوي جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بهذه التجربة ونرمز له بالرمز Ω.

- **مثال:** في تجربة إلقاء زهرة نرد، الحدث الذي يعبر عن ظهور العدد أقل من سبعة هو حدث أكيد.

كذلك إن حصولنا على أحد الأوجه الستة بإلقاء نرد في الهواء هو أمر محقق بالتأكيد في كل رمية.

2-2-4- الحادث المستحيل:

نقول عن الحادث ω_i أنه حدث مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق أبدا نتيجة التجربة E وبالتالي فهو حادث لا يتضمن أي من الحوادث الأولية المرتبطة بهذه التجربة ونرمز له بالرمز Ø.

- **مثال:** في تجربة إلقاء نرد فإن الحدث ظهور الرقم 8 هو حدث مستحيل لأن هذا الرقم لا ينتمي أصلا إلى فراغ العينة الخاص بهذه التجربة وبالتالي لا يمكن أن يقع، على الإطلاق.

2-2-5- الحدث المتمم (المعاكس):

لكل حدث A مرتبط بالتجربة E متمم يتكون من مجموعة الإمكانيات غير المحققة لـ A والمرتبطة بـ E، هذا الحدث الجديد نرمز له بالرمز C_A أو $\bar{A}$ ونقرأ: متممة الحدث A ونكتب رياضيا:

$$\bar{A} = \{\omega_i \in \Omega;\ \omega_i \notin A\} = \Omega - A$$

ونلاحظ أن: متممة الحادث الأكيد هي الحدث المستحيل والعكس صحيح:

$$\bar{\Omega} = \phi\ ;\quad \bar{\phi} = \Omega$$

- **مثال:** في تجربة إلقاء النرد، فإنه إذا إعتبرنا أن الحدث A الحصول على عدد زوجي نعني بذلك ظهور أحد الأرقام 2 أو 4 أو 6. فمتمم هذا الحدث هو الحصول على أحد الأرقام 1 أو 3 أو 5، أي بإختصار هو الحدث $\bar{A}$: ظهور رقم فردي.

$$A = \{2, 4, 6\} \Longrightarrow\ \bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

2-2-6- الحوادث المتقاطعة وغير المتقاطعة:

- ليكن A وB حادثين مرتبطين بتجربة عشوائية E، نعرف تقاطع الحدثين A وB بتلك الحوادث الأولية ω_i التي تنتمي إلى فراغ العينة، وكذلك تنتمي إلى الحدث A والحدث B في نفس الوقت. أي أن:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega :\ \omega \in A\ \wedge\ \omega \in B\ \}$$

- ويمكن تعميم هذا من أجل متتالية من الحوادث المنتهية أو القابلة للعد $A_1, A_2, \ldots, A_3$ والمرتبطة بتجربة عشوائية E كما يلي:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega: \omega \in A_1 \wedge\ \omega \in A_2 \wedge \ldots \wedge\ \omega \in A_n\}$$

- ونقول عن الحدثين A وB أنهما غير متقاطعين أو متنافين إذا كان:

$$A \cap B = \phi$$

أي أن الحدثين منفصلان تماما عن بعضهما.

- ويمكن تعميم هذا من أجل متتالية من الحوادث المنتهية أو القابلة للعد $A_n, \ldots, A_2, A_1$ والمرتبطة بتجربة عشوائية E كما يلي:

$$\forall\ i \neq j\ \ ;\ \ A_i \cap A_j = \phi$$

3- طرق تعيين الإحتمالات.

إن خصائص فضاء العينة (المحدود أو غير المحدود) وكذا خصائص الحوادث المرتبطة به (سواء في حالة تساوي فرص الظهور أو لا) يحتم سلوك عدة طرق لتعيين الإحتمال المناسب وحسب الخصائص المتوفرة.

3-1- الطريقة التقليدية (اللابلاسية):

لنفترض أنه يطلب منا إعطاء إحتمالات الحوادث الأولية لتجربة إحتمالية E، وفراغ الحوادث الأولية Ω المرتبط بها يتضمن عددا منتهيا من الحوادث ω ، أي أن $\Omega = \{\omega_i;\ i: \overline{1-n}\}$.

في بعض الحالات يمكن إعتبار أن كل الحوادث الأولية ω من الفراغ Ω متساوية الإمكانية في الظهور، وبالتالي لا يتمتع أي حادث أولي ω_i بأفضلية موضوعية عن الحوادث الأولية الأخرى من حيث الوقوع أو عدم الوقوع. ونسمي هذه الخاصية **تساوي الإحتمالات للحوادث الأولية**[7].

- **كمثال على ذلك:** في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية متناظرة ومتجانسة يكون فراغ الحوادث الأولية يحوي إما ظهور الرقم أو الصورة $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. فإنه وبسبب تناظر وتجانس قطعة النقود لا يوجد أي من الوجهين يمتاز بأفضلية على الآخر، من حيث الظهور أو عدمه. وبالتالي يمكن إعتبار الحادثين الأوليين:

ω_1: ظهور الصورة، ω_2 : ظهور الرقم، متساويي الإمكانية (لهما نفس فرصة أو حظ الظهور).

ونلخص الشئ نفسه في حالة إلقاء حجر نرد متوازن (متناظر ومتجانس)، ونكتب فضاء الحوادث الأولية بالشكل التالي:

$$\Omega = \{\omega_i; i: \overline{1-6}\}$$

إذن أصلي المجموعة Ω في هذه الحالة هو 6.

بما أن حجر الزهر متوازن، فيمكن منطقيا إعتبار الحوادث الأولية ω_i متساوية الإمكانية للظهور، أي أن إمكانية حصولنا على عدد معين من النقاط يساوي إمكانية حصولنا على أي عدد آخر منها.

- **بصفة عامة:** ليكن Ω فراغ الحوادث الأولية المنتهي (المحدود) والمرتبط بتجربة إحتمالية (عشوائية) E. إذا اعتبرنا أن الحوادث الأولية $\omega \in \Omega$ متساوية الإمكانية، فإن كل حادث أولي $\omega_i \in \Omega; i: \overline{1-n}$، يمكن وضعه مقابلا لنفس قيمة الإحتمال وهو $1/n$ ، أي أن:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

تدعى هذه الطريقة لإعطاء الإحتمالات بالطريقة التقليدية أو طريقة لابلاس. ونكتب بإختصار:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n};\ \omega_i \in \Omega$$

وأن إحتمال أي حادث A، يتكون من مجموعة من الحوادث الأولية ω ، $A = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\}$ يمكن حسابه كما يلي:

$$P(A) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \cup \{\omega_m\}) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{m}{n} = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}$$

حيث $\eta(A)$ يدعى أصلي A (عدد عناصر A)، و $\eta(\Omega)$ هو أصلي فراغ الحوادث الأولية.

من الملاحظ أن إحتمال الحادث A يتناسب مع عدد عناصره طرديا. ونكتب القانون التقليدي لحساب الإحتمال لحدث ما A، كما يلي[8]:

$$\text{إحتمال الحادث } A = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

أو:

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}$$

- **مثال:**

لنحسب مثلا إحتمال ظهور الحدث A والذي يمثل ظهور عدد زوجي من النقاط عند إلقاء حجر زهر متناظر مرة واحدة. حيث يكون فراغ الحوادث الأولية هو: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

والحادث A هو : $A = \{2, 4, 6\}$

وبإعتبار أن كل الحوادث الأولية متساوية الإمكانية بناءا على تناظر الحجر، فتعطى إحتمالاتها كما يلي:

$$P(\omega = 1) = P(\omega = 2) = \cdots = P(\omega = 6) = \frac{1}{6}$$

لدينا هنا $\eta(A) = 3$ و $\eta(\Omega) = 6$ ومنه إحتمال وقوع الحادث A هو:

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

تجدر الإشارة إلى أنه تم تطبيق هذا القانون نظرا لتساوي إمكانيات ظهور الحوادث الأولية ω، والتي تكون بطبيعة الحال متنافية فيما بينها.

- **أهمية أساليب العد هنا:**

في التعريف التقليدي للإحتمال ولقياس إحتمال أي حدث وليكن A يتوجب علينا معرفة عدد الإمكانيات الكلية (حالات تحققه أو عدم تحققه)، ثم فرز الحالات الملائمة له (أي تلك الحالات التي يتحقق فيها فقط الحادث A). وفي هذا الإطار ولعد هذه الحالات سواء الكلية أو الملائمة يمكن الإستفادة من أساليب العد أو ما يعرف بالتحليل التوافقي والذي تم ذكره سابقا، وكذا نظرية المجموعات.

- **مثال:** في تجربة لعبة "اللوتو" المتمثلة بملئ بطاقة بإختيار ستة ارقام من بين 49 رقما. ما هو إحتمال أن تكون:

أ- الأرقام الستة فائزة (الحادث A) ؟

ب- أربع أرقام فائزة فقط (الحادث B) ؟

إن عدد الحوادث الأولية، عبارة عن عدد الطرق الممكنة لإملاء بطاقة لعبة اللوتو ويساوي عدد التوافيق ذات k=6 عنصر المأخوذة من مجموعة ذات n=49 عنصرا. أي:

$$C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{49}^{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot (6)!} = 1398316$$

أما الحادث A يتألف من عنصر واحد فقط لأنه ذو تشكيلة ذات ستة أرقام وهي الأرقام الفائزة الوحيدة من بين 1398316 تشكيلة. وبالتالي إحتمال الفوز حسب الحادث A:

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)} = \frac{1}{1398316} = 7 \cdot 10^{-7}$$

- أما لتوقع الحادث B وهو فوز 4 أرقام فقط، لابد من إختيار أربعة أرقام من 6 أرقام فائزة، أما باقي الأرقام (رقمين: لأن 4+ **2** =6) يتم إختياره من 43 رقم غير فائز (أي إستبعاد 6 فائزة من 49) وبالتالي عدد الحالات الملائمة لـ B تعطى كما يلي:

$$\eta(B) = C_6^4 \cdot C_{43}^2 = 13545$$

$$P(B) = \frac{\eta(B)}{\eta(\Omega)} = \frac{13545}{1398316} = 0.00096862$$

نلاحظ أن عدد الحالات الكلية لم يتغير نظرا لعدم تغير فراغ العينة.

- **ملاحظة:** إن نظرية الاحتمالات وكما تم ذكره سلفا، إرتبطت في بداية تطورها بألعاب الحظ. لهذا فالطريقة التقليدية لتعيين الاحتمالات إستخدمت في الأساس من أجل بناء نماذج تلك الأنواع من ألعاب الحظ (إلقاء قطعة نقود، إلقاء حجر زهر، ورق لعب ...).

لكن لا يجوز فهم الطريقة التقليدية لتعيين الاحتمالات على أنها تقتصر فقط على حساب الإحتمالات لتلك الحوادث البسيطة فقط، كظهور الصورة أو الرقم عند إلقاء قطعة نقود معدنية. بل لها تطبيقات أخرى عديدة، كإختبار الفرضيات، في حالات عدة تعتمد على التعريف التقليدي للإحتمال. فمثلا في تجربة إلقاء قطعة نقود، إذا كانت فرضية العدم (تناظر قطعة النقود) مقابل (القطعة غير متناظرة) فإن قبول أو رفض فرضية العدم تعتمد على الطريقة التقليدية لتعيين الإحتمالات.

3-2- الطريقة الهندسية لتعيين الإحتمالات:

ليكن الفراغ Ω لتجربة احتمالية E، يتألف من عدد غير منته من الحوادث الأولية ω، أي أن $\eta(\Omega) = \infty$. ولتكن Ω مجموعة محدودة في R^n . سنفترض أن Ω ، وبالتالي الحوادث A_i لها قياس هندسي

منته : حيث القياس الهندسي في R للمجموعة Ω يعتبر طولها، وفي $R2$ يعتبر مساحتها، أما في R^3 حجمها. وهذا القياس قد يكون طولا L ، مساحة G ، أو حجم V.

إن تعيين الإحتمال للحوادث الأولية ω_i بالطريقة التقليدية، ينتج عنه ما يلي:

$$P(\omega) = \frac{1}{\eta(\Omega)} = 0$$

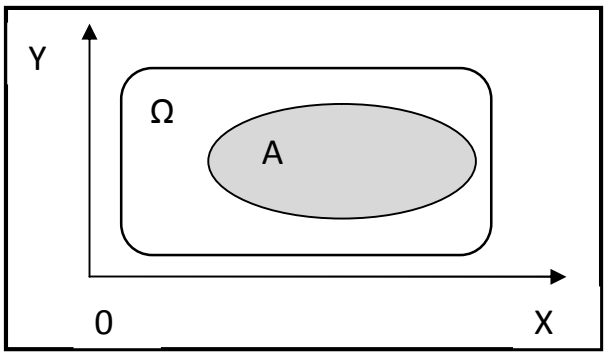
وللخروج من هذه الوضعية نقوم بإيجاد إحتمال مجموعة من الحوادث الأولية ω_i [حادث مركب A] وليس إحتمال كل حادث أولي على حدى. غير أن من الجدير بالذكر التذكير بأنه يجب على القياس الاحتمالي للمجموعة الشاملة (فراغ العينة) Ω يجب أن يحقق مسلمات الإحتمال (يساوي الواحد). وأن إحتمال أي حادث يتناسب مع قياس A، وهذا القياس قد يكون طولا l ، مساحة g ، أو حجم v.

ويمكن كتابة صيغة الإحتمال حسب هذه الصيغة كما يلي:

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)} = \frac{A \text{ قياس}}{\Omega \text{ قياس}} = \frac{A \text{ طول}}{\Omega \text{ طول}} = \frac{A \text{ مساحة}}{\Omega \text{ مساحة}} = \frac{A \text{ حجم}}{\Omega \text{ حجم}}$$

من الجدير بالذكر أن الطريقة الهندسية تفترض أيضا أن الحدث يجري بشكل متساو على كامل المنطقة Ω. وكذا الطريقة الهندسية ما هي إلا تعميم للتعريف التقليدي وذلك في بعض الحالات التي يكون فيها فضاء العينة غير محدود.

- **مثال:** لتكن Ω منطقة محدودة في المستوي R^2 ولتكن A منطقة أخرى داخل المنطقة Ω كما يلي:



لنعتبر التجربة العشوائية E تتمثل باختيار نقطة ما m من المنطقة Ω. فما هو احتمال أن تكون النقطة m من المنطقة A ؟

إن النقطة m يمكن أن تكون أية نقطة من Ω . وبالتالي فإن احتمال أن تكون النقطة m من أي منطقة جزئية من Ω يتناسب مع مساحة هذا الجزء ومستقل عن تموضعه وشكله داخل المنطقة Ω. وهكذا فإن احتمال أن تكون m من المنطقة A يساوي :

$$P(A) = \frac{A \text{ مساحة}}{\Omega \text{ مساحة}} = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)} = \frac{g}{G}$$

خصوصية هذه الطريقة هي أنها تعتمد على القياسات الهندسية وتفترض أن يكون لأي حدث (A) من المجموعة الشاملة Ω قياس هندسي منته (طول منته، مساحة منتهية، حجم منته، ...) في الفراغ R^n، كما تفترض أن الحدث يجري نشكل متساو على كامل المنطقة Ω.

مما سبق نرى بأن التعريف الهندسي للإحتمال ما هو إلا تعميم للتعريف التقليدي للإحتمال على بعض الحالات التي يكون فيها فراغ الحوادث الأولية غير منته[9].

- **مثال:**

لتكن لدينا التجربة العشوائية E، المتمثلة في إختيار نقطة لا على التعيين من المجال نصف المغلق $]0\ ،\ 1[$، عندها يكون $\Omega =]0\ ،\ 1[$. لنضع احتمال وقوع النقطة في المجال $]a\ ،\ b[$ حيث $]a, b[\subset]0, 1[$ يساوي *(b-a)*: وبسهولة يمكن إثبات أنه إذا كان $P([a,b]) = b - a$ أنها تحقق مسلمات الاحتمال:

(1) $0 \leq P([a,b]) \leq 1$

(2) $P([0,1]) = 1$

(3) من أجل أي عدد من المجالات الجزئية غير المتقاطعة فإن:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i[\right) \subset [0,1[$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i[\right) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$$

- **مثال:** أخذنا عددان لا على التعيين من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، بحيث كل عدد لا يتجاوز الواحد. ماهو احتمال أن يكون مجموعهما لا يتجاوز 1، وجدائهما لا يزيد عن $2/9$.

- **الحل:** نرمز لهذين العددين بالرمز x وy، فإن القيم الممكنة لهما هي:

$$0 \leq x \leq 1\ ,\ \ 0 \leq y \leq 1$$

أي أن فراغ العينة هو:

$$\Omega = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1\ , 0 \leq y \leq 1\}$$

وهذا يقابل في المستوي مربعا مساحته $\mu(\Omega) = G = 1$ ، والنقاط (x,y) التي تحقق الشرطين :

$$x \cdot y \leq \frac{2}{9}\ ,\qquad x + y \leq 1$$

تعين لنا حادث A.

فيكون المطلوب هو إيجاد إحتمال الحادث A.

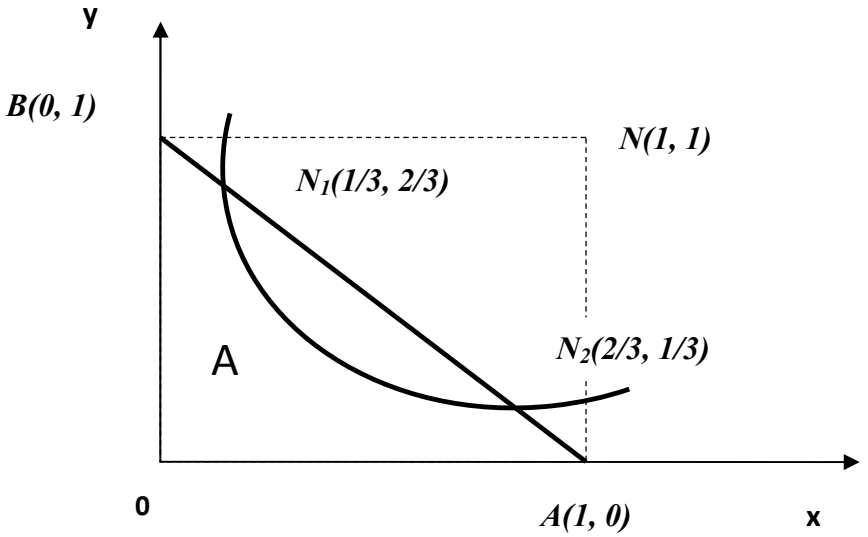
إن الحد $x + y = 1$ يقسم المربع المذكور إلى نصفين بحيث أن : $x + y \leq 1$ تمثل المثلث الأسفل.

والحد الثاني $x \cdot y = \frac{2}{9}$ يمثل قطعا زائدا، وفاصلتا نقطتي تقاطع هذين الحدين هما : $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$،

ونتج هذا عن طريق حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x \cdot y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

إن مساحة الحدث A يمكن توضيحها من خلال الشكل التالي:



إذن مساحة A:

$$\mu(A) = g = \frac{1}{3} + \int_{1/3}^{2/3} y\, dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} log(2) = 0.487$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} = \frac{g}{G} = \frac{0.487}{1} = 0.487$$

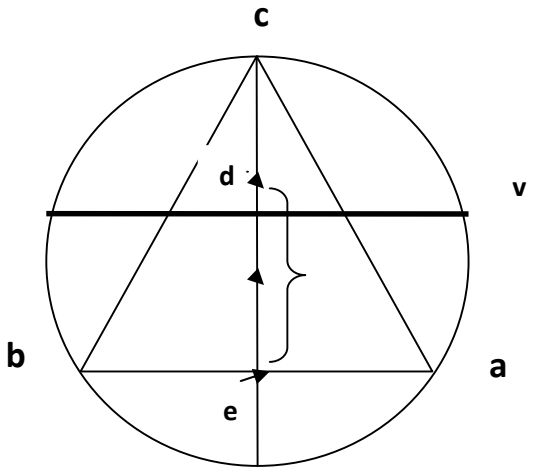
- **نقد الطريقة الهندسية:**

تجدر الإشارة إلى أن الطريقة الهندسية لتعيين الاحتمالات تعرضت للنقد، بسبب وجود إمكانات متعددة لمعالجة بعض مسائل الإحتمال الهندسي تؤدي إلى نتائج مختلفة. وقد توصل العديد من العلماء إلى إثبات أن الاحتمال الهندسي لا يمكن أن يكون، من الناحية الموضوعية مستقلا عن الطرق المتبعة في حل المسألة المفروضة. وأوضح

ذلك جليا العالم الفرنسي "جوزيف بيرتران" في عدد من مسائل الإحتمال الهندسي التي تعتمد نتائجها على طرق المعالجة في الحل. في هذا الإطار نورد إحدى المسائل الشهيرة التي عالجها العالم بيرتران والمتمثلة فيما يلي:

في تجربة إختيار عشوائي لوتر في دائرة نصف قطرها R. فما هو احتمال ان يكون طول هذا الوتر يزيد على طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع المرسوم داخل دائرة ؟

(1) **الطريقة الأولى:** بناءا على التناظر يمكن مسبقا تحديد اتجاه الوتر وليكن v. نرسم قطر الدائرة المتعامد مع v. ونرسم أيضا داخل الدائرة مثلثا متساوي الأضلاع أحد أضلاعه يوازي v، ونرمز لهذا المثلث abc ، كما يبدو في الشكل الموالي:

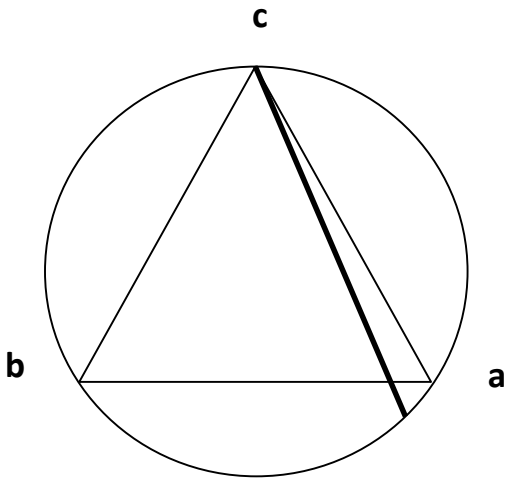


يقطع قطر الدائرة المرسوم الضلع ab في منتصفه لأن v//ab ونرمز لهذا المنتصف بـ e. وينقسم القطر بهذه النقطة بنسبة ربع إلى ثلاثة أرباع. إذا رمزنا ب d للنقطة التي تقسم قطر الدائرة المرسوم بنسبة ربع إلى ثلاثة ارباع من الطرف الاخر، فإن طور وتر الدائرة الموازي لـv يزيد على طول ضلع المثلث المتساوي الاضلاع، إذا وقع منتصفه بين النقطتين e وd، أي أن نقاط القطعة المستقيمة [de] تمثل الحالات الموافقة أو الملائمة لهذا الحدث، بينما نقاط قطر الدائرة تمثل الحالات الممكنة أو الكلية. ومنه يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P=1/2=0.5$$

(2) **الطريقة الثانية:** يمكن بسبب التناظر إعتبار الرأس c أحد طرفي الوتر المختار، وأن موضع الطرف الثاني هو الذي يحدد طول الوتر، كما في الشكل الموالي، إذا وقع الطرف الثاني للوتر المختار على القوس الصغير ab من الدائرة فإن طول الوتر يزيد على طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع. أي أن نقاط القوس الصغير ab تمثل الحالات الموافقة، بينما نقاط محيط الدائرة تمثل الحالات الممكنة، وبالتالي:

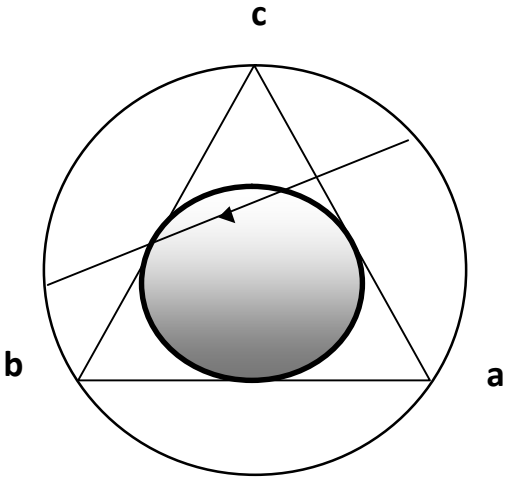
$$P=1/3=0.33$$



(**3**) **الطريقة الثالثة:** يتعين طول الوتر في دائرة بمعرفة منتصفه. إذا وقعت نقطة المنتصف داخل الدائرة المماسة داخليا لأضلاع المثلث المتساوي الأضلاع، فإن الوتر المعين بنقطة المنتصف هذه يزيد على طول ضلع المثلث. أي أن نقاط الدائرة (القرص) تمثل الحالات الممكنة، أما الحالات الملائمة فتمثلها نقاط قرص الدائرة الداخلية، عندئذ يكون الاحتمال المطلوب هو:

الاحتمال = مساحة الدائرة الصغيرة مقسوما على مساحة الدائرة الكبيرة[10].

$$P = \frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$



3-3- الطريقة الإحصائية (الإستقرائية أو التجريبية) لتعيين الإحتمالات:

في الواقع ليس معلوما دائما عدد الحوادث الأولية لفراغ العينة Ω، فمثلا ما عدد مرات إلقاء قطعة نقود معدنية حتى نحصل على الصورة للمرة الأولى، وما عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتف معين خلال فترة زمنية t ؟

هذا بالإضافة إلى إن شرط الإمكانية المتساوية لوقوع الحوادث الأولية غير متوفر في أغلب مسائل الحياة الواقعية. فمثلا، لا يمكن الاعتماد على صفة الإمكانية المتساوية للإجابة على أسئلة مثل: ما هو احتمال ان يكون مولود في مدينة ما ذكرا ؟ أو ما هو احتمال أن رجلا معينا سيموت قبل سن السبعين ؟ أو ما هو احتمال أن يكون عدد حوادث المرور في مدينة قسنطينة خلال عطلة رأس السنة أقل من 10 ؟ أو ما هو احتمال احتراق مصباح كهربائي قبل أن يتم 200 ساعة إضاءة ؟ وغيرها من الأسئلة المشابهة.

كما أنه ليس معلوما دائما القياس الهندسي للحوادث، فمثلا في تجربة توزيع أعمار الأزواج، فإن Ω وA : الزوج تجاوز الأربعين من العمر. ليس لهما قياس هندسي منته.

هكذا يتبين مما سبق أن من الصعوبة بمكان، يل من المستحيل في كثير من المسائل، وخاصة ذات الطابع الحيوي (البيولوجي) أو التقني، أن نحدد مسبقا (بدون تجريب) احتمال حدث ما اعتمادا على التعريف التقليدي أو الهندسي للاحتمال. ولإيجاد مثل هذا النوع من الاحتمال يستخدما المدخل التجريبي، وبالتالي الاحتمال الإحصائي[11].

- **مثال:** إفترض أننا حصلنا في 100 رمية لقطعة نقد متوازنة على 53 صورة، و47 رقم، يكون التكرار النسبي لضهور الصورة هو 0.53، أما لظهور الرقم هو 0.47 وهو يعبر عن مفهوم الإحتمال التجريبي، في حين أن الإحتمال التقليدي (المسبق) يحدد كما رأينا سابقا بـ 0.5 لكلا الوجهين نظرا لتوازن القطعة النقدية، ومما تجدر الإشارة إليه أنه عند إقتراب عدد الرميات من المالانهاية فإن التكرار النسبي أو الإحتمال التجريبي يقترب من الإحتمال التقليدي أي يؤول إليه. فمثلا إذا رمينا 1000 رمية تكون نسبة ظهور الصورة 0.517 ونسبة ظهور الرقم 0.483 وهكذا كلما ارتفع التجريب كلما اقتربت النسبة من 0.5.

أما إذا كانت القطعة النقدية غير متوازنة فالنسبتين تقتربان من عددين آخرين غير 0.5 يكون هو الإحتمال المقابل لكل من ظهور الصورة وظهور الرقم.

4- مسلمات ودساتير الإحتمالات

4-1- مسلمات الاحتمال:

إذا كانت E تجربة عشوائية، A_i حوادث شاملة (إتحادها يعطى المجموعة الشاملة) متنافية مثنى مثنى (غير متقاطعة) من هذه التجربة فإن:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad si \quad A \cap B = \emptyset$

4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

- **ملاحظات:**
  - المسلمة الثالثة يمكن استنتاج منها حالة عدم تنافي المجموعات بالرجوع إلى نظرية المجموعات.
  - المسلمة الرابعة إذا كانت الحوادث منتهية فهي لا تضيف شيئا للمسلة الثالثة، غير أنها هنا تخص حالة الحوادث غير المنتهية[12].

4-2- دساتير الإحتمالات:

نتطرق إلى أهم دستورين متعلقين بالعمليات الأساسية في الرياضيات وهما الجمع والجداء، حيث يكون تطبيقهما بتوفر حدثين على الأقل كما يلي[13]:

4-2-1- جمع الإحتمالات

إذا كان A و B حدثان إعتباطيان (قد يكونان غير متنافيان) فإن :

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **تعميم "هنري بوانكاري** *Poincarè H.*" من أجل مجموعة حوادث إعتباطية[14]:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq i} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} \left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \cdots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

- ويمكن كتابة تعميم "بوانكاري" لأي تسلسل محدود من الأحداث A_i بصيغة أخرى مكافئة للسابقة[15]:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

حيث :

$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$: يعني مجموع كل المجموعات الفرعية من $\{1, \ldots, n\}$ ذات الحجم k.

- **مثال:** من أجل n=3 وبالتعويض في إحدى الصيغتين السابقتين نجد:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

4-2-2- جداء الإحتمالات

- إذا كان A و B حدثان فإن: (الحالة العامة أي مرتبطان أو مستقلان)

$$P(A \times B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

- إذا كان A و B مستقلان فإن $P(B/A) = P(B)$ وبالتالي يصبح[16]:

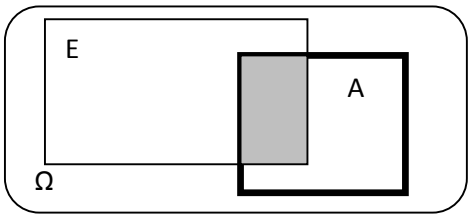
$$P(A \times B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

4-3- الإحتمالات الشرطية:

نفرض أن E حدث إختياري في فضاء العينة Ω بحيث $P(E) > 0$. بعرف إحتمال وقوع الحدث A بفرض أن E قد وقع أو بعبارة أخرى الإحتمال المشروط للحدث A عند وقوع E (ويكتب A/E) كمايلي[17] :

$$P\left(A/_E\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

وكما نرى من الشكل الموالي فإن إحتمال وقوع الحدث A بشرط أن E قد وقع يقيس بصورة ما الإحتمال النسبي للحدث A بالنسبة إلى الفضاء المختزل E.



- **مثال:**

في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة. أوجد إحتمال أن يكون الرقم الظاهر هو 2 علما أن العدد الظاهر كان زوجيا؟

- **الحل:** نسمي الحدث F ظهور العدد زوجي، والحدث A ظهور الرقم 2 يكون:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(\{2\},\{4\},\{6\}) = 3/6$$
$$P(A \cap E) = P(\{2\}) = 1/6$$
$$P\left(A/_E\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{1/_6}{3/_6} = \frac{1}{3}$$

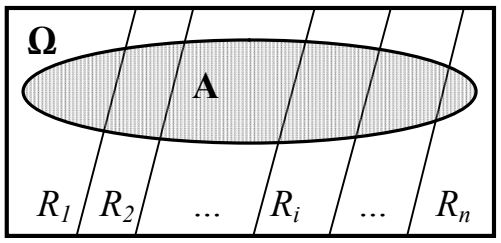
4-4- الإحتمالات الكلية (الشاملة):

إذا كانت Ω مجموعة شاملة كما في الرسم المقابل وقسمت المجموعة Ω إلى أجزاء غير خالية؛

حيث: $\mathrm{R_1 U R_2 U \dots U R_n} = \Omega$ و $R_i \cap R_j = \emptyset \ ; \ (i \neq j)$

وكان Aحدثا محتوى في المجموعة الشاملة Ω ، فإن حساب إحتمال A (المساحة المضللة) يعطى بالعلاقة التالية[18]:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(R_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \left(P(R_i) \times P(A/R_i)\right)$$



4-5- الإحتمالات السببية (دستور بايز):

بالعودة إلى التمثيل السابق وبإعتبار أن R_k حدثا من المجموعة الشاملة Ω ويحقق خصائص الحوادث Ai ، فإحتمال أن يكون R_k هو المسبب للحدث A يمكن إستنتاجه كما يلي:

$$P(R_k/A) = \frac{P(R_k \cap A)}{P(A)}$$

بتعويض صيغة P(A)، ونجد:

$$P(R_k/A) = \frac{P(R_k) \times P(A/R_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left(P(R_i) \times P(A/R_i)\right)}$$

إن هذه الصيغة تدعي **دستور بايز** [19].

- **مثال:** في إحدى الجامعات وجد أن 4% من الرجال و1% من النساء أطول من 1.8 متر، وأن 60% من الطلبة نساء. إختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية فوجد أنه أطول من 1.8 متر. ما هو إحتمال أن تكون إمرأة ؟
- **الحل:** نسمي الحدث A طول الطالب (سواء ذكر أو أنثى) أكبر من 1.8 متر والحدث R_1 الطالب المختار ذكر والحدث R_2 الطالب المختار أنثى.

$$P\left({}^{R_2}/_{A}\right) = \frac{P(R_2) \times P\left({}^{A}/_{R_2}\right)}{\sum_{i=1}^{2}\left(P(R_i) \times P\left({}^{A}/_{R_i}\right)\right)} = \frac{0.4 \times 0.01}{0.6 \times 0.04 + 0.4 \times 0.01} = 0.028$$

تمارين

- **التمرين 01** : ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية. أوجد فراغ الحوادث الأولية والحوادث التالية :

A: ظهور صورة واحدة على الأقل.

B: ظهور صورتين ورقم.

C: ظهور رقمين على الأكثر.

- **التمرين 02** : تتألف تجربة من رمي حجر نرد مرة واحدة. والمطلوب إيجاد الحوادث التالية:

A: الحصول على عدد زوجي.

B: الحصول على عدد أقل من 5.

C: الحصول على عدد زوجي وأقل من 5.

D: الحصول على عدد فردي.

ثم أوجد:

- **تمرين 03**: تتألف تجربة عشوائية من رمي حجري نرد في آن واحد، والمطلوب إيجاد الحوادث التالية:

A_1: مجموع رقمي الوجهين الظاهرين 7.

A_2: مجموع رقمي الوجهين الظاهرين أكبر من 5.

A_3: مجموع رقمي الوجهين الظاهرين 5 على الأكثر.

A_4: مجموع رقمي الوجهين الظاهرين 7 أو 5 على الأكثر.

A_5: مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 5 أو يختلف عن 7.

- **تمرين 04** : في تجربة تقدير عدد الأشخاص المدخنين من 1200 شخص، إذا كان الحادث A: عدد الدخنين لا يقل عن 400، والحادث B: عدد المدخنين يزيد عن 250 شخص، فأوجد الحوادث التالية:

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}, A - B, B - A, A \cup B, A \cap B$$

- **تمرين 05**: في تجربة رمي قطعة نقود معدنية مرتين متتاليتين. إذا كانت الحوادث التالية:

A: ظهور الرقم مرة واحدة.

B: ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

C: ظهور الرقم في الرميتين.

D: ظهور الصورة في الرميتين.

المطلوب: بين الحوادث المتنافية وغير المتنافية.

- **تمرين 07**: في تجربة إلقاء قطعة نقود أولا ثم حجر زهر "نرد" ، وإذا كانت الحوادث A_i، معرفة كمايلي:

A_1: ظهور الرقم مرة واحدة.

A_2: ظهور الصورة مرة واحدة.

A_3: ظهور الرقم وعدد فردي.

A_4: ظهور الرقم والعدد 3.

A_5: ظهور الصورة وعدد أصغر من 3.

A_6: ظهور الرقم وعدد أقل من 5.

المطلوب: أوجد ما يلي:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1 \cap A_2, A_1 - A_2, A_1 \cap A_3,$$
$$A_3 - A_4, A_4 \cup A_5, A_2 - A_5, A_2 \cap A_5, A_3 \cap A_4, A_3 \Delta A_6.$$

- **تمرين 08**: في تجربة مفروضة E . إذا كان الحادثان A و B متساويين، هل يمكن إعتبار أن الحادثين A و $\overline{A \cup B}$ متنافيان؟

- **تمرين 09**: إذا كان A و B حادثين مرتبطين بتجربة مفروضة E. برهن على صحة العلاقات التالية:

1. $A \cup B = \big(B - (A \cap B)\big) \cup A$
2. $A \cap \big(B - (A \cap B)\big) = \emptyset$
3. $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$

- **تمرين 10**: لتكن E تجربة عشوائية بها خمسة نتائج ممكنة وهي:

e_1, e_2, e_3, e_4, e_5

ولدينا الإحتمالات التالية:

$P(e_1)=1/8$, $P(e_2)=3/8$, $P(e_4)=1/4$, $P(e_5)=1/8$

1- أحسب $P(e_3)$.

2-ليكن الحدثين: $A=\{e_1, e_3\}$ و $B=\{e_2, e_4\}$

أحسب ما يلي: $P(A \cap B)$ ، $P(AUB)$ ، $P(A)$.

- **تمرين 11**: في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية متزنة ثلاثة مرات متتالية:

1-أرسم شجرة الحوادث الكلية الممكنة، ثم إستنتج فراغ الحوادث الكلية.

2-أوجد الحوادث التالية ثم أحسب إحتمال وقوعها:

A_1 الحصول على 3 صور، A_2 الحصول على صورتين وكتابة، A_3 الحصول على صورة وكتابتين، A_4 الحصول على 3 كتابات، A_5 الحصول على صورة واحدة على الأقل، A_6 الحصول على كتابتين على الأكثر.

- **تمرين 12**: في تجربة إلقاء حجر نرد متجانس ومتماثل مرتان متتاليتان:

1- أوجد فراغ العينة مستعينا بجدول مناسب.

2- أوجد الأحداث التالية، ثم أحسب إحتمال وقوعها:

A: الحصول على وجهين مجموعهما 10.

B: الحصول على وجهين مجموعهما 8.

C: الحصول على وجهين مجموعهما لا يقل عن 8.

أوجد الحدثينAUB و AUC ثم أحسب إحتمالهما.

- **تمرين 13**: ليكن الحدث A بالعائلة أطفال من النوعين، والحدث B بالعائلة ولد واحد على الأكثر.

1- أثبت أن الحدثين A وB مستقلان، إذا كان بالعائلة ثلاثة أطفال.

أثبت أن الحدثين A وB مرتبطان (غير مستقلان)، إذا كان بالعائلة طفلان.

- **تمرين 14**: ليكن لدينا المستوي $(0, x, y)$ حيث:

$0 \leq x \leq 4$ و $0 \leq y \leq 4$ المطلوب ايجاد:

1- الحدث A حيث: $A: x + y \geq 3$

2- الحدث B حيث: $B: x + y \leq 6$

احسب : $P(A \cap B)$ ، $P(AUB)$ ، $P(B)$ ، $P(A)$.

- **تمرين 15**: إختيرت ثلاثة مصابيح كهربائية بطريقة عشوائية، من بين 15 مصباح كهربائي، منها 5 مصابيح معيبة، أحسب الإحتمالات التالية:

1- جميعها سليمة.

2- واحد فقط معيب.

3- واحد على الأقل معيب –بطريقتين مختلفتين–.

- **تمرين 16**: في أحد كليات الإقتصاد وجد أنه 25% من الطلبة تفوقوا في مقياس الإقتصاد الجزئي و40% تفوقوا في الإحصاء و20% تفوقوا في المقياسين معا.

فإذا إختير طالب بطريقة عشوائية أوجد الإحتمالات التالية:

1- أن يكون الطالب قد تفوق في الإقتصاد الجزئي علما أنه متفوق في الإحصاء.

2- أن يكون الطالب متفوقا في الإقتصاد الجزئي أو الإحصاء.

3- أن يكون قد تفوق في الإحصاء إذا علمنا أنه رسب في الإقتصاد الجزئي.

رسوب الطالب في الإقتصاد الجزئي شرط رسوبه في الإحصاء.

- **تمرين 17**: يوجد بمصنع أربع آلات إنتاجية: M_1, M_2, M_3, M_4 تنتج هذه الآلات نوع معين من قطع الغيار، حيث أن نسبة إنتاج هذه الآلات هي: M_1 :25%, M_4 :20%, M_3 :27%, M_2 :28%.

خلال عملية الإنتاج وجد أنه 1% من إنتاج الآلة M_1 غير صالح، بينما الإنتاج الصالح للآلات M_2، M_3، M_4، فيقدر بـ 98.8%، 98%، 99.5%، على الترتيب.

نسحب عشوائيا قطعة غيار واحدة من إنتاج المصنع، فما هو إحتمال أن تكون غير صالحة ؟

- **تمرين 18**: في مصنع للأجهزة الالكترونية 30% من أجهزة التحكم عن بعد يتم تركيبها من طرف خبير ذو كفاءة عالية، و70% يتم تركيبها من طرف خبير ذو كفاءة متوسطة. إحتمال السير الحسن لأي جهاز يساوي 0.9 إذا كان قد تم تركيبه من طرف الخبير ذو الكفاء العالية، و0.8 إذا تم تركيبه من طرف الخبير ذو الكفاءة المتوسطة.

إذا تم سحب جهاز بطريقة عشوائية وظهر أنه يسير بصفة حسنة:

1- أحسب إحتمال أن يكون تركيبه قد تم من طرف الخبير ذو الكفاءة العالية.

2- أحسب إحتمال أن يكون تركيبه قد تم من طرف الخبير ذو الكفاءة المتوسطة.

- **مراجع وإحالات الفصل الأول:**

[1] عبد الحفيظ مصطفى "نظرية الاحتمالات: مبادئ وتطبيقات" الجزء 1، د. م. ج.، ط 2، 2008، الجزائر، ص4.

[2] المرجع السابق، ص 3.

[3] تم الاستعانة في توليد النقاط العشوائية لهذه التجربة بالموقع الإحصائي (2017/04/26):
http://students.brown.edu/seeing-theory/basic-probability/index.html#first

[4] موراي شبيجل، جون شيلر، ألو سرينيقاسان "الاحتمالات والاحصاء" سلسلة ملخصات شوم إيزي، ترجمة: محمود علي ابو النصر، مصطفى جلال مصطفى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، ط1، 2004، مصر، ص 8.

[5] المرجع السابق، ص10.

[6] حامد الشمرتي، مؤيد الفضل 'الأساليب الإحصائي في اتخاذ القرار" دار مجدلاوي، الأردن، ص 303.

[7] رأفت رياض رزق الله "مباديء الاحتمالات" ج. 1، المكتبة الأكاديمية، مصر، ص 107.

[8] عبد الحفيظ مصطفى، مرجع سابق، ص 73.

[9] المرجع السابق، ص-ص 81-86.

[10] المرجع السابق، ص-ص 87-90.

[11] المرجع السابق، ص91.

[12] سيمور ليبشتز "نظريات ومسائل في الإحتمالات" سلسلة ملخصات شوم، ترجمة: عبد العظيم أنيس، الدار الدولية للنشر والتوزيع، ط 2، 2000، مصر، 28.

[13] موراي شبيجل، وآخرون، سبق ذكره، ص-ص 13-15.

[14] HWEI P. H. « Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes » schaum's outline series, McGRAW-HILL, 1996, USA, P 6.

[15] LIM N. « Probability » [on line] 03/12/2017 :
https://www.stat.washington.edu/~nehemyl/pages/stat-math394.html

[16] FREDON D.,MAUMY-BERTRAND M., BERTRAND F., « Mathématiques : *statistique et probabilités* » Dunod, 2009, Paris, P 39

[17] عبد الحفيظ مصطفى، مرجع سابق، ص 112.

[18] BOGAERT P. « Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs » Edition de boeck, 2006, Belgique, P 28.

[19] دلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي "الإحصاء للإداريين والإقتصاديين" دار الحامد، 2003، الأردن، ص 166.

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية

وقوانين توزيعها

تمهيد

فيما سبق رأينا المبادئ الأساسية لحساب الإحتمال، وكان تحديد فراغ الحوادث الأولية أحد أهم الركائز الأساسية لتعيين إحتمال أي حدث ناتج من التجربة العشوائية المعنية، إن التحول من مجموعة فراغ العينة نحو مجموعة أخرى تقابلها محتواة في مجموعة الأعداد الحقيقية كتطبيق رياضي يعبر عن المفهوم العام للمتغير العشوائي، هذا ما يساعد في إيجاد قوانين للتوزيعات الإحتمالية إما في شكل جداول أو في شكل دوال رياضية تحقق شروط معينة لكي تعبر عن قانون توزيع إحتمالات، الأمر الذي يختصر الطريق ويلخص محتوى التجربة العشوائية، من جهة أخرى تعتبر بعض التجارب العشوائية متشابهة في الأصل وتكوِن مجموعة من قوانين للتوزيعات الإحتمالية المحددة من قبل مكتشفيها، تجعل من عملية البحث عن الإحتمال ومختلف الخصائص العددية للمتغير العشوائي المعني أكثر بساطة وهذا ما نبينه في قوانين التوزيعات الإحتمالية الشهيرة في الفصلين الأخيرين، وذلك بنوعيها المنفصلة والمتصلة.

1- المتغيرات العشوائية

1-1- مفهوم المتغير العشوائي :

عند إجراء تجربة عشوائية، قد يكون إهتمامنا منصبا على صفة معينة نرصدها عند إجرائها، وكمثال على ذلك عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات قد يكون إهتمامنا منصبا على عدد الصور التي تظهر وبالتالي لا نهتم بالنتيجة التي حصلنا عليها وإنما بعدد الصور التي حصلنا عليها، هذه القيم العددية تأخذ خاصية العشوائية من نتائج هذه التجربة العشوائية بدورها، ونطلق عليها –القيم الناتجة– إسم المتغير العشوائي[1].

- **المتغير العشوائي رياضيا:** هو دالة عددية –تطبيقX – من فضاء العينة Ω نحو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، ويرمز له بأحد الأحرف الإنجليزية الكبيرة مثل : X، Y، Z، ... وهكذا . يرفق بكل عنصر w_i –حدث– من فراغ العينة قيمة x في مجموعة الأعداد الحقيقية ونكتب:

$$X: \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ w_i \mapsto x \end{cases}$$

- **مثال (1):** نلقي قطعة نقود متوازنة، نسمي X متغيرا عشوائيا يمثل ظهور الوجه، إذن فقيم X مرتبطة بالنتائج الظاهرة، فظهور الوجه يعني القيمة 1 وعدم ظهوره –أي ظهور الصورة– تعني القيمة 0.
  - فراغ العينة هو: $\Omega = \{F, P\}$
  - قيم X هي: $X = \{0, 1\}$
- **مثال (2) :** نرمي قطعة نقود معدنية متوازنة مرتين متتاليتين، إذا عرفنا X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور الوجه، فيكون X يأخذ قيما تعبر عن عدم ظهور الوجه، أو ظهوره مرة واحد، أو ظهوره مرتين، وذلك إنطلاقا من فراغ العينة كما يلي:
  - فراغ العينة : $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$
  - قيم X هي: $X = \{0, 1, 2\}$
- **مثال (3):** إذا رمينا زهرة نرد مرة واحدة، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن ظهور عدد فردي، فيكون كمايلي:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$X = \{0, 1\}$$

أي أنه إذا ظهر أحد الأعداد الزوجية فذلك دليل على أخذ القيمة 0، أما إذا كانت النتيجة عددا فرديا فيأخذ المغير العشوائي القيمة 1.

1-2- تصنيف المتغيرات العشوائية:

تنقسم المتغيرات العشوائية إلى صنفين [2]:

أ. **متغير عشوائي متقطع (منفصل)**: حيث يكون مجال تغيره عبارة عن مجموعة قابلة للعد (يأخذ قيما صحيحة)، مثل : عدد الطلبة، عدد السيارات، عدد العلب التالفة، ... الخ .

- **مثال:**

نرمي قطعة نقود معدنية متوازنة مرتين متتاليتين، إذا عرفنا X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور الوجه، فيكون X يأخذ قيما تعبر عن عدم ظهور الوجه، أو ظهوره مرة واحد، أو ظهوره مرتين، وذلك إنطلاقا من فراغ العينة كما يلي:

$$X = \{0, 1, 2\}$$

وهو مثال على المتغيرات العشوائية المتقطعة.

ب. **متغير عشوائي متصل (مستمر)**: حيث يكون مجال تغيره في مجموعة الأعداد الحقيقية (يقبل قيما بالفاصلة) أو بعبارة أخرى مجاله متراص، مثل الطول، الوزن، المساحة، عمر الأفراد، زمن إنتظار الخدمة، ... الخ.

- **مثال:**

بفرض أن درجة الحرارة في ولاية ما خلال شهر أفريل تتراوح بين 16^0 إلى 20^0، إذا تم قياس درجة الحرارة خلال فترات زمنية خلال هذا الشهر في نفس الولاية، وعرفنا X متغيرا عشوائيا يمثل درجة الحرارة المرصودة، فيكون X مثالا عن المتغيرات العشوائية المتصلة ويكون مجال تغيره هو :

$$X \in [16; 20]$$

2- قانون توزيع الإحتمالات

عند تعريف (تحديد) أي متغير عشوائي سواء منفصل أو متصل لتجربة عشوائية ما، يمكن تعريف قانون التوزيع الإحتمالي له، والذي بدوره يعطي تلخيصا جيدا للإحتمالات المقابلة لكل قيم X، وقد يكون جدولا أو دالة رياضية[3].

- **ورياضيا** نعبر عن قانون توزيع الإحتمالات بأنه تطبيق رياضي P –دالة– من مجال تغير المتغير العشوائي X نحو مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 و1، ترفق بكل قيمة من X عددا حقيقيا محصورا بين 0 و 1. ونكتب:

$$P: \begin{cases} X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_{[0,1]} \\ x \mapsto P(x) \end{cases}$$

- **ملاحظة** : إذا كان المتغير العشوائي منفصلا، نسمي قانون توزيعه الإحنمالي، ب**كتلة الإحتمال**. أما إذا كان مستمرا فيسمى قانون التوزيع الإحتمالي ب**كثافة الإحتمال**.

- **مثال:**

أوجد قانون توزيع الإحتمالات للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة في تجربة عشوائية تتمثل في رمي قطعتي نقود متوازنتين.

- فراغ العينة : $\Omega = \{(FF), (FP), (PF), (PP)\}$
- قيم X هي: $X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X = 0) = P(\{PP\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(\{PF\}, \{FP\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(\{FF\}) = \frac{1}{4}$$

- يمكن تلخيص ما سبق في الجدول التالي والذي يعبر عن قانون التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي X:

X	*0*	*1*	*2*	$\sum$
P(X=x)	*1/4*	*1/2*	*1/4*	*1*

- **مميزات قانون توزيع الإحتمالات للمتغير العشوائي المنقطع:**

إذا كان P قانون توزيع إحتمالات للمتغير العشوائي المنقطع X فإنه يحقق الخصائص التالية:

(1) $0 \leq P(X = x) \leq 1, \forall x \in X(\Omega)$

(2) $\sum_{X(\Omega)} P(X = x) = 1$

ملاحظة: يمكن أن يكون قانون توزيع الإحتمالات للمتغير العشوائي المتقطع إما في شكل جدول أو دالة[4].

- **مميزات قانون توزيع الإحتمالات للمتغير العشوائي المستمر:**

إذا كان $f_X(x)$ قانون توزيع إحتمالات للمتغير العشوائي المتصل X، فإنه يحقق مايلي:

(1) $f_X(x) \geq 0, \forall x \in X(\Omega)$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx = 1$

3- المتغير العشوائي المتقطع

3-1- تعريف: يمكن تعريف المتغير العشوائي المتقطع بأنه ذلك المتغير الذي يأخذ قيما صحيحة (قيمه معدودة ومنتهية) وهو نوع أساسي من أنواع المتغيرات الإحصائية الكمية.

- **مثال (1)** : إذا لاحظنا نتيجة رمي زهرة النرد، نجد أن هذه النتيجة قد تكون : 1، 2، 3، 4، 5، 6، فإذا عرفنا X متغيرا عشوائيا يمثل على نتيجة الرمية فإنه يتغير بدوره من 1 إلى 6، وهو يمثل متغيرا عشوائيا متقطعا (منفصلا)
- **مثال (2)** : لو أخذنا عينة عشوائية من الأسر ودرسنا عدد الأفراد في الأسرة، نجد أن عدد الأفراد يتغير من أسرة إلى أخرى، فإذا عرفنا X متغيرا يمثل عدد أفراد الأسرة فإن X يمثل متغيرا عشوائيا متقطعا.

3-2- دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع: نسمي دالة كتلة إحتمال للمتغير العشوائي المتقطع X ونرمز لها بالرمز $P_X(x)$ أو$P(X=x)$، مهما يكن $x \in X(\Omega)$، كل علاقة تربط ما بين قيم المتغير X والإحتمالات المرافقة لها، ويكون ذلك محققا إذا وفقط إذا توفر الشرطين التاليين:

$$(1)\ \ 0 \le P(X=x) \le 1, \forall x \in X(\Omega)$$

$$(2)\ \sum_{X(\Omega)} P(X=x) = 1$$

- **مثال (1)** : صنعت قطعة نقود بحيث إحتمال ظهور الصورة H هو 2/3 ، وإحتمال ظهور الوجه F هو 1/3، أي أن قطعة النقود غير متوازنة، تم رميها 3 مرات، يطلب تحديد دالةكتلة الإحتمال للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H .

الطريقة الأولى

1- تعيين فراغ العينة (يمكن الإستعانة بشجرة الإمكانيات للتسهيل):

$$\Omega = \{HHH, HHF, HFH, HFF, FHH, FHF, FFH, FFF\}$$

2- تعيين قيم X:

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

3- حساب الإحتمالات المقابلة:

$$P(X=0) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$P(X=1) = P(\{HFF, FHF, FFH\}) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

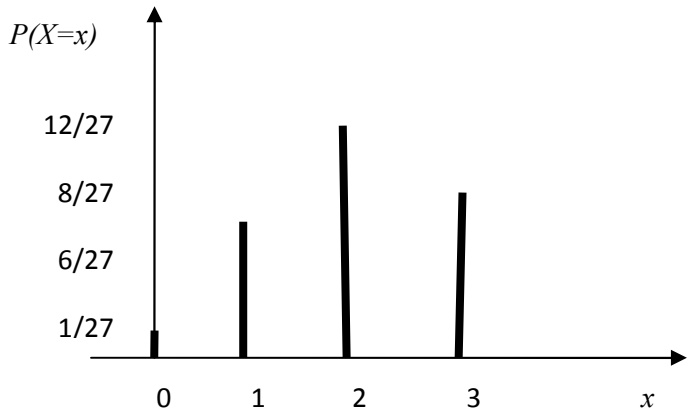
$$P(X=2) = P(\{HHF, HFH, FHH\}) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{12}{27}$$

$$P(X=3) = P(\{HHH\}) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

4- تلخيص النتائج في قانون توزيع احتمالي متقطع:

X	0	1	2	3	Σ
$P(X=x)$	1/27	6/27	12/27	8/27	1

5- التمثيل البياني لقانون التوزيع الإحتمالي المتقطع:



الطريقة الثانية

بمأن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H، وقطعة النقود رميت 3 مرات ، فإن الصورة إما لاتظهر، أو تظهر مرة واحدة فقط، أو مرتان أو ثلاثة مرات:

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$
$$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$$
$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}$$
$$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$$

ثم يتم تلخيص النتائج مثل الجدول أعلاه.

3-3- دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع: (أو دالة الإحتمال التراكمية)

نعرف دالة التوزيع $F_X(x)$ للمتغير العشوائي المتقطع على أنها الإحتمالات التراكمية إلى غاية قيمة محددة x، ونكتب:

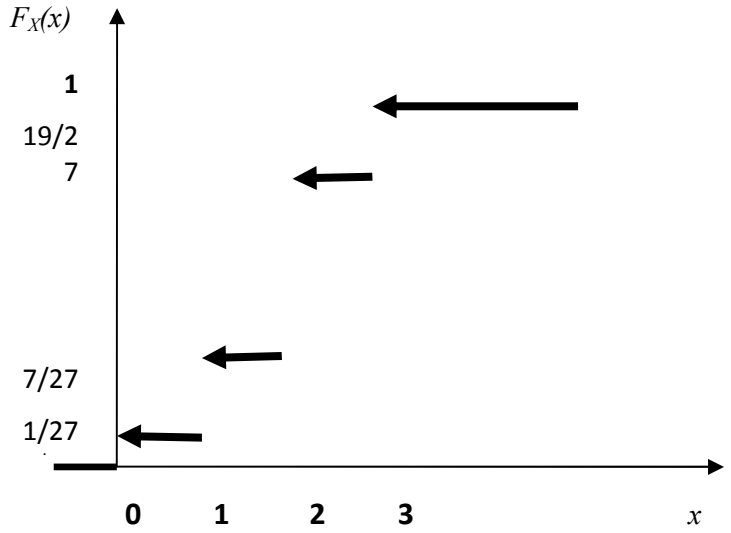
$$\mathrm{F_X}(x_k)=P(X\le x_k)=P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_k)=\sum_{i=1}^{k}P(x_i)$$

- **مثال:** من المثال السابق أوجد دالة التوزيع ومثلها بيانيا.

$$F_{\mathrm{X}}(0)=\mathrm{P}(0)=\frac{1}{27}$$

$$F_X(1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$$
$$F_X(2) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{7}{27} + \frac{12}{27} = \frac{19}{27}$$
$$F_X(3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{19}{27} + \frac{8}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

X	*0*	*1*	*2*	*3*	$\sum$
P(X=x)	*1/27*	*6/27*	*12/27*	*8/27*	*1*
$F_X(x)$	*1/27*	*7/27*	*19/27*	*1*	-



وتسمى أحيانا بالدالة السلمية نظرا لشكلها.

3-4- الخصائص العددية للمتغير العشوائي المتقطع:

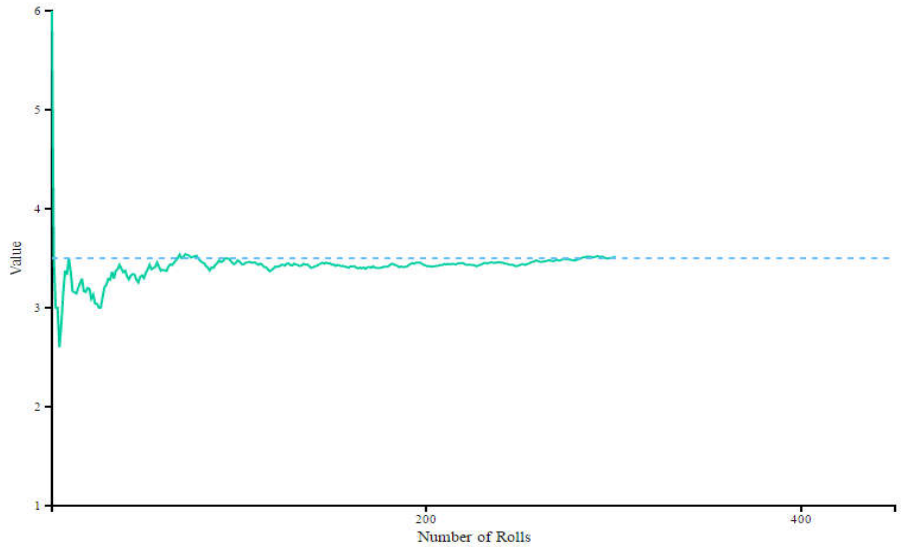
أ. الأمل الرياضي (التوقع) : *E(X)*

هو أحد مقاييس النزعة المركزية، وهو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي في تجربة عشوائية ما، وبعبارة أخرى هو المتوسط المرجح لجميع القيم الممكنة. ويعرف رياضيا للمتغير العشوائي X على النحو التالي[5]:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(x_i)$$

ولتقريب فكرة التوقع الرياضي نفترض أننا قمنا بإلقاء زهرة نرد عدد كبير من المرات وفي كل مرة نجمع القيمة التي ظهرت مع القيم السابقة ونقسم على عدد مرات الرمي (المتوسط الحسابي) ونلاحظ النتيجة تتأرجح حول قيمة نظرية تدعى الأمل الرياضي (التوقع) كما في الشكل الموالي (تم رمي زهرة نرد 300 مرة):

شكل 2-1 : رسم بياني توضيحي لمفهوم الأمل الرياضي



Source: *Basic Probability [on line] 04-05-2017 :* http://students.brown.edu/seeing-theory/basic-probability/index.html#first

نلاحظ من خلال الشكل أن المتوسط الحسابي يتأرجح حول الخط الأفقي الممثل لـ 3.5 وهو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي الممثل للرقم الظاهر عند رمي زهرة نرد، وحسب قانون الأعداد الكبيرة يظهر هذا التقارب بين المتوسط والتوقع الرياضي كلما كان عدد التجارب كبيرا ، ويبدو هذا جليا في الرسم حيث يكون التأرجح أقل حدة مع إزدياد عدد المحاولات.

- **بعض الخواص**: إذا كان X وY متغيرين عشوائيين و c عدد ثابت فإن[6]:

$$E(c) = \Sigma\, c\, p_i = c\, \Sigma\, p_i = c \cdot 1 = c$$
$$E(c\,X) = \Sigma c\, x_i\, p_i = c\, \Sigma x_i\, p_i = c\, E(X)$$
$$E(c + X) = \Sigma(c + x_i)p_i = \Sigma(c\, p_i + x_i\, p_i) = \Sigma c\, p_i + \Sigma x_i p_i = c + E(X)$$
$$E(X \mp Y) = \Sigma_{i,j}(x_i \mp y_i)p_{ij} = \Sigma_{i,j}\left(x_i p_{ij} \mp y_j p_{ij}\right) = E(X) \mp E(Y)$$

إذا كان X وY مستقلان فإن:

$$E(X\,Y) = E(X)\,E(Y)$$

إذا كان X وY غير مستقلان (مرتبطان) فإن:

$$E(X\,Y) = E(X)\,E(Y) + Cov(X;Y)$$

$Cov(X;\ Y)$: التباين المشترك = التغاير : نتطرق إليه لاحقا

ب. التباين: *V(X)*

هو أحد مقاييس التشتت ويحسب بأحد العلاقات التالية[7]:

$$V(X) = \sigma^2 = E[x - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \, P(x_i)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

- **بعض الخواص**: إذا كان X وY متغيرين عشوائيين و c عدد ثابت فإن:

$$V(c) = E[c - E(c)]^2 = E[c - c]^2 = E(0) = 0$$

$$\begin{aligned} V(c\,X) &= E[c\,X - E(c\,X)]^2 \\ &= E[(c\,X)^2 - 2\,c\,X\,E(c\,X) + E^2(c\,X)] \\ &= E(c\,X)^2 - E[2\,c\,X\,E(c\,X)] + E^2(c\,X) \\ &= c^2\,E(X)^2 - 2c^2\,E^2(X) + c^2\,E^2(X) \\ &= c^2\,E(X)^2 - c^2\,E^2(X) \\ &= c^2\,[E(X)^2 - E^2(X)] \\ &= c^2\,V(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X \mp c) &= E[(X \mp c) - E(X \mp c)]^2 \\ &= E\{X \mp c - [E(X) \mp c]\}^2 \\ &= E[x - E(X)]^2 \\ &= V(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X \mp Y) &= E[(X \mp Y) - E(X \mp Y)]^2 \\ &= E\{[X - E(X)] \mp [Y - E(Y)]\}^2 \\ &= E\{[X - E(X)]^2 \mp 2[X - E(X)][Y - E(Y)] + [Y - E(Y)]^2\} \\ &= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \mp 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= V(X) + V(Y) \mp 2\,Cov(X,Y) \end{aligned}$$

حيث $Cov(X,Y)$ هو تغاير X و Y (التباين المشترك ويحسب كما يلي:

$$Cov(X,Y) = E\{[x - E(X)][y - E(Y)]\} = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y)$$

إذا كان X و Y مستقلان فإن:

$$V(X \mp Y) = V(X) + V(Y)$$

- **ملاحظات**:
  - إذا كان X و Y مستقلان يستلزم : $Cov(X,Y) = 0$
  - إذا كان $Cov(X,Y) = 0$ فليس بالضرووة أن X و Y مستقلان.
  - إذا كان X وY متغيرين عشوائيين وa، b عددين ثابتين فإن:

(1) $Cov(X,X) = V(X)$

(2) $Cov(a\,X, b\,Y) = a\,b\,Cov(X,Y)$

(3) $Cov(X,a) = 0$

ت. الإنحراف المعياري: الإنحراف المعياري لمتغير عشوائي هو الجذر التربيعي الموجب لتباين هذ المتغير:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

- **مثال تطبيقي:**

ليكن X متغير عشوائي قانون توزيع الإحتمالي $P(x)$ معطى في الجدول، فيتم حساب المميزات العددية السابقة كما يلي:

X	0	1	2	3	Σ
$P(x)$	1/6	2/6	2/6	1/6	1
$xP(x)$	0	2/6	4/6	3/6	$E(X)=3/2=1.5$
$x^2P(x)$	0	2/6	8/6	9/6	$E(X^2)=19/6$

$E(X)=1.5$

$V(X)=19/6-(1.5)^2=0.91$

ث. العـــــزوم: وتنقسم إلى نوعين هما العزوم الإبتدائية أي حول الصفر وتسمى أحيانا غير المركزية والنوع الثاني هو العزوم حول المتوسط الحسابي (المركزية) ونذكرهما فيما يلي[8]:

- **العزوم الإبتدائية (اللامركزية):**

يعطى العزم الإبتدائي (حول الصفر) من الدرجة r بالعلاقة التالية:

$$M_r(X) = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \, P(x_i) \quad ; r \in \mathbb{N}$$

نأخذ بعض الدرجات r :

$M_0(X) = E(X^0) = E(1) = 1$

$M_1(X) = E(X^1) = E(X)$ الأمل الرياضي هو عزم إبتدائي من الدرجة الأولى:

$$M_2(X) = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(x_i)$$

$$M_3(X) = E(X^3) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \, P(x_i)$$

⋮

- **العزوم المركزية:**

يعطى العزم المركزي (حول المتوسط) من الدرجة r بالعلاقة التالية:

$$\mu_r(X) = E[X - E(X)]^r = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^r \, P(x_i) \; ; \quad r \in \mathbb{N}$$

نأخذ بعض الدرجات r :

$\mu_0(X) = E[X - E(X)]^0 = E(1) = 1$

$\mu_1(X) = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$

$\mu_2(X) = E[X - E(X)]^2 = V(X)$ التباين هو عزم لامركزي من الدرجة الثانية

$$\mu_3(X) = E[X - E(X)]^3 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^3 \, P(x_i)$$

⋮

3-5- الدالة المولدة للعزوم:

تعطى الدالة المولدة للعزوم الإبتدائية في حالة المتغير العشوائي المتقطع بالعلاقة التالية[9]:

$$M(\theta) = E\left(e^{\theta X}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{\theta x_i} \, P(x_i)$$

ولإيجاد العزم الإبتدائي من الدرجة r يكفي القيان بإشتقاق الدالة المولدة للعزوم r مرة بجوار الصفر أي وضع $\theta = 0$ عند نهاية الإشتقاق.

- **تمرين تطبيقي**: ليكن التوزيع الإحتمالي التالي:

X	0	1	2	3
P(x)	1/7	3/7	2/7	1/7

1- أحسب العزوم اللامركزية التالية (الابتدائية): M_1، M_2، M_3، M_4 واستنتج التباين والإنحراف المعياري.

2- أوجد الدالة المولدة للعزوم وأحسب: M_1، M_2، M_3، M_4 ثم قارن النتيجتين.

3- أحسب العزوم المركزية التالية : $\mu_i(X)$; $i: \overline{1-4}$

- **الحل:**

X	0	1	2	3	$\boldsymbol{\Sigma}$
$P(x_i)$	1/7	3/7	2/7	1/7	**1**
$x_i P(x_i)$	0	3/7	4/7	3/7	**10/7**
$x_i^2 P(x_i)$	0	3/7	8/7	9/7	**20/7**
$x_i^3 P(x_i)$	0	3/7	16/7	27/7	**46/7**
$x_i^4 P(x_i)$	0	3/7	32/7	81/7	**116/7**
$x_i - E(X)$	-1.428	-0.428	0.572	1.572	/
$[x_i - E(X)]P(x_i)$	-0.207	-0.183	0.163	0.224	**0.000**
$[x_i - E(X)]^2 P(x_i)$	0.291	0.078	0.093	0.353	**0.815**
$[x_i - E(X)]^3 P(x_i)$	-0.415	-0.033	0.053	0.554	**0.159**
$[x_i - E(X)]^4 P(x_i)$	0.592	0.014	0.030	0.870	**1.506**

1- حساب العزوم الإبتدائية وإستنتاج التباين والإنحراف المعياري:

من الجدول نستخرج ما يلي:

$$M_1(X) = E(X) = \frac{10}{7} = 1.428$$
$$M_2(X) = E(X^2) = \frac{20}{7} = 2.857$$
$$M_3(X) = \frac{46}{7} = 6.571$$
$$M_4(X) = \frac{116}{7} = 16.571$$

التباين:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= M_2(X) - [M_1(X)]^2 \\ &= 2.857 - (1.428)^2 \\ &= 0.817 \end{aligned}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.817} = 0.904$$

2- إيجاد الدالة المولدة للعزوم وحساب: M_1، M_2، M_3، M_4 من جديد:

$$\begin{aligned} M(\theta) &= E\left(e^{\theta X}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4} e^{\theta x_i} P(x_i) \\ &= e^{\theta 0}\ \frac{1}{7} + e^{\theta 1}\ \frac{3}{7} + e^{\theta 2}\ \frac{2}{7} + e^{\theta 3}\ \frac{1}{7} \end{aligned}$$
$$M(\theta) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}e^{\theta} + \frac{2}{7}e^{2\theta} + \frac{1}{7}e^{3\theta}$$

لحساب العزوم الابتدائية نقوم باشتقاق الدالة المولدة للعزوم:

$$M_r(X) = \left.\frac{\partial^r M(\theta)}{\partial \theta^r}\right|_{\theta=0}$$
$$M_1(X) = \left.\frac{\partial\, M(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{3}{7}e^{\theta} + \frac{4}{7}e^{2\theta} + \frac{3}{7}e^{3\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$
$$M_2(X) = \left.\frac{\partial^2 M(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{3}{7}e^{\theta} + \frac{8}{7}e^{2\theta} + \frac{9}{7}e^{3\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{3}{7} + \frac{8}{7} + \frac{9}{7} = \frac{20}{7}$$
$$M_3(X) = \left.\frac{\partial^3 M(\theta)}{\partial \theta^3}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{3}{7}e^{\theta} + \frac{16}{7}e^{2\theta} + \frac{27}{7}e^{3\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{3}{7} + \frac{16}{7} + \frac{27}{7} = \frac{46}{7}$$
$$M_4(X) = \left.\frac{\partial^4 M(\theta)}{\partial \theta^4}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{3}{7}e^{\theta} + \frac{32}{7}e^{2\theta} + \frac{81}{7}e^{3\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{3}{7} + \frac{32}{7} + \frac{81}{7} = \frac{116}{7}$$

نلاحظ أن النتائج نفسها مع التي حسبت عن طريق القانون الأول.

3- حساب العزوم المركزية التالية : $i: \overline{1-4}$; $\mu_i(X)$ والحسابات موجودة في الجدول أعلاه:

يمكن التأكد من ذلك من الجدول : $\mu_1(X) = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$

$\mu_2(X) = \sum_{i=1}^{2}[x_i - E(X)]^2 P(x_i) = V(X) = 0.815$

$\mu_3(X) = \Sigma_{i=1}^{3}[x_i - E(X)]^3 P(x_i) = 0.159$

$\mu_4(X) = \Sigma_{i=1}^{4}[x_i - E(X)]^4 P(x_i) = 1.506$

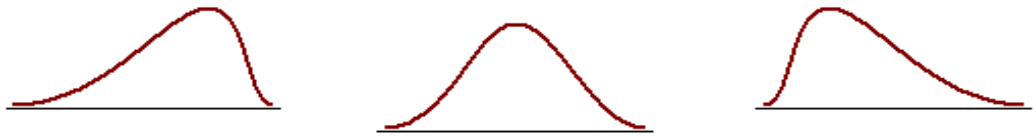
للعزوم فائدة كبيرة في تحديد شكل التوزيع الإحتمالي للمتغيرات العشوائية وهو ما نتناوله في البند الموالي.

3-6- مقاييس الشكل [الإلتواء والتطاول]:

- **معامل الإلتواء**: تتعدد المقاييس في هذا المجال لذا نكتفي بمقياس الإلتواء ل**فيشر** Ronald Aylmer Fisher:

$$F = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

القيمة الحرجة لهذا المقياس هي: 0، أي عند F=0 يغير التوزيع سلوكه، كما يلي:

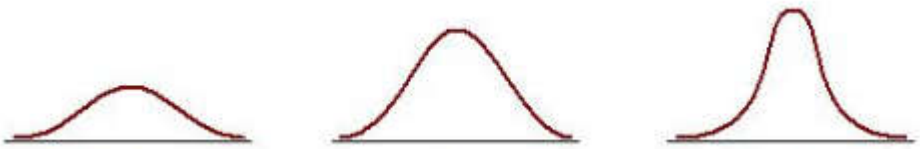


F>0: توزيع ملتوي يمينا (موجب الإلتواء) | **F=0:** توزيع متناظر | **F<0:** توزيع ملتوي يسارا (سالب الإلتواء)

- **معامل التطاول (الانبساط)**: تتعدد المقاييس له، نكتفي بمقياس التطاول ل**بيرسون** Karl Pearson

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

القيمة الحرجة لهذا المقياس هي: 3، أي عند K=3 يغير التوزيع سلوكه، كما يلي:



K>3: توزيع متطاول | **K=3:** توزيع معتدل | **K<3:** توزيع منبسط

- **ملاحظة**: التمثيلات البيانية أعلاه تكون في شكل أعمدة بيانية لأننا ندرس في المتغيرات العشوائية المتقطعة، تم الإعتماد على المنحنى للتوضيح فقط. وتجدر الإشارة إلى أن هذه المقاييس تبقى صحيحة ولها نفس التفسير في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة[10]. ويمكن تعميم مقاييس الشكل في صيغة العزوم الممركزة المختصرة:

$$\beta_{r-2} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^r\right] = \frac{\mu_r}{\sigma^r}$$

β_1 : معامل الالتواء. (r=3)

β_2: معامل التطاول (التفلطح)، أي[11] (r=4)

- **مثل تطبيقي**: إنطلاقا من التمرين السابق أدرس شكل التوزيع وتحقق بالرسم.

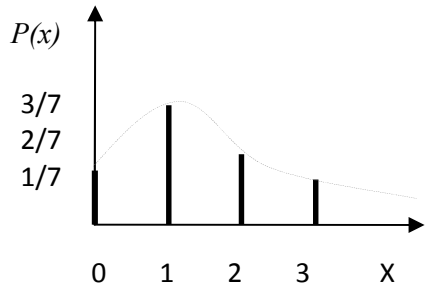
1- معامل الالتواء لفيشر:

$$F = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0.159}{(0.904)^3} = 0.215 > 0 \Rightarrow$$ إلتواء إلى اليمين

2- معامل التطاول لكارل بيرسون:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{1.506}{(0.904)^4} = 2.03 < 3 \Rightarrow$$ توزيع منبسط

3- التمثيل البياني:



نلاحظ من الرسم أن التوزيع ملتوي يمينا ومنبسط كما حصلنا عليه من خلال القاوانين.

3-7- العلاقة بين العزوم اللامركزية والعزوم المركزية:

ننطلق في إيجاد العلاقة بين العزوم اللامركزية (الابتدائية) والعزوم المركزية، من دستور ثنائي الحد لـ Newton، وذلك كما يلي[12]:

$$\mu_r = E[X - E(X)]^r = E\{\Sigma_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{r-i}X^i[E(X)]^{r-i}\}$$
$$= \Sigma_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{r-i}E(X^i)[E(X)]^{r-i}$$
$$\mu_r = \Sigma_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{r-i}M_i\, M_1^{r-i}$$

- **أمثلة** :

بالتطبيق على التمرين السابق أحسب العزوم المركزية التالية : $\mu_i(X)\ ;\ i:\overline{0-4}$ بدلالة العزوم الإبتدائية، ثم قارن النتائج مع التمرين السابق:

- $\mu_0 = \Sigma_{i=0}^{0}(-1)^{0-0}C_0^{0-0}M_0\, M_1^{0-0} = M_0\, M_1^0 = M_0 = 1$
- $\mu_1 = \Sigma_{i=0}^{1}(-1)^{1-i}C_r^{1-i}M_i\, M_1^{1-i} = M_1 - M_0M_1 = 1.428 - 1.428 = 0$
- $\mu_2 = \Sigma_{i=0}^{2}(-1)^{2-i}C_r^{2-i}M_i\, M_1^{2-i} = M_2 - M_1^2 = 2.857 - (1.428)^2$
  $= 0.81 = V(X)$
- $\mu_3 = \Sigma_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{r-i}M_i\, M_1^{r-i} = M_3 + 2\,M_1^3 - 3\,M_1\,M_2$
  $= 6.571 + 2(1.428)^3 - 3(1.428)(2.857) = 0.15$

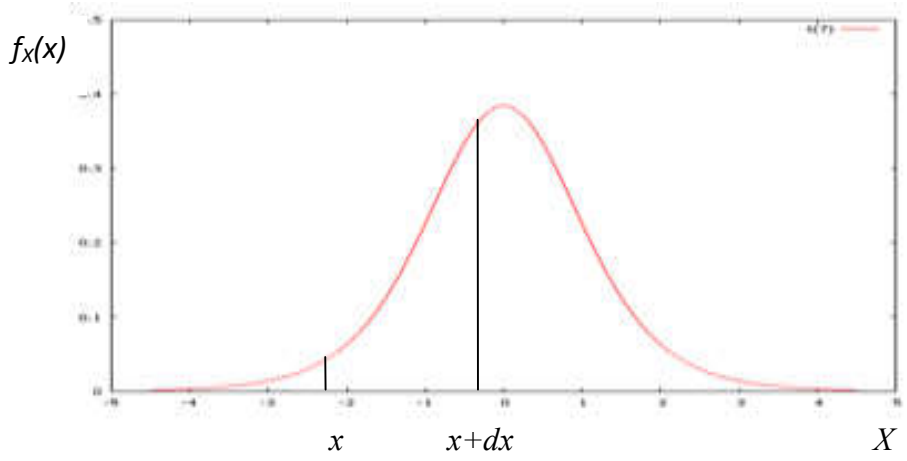
- $\mu_4 = \Sigma_{i=0}^{4}(-1)^{4-i}C_r^{4-i}M_i\,M_1^{4-i} = -3M_1^4 + 6M_2M_1^2 - 4M_3M_1 + M_4$
  $= -3(1.428)^4 + 6(2.857)(1.428)^2 - 4(6.571)(1.428) + 16.571$
  $= 1.51$

نلاحظ أن النتائج نفسها مع التمرين السابق.

4- المتغير العشوائي المستمر

4-1- مفهوم المتغير العشوائي المستمر: في كثير من الأحيان يكون المتغير العشوائي نموذجا لظواهر لها خاصية الإستمرار سواء كان في بُعد أو زمن أو قياسات مستمرة (في مجال متراص)، مثل درجة الحرارة، شدة التيار، ... الخ.

إن إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة معينة بذاتها يساوي الصفر، نتيجة لِ لانهائية عدد الحالات الممكنة، وبالتالي لابد من تعويض القيم بمجالات معتبرة، وذلك لرفع عدد الحالات الملائمة لتحقق الحدث في هذا المجال[13].



$$P(x \le X \le x + dx) = F(x + dx) - F(x)$$

إذن لحساب هذا الإحتمال نعرف دالة الكثافة الإحتمالية كمايلي:

$$f_X(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = F'_X(x)$$

وهي تعبر عن درجة الكثافة الإحتمالية الخاصة لكل وحدة من وحدات المجال المعني (وهو مجال متناهي في الصغر dx)

أو بطريقة أخرى[14] :

$$\int f_X(x)\,dx = F_X(x)$$

$$P(x \le X \le x+dx) = F(x+dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f_X(x)\ dx$$

- **ملاحظة:**

1/ دالة الكثافة هي الدالة المشتقة لدالة التوزيع : $F'_X(x)=f_X(x)$

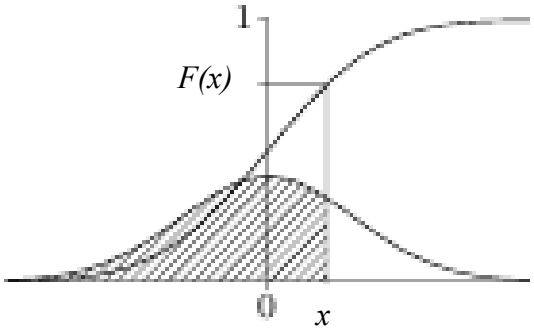
2/ يمكن كتابة دالة التوزيع بالشكل[15]: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

3/ بعض الخصائص: $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$.

3/ دالة الكثافة $f_X(x)$ للمتغير العشوائي المتصل X، يجب أن تحقق الشرطين التاليين:

(1) $f_X(x) \ge 0, \qquad \forall x \in X(\Omega)$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx = 1$



- **مثال:** إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة إحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\,x^2 & ;0 < x < 3 \\ 0 & ;\ ailleur \end{cases}$$

1/ أثبت أن $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية، ثم مثلها بيانيا.

2/ أوجد $P(1 < X < 4)$

3/ أوجد دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ ثم مثلها بيانيا.

- **الحل:**

1/ تكون $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

أولا: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ وهذا محقق.

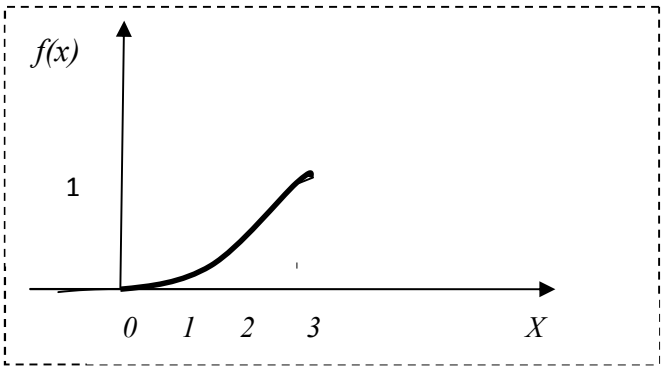
ثانيا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}x^2\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right|_0^3 + 0 = 1$$

إذن الشرطين محققين ومنه الدالة عبارة عن دالة كثافة إحتمالية

التمثيل البياني لدالة الكثافة:



2/ حساب الإحتمال المطلوب:

$$P(1 < X < 4) = \int_1^4 f(x)dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{9}x^2\,dx + \int_3^4 0\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\right|_1^3 + [c]_3^4$$

$$= \frac{27}{27} - \frac{1}{27} + 0 = \frac{26}{27} = 0.962$$

3/ إيجاد دالة التوزيع التراكمية *F(x)*:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

نلاحظ أننا عوضنا x بـ t لتكون الكتابة الرياضية صحيحة فقط.

لدينا ثلاثة مجالات لسلوك هذه الدالة:

$$F(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x} f(t)dt & si\ x\le 0\\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt & si\ 0<x<3\\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt & si\ x\ge 3\end{cases}$$

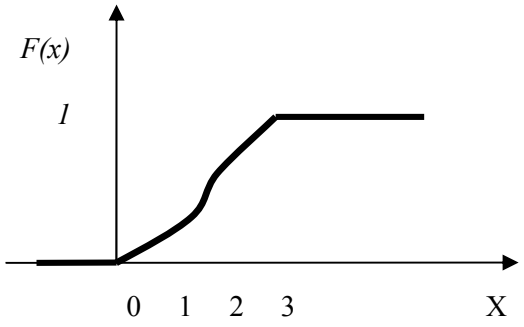
$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x} 0\,dt & si\quad x\le 0\\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{9}\cdot t^2\,dt & si\ \ 0<x<3\\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{3}\frac{1}{9}\cdot t^2\,dt+\int_{3}^{x} 0\,dt & si\ x\ge 3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ 0+\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\right|_0^x & si\ 0<x<3\\ 0+\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\right|_0^3+0 & si\ x\ge 3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ 0+\frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3} & si\ 0<x<3\\ 0+\frac{1}{9}\cdot\frac{27}{3}+0 & si\ x\ge 3\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ \frac{x^3}{27} & si\ 0<x<3\\ 1 & si\ x\ge 3\end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع:



4-2- المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر:

أ. **الأمل الرياضي**: ويعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

ب. التباين: ويعطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2\, f(x)\, dx$$

أو

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx\right]^2$$

ت. الإنحراف المعياري: وهو الجذر التربيعي الموجب للتباين ويعطى بالعلاقة التالية[16]:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

ج. العـــــزوم: وتنقسم كما رأينا سابقا (المتغير العشوائي المتقطع) إلى نوعين هما العزوم الإبتدائية أي حول الصفر وتسمى أحيانا غير المركزية والنوع الثاني هو العزوم حول المتوسط الحسابي (المركزية) ونذكرهما فيما يلي[17]:

- **العزوم الإبتدائية (اللامركزية)**:

يعطى العزم الإبتدائي من الدرجة r بالعلاقة التالية:

$$M_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\ \ dx\ \ ; r \in \mathbb{N}$$

نأخذ بعض الدرجات r :

$M_0(X) = E(X^0) = E(1) = 1$

$M_1(X) = E(X^1) = E(X)$ الأمل الرياضي هو عزم إبتدائي من الدرجة الأولى:

$M_2(X) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\ \ dx$

$M_3(X) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\, f(x)\ dx$

⋮

- **العزوم المركزية**:

يعطى العزم المركزي من الدرجة r بالعلاقة التالية:

$$\mu_r(X) = E[X - E(X)]^r = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r\, f(x)\ dx\ ;\quad r \in \mathbb{N}$$

نأخذ بعض الدرجات r :

$\mu_0(X) = E[X - E(X)]^0 = E(1) = 1$
$\mu_1(X) = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$
$\mu_2(X) = E[X - E(X)]^2 = V(X)$ التباين هو عزم لامركزي من الدرجة الثانية

$$\mu_3(X) = E[X - E(X)]^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^3 f(x)\ dx$$

⋮

- **مثال (بالرجوع إلى المثال السابق)** : أوجد مايلي:
- الأمل الرياضي
- التباين والانحراف المعياري
- العزم الابتدائي من الدرجة 3
- **الحل:**

1- حساب الامل الرياضي (التوقع):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\, 0 + \int_{0}^{3} x \frac{1}{9} x^2\, dx + \int_{3}^{+\infty} x\, 0\, dx$$
$$= \frac{1}{9}\int_{0}^{3} x^3 = \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right|_0^3$$
$$= \frac{9}{4}$$

2- حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, P(x)\ \ dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\, 0 + \int_{0}^{3} x^2 \frac{1}{9} x^2\, dx + \int_{3}^{+\infty} x^2\, 0\, dx$$
$$= \tfrac{1}{9}\textstyle\int_0^3 x^4\ dx$$
$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right|_0^3 = \frac{27}{5}$$

$$V(X) = \frac{27}{5} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 0.3375$$

3- حساب الإنحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.3375} = 0.5809$$

4- حساب العزم الابتدائي من الدرجة 3

$$M_3(X) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\, dx = \int_0^3 x^3 \frac{1}{9} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 x^5\, dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^3 = \frac{81}{6} = \frac{27}{2}$$

$$= 13.5$$

4- 3 الدالة المولدة للعزوم:

تعطى الدالة المولدة للعزوم الإبتدائية في حالة المتغير العشوائي المتقطع بالعلاقة التالية[18]:

$$M(\theta) = E\left(e^{\theta X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x)\, dx$$

ولإيجاد العزم الإبتدائي من الدرجة r يكفي القيان بإشتقاق الدالة المولدة للعزوم r مرة بجوار الصفر أي وضع $\theta = 0$ عند نهاية الإشتقاق.

4-4- مقاييس الشكل: وتكون مثل حالة المتغير العشوائي المتقطع، فلا داعي لتكرارها، نكتفي بأخذ أمثلة فيما بعد فقط.

4-5- العلاقة بين العزوم الإبتدائية والعزوم المركزية: تبقى العلاقة بين العزوم الإبتدائية والعزوم المركزية مثل المتغير العشوائي المتقطع، فلاداعي لتكرارها.

- **مثال تطبيقي:** ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا، له قانون التوزيع الإحتمالي التالي:

1- أثبت أن $f_X(x)$ قانون توزيع إحتمالات
2- أوجد الدالة التراكمية للتوزيع
3- أوجد الدالة المولدة للعزوم، وأحسب $M_i\ ; i: \overline{1-4}$
4- أوجد التباين والإنحراف المعياري.
5- مثل بيانيا كلا من دالة الكثافة ودالة التوزيع.
6- تحقق من شكل التوزيع حسابيا.

- **الحل:**

(1) إثبات أن $f_X(x)$ قانون توزيع إحتمالات:

- $f_X(x) \geq 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}|_0^{+\infty} = -0-(-1) = 1$

(2) إيجاد دالة التوزيع التراكمية:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt & ;x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x e^{-t}\,dt\ ;x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ;x < 0 \\ 1 - e^{-x}\ ;x \geq 0 \end{cases}$$

(3) إيجاد الدالة المولدة للعزوم:

$$M(\theta) = E\left(e^{X\,\theta}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta\,x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\theta\,x} 0\,dx + \int_0^{+\infty} e^{\theta\,x} e^{-x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{\theta\,x - x}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(1-\theta)}\,dx$$
$$= \left[\frac{e^{-x(1-\theta)}}{\theta - 1}\right|_0^{+\infty}$$
$$= -\frac{1}{\theta - 1}$$

$$\boldsymbol{M(\theta) = \frac{1}{1-\theta}}$$

الآن لحساب العزوم الابتدائية من الدرجة الأولى إلى غاية الدرجة الرابعة نقوم بالاشتقاق حسب الدرجة، وبعد الوصول إلى الصيغة النهائية للإشتقاق نقوم بتعويض θ بالصفر:

$$M_1(X) = E(X) = \left.\frac{\partial^1 M(\theta)}{\partial \theta^1}\right|_{\theta=0} = \frac{-(-1)}{(1-\theta)^2} = 1$$

لإشتقاق الدالة المولدة للعزوم مرتين يكفي أن نشتق الصيغة السابقة قبل تعويض θ بالصفر، مرة واحدة فقط (لأننا إشتقيناها مرة واحدة هي الاخرى، فيصبح عدد مرات الاشتقاق إثنتان). ونقوم بنفس الشي من أجل درجات أعلى:

$$M_2(X) = E(X^2) = \left.\frac{\partial^2 M(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{2(1-\theta)(-1)}{(1-\theta)^4} = \frac{2}{(1-\theta)^3} = 2$$

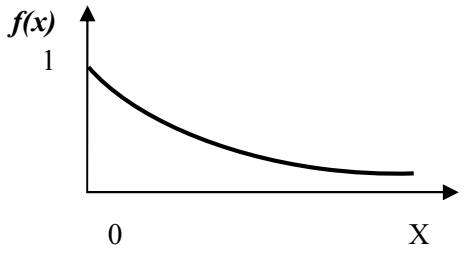
$$M_3(X) = E(X^3) = \left.\frac{\partial^3 M(\theta)}{\partial\theta^3}\right|_{\theta=0} = \frac{-4(1-\theta)^2(-1)2}{(1-\theta)^6} = \frac{6}{(1-\theta)^4} = 6$$

$$M_4(X) = E(X^4) = \left.\frac{\partial^4 M(\theta)}{\partial\theta^4}\right|_{\theta=0} = \frac{-4(1-\theta)^3(-1)6}{(1-\theta)^8} = \frac{24}{(1-\theta)^5} = 24$$

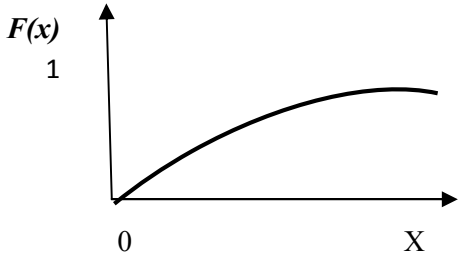
(4) إيجاد التباين والإنحراف المعياري:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = M_2 - M_1^2 = 2 - 1^2 = 1$$
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

(5) التمثيل البياني لكل من دالة الكثافة ودالة التوزيع التراكمية:



دالة الكثافة



دالة التوزيع التراكمية

(6) حساب مقاييس الشكل:

- معامل الالتواء (فيشر) :

نحتاج العزم المركزي من الدرجة الثالثة لذلك نستخدم العلاقة بين العزوم الابتدائية والعزوم المركزية المستخرجة سابقا، نظرا لوجد العزوم الابتدائية محسوبة:

$$\mu_3 = \Sigma_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{r-i}M_i\,M_1^{r-i}$$
$$= M_3 + 2\,M_1^3 - 3\,M_1\,M_2$$
$$= 6 + 2(1)^3 - 3(1)(2)$$
$$= 2$$

$$F = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2}{(1)^3} = 2 \quad > 0 \implies$$ التوزيع ملتوي نحو اليمين

- معامل التطاول (كارل بيرسون) :

نحتاج العزم المركزي من الدرجة الرابعة لذلك نستخدم العلاقة بين العزوم الابتدائية والعزوم المركزية نظرا لوجد العزوم الابتدائية محسوبة:

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \Sigma_{i=0}^{4}(-1)^{4-i}C_r^{4-i}M_i\ M_1^{4-i}\\ &= -3M_1^4 + 6M_2M_1^2 - 4M_3M_1 + M_4\\ &= -3(1)^4 + 6(2)(1)^2 - 4(6)(1) + 24\\ &= 9\end{aligned}$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{9}{(1)^4} = 9 \quad > 3 \Rightarrow$$ التوزيع متطاول

تمارين

- **التمرين 01**: عند رمي قطعة نقود وزهرة نرد متجانستين مرة واحدة في تجربة عشوائية، وكان المتغير العشوائي يمثل ظهور الرقم 2.

1- أوجد التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمية.

3- مثل بيانيا كلا من قانون التوزيع ودالة الكتوزيع.

4- أوجد الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

5- أوجد التباين والإنحراف المعياري.

- **التمرين 02**: ليكن لدينا وعاء يحتوي على 4 كرات خضراء و6 كرات حمراء، نقوم بسحب 3 كرات على التوالي ومع الإعادة من هذا الوعاء، نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- أوجد التوزيع الإحتمالي للمتغير X، ومثله بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_x(x)$ ، ومثلها بيانيا.

3- أوجد التوقع الرياضي.

4- أوجد الإنحراف المعياري.

- **التمرين 03**: لدينا صندوق يحتوي على 20 كرة، منها كرتان بيضاويتان، 3 كرات سوداء، 4 كرات خضراء، 5 كرات حمراء و6 كرات صفراء اللون، نسحب عشوائيا كرة واحدة من هذا الصندوق، فإذا اعتبرنا المتغير العشوائي X الذي يأخذ:

- ✓ القيمة (2-) إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء.
- ✓ القيمة (1-) إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء.
- ✓ القيمة (0) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء.
- ✓ القيمة (1) إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء.
- ✓ القيمة (2) إذا كانت الكرة المسحوبة صفراء.

1- أوجد التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_x(x)$ ، ومثلها بيانيا.

3- أحسب الإحتمالات التالية: $P(0 \leq X < 2)$, $P(X < 2)$.

- **التمرين 04**: ليكن X و Y متغيران عشوائيان مستقلان حيث: $E(Y) = \frac{30}{8}$ ، $E(X) = \frac{8}{3}$

ولدينا: $Z = X \cdot Y$ ، $W = 3X + 2Y$ ، أحسب ما يلي:

1- $E(W - E(w))$, $E(w)$, $E(Y - 2)$, $E(X + 3)$, $E(Z)$

2- إذا كان: $V(X) = V(Y) = 5$ فأحسب: $V(X - 3)$, $V(Y + 3)$, $V(W)$

- **التمرين 05**: نختار كرتين بطريقة عشوائية من صندوق يحتوي على: 8 كرات بيضاء، 4 كرات سوداء وكرتين حمراوين، ولنفرض أننا نتحصل على 2 دج عن كل كرة مسحوبة من لون أسود ونخسر 1 دج عن كل كرة بيضاء في حين لا نحصل على شيء إذا كانت الكرة المسحوبة من لون أحمر.

1- أوجد قانون الربح والخسارة المحقق من طرف المتغير العشوائي X الذي يمثل الأموال التي سنربحها أو نخسرها في كل عملية سحب.

2- أحسب التوقع (الأمل) الرياضي والإنحراف المعياري لهذا المتغير.

- **التمرين 06**: نقوم بإلقاء زهرة نرد مرة واحدة وليكن المتغيرين العشوائيين X و Y حيث:

X: يدل على ضعف الرقم المحصل عليه.

Y: يدل على العدد 1 إذا كان الناتج المحصل عليه فرديا أو العدد 2 إذا كان الناتج زوجيا.

1- أوجد فراغ العينة **Ω**.

2- أوجد التوزيعات الإحتمالية لكل من : X و Y.

3- أوجد التوقع الرياضي والتباين لكلا المتغيرين العشوائيين.

- **التمرين 07**: ليكن X متغير عشوائي يأخذ قيما صحيحة تتراوح بين 0 و4 مع الإحتمالات التالية:

$$P(X = k) = c(4 - k)k$$

1- أوجد قيمة الثابت c .

2- أوجد التوقع الرياضي والتباين.

- **التمرين 08**: لتكن دالة الكتلة الإحتمالية التالية:

$$P(X = x) = \begin{cases} x/c & si: x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت c .

2- أوجد التوقع الرياضي والتباين.

- **التمرين 09**: نقوم بإلقاء قطعة نقود معدنية صنعت حيث إحتمال الحصول على صورة (F) هو: $1/3$ بينما إحتمال الحصول على رقم (P) هو: $2/3$ ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد الصور المحصل عليها في تجربة إلقاء هذه القطعة أربعة مرات متتالية.

1- أوجد التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

2- أوجد العزم اللامركزي من الدرجة الأولى والثانية، ثم استنتج الإنحراف المعياري

- **التمرين 10**: لدينا حجر نرد أوجهه غير متماثلة، حيث إحتمال ظهور أي وجه مبين في الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$2c$	c	$1/3$	$1/5$	c	$3c$

1- أوجد قيمة الثابت c .

2- أوجد دالة التوزيع $F_x(x)$.

3- مثل بيانيا كل من قانون التوزيع الإحتمالي ودالة التوزيع.

4- ما احتمال الحصول على عدد زوجي ؟

- **التمرين 11**: ليكن المتغير العشوائي X المعرف بدالة التوزيع $F_x(x)$ كما يلي:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<-5\\ 2/15 & si \quad -5\le x<-3\\ 7/15 & si \quad -3\le x<0\\ 13/15 & si \quad 0\le x<2\\ 1 & si \quad x\ge 2\end{cases}$$

1- أوجد قانون توزيع الاحتمالات للمتغير العشوائي X ثم مثل بيانيا كل من قانون توزيع الإحتمال ودالة التوزيع $F_x(x)$.

2- أحسب الإحتمالات التالية: $P(-3<X\le 2)$, $P(X<0)$, $P(X\ge -3)$.

3- أوجد العزم اللامركزي من الدرجة الأولى والثانية، ثم إستنتج تباين المتغير العشوائي X .

- **التمرين 12**: ليكن X متغيرا عشوائيا بدالة كثافة إحتمال :

$$f_X(x)=\begin{cases}1/8 & si \quad 0\le x\le 8\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- مثّل دالة الكثافة بيانيا.

2- أحسب الإحتمالات التالية: $P(2\le X\le 5),\ P(3\le X\le 7),\ P(X\ge 6)$

3- أكتب دالة التوزيع التراكمية $F_x(x)$ ومثلها بيانيا.

- **التمرين 13**: لتكن دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X المعرف كمايلي:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<2\\ (x-2)^2 & si \quad 2\le x<3\\ 1 & si \quad x\ge 3\end{cases}$$

1- أوجد دالة الكثافة الإحتمالية لهذا المتغير العشوائي.

2- أرسم التمثيل البياني لكل من $f_X(x)$ و $F_X(x)$.

3- أحسب مايلي: $P(1 \leq X \leq 5/2)$, $P(5/2 < X \leq 7/2)$, $P(5/2 \leq X < 3)$

- **التمرين 14**: لتكن الدالة $f_X(x)$ المعرفة كمايلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in [0,1] \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- هل الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة إحتمال ؟

2- أحسب الإحتمالات التالية:

$P(X \leq 4/9)$, $P(X \leq 1/2)$, $P(-2 < X \leq 3/4)$, $P(X^2 \geq 1/4)$

3- أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

- **التمرين 15**: لتكن الدالة $f_X(x)$ المعرفة كمايلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} k & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & si \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت k من أجل أن تكون $f_X(x)$ دالة كثافة إحتمالية؟

2- أحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X.

- **التمرين 16**: ليكن X متغير عشوائي موزع في المجال $[1,e]$ ومعرف بالدالة التالية: $f_X(x) = {}^{k}/_{x}$

1- أوجد قيمة الثابت k من أجل أن تكون $f_X(x)$ دالة كثافة إحتمالية.

2- أحسب $E(X^n)$ ثم استنتج $E(X)$ و $V(X)$.

- **التمرين 17**: لتكن الدالة $f_X(x)$ المعرفة كمايلي حيث $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^k) & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- أوجد قيمة c حتى تكون $f_X(x)$ دالة كثافة إحتمالية.

2- من أجل k=1 :

- أوجد قيمة x_0 حيث: $P(X < x_0) = 1/2$.
- أحسب: $P(X \leq 1/4)$ و $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

3- أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

- **التمرين 18**: المدة الزمنية لاشتغال جهاز التلفاز قبل أول عطب هو عبارة عن متغير عشوائي متصل معرف بدالة كثافة إحتمال هي:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت λ .

2- ما إحتمال أن تكون المدة الزمنية محصورة بين 50 و150 ساعة ؟

3- ما إحتمال أن يشتغل الجهاز أكثر من 100 ساعة ؟

- **التمرين 19**: ليكن X متغير عشوائي متصل معرف بالدالة التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{81}x(9-x^2) & si \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- تأكد من أن الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة إحتمال للمتغير العشوائي X .

2- أوجد دالة تابع الإحتمالات ومثلها بيانيا.

3- أحسب ما يلي: $P(X < 2)$, $P(1/2 \le X \le 5/2)$, $P(X \ge 1)$.

4- أوجد العزم اللامركزي من الدرجة n ثم استنتج: E(X) وV(X).

- **مراجع وإحالات الفصل الثاني:**

[1] مديحة السيد محمد موسى "أساسيات الإحصاء الرياضي وتطبيقاتها" دار الكتاب الحديث، 2008، مصر، ص32.

[2] المرجع السابق، ص-ص 34-40.

[3] مجدي الطويل "الإحتمالات-النظرية والتطبيق" دار النشر للجامعات، 2009، مصر، ص20.

[4] ROSS M. S. «Initiation aux probabilités » Trad. Par HOFER C. , Presses polytechnique romandes, 1987, Lausanne, Suisse

[5] موراي ر. شبيجل "نظريات ومسائل في الإحصاء" سلسلة ملخصات شوم، ترجمة: شعبان عبد الحميد شعبان، دار ماكجروهيل للنشر، مصر، ص 161.

[6] مديحة السيد محمد موسى، مرجع سابق، ص 52.

[7] المرجع السابق، ص59.

[8] المرجع السابق، ص-ص 65-72.

[9] المرجع السابق، ص 79.

[10] عبد الحفيظ مصطفى "نظرية الاحتمالات: مبادئ وتطبيقات" الجزء 1، د. م. ج.، ط 2، 2008، الجزائر، ص253.

[11] ROUAD M. « Probabilités, Statistique et Analyse Multicritères » ebook, 2017

[12] VEYSSEYRE R. «Statistique et Probabilités pour l'ingénieur» Dunod, 2eme ed., 2006, Paris, p 62.

[13] جلال الصياد، عبد الحميد محمد ربيع "مبادئ الطرق الإحصائية" الناشر تهامة، ط1، 1983، م. ع. السعودية، 47.

[14] SAPORTA G. « PROBABILITES : analyse des données et statistique » Edition Technip, 3eme éd., 2011, Paris P 18.

[15] GHORBANZADEH D. « PROBABILITES : exercices corrigés » Edition Technip, 1998, Paris, P 15.

[16] جلال الصياد، مرجع سابق، ص-ص 54-55.

[17] مجدي الطوبل، مرجع سابق، ص 103.

[18] مديحة السيد محمد موسى، مرجع سابق، ص 79.

الفصل الثالث

قوانين التوزيع المتقطعة

تمهيد:

في هذا الفصل نتطرق إلى بعض القوانين الخاصة والشهيرة للتوزيعات الإحتمالية والتي صيغت من قبل إحصائيين ورياضيين لامعين، حيث نبدأ بتلك القوانين المصاغة لمتغيرات عشوائية متقطعة، في حين نترك تلك الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة للفصل الموالي، إن التحدث عن هذه القوانين أمر مهم للغاية حيث يمكننا في الكثير من الأحيان من حساب وبسهولة مختلف الإحتمالات وكذا الخصائص العددية للمتغيرات العشوائية التي تتبع أحد هذه القوانين دون الحاجة للمرور بالمراحل التقليدية كتعيين فضاء العينة وحساب الخصائص العددية في كل مرة، أما من الناحية التطبيقية فلهذه القوانين فائدة كبيرة كونها تلخص وتجمع التجارب العشوائية المتشابهة ضمن قوانين توزيع يمكن الرجوع إليها والإستناد عليها في مختلف البحوث الإحصائية التطبيقية.

1- قانون "بارنولي" : loi de Bernoulli

نقول عن متغيرة عشوائية متقطعة أنها تتبع قانون توزيع "بارنولي" ذو الوسيط p إذا كان قانون توزيعها الإحتمالي، يكتب بالشكل التالي[1]:

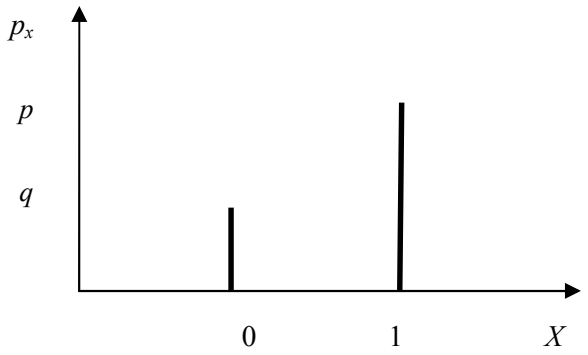
$$X \rightsquigarrow B(p):$$

$$P(X = x) = p^x \, q^{1-x} \;\; ; \;\; x = 0; 1 \; et \; q = 1 - p$$

أهم الخصائص العددية (الأمل الرياضي والتباين) للمتغير العشوائي X هنا هي:

$$E(X) = p \; ; \;\; V(X) = p \, q$$

ويكون التمثيل البياني للمتغير العشوائي بالشكل التالي:



- **ملاحظة:** يندرج ضمن هذا القانون المتغيرات العشوائية المتقطعة التي تحقق إجابة ثنائية، وعدد التجارب $n=1$.
- **مثال (1):**

نرمي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة فقط، نعتبر X متغير عشوائي يمثل ظهور الصورة. ما هو إحتمال ظهور الوجه *(H)* ؟ ثم أحسب الأمل الرياضي، التباين والإنحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي (ظهور الصورة).

إذن النجاح هو ظهور الصورة *(F)*. إذن ظهور الوجه يعني الفشل أي $X=0$ ويقابله الإحتمال q.

لدينا ظهور الصورة يمثل النجاح $X=1$ ويقابل هذا الحدث الإحتمال p حيث: $p=1/2=0.5$ لأن قطعة النقود متوازنة ومنه $q=1-0.5=0.5$

إذن:

$$X \rightsquigarrow B(1/2):$$

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \;\; ; \;\; x = 0; 1$$

ومنه الإحتمال المطلوب:

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-0}=\frac{1}{2}$$

حساب الأمل الرياضي:

$$E(X)=p=\frac{1}{2}$$

حساب التباين:

$$;\quad V(X)=p\,q=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0.25$$

حساب الإنحراف المعياري:

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.25}=0.5$$

- **مثال (2):** نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة، ما هو إحتمال ظهور الرقم 5 ؟ و ما هو إحتمال عدم ظهور الرقم 5 ؟

$$X\rightsquigarrow B(1/6):$$

$$P(X=x)=\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}\quad;\quad x=0;1$$

1/ إحتمال ظهور الرقم 5 (النجاح):

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}=\frac{1}{6}$$

2/ إحتمال عدم ظهور الرقم 5 (الفشل) :

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{1-0}=\frac{5}{6}$$

أو عن طريق متممة الحدث الأول : P(X=0)=1-P(X=1)=1-1/6=5/6

2- قانون ثنائي الحد : la loi Binomiale

نقول عن متغيرة عشوائية متقطعة أنها تتبع قانون التوزيع الثنائي الحد (بينوميال) ذو الوسيطين n وp إذا كان قانون توزيع احتمالاتها –دالة كتلتها الإحتمالية– يكتب بالشكل التالي[2]:

$$X\rightsquigarrow B(n;\,p):$$

$$P(X=x)=C_n^x\,p^x\,q^{n-x}\;;\quad x\in\mathbb{N}\,;\,n\neq 0\;;\,q=1-p$$

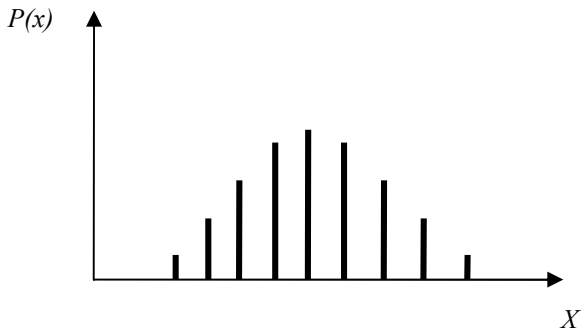
أهم الخصائص العددية (الأمل الرياضي والتباين) للمتغير العشوائي X هنا هي:

$$E(X)=n\,p\,;\quad V(X)=n\,p\,q$$

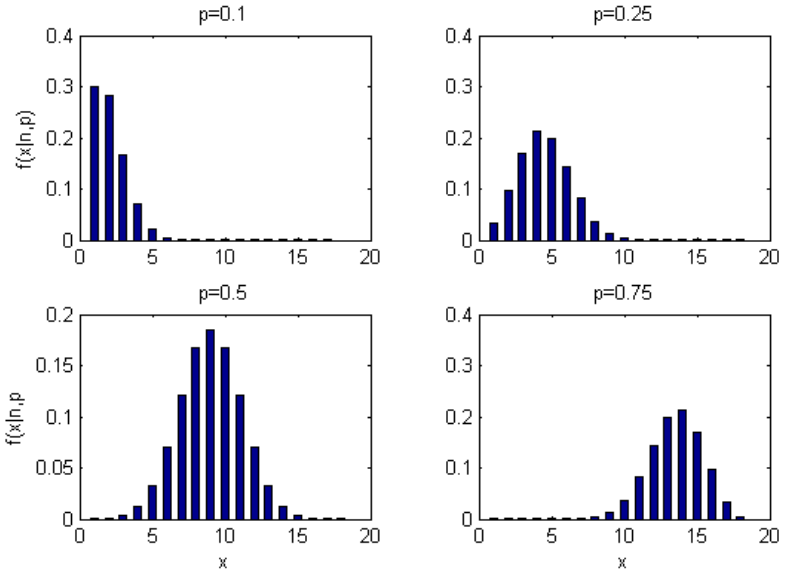
حيث:

n: عدد التجارب (وهي عبارة عن مجموعة من تجارب برنولي المستقلة عن بعضها البعض)، في حالة $n=1$ نكون أمام تجربة لبرنولي وهي حالة خاصة من تجارب بينوميال.

الشكل البياني لتوزيع بينوميال:



وتجدر الإشارة إلى أن التمثيل البياني لهذا التوزيع مرتبط بعدد التجارب وقيمة الاحتمال (ويكون متناظرا حول الأمل الرياضي إذا كان الاحتمال مساويا لـ 0.5 أي $p=q$، أما في غير ذلك يون ملتويا نحو اليمين: $p<q$ أو نحو اليسار: $p>q$) كما يلي:



- **ملاحظة:** تتميز تجربة ذات الحدين بالخصائص التالية:

1/- تتألف من عدد من المحاولات المستقلة (n) أي أن p ثابت ومنه q ثابت أيضا.

2/- لكل محاولة نتيجتين فقط هما النجاح والفشل، إحتمال النجاح يرمز له p أما إحتمال الفشل فهو المتممة لهذا الأخير ونرمز له q.

- **مثال** : نقوم برمي قطعة نقود غير متوازنة 3 مرات، بحيث: إحتمال ظهور الصورة *P(F)=1/3*، وإحتمال ظهور الوجه *P(H)=2/3*، وبإفتراض أن X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور الصورة.
  1- أكتب قانون توزيع الإحتمالات للمتغير العشوائي X.
  2- أحسب *P(X=2)* و*P(X<3)*.
  3- أحسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي.
- **الحل**: لدينا عدد التجارب (المستقلة) *n=3* وإحتمال النجاح *p=1/3* ومنه إحتمال الفشل q=1-p=1-1/3=2/3 وبالتالي نحن أمام تجربة من نوع بينوميال حيث:

$$X \rightsquigarrow B\left(3;\frac{1}{3}\right)$$

$$P(X=x)=C_3^x p^x q^{3-x}=C_3^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \quad si \quad x=0;1;2;3.$$

- $P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2}=3\frac{1}{3^2}\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
- $P(X<3)=P(X\leq 2)=\sum_{x=0}^{2} C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{3-0}+C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}+C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2}$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\frac{1}{3}\frac{4}{9}+3\frac{1}{3^2}\frac{2}{3}=0.96$$

- $E(X)=n\,p=3\frac{1}{3}=1$
- $V(X)=n\,p\,q=3\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=0.66$
- $\sigma_X=\sqrt{0.66}=0.81$

3- التوزيع كثير الحدود la loi Multinomiale

التوزيع المتعدد هو تعميم للتوزيع الثنائي، فبينما توزيع ذي الحدين (الثنائي) يستعمل في حالة تجربة تقبل نتيجتين فقط، يستعمل التوزيع المتعدد للحالة العامة حيث يكون للتجربة عدد S من النتائج الممكنة. مع استقلالية التجارب عن بعضها.

وعمليا يمكن تعميم توزيع ذي الحدين كما يلي: بفرض أن فضاء العينة لتجربة ما (مجموعة من تجارب برنولي المستقلة) مجزأ إلى S من الأحداث المتنافية مثنى مثنى $A_1, A_2, \dots, A_S$ وأن إحتمالات هذه الأحداث هي:

$P_1, P_2, \dots, P_S$ حيث $\sum_{i=1}^{S} P_i = 1$

فيكون إحتمال وقوع الحدث A_1 عددا من المرات قدره x_1 وA_2 عددا من المرات قدره x_2 و... وA_S عددا من المرات قدره x_S هو[3]:

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_\mathrm{S}) \rightsquigarrow M(n;\ P_i)_{i:\overline{1-S}}$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_S = x_S) = \frac{n!}{x_1!\ x_2! \cdots x_S!} P_1^{x_1}\ P_2^{x_2} \cdots P_S^{x_S}$$

$$= C_n^{x_1 x_2 \cdots x_S} \prod_{i=1}^{S} P_i^{x_i}$$

حيث: $\sum_{i=1}^{S} x_i = n,\ x_i \in \mathbb{N},\ S \in \mathbb{N},\ n \neq 0,\ \sum_{i=1}^{S} P_i = 1$

ويكون الأمل الرياضي والتباين هنا (مع X_i متغيرة عشوائية تتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين: n وp_i) :

$$E(X_i) = n\, p_i\ ;\quad V(X_i) = n\, p_i\, q_i\ ;\quad avec\quad q_i = 1 - p_i$$

- **ملاحظة** (**1**): لما S=2 نكون أمام توزيع بينوميال.
- **ملاحظة** (**2**) بالنسبة إلى التوفيقة المذكورة $C_n^{x_1 x_2 \cdots x_S}$ يتم سحب توفيقة ذات x_1 من n، يتبقى n-x_1 نسحب منها توفيقة ذات x_2 عنصر، ليتبقى n-x_1-x_2 نسحب منها توفيقة ذات x_3 عنصر، وهكذا إلى غاية سحب توفيقة ذات x_S عنصر من n-x_1-x_2-…-x_{S-1} عنصر. أي أن داخل الزمرة n_i لايهمنا الترتيب، غير أن الترتيب يبقى بين الزمر فيما بينها فقط. ويمكن التعبير عنه رياضيا بالشكل التالي:

$$C_n^{x_1} C_{n-x_1}^{x_2} C_{n-x_1-x_2}^{x_3} \cdots C_{n-x_1-x_2-\cdots-x_{S-1}}^{x_S}$$

$$= \frac{n!}{(n-x_1)!\,x_1!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{(n-x_1-x_2)!\,x_2!} \cdot \frac{(n-x_1-x_2)!}{(n-x_1-x_2)!\,x_3!} \cdots \frac{(n-x_1-x_2-\cdots-x_{S-1})!}{(n-x_1-x_2-\cdots-x_S)!\,x_S!}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,x_2! \cdots x_S!}$$

لأن الحد الأول في الكسر الأول يختزل مع البسط في الكسر الثاني وهكذا إلى غاية الكسر الأخير. وكذلك المقدار في مقام الكسر الأخير: $(n - x_1 - x_2 - \cdots - x_S)! = 0! = 1$.

- **مثال:** نرمي حجر نرد متوازن ومتجانس 8 مرات، فما هو إحتمال الحصول على الرقم 5 مرتين والرقم 6 مرتين وباقي الأرقام مرة واحدة فقط ؟
- **الحل:**

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_6) \rightsquigarrow M(8;\ P_i = \frac{1}{6})_{i:\overline{1-6}}$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 2, X_6 = 2)$$

$$= \frac{8!}{1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 2!\ 2!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\approx 0.006$$

4- قانون "بواسون" : loi de Poisson*

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع قانون توزيع بواسون ذو الوسيط λ إذا كانت دالة كتلته الإحتمالية تكتب بالشكل التالي[4]:

$$X \rightsquigarrow \rho(\lambda):$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x\,!} \quad ; x \in \mathbb{N} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$$

و يكون بذلك:

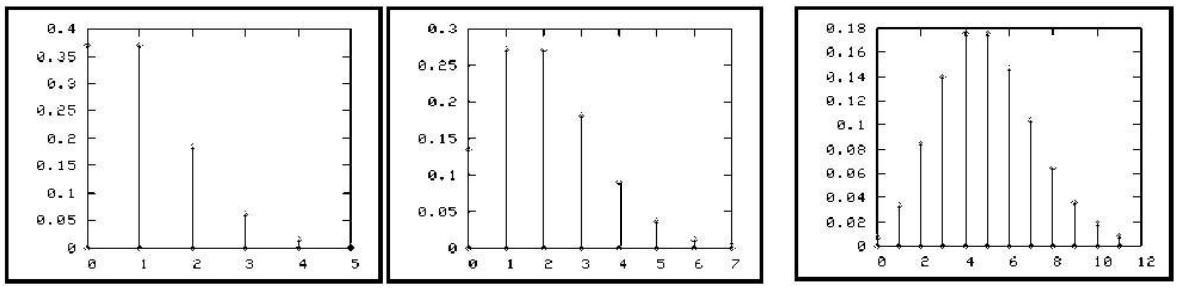
$$E(X) = V(X) = \lambda$$

- **ملاحظة:**

1- التجارب التي تنتج قيما لمتغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح التي تحدث خلال فترة زمنية أو في خلال منطقة محددة، تسمى بتجارب بواسون. ويعنى بالحوادث النادرة الوقوع.

2- إذن يكفي تقدير قيمة λ ، وهو متوسط عدد الحوادث التي تحدث خلال الفترة المحددة، لإيجاد الإحتمالات لمختلف قيم X (في نفس هذه الفترة).

3- يتغير شكل التوزيع حسب قيم الوسيط لامدا، ويكون تمثيل دالة الكتلة الإحتمالية كما في الشكل الموالي، بافتراض بعض قيم لامدا فقط، ونلاحظ أنه كلما كان لامدا كبيرا اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي (توزيع مستمر)، ونتكلم عن التوزيع الطبيعي وشروط التقارب في الفصل الرابع [5]:



$\lambda = 1$ ... $\lambda = 5$ ... $\lambda = 10$ ...

- **مثال:** إذا كان أحد البنوك يستلم بمعدل 6 شيكات بدون رصيد في اليوم، أوجد إحتمال أن يستلم 4 شيكات بدون رصيد في اليوم ؟ وماهو إحتمال أن يستلم أقل من 3 شيكات بدون رصيد في اليوم ؟
- **الحل:** إذن متوسط الشيكات المستلمة والتي بدون رصيد في اليوم يمثل الأمل الرياضي أو لامدا وهو 6 أي :

* سيميون دونيز بواسون Siméon-Denis Poisson (1781-1840) فيزيائي و رياضي الفرنسي.

- $X \rightsquigarrow \rho(6)$

$$P(X=x)=\frac{6^x\, e^{-6}}{x\,!} \quad ; x=0;1;2;\cdots;6$$

- $P(X=4)=\frac{6^4\, e^{-6}}{4\,!}=0.134$
- $P(X\leq 3)=\sum_{x=0}^{3}\frac{6^x\, e^{-6}}{x\,!}=\frac{6^0\, e^{-6}}{0\,!}+\frac{6^1\, e^{-6}}{1\,!}+\frac{6^2\, e^{-6}}{2\,!}+\frac{6^3\, e^{-6}}{3\,!}=0.151$

- **تقريب قانون ذي الحدين إلى قانون بواسون:**

كثيرا ما نجد بعض الصعوبات في إجراء الحسابات عن طريق قانون بينوميال (ذي الحدين) عندما يكون عدد التجارب كبيرا (حساب التوفيقة صعب)، لذا فاستعمال خاصية التقارب بين توزيع بينوميال وقانون بواسون يعد طريقة عملية ومجدية نظرا لكون أن توزيع ذي الحدين يؤول إلى توزيع بواسون كلما كان عد التجارب كبيرا (وعمليا لما $n \geq 30$) وكذا عندما يكون إحتمال النجاح صغيرا (وعمليا لما $p \leq 0.1$) وبالتالي الأمل الرياضي لتوزيع ذي الحدين $E(X)=n\,p$ يصبح يمثل الوسيط لامدا في قانون بواسون، ونعبر عن هذا رياضيا كما يلي[6]:

$$si \quad X \rightsquigarrow B(n;p)\ et\ \begin{cases} n \geq 30 \\ p \leq 0.1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow B(n;p) \rightsquigarrow \rho(\lambda) \quad avec:\ \lambda = n \cdot p$$

- **مثال:**

إذا كان لدينا:

$$X \rightsquigarrow B(30;0.1):\ P(x)=C_{30}^{x}(0.1)^x(0.9)^{30-x} \ ;\ x=0;1;2;\cdots;30$$
$$\Rightarrow B(30;0.1) \rightsquigarrow \rho(\lambda)\ ;\ \lambda = 30\times 0.1 = 3$$
$$X \rightsquigarrow \rho(3):\quad P(x)=\frac{3^x e^{-3}}{x!} \ ;\ x=0;1;2;3;\cdots$$

من أجل $x=1$ مثلا:

$$P(X=1)=C_{30}^{1}(0.1)^1(0.9)^{29}=0.141$$
$$P(X=1)=\frac{3^1 e^{-3}}{1!}=0.149$$

ونلاحظ إقتراب النتيجتين من بعضهما وتزيد دقة التقارب كلما كان n كبيرا جدا وp صغيرا جدا.

5- القانون الهندسي: la loi Géométrique

إن تكرار تجربة برنولي (بصفة مستقلة)، إلى غاية الحصول على أول نجاح فقط، وبتسمية X متغيرا عشوائيا يعبر عن رقم المحاولة التي يحدث فيها هذا النجاح، يكون بهذا X المتغير العشوائي يتبع قانون توزيع إحتمالات يدعى بالتوزيع الهندسي، ونقول عن X أنه يتبع التوزيع الهندسي ذو الوسيط p إذا كانت دالة كتلته الإحتمالية تكتب بالشكل[7]:

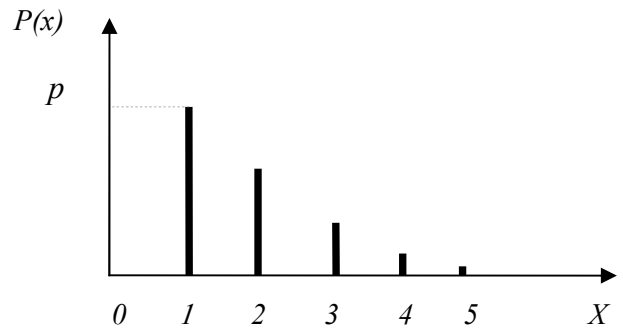
$$X \rightsquigarrow G(p)$$

$$P(X = x) = p\, q^{x-1} \quad ; q = 1 - p\,; \quad x \in \mathbb{N}^*$$

أهم الخصائص العددية للتوزيع الهندسي:

$$E(X) = \frac{1}{p}\;;\; V(X) = \frac{q}{p^2}$$

يكون التمثيل البياني لهذا القانون كما يلي:



- **مثال:** يقدر إحتمال تشغيل سيارة قديمة بنجاح 0.7 ، فما هو إحتمال تشغيلها بنجاح من المرة الرابعة ؟
- **الحل:**

لدينا احتمال النجاح $P=0.7$ ومنه احتمال الفشل هو $q=0.3$ أي المتممة ومنه يكون:

- $X \rightsquigarrow G(0.7)$

$$P(X = x) = (0.7)\,(0.3)^{x-1} \quad ; x \in \mathbb{N}^*$$

- $P(X = 4) = (0.7)\,(0.3)^{4-1} = 0.018$

لو نريد إظهار السلوك المتناقص للاحتمالات (كما في التمثيل البياني السابق) لهذا التوزيع، نقوم ببعض الحسابات من أجل قيم X من 1 فأكثر والنتائج تظهر في الجدول الموالي:

X	1	2	3	4	5	...
P(x)	0.7	0.21	0.063	0.018	0.005	...

نلاحظ النزول السريع لقيمة الإحتمالات وبالطبع فمجموعها يساوي الواحد، ولكن إذا كانت السيارة جيدة حيث $p=0.95$ فإن:

X	1	2	3	4	...
$P(x)$	0.95	0.0475	0.002375	0.00011875	...

6- القانون ما فوق الهندسي la loi Hypergéométrique

عدد مرات النجاح x، في عينة حجمها n من مجتمع حجمه N، حيث يوجد m من مرات النجاح الممكنة وتقابلها N-m من المرات المكنة للفشل، يمثل متغيرا عشوائيا يتبع قانون توزيع ما فوق الهندسي وتكتب دالة كتلته الإحتمالية كما يلي[8]:

$$X \rightsquigarrow H(N;m;n):$$

$$P(X=x)=\frac{C_m^x\ C_{N-m}^{n-x}}{C_N^n}\ ;x=0;1;2;\cdots;Min(m;n)\ ;N\in\mathbb{N}^*;\ (m;n)\in\{1;2;\cdots;N\}^2$$

التوقع والتباين هما:

$$E(X)=\frac{n\cdot m}{N}\ ;\quad V(X)=\frac{n\cdot m\cdot(N-n)\cdot(N-m)}{N^2\cdot(N-1)}$$

تتميز التجارب من هذا النوع بعدم الإرجاع في حالة تجارب السحب، أو بعبارة أخرى أعم هي تجارب غير مستقلة، (أي أن الإحتمال p والذي لا يظهر في دالة الكتلة الإحتمالية بصفة مباشرة، يكون غير ثابت من تجربة إلى أخرى على عكس تجارب ذي الحدين).

- **مثال:** وصلت إلى مخازن أحد المؤسسات طلبية تتكون من 20 مصباحا من نوع خاص، منها 5 تالفة ولا نستطيع تمييزها من الصالحة، قام مراقب النوعية بالمؤسسة بسحب 10 مصابيح لأجل معاينتها، فما هو إحتمال أن يجد مصباحين تالفين ؟ ثم أحسب الأمل الرياضي والتباين لعدد المصابيح التالفة.
- **الحل:**

نسمي X متغيرا عشوائيا متقطعا يمثل عدد المصابيح التالفة في العينة المسحوبة.

ومن المعطيات لدينا: $N=20\ ;\ m=5\ ;\ n=10$ والسحب كان بدون إرجاع ومنه:

- $X \rightsquigarrow H(20;5;10)$:

$$P(X=x)=\frac{C_5^x\ C_{15}^{10-x}}{C_{20}^{10}}\ ;\ x=0;1;2;\ 3;4;5\ .$$

- $P(X=2)=\frac{C_5^2\,C_{15}^{10-2}}{C_{20}^{10}}=\frac{C_5^2\,C_{15}^{8}}{C_{20}^{10}}=0.348$
- $E(X)=\frac{n\cdot m}{N}=\frac{10\times5}{20}=2.5$
- $V(X)=\frac{n\cdot m\cdot(N-n)\cdot(N-m)}{N^2\cdot(N-1)}=\frac{10\times5\times(20-10)\times(20-5)}{N^2\times(20-1)}=0.98$

- **تقريب التوزيع ما فوق الهندسي بتوزيع ذي الحدين:**

إذا كان لدينا متغيرا عشوائيا يتبع القانون ما فوق الهندسي وكانتا n و m صغيرتان جدا من N، فإن إحتمالات النجاح في كل سحبة تتغير بشكل ضئيل جدا (للتذكير هي تجارب غير مستقلة) ويمكن لها أن تكون تقريبا جيدا لتوزيع ذي الحدين بوضع $p=\frac{m}{N}$ ونكتب[9]:

$$si\ \ n\ll N:\ \frac{n}{N}\ll 0.1\ \ et\ \frac{m}{N}\ll 0.1$$

$$H(N;m;n)\rightsquigarrow B(n;p)$$

$$avec\quad p=\frac{m}{N}$$

أي أن المتغير العشوائي X يصبح:

$$X\rightsquigarrow B(n;\ p)$$

$$E(x)=n\,p=n\frac{m}{N}\ \ ;\ \ V(X)=n\,p\,q=n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$$

- **ملاحظة:** بالنسبة إلى التباين يختلف عن تباين القانون ما فوق الهندسي الأصلي بمقدار $\frac{N-n}{N-1}\approx 1$ لأن $n\ll N$.

وبالتالي: $V(X)_H\approx V(X)_B\ \ si\ \ n\ll N$

- **مثال:** إذا كان لدينا

$$X\rightsquigarrow H(100\,000;100;10)$$

$$P(X=x)=\frac{C_{100}^{x}\,C_{99\,900}^{10-x}}{C_{100\,000}^{10}}\ \ ;\ \ x=0;1;2;\cdots;10$$

نريد حساب $P(X=2)$ مثلا:

نلاحظ أن العملية صعبة الحساب ومطولة لذلك نستخدم خاصية التقارب بين القوانين

$$H(100\,000; 100; 10) \rightsquigarrow B(10; \frac{100}{100\,000})$$

$$X \rightsquigarrow B(10; 0.001):$$

$$P(X = x) = C_{10}^{x}(0.001)^{x}\,(0.999)^{10-x} \quad ; x = 0; 1; 2; \cdots; 10$$

نريد الآن حساب $P(X = 2)$ مثلا:

$$P(X = 2) = C_{10}^{2}(0.001)^{2}(0.999)^{8} \approx 4.46 \cdot 10^{-5} = 0.0000446$$

7- التوزيع ما فوق الهندسي المتعدد loi Multi-hypergéométrique

إذا كانت N من الأشياء يمكن تقسيمها إلى k من التقسيمات $A_1, A_2, \ldots A_k$ وفي كل منها $a_1, a_2, \ldots, a_k$ من العناصر بالترتيب، فإن التوزيع الإحتمالي للمتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_k$ التي تمثل عدد العناصر المختارة من $A_1, A_2, \ldots A_k$ عشوائيا من عينة حجمها n (بدون إرجاع أي التجارب غير مستقلة) هو[10]:

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_\mathrm{S}) \rightsquigarrow MH(N;\ a_i\ ; n)_{i:\overline{1-k}}$$

$$P(X_1 = x_1;\ X_2 = x_2;\ \cdots; X_k = x_k) = \frac{C_{a_1}^{x_1}\, C_{a_2}^{x_2} \cdots C_{a_k}^{x_k}}{C_N^n} \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = N\ ;\ \sum_{i=1}^{k} x_i = n\ ;\ x_i \in \mathbb{N}$$

التباين والأمل الرياضي:

$$E(X_i) = \frac{n \cdot a_i}{N}\ ;\ V(X_i) = \frac{n \cdot a_i \cdot (N-n) \cdot (N-a_i)}{N^2 \cdot (N-1)}$$

- **ملاحظة:** من أجل $k=2$ نكون أمام التوزيع ما فوق الهندسي العادي.
- **مثال:** إفترض أن هناك مجموعة تتكون من 10 أشخاص كانت فصيلة دمهم كما يلي:

نوع الفصيلة الدموية	O	A	B	المجموع
عدد الأشخاص	3	4	3	10

تم أخذ عينة تتكون من 5 أشخاص منهم بدون إعادة، ما هو إحتمال أن تحوي هذه العينة على شخص واحد فصيلة دمه O، وشخصين فصيلتهم A، وشخصين فصيلتهم B ؟

- **الحل:** نلخص المعطيات في الجدول التالي:

x_i	a_i	الفصيلة
1	*3*	$O \equiv A_1$
2	*4*	$A \equiv A_2$
2	*3*	$B \equiv A_3$
n=5	*N=10*	المجموع

- $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_\mathrm{S}) \rightsquigarrow HG[10; (3,4,3)\ ; 5]$:

$$P(X_1 = x_1;\ X_2 = x_2; X_3 = x_3) = \frac{C_3^{x_1}\ C_4^{x_2}\ C_3^{x_3}}{C_{10}^5}\ \ ;\ \sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$

- $P(X_1 = 1;\ X_2 = 2; X_3 = 3) = \frac{C_3^1\ C_4^2\ C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{3}{14} = 0.2142$

8- القانون ثنائي الحد السالب (توزيع باسكال) la loi Binomiale Négative

إذا كان لدينا مجموعة من تجارب برنولي المستقلة (p ثابت)، وكان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد التجارب التي نقوم بها إلى غاية الوصول إلى عدد محدد من النجاحات وليكن r ، أي أن آخر تجربة تكون نتيجتها نجاح ثم نتوقف، في هذه الحالة نقول عن X أنه يتبع قانون ثنائي الحد السالب أو العكسي (يسمى أيضا قانون باسكال)، أي أن من حيث المبدأ يكون مشابها لقانون ثنائي الحد ولكن المسألة هنا هي تحديد عدد التجارب وليس معلوما كما في قانون ثنائي الحد (يمثل الوسيط n في قانون ثنائي الحد) بل المعلوم هنا –في قانون باسكال– هو عدد التجارب الناجحة أي الوسيط r ، عكس قانون ثنائي الحد الذي يكون فيه عدد التجارب الناجحة مجهولا. وفي كلا القانونين يجب معرفة الوسيط p الذي يمثل إحتمال النجاح في التجربة البارنولية الواحدة.

ونقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع قانون ثنائي الحد السالب إذا كانت دالة كتلته الإحتمالية تكتب من الشكل [11]:

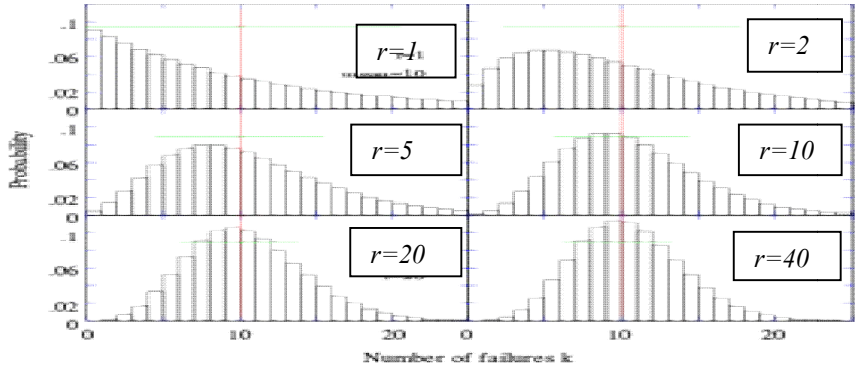
$$X \rightsquigarrow B_N(r\ ;\ p)$$

$$P(X = x) = C_{x-1}^{r-1}\ p^r\ q^{x-r}\ \ ; q = 1 - p\ ;\ x \in \mathbb{N}^*; r \in \mathbb{N}^*\ ; x \geq r\ .$$

حيث يكون:

$$E(X) = \frac{r}{p}\ \ ;\ \ \ V(X) = \frac{r \cdot q}{p^2}$$

ويكون التمثيل البياني في شكله العام (الالتواء) يعتمد على عدد النجاحات r وكلما زاد أصبح التوزيع أكثر تناظرا وبزيادة عدد النجاحات تزداد معه عدد التجارب واقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي وهذا الأخير هو أحد التوزيعات المستمرة الأكثر شهرة على الإطلاق ونأتي على ذكره في الفصل الموالي. والتمثيل البياني التالي بوضح ذلك من أجل قيمة احتمال معينة وعدد مختلف من عدد النجاح 1، 2، 5، 10، 20، 40 على سبيل المثال فقط:



- **ملاحظة:** لما يكون عدد النجاحات عبارة عن نجاح واحد فقط أي أن $r=1$ نكون أمام التوزيع الهندسي (حالة خاصة منه) أي: $B_N(1;p) = G(p)$
- **مثال:** نقوم برمي قطعة نقود متوازنة إلى غاية الحصول على 3 صور، فما هو إحتمال أن يتحقق هذا الهدف خلال 6 رميات ؟

- عدد النجاحات هنا معلوم وهو 3، عدد التجارب مجهول وهو حتما عدد طبيعي وهو أكبر أو يساوي عدد النجاحات 3، التجارب مستقلة بطبيعة الحال ومنه القانون المعني هو قانون توزيع ثنائي الحد العكسي –السالب– ولدينا هنا: $r=3$; $p=1/2$; $q=1/2$ نقوم بالتعويض في التوزيع المعني:

- $X \rightsquigarrow B_N\left(3\,;\frac{1}{2}\right)$:

  $$P(X=x) = C_{x-1}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \quad ;\ x = 3;4;5;\ \cdots.$$

- $P(X=6) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.156$

9- القانون المنتظم المتقطع: la loi Uniforme discrète

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا دالة كتلته الإحتمالية تأخذ قيما ثابتة عند كل القيم x الممكنة، يكون بذلك قانون توزيع هذا المتغير التوزيع المنتظم المتقطع، ونقول عن المتغير العشوائي المتقطع X أنه يتبع القانون المنتظم المتقطع ذو الوسيط n إذا كانت دالة كتلته الإحتمالية تكتب بالشكل[12]:

$$X \rightsquigarrow U(n)$$

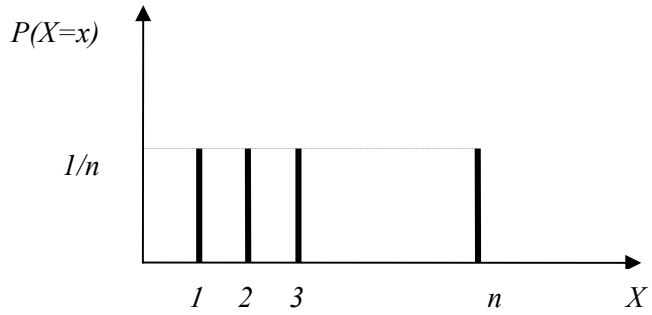
$$P(X = x) = \frac{1}{n} \; ; \quad x: \overline{1 - n}$$

توقع وتباين X يعطى بالعلاقتين :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \; ; \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

n **:** عدد الحالات الكلية.

ويكون التمثيل البياني لدالة الكتلة الإحتمالية كما يلي:



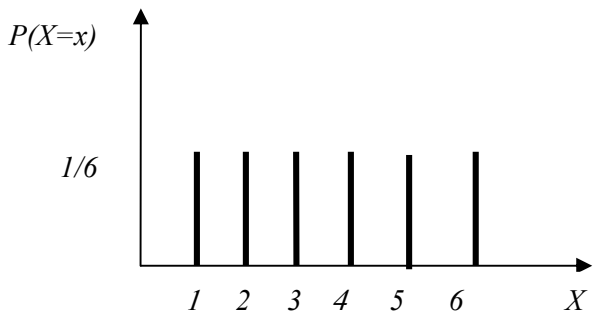
- **مثال:** نرمي زهرة نرد متوازنة، نسمي X متغير عشوائي يمثل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

1. أكتب قانون توزيع الإحتمالات.
2. أحسب $P(X=6)$ و $P(X=1)$
3. مثل بيانيا دالة الكتلة الإحتمالية.

- **الحل:**

- $X \rightsquigarrow U(6)$

  $P(X = x) = \frac{1}{6} \; ; \quad x: \overline{1 - 6}$
- $P(X = 1) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$



تمارين

- **التمرين 01**: في حقل لإطلاق النار، إحتمال أن يصيب الجندي الهدف هو « P »، فما هو احتمال أن:

(1) يصيب الهدف مرتان من بين 6 طلقات ؟

(2) يصيب الهدف ثلاثة مرات من بين 6 طلقات ؟

(3) يصيب الهدف أربع مرات على الأكثر من بين 6 طلقات ؟

- إذا **قدرت** قيمة هذا الاحتمال بـ 0.45، وإذا أطلق هذا الجندي 5 طلقات، فأوجد:

(1) التوزيع الاحتمالي لعدد المرات التي يصيب فيها الهدف.

(2) ما احتمال ان يصيب الهدف مرة أو ثلاثة مرات ؟ ثم أحسب القيمة المتوقعة.

- **التمرين 02**: يصيب صياد هدفه 3 مرات من بين 5 رميات، فما هو العدد الأدنى من الرميات اللازمة حتى يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل بإحتمال أكبر من 0.97 ؟

- **التمرين 03**: إذا تم إختيار 4كرات وبدون إعادة من كيس به 3 كرات حمراء و 7 كرات خضراء، وعرفنا المتغير العشوائي X على أنه عدد الكرات الحمراء في العينة المسحوبة.

(1) ما هو قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، مع كتابة دالة كتلة إحتماله ؟

(2) أوجد قيم الاحتمالات التالية: $P(X=4)$, $P(2 \le X < 3)$, $P(X \ge 2)$, $P(0 \le X \le 2)$.

(3) أوجد القيمة المتوقعة وتباين المتغير العشوائي X .

- **التمرين 04**: تتكون إحدى المؤسسات من 100 عامل، 90 % من عمال هذه المؤسسة من غير الإطارات، إخترنا عشوائيا لجنة من 12 فردا، نعرف المتغير العشوائي X بعدد الاطارات في اللجنة.

(1) أوجد دالة قانون التوزيع الاحتمالي لـ X .

(2) ما احتمال أن تحتوي هذه اللجنة على أكثر من إطار واحد ؟

(3) أوجد التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير ؟

- **التمرين 05**: مصنع به 10 رجال و5 نساء، أخذت منه عينة حجمها 20 %.

أ. نعتبر أن X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الرجال في العينة المسحوبة :

(1) ما هو احتمال أن تكون من رجلين وامرأة ؟

(2) ما هو احتمال أن تكون من النساء فقط ؟

ب. نعتبر الآن أن Y متغيرا عشوائيا يمثل عدد النسائ في العينة المسحوبة، أجب على السؤالين السابقين.

- **التمرين 06**: شركة لإنتاج نوع من الشيكولاطة أنتجت 10 000 قطعة مغلفة، منها 100 قطعة تحمل علامة غير ظاهرة لربح جائزة واحدة، فإذا إشتريت من أحد الموزعين 10 قطع، فما هو إحتمال أن تكسب جائزتين ؟
[إستعمل تقريب قانون ما فوق الهندسي بذي الحدين]
- **التمرين 07**: تجري مصلحة المستخدمين لمؤسسة مقابلات لغرض توظيف مهندسين (2)، احتمال تشغيل شخص تمت مقابلته قدر بـ 0.8،
(1) ما احتمال أن تتم مقابلة 4 مترشحين؟
(2) ما احتمال مقابلة أقل من 4 مترشحين؟
- **التمرين 08**: إذا كانت لدينا قطعة نقدية معدنية غير متزنة، حيث إحتمال ظهور الرقم هو: 2/5 ، وبفرض أنه تم إلقاء هذه القطعة حتى ظهور الوجه، فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد المحاولات المطلوبة لظهور الوجه لأول مرة، فأوجد:
(1) التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.
(2) احتمال الحصول على الوجه في الرمية الثانية أو الثالثة.
(3) القيمة المتوقعة والتباين لـ X .
- **التمرين 09**: سجلت مصلحة الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات بين الساعة $19^h:00$ و$20^h:00$ دخول 120 مريض لهذه المصلحة، فما احتمال أن يتم بين $19^h:21$ و$19^h:22$ دخول:
(1) ولا مريض ؟
(2) مريض واحد ؟
(3) مريضان ؟
(4) على الأقل مريضان ؟
(5) ثلاث أو أربع مرضى ؟
- **التمرين 10**: تتلقى وكالة سياحية ما متوسطه 3.6 من المكالمات الهاتفية خلال دقيقتين، فما احتمال أن تتلقى هذه الوكالة بين، $11^h:54$ و$11^h:55$:
(1) ولا مكالمة هاتفية ؟
(2) مكالمة واحدة ؟
(3) مكالمتين على الأقل ؟
(4) مكالمتين على الأكثر ؟
(5) ثلاث مكالمات أو أربعة ؟

- **تمرين 11**: في نقطة مرورية كتب أحد المهندسين تقريرا بأن 75 % من السيارات التي تعبر الطريق هي سيارات من داخل المدينة.

– ما هو إحتمال أنه على الأقل ثلاثة سيارات من خمسة سيارات قادمة إلى الطريق ستكون من خارج المدينة ؟ [الحل: 0.1035]

- **التمرين 12**: أظهرت نتائج الاصطياف للموسم الماضي أن عدد المتوفين غرقا كان 5 من كل 100 000 مصطاف، وكان عدد المصطافين 400 000 مصطاف، والمطلوب إيجاد احتمال:

[إستعمل تقريب ذي الحدين بقانون: Poisson]

(1) عدم وقوع حالات غرق بين المصطافين ؟

(2) أن يغرق ثلاث مصطافين ؟

(3) خمسة غرقى أو أقل من ثلاث غرقى ؟

- **مراجع وإحالات الفصل الثالث**:

[1] DRESS F., « Les probabilités et la statistique » DUNOD, France, p 18.

[2] CANTONI E ., HUBER P., RONCHETTI E. « Maîtriser l'aléatoire : *exercices résolus de probabilités et statistique* » Springer, 2006, France, p 23.

[3] بارا ج. ر.، بيل أ. "مسائل في الإحصاء الرياضي" ترجمة: محمد بن حلي، الهيئة القومية للبحث العلمي، ط1، 1975، ليبيا، ص 23.

[4] METIVIER M. « Notions Fondamentales de la théorie de probabilités : *Maîtrises de mathématiques* » DUNOD, 2eme éd., 1972, France, p 26.

[5] مبارك اسبر ديب، "مبادئ في الاحتمالات والإحصاء" جامعة تشرين، كلية العلوم، 2009/2008، سوريا، ص 169.

[6] POSIER J-P «Mathématiques Appliquées a la Gestion» collection les zoom's ; Gualino éditeur, 2005, France, P 263.

[7] مجدي الطويل "الإحتمالات-النظرية والتطبيق" دار النشر للجامعات، 2009، مصر، ص 140.

[8] دومينيك سالفاتور "الإحصاء والإقتصاد القياسي" مترجم، د. م. ج.، الجزائر، ص62.

[9] مجدي الطويل، مرجع سابق، ص 132.

[10] مجدي الطويل، مرجع سابق، ص 129.

[11] مجدي الطويل، مرجع سابق، ص 139.

[12] دلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي "الإحصاء للإداريين والإقتصاديين" دار الحامد، 2003، الأردن، ص 188.

الفصل الرابع

قوانين التوزيع المستمرة

تمهيد:

نتطرق في هذا الفصل إلى أشهر التوزيعات الإحتمالية المتعلقة بالمتغيرات المستمرة، لنتعرف على دوال الكثافة لهذه المتغيرات وأهم الخصائص العددية لها، وكذا طرق حساب الإحتمالات سواء المباشرة أو تلك التي تعتمد على الجداول الإحصائية الخاصة بهذا الغرض والتي تعد توزيعات خاصة وذات إستعمالات واسعة في مجال الإقتصاد القياسي والإستدلال الإحصائي على سبيل المثال لا الحصر، نظرا لأهمية استخراج الإحصاءات الخاصة بها. كما نوضح أهم الخصائص العددية لها وكذا أشكالها البيانية وأهمية هذه الأشكال في تعريف الباحث بمدى التقارب بين التوزيعات الإحتمالية. وفي نهاية الفصل خصصنا بندا لنظرية النهاية المركزية والتي لها إستخدامات واسعة في الإستدلال الإحصائي وخاصة عند مجهولية التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات وكبر حجم العينة.

1- القانون المنتظم المستمر: la loi Uniforme continue

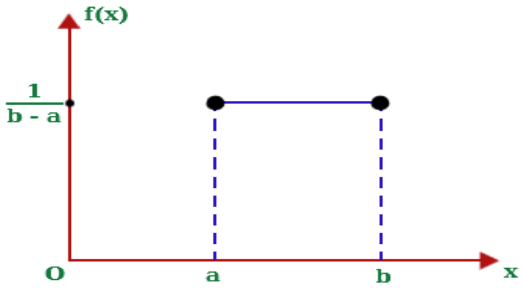
إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا، دالة كثافته تأخذ قيما ثابتة على طول مجال ما، نقول أنه يتبع القانون المنتظم ذو الوسيطين a وb واللتان تمثلان حدود هذا المجال ونكتب[1]:

$$X \rightsquigarrow U[a;\ b]$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \le x \le b \\ 0 & si\ \ non \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}\ ;\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ويكون شكل دالة الكثافة الإحتمالية كما يلي:



- **مثال:**

إتفق صديقان أن يلتقيا في الجامعة، في حدود الساعة 10:00 إلى 10:30، فما هو إحتمال حدوث لقائهما قبل الساعة 10:15 ؟ ثم أوجد دالة التوزيع التراكمية.

- **الحل:** لدينا فترة الاتفاق تمتد إلى 30 دقيقة ومنه:

$$X \rightsquigarrow U[0;\ 30]$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & si\ 0 \le x \le 30 \\ 0 & si\ \ non \end{cases}$$

$$P(X \le 15) = \int_0^{15} \frac{1}{30}\, dx = \left[\frac{x}{30}\right|_0^{15} = 0.5$$

إيجاد دالة التوزيع:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & si \quad x \le a \\ \dfrac{x}{30} & si\ \ a \le x \le b \\ 1 & si \quad x \ge b \end{cases}$$

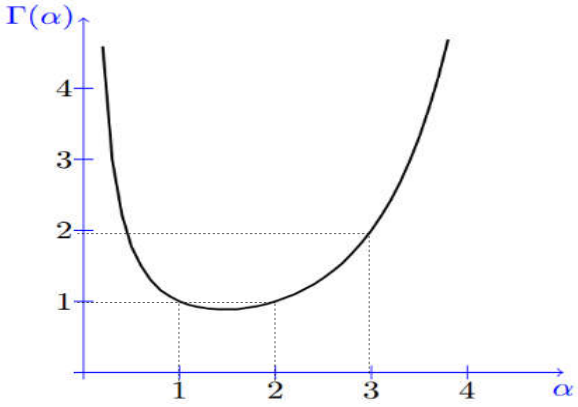
2- قانون توزيع قـامـا loi Gamma

من المهم قبل التطرق إلى توزيع قاما أن نعرف أحد الصيغ الشهيرة لدالة قاما وكذا التطرق إلى بعض خصائصها كدالة تعمم لنا مفهوم العاملي في الرياضيات.

2-1- تعريف دالة قاما: (صيغة Euler) : الصيغة الرياضية لدالة "قاما" تكتب بالشكل[2]:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \quad ; x \in \mathbb{R} \; ; \; \alpha > 0$$

التمثيل البياني للدالة إذا كانت **ألفا أكبر من الصفر** فقط (لا تهمنا المجالات الأخرى) كما يلي:



2-2- بعض خصائص دالة Gamma:

تكمن الأهمية الرياضية لدالة قاما في كونها تعد تعميما لقانون العاملي حيث يمكن حساب هذا الأخير حتى للأعداد العشرية، ونذكر بعض الخصائص المهمة فيما يلي:

- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \; ; \; \forall\, \alpha > 1$
- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\,!$
- $\Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(1) = 0\,! = 1$

2-3- قانون توزيع Gamma:

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع قانون توزيع قاما إذا كانت دالة كثافة إحتماله تكتب بالشكل التالي[3]:

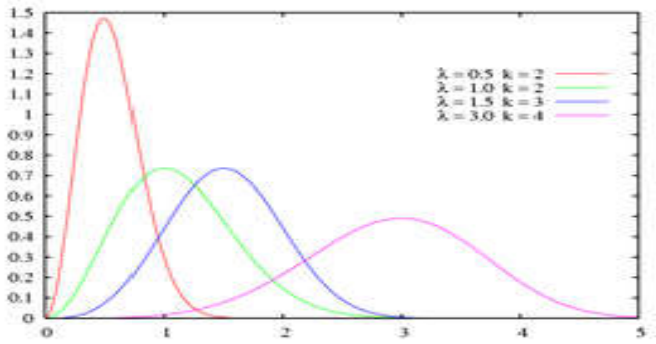
$$X \rightsquigarrow \Gamma(\gamma;\, \lambda):$$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^{\gamma} e^{-\lambda x} x^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad ; x \in \mathbb{R}^{+};\; (\gamma, \lambda) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2;\; \Gamma(\gamma) = (\gamma - 1)\,!$$

الأمل الرياضي وتباين المتغير العشوائي X:

$$E(X) = \frac{\gamma}{\lambda} \; ; \quad V(X) = \frac{\gamma}{\lambda^2}$$

ويتغير شكل دالة الكثافة حسب قيم الوسيطين $(\gamma; \lambda)$ وبأخذ بعض القيم لهما كأمثلة (في الشكل: لامدا وk) نلاحظ التمثيل البياني التالي:



- **مثال تطبيقي:** المدة الزمنية للإعادة تكوين مخزون مؤسسة من مادة ما، تخضع لقانون توزيع gamma، بمتوسط 40 يوما وتباين 400، ما إحتمال تلبية طلب خلال 20 يوما ؟
- **الحل:** من المعطيات نكتب:

$X \rightsquigarrow \Gamma(\gamma; \lambda)$:

$$E(X) = 40 = \frac{\gamma}{\lambda} \implies \gamma = 40\,\lambda$$

$$V(X) = 400 = \frac{\gamma}{\lambda^2} \implies \gamma = 400\,\lambda^2$$

$$40\,\lambda = 400\,\lambda^2 \implies \lambda = 0.1$$

$$\gamma = 40\,\lambda \implies \gamma = 4$$

ومنه:

$X \rightsquigarrow \Gamma(4; 0.1)$:

$$f_X(x) = \frac{(0.1)^4\, e^{-0.1\,x} x^3}{\Gamma(4)} \; ; x > 0$$

- حساب الإحتمال المطلوب (نجد النتيجة بعد إجراء التكامل بالتجزئة 3 مرات والحسابات في البندين المواليين):

$$P(x \leq 20) = \int_0^{20} \frac{(0.1)^4\, e^{-0.1\,x} x^3}{3\,!}\, dx = 0.1423$$

2-4 تذكير بالتكامل بالتجزئة:

إذا كانت u،υ دالتين في x ،[4]

$$(u\,v)' = u'\,v + v'\,u \Leftrightarrow \int (u\,v)' = \int u'\,v + \int v'\,u$$
$$\Leftrightarrow u\,v = \int u'\,v + \int v'\,u$$
$$\Leftrightarrow \int u\;v' = u\,v - \int u'v$$

أما إذا كان التكامل محدودا فإن:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}' = [\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} - \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{v}$$

4-2 حساب التكامل بالتجزئة للمثال التطبيقي السابق:

$$P(x \le 20) = \int_0^{20} \frac{(0.1)^4\, e^{-0.1\,x}\;x^3}{3\,!}\,dx$$
$$= \frac{0.1^4}{3!}\int_0^{20} x^3\, e^{-0.1\,x}\,dx$$

نضع ونحسب على حدى:

$$\mathcal{A} = \int_0^{20} x^3\, e^{-0.1\,x}\,dx$$
$$\begin{cases} u = x^3 & \Rightarrow \quad u' = 3\,x^2 \\ v' = e^{-0.1\,x} & \Rightarrow\; v = -10e^{-0.1\,x} \end{cases}$$
$$\mathcal{A} = \left[-10\, e^{-0.1\,x}\, x^3|_0^{20} - \int_0^{20} 3\,x^2\,(-10\, e^{-0.1\,x})\,dx\right.$$
$$= -10826.82 + 30\int_0^{20} x^2\, e^{-0.1\,x}\,dx$$

نضع ونحسب على حدى:

$$\mathcal{B} = \int_0^{20} x^2\, e^{-0.1\,x}\,dx$$
$$\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow \quad u' = 2\,x \\ v' = e^{-0.1\,x} & \Rightarrow\; v = -10e^{-0.1\,x} \end{cases}$$
$$\mathcal{B} = \left[-10\, e^{-0.1\,x}\, x^2|_0^{20} - \int_0^{20} 2\,x\;(-10\, e^{-0.1\,x})\,dx\right.$$
$$= -541.34 + 20\int_0^{20} x\;e^{-0.1\,x}\,dx$$

نضع ونحسب على حدى:

$$\mathcal{C} = \int_0^{20} x\;e^{-0.1\,x}\,dx$$

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad u' = 1 \\ v' = e^{-0.1\,x} & \Rightarrow \; v = -10e^{-0.1\,x} \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \left[-10\,e^{-0.1\,x}\,x|_0^{20} - \int_0^{20} -10\,e^{-0.1\,x}\;dx\right.$$
$$= -27.06 + 10\int_0^{20} e^{-0.1\,x}\;dx$$
$$= -27.06 + 10\,[-10\,e^{-0.1\,x}\,|_0^{20}$$
$$= -27.06 + 10\,(8.64)$$
$$\mathcal{C} = 59.34$$

الآن نعوض النتائج المحصل عليها سابقا:

$$\mathcal{B} = -541.34 + 20\,(59.34) = 645.46$$
$$\mathcal{A} = -10826.82 + 30\,(645.46) = 8536.98$$
$$P(x \leq 20) = \frac{0.1^4}{3!}\,(8536.98) = 0.1423$$

إذن نسبة تحقيق الطلب هي 14.23 %

5-2 تقريب Stirling لـ $n!$:

$$n \rightsquigarrow +\infty \;:\; n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi\,n}$$

- **مثال:** أحسب ! 50 مستعملا تقريب ستيرلينغ :

$$50! \approx \left(\frac{50}{e}\right)^{50} \sqrt{2\,\pi\,50}$$
$$\approx 50^{50}e^{-50}(100\,\pi)^{1/2}$$
$$ln(50!) \approx ln\left(50^{50}e^{-50}(100\,\pi)^{1/2}\right)$$
$$\approx 50\,ln(50) - 50\,ln(e) + \frac{1}{2}\,ln(100\,\pi)$$
$$\approx 195.601150 - 50 + 2.87495004$$
$$ln(50!) \approx 148.4761$$
$$\Rightarrow 50! = e^{148.4761}$$

3- قانون توزيع بيتا: loi Beta

3-1- دالة Beta : تعطى الصيغة الرياضية لدالة بيتا بالشكل التالي[5]:

$$\beta(a;b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\;dx \;\; ;(a;b) \in \mathbb{R}^{*\,+2}$$

3-2- العلاقة بين دالتي Beta وGamma: تعطى العلاقة بين دالتي بيتا وقاما بالعلاقة التالية[6]:

$$\beta(a;b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

3-3- بعض الخواص لدالة بيتا:

- **خاصية 1**:

$$\beta(a;b) = \beta(b;a)$$

ويمكن إستنتاج هذه الخاصية بإجراء التغيير التالي في دالة بيتا: $s = 1 - x$

x	0	1
s	1	0

$$\beta(a;b) = -\int_1^$$

- **خاصية 2**:

$$\beta(1;b) = \frac{1}{b}$$

- **خاصية 3**:

$$\beta(a+1;b) = \frac{a}{b}\beta(a;b+1) \quad \text{أو} \quad \beta(a;b+1) = \frac{b}{a}\beta(a+1;b)$$

- **خاصية 4**:

$$\beta(a+1;b) + \beta(a;b+1) = \beta(a;b)$$

- **خاصية 5**:

$$\beta(a+1;b) = \frac{a}{a+b}\beta(a;b)$$

3-4- قانون توزيع Beta:

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع قانون توزيع Beta ذو المعلمتين a وb إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية تكتب من الشكل[7]:

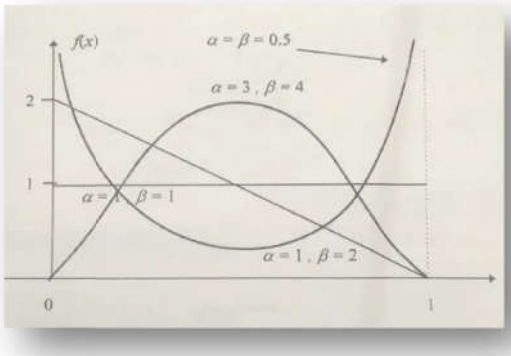
$$X \rightsquigarrow \beta(a;\ b):$$

$$f(x) = \frac{x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}}{\beta(a;b)} \ ;x \in [0;1]$$

الخصائص العددية للتوزيع:

$$E(X) = \frac{a}{a+b} \ ; \quad V(X) = \frac{a\,b}{(a+b)^2\,(a+b+1)}$$

من خلال التمثيل البياني لدالة الكثافة الإحتمالية يتضح لنا تغير شكلها حسب قيم المعلمتين a وb ، وتكون دالة الكثافة معرفة في المجال $x \in [0;1]$



- **ملاحظات**:

– يؤول توزيع بيتا إلى توزيع منتظم لما $a=b=1$

– يؤول توزيع بيتا إلى توزيع خطي لما $a=1$ و $b=2$

– يؤول توزيع بيتا إلى توزيع قاما لما b تؤول إلى المالانهاية و a محدودة القيمة.

- **مثال (1)**: أحسب ما يلي:

$$B(1;n)\ ;\quad B(3;2)\ ;\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx\quad ;\quad \int_0^1 x\,(1-x)\,dx$$

- $B(1;n)=\frac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}=\frac{0!(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$
- $B(3;2)=\frac{2!1!}{4!}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$
- $\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx=B(5;4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280}$
- $\int_0^1 x\,(1-x)\,dx=B(2;2)=\frac{1!1!}{3!}=\frac{1}{6}$

- **مثال (2)**: أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x)=\begin{cases}6(1-x)^5\ ; & 0<x<1\\ 0 \quad\quad ; & si\ non\end{cases}$$

من المثال السابق لدينا: $B(1;n)=\frac{1}{n}$ ومنه : $\frac{1}{B(1;6)}=6$

بوضع a و b يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن:

$$X \rightsquigarrow \beta(1;\ 6)$$

- $E(X) = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{7} = 0.142$
- $V(X) = \frac{a\,b}{(a+b)^2\,(a+b+1)} = \frac{6}{7^2 8} = \frac{3}{196} = 0.015$

- **مثال (3):** نسبة الإنتاج المباع في مؤسسة تتبع التوزيع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x^2(1-x)\,; & 0 < x < 1 \\ 0 & ;\quad si\ non \end{cases}$$

أحسب النسبة المتوقعة، وماحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35% .

لدينا من المثال السابق: $12 = \frac{1}{B(3;2)}$

ومنه يمكن صياغة القانون السابق كما يلي:

$$X \rightsquigarrow \beta(3;\ 2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(1-x)}{B(3;2)}\,; & 0 < x < 1 \\ 0 & ;\quad si\ non \end{cases}$$

نحسب النسبة المتوقعة:

- $E(X) = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad (60\ \%)$

حساب إحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35%:

$$P(X > 0.35) = \int_{0.35}^{1} 12\,x^2(1-x)\ dx \ \ldots\ldots\ldots (1)$$

يجب استخدام التكامل بالتجزئة:

$$v' = x^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$u = 1 - x \quad \Rightarrow \quad u' = -1$$

$$(1) \quad = 12\left[\left[(1-x)\frac{x^3}{3}\right|_{0.35}^{1} - \int_{0.35}^{1} -\frac{x^3}{3}\ dx\right]$$

$$= 12\left[(-0.0092) + \left[\ \frac{x^4}{12}\right|_{0.35}^{1}\right]$$

$$= 12(-0.0092 + 0.0820)$$

$$P(X > 0.35) = 0.8745$$

4- القانون الأسي: la loi Exponentielle

نقول عن متغيرة عشوائية مستمرة X أنها تتبع القانون الأسي ذو الوسيط لامدا إذا كانت دالة كثافتها تكتب على الشكل التالي[8]:

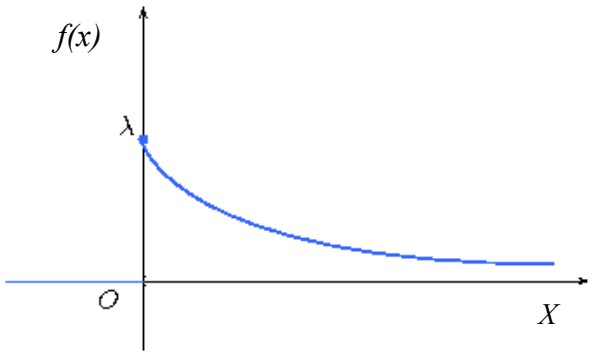
$$X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$$

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad ; x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$$

بعض الخصائص العددية للتوزيع كما جرت العادة:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \; ; \; V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

يكون التمثيل البياني لهذا التوزيع كما يلي:



- **ملاحظة (1)**: يحتل هذا القانون مكانة كبيرة في مسائل التدفق (مثل نظرية الطوابير) والمسائل المتعلقة بالزمن، أي إذا وجد متوسط الفترة الزمنية لظاهرة معينة، فالمتغير العشوائي X الذي يمثل مجال الفترات الأخرى لتحقق الظاهرة، يتبع القانون الأسي.
- **ملاحظة (2)**: القانون الأسي هو حالة خاصة من قانون gamma لما $(\gamma = 1)$ أي:

$$Exp(\lambda) = \Gamma(1;\, \lambda)$$

- **مثال تطبيقي:**

في خط إنتاج للزجاجات الخاصة بالمشروبات الغازية، لوحظ أن معدل إنتظار الحصول على زجاجة غير صالحة للتعبئة هو 3 ثوان، فما هو إحتمال مرور أكثر من 4 ثوان دون ملاحظة زجاجة غير صالحة ؟

- **الحل:**

المعدل: $E(X) = 3 = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{3}$

ومنه:

- $X \rightsquigarrow Exp(1/3)$

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{3}x} \; ; x \geq 0$$

- $P(X > 4) = \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{3}x} \, dx = \left[\frac{1}{3}(-3)e^{-\frac{x}{3}}\right]_4^{+\infty} = 0 - (-0.26) \approx 0.26$

5- القانون الطبيعي: (Laplace-Gauss) la loi Normale

معظم الظواهر الطبيعية تتبع التوزيع الطبيعي ومنه اشتق الاسم ونجد من هذه الظواهر الطول ، الوزن، الانتاج التالف، ... الخ. ونقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع القانون الطبيعي ذو الوسيطين : أمله الرياضي وتباينه على الترتيب، إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية تكتب على الشكل التالي[9]:

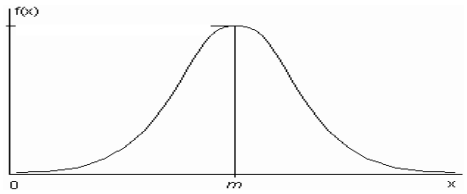
$$X \rightsquigarrow N(\mu \; ; \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; x \in \mathbb{R} \; ; \; \mu \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma \in \mathbb{R}^{*+}$$

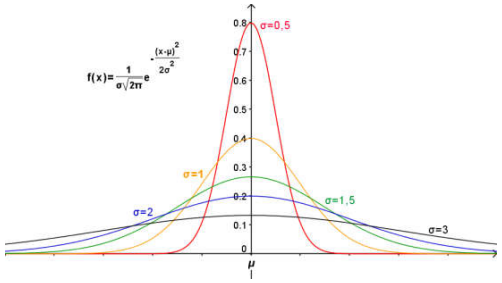
الأمل الرياضي وتباين المتغيرات العشوائية الخاضعة للتوزيع الطبيعي تعطى بالشكل:

$$E(X) = \mu \; ; \; V(X) = \sigma^2$$

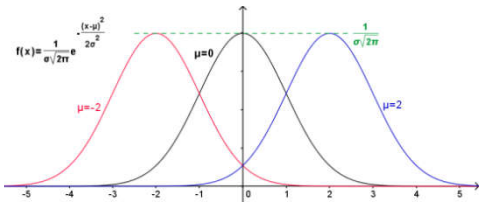
- **ملاحظة:** يتميز شكل التوزيع الطبيعي بالتناظر(غير مائل) حول الأمل الرياضي وكذلك بالإعتدال (غير منبسط وغير متطاول). ويكون شكله كما في الرسم التالي:



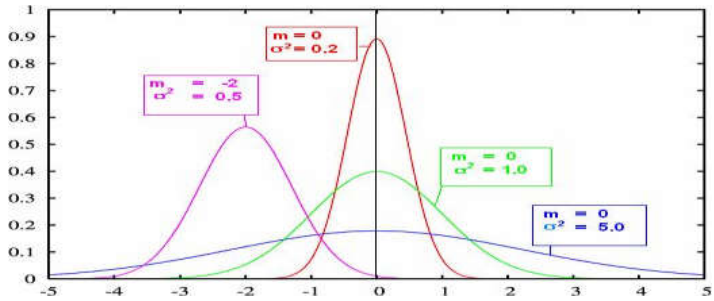
ويخضع شكل التوزيع لكل من الأمل الرياضي والتباين والشكل الموالي يوضع بعض الأمثلة عن تغير التشتت فكلما ارتفع الإنحراف المعياري نلاحظ ارتفاع في تشتت التوزيع مع ثبات الأمل الرياضي:



أما تغيير الأمل الرياضي وثبات التباين يزيح التوزيع يمينا (زيادة في الأمل الرياضي) أو يسارا (إنخفاض في الأمل الرياضي):



أما تغيير الأمل الرياضي والتباين في نفس الوقت يزيح التوزيع يمينا أو يسارا ويتغير تطاول أو انبساط التوزيع في نفس الوقت ولكن التناظر بالنسبة للأمل الرياضي يبقى قائم دائما لأنه من خصائص التوزيع الطبيعي.



- **القانون الطبيعي المعياري: la loi Normale Centrée Réduite**

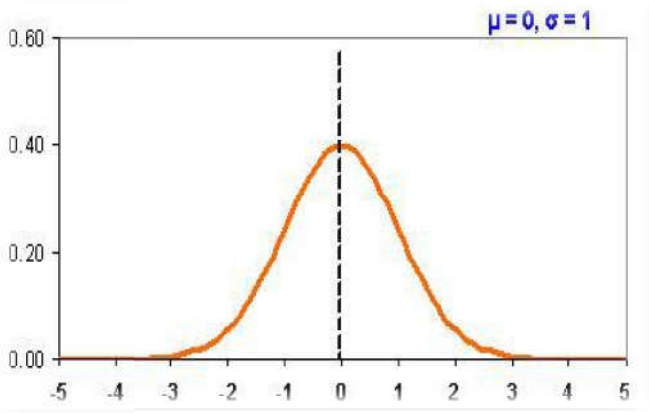
يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى قانون توزيع طبيعي موحد وذلك تسهيلا للعمليات الحسابية وإيجاد مختلف الإحتمالات، وذلك من خلال وضع $\mu = 0\ ;\ \sigma^2 = 1$ ونكون بذلك أمام متغير عشوائي آخر نسميه Z وتكتب دالة كثافته الإحتمالية كما يلي[10]:

$$Z \rightsquigarrow N(0\ ;\ 1)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\ ;\ z \in \mathbb{R}$$

الأمل الرياضي والتباين ثابتين كما يلي:

$$E(Z) = 0\ ;\ V(Z) = \sigma_Z = 1$$



وعمليا إذا كان: $X \rightsquigarrow N(\mu\ ;\ \sigma^2)$

فإنه بوضع $\left[\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}\right]$ يصبح: $Z \rightsquigarrow N(0\ ;\ 1)$

لإثبات الخصائص العددية للتوزيع المعياري:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$E(Z) = \mu_Z = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = \sigma_Z^2 = V\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

حيث أن Z له جداول خاصة تساعدنا على استخراج الاحتمالات وإجراء مختلف الحسابات عليها. مع الأخذ في الحسبان خاصية التناظر لإستخراج الإحتمالات. وأشهر جداول التوزيع الطبيعي المعياري تلك التي تحسب لنا دالة التوزيع التراكمية عند أي نقطة z أي $P(Z \leq z)$.

- **مثال تطبيقي:**

إذا علمت أن أطوال مجموعة من الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط 160 سم، وإنحراف معياري 5 سم، ما هو إحتمال إختيار طالب يكون طوله مابين 155 سم و165 سم ؟

- **الحل:**

- $X \rightsquigarrow N(160\,;\,5^2)$
- $P(155 < X < 165) = P\left(\frac{155-160}{5} < \left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] < \frac{165-160}{5}\right)$
$= P(-1 < Z < 1)$

- $Z \rightsquigarrow N(0\,;\,1)$

بالرجوع إلى توزيع التوزيع الطبيعي المعياري Z بالملحق رقم (2) :

- باستخدام خاصية التناظر: $P(-1 < Z < 1) = 2\,P(0 < Z < 1)$
$= 2\,(0.3413)$
$= 0.6826$

- **ملاحظات:**

– عادة ما نجد الرمز Z_α وهو يعبر عن الإحصائية الطبيعية المعيارية عند مستوى المعنوية α (الإسم الشهير في الإحصاء التطبيقي) وتعني بصيغة إحتماليةأ إحتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من Z_α يساوي α.
أي: $P(X \geq Z_\alpha) = \alpha$.

– يمكن إستخدام خاصية التناظر حول الصفر: $Z_\alpha = -Z_{(1-\alpha)}$

- **تقريب توزيع ذي الحدين من التوزيع الطبيعي (نظرية: موافر–لابلاس | Moivre–Laplace):**

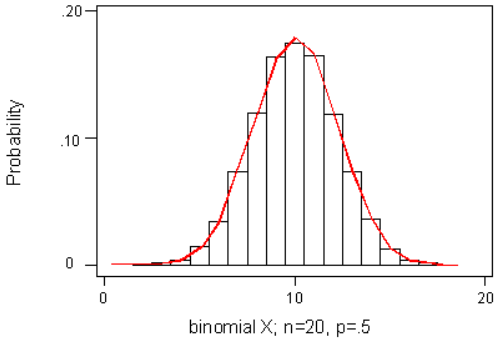
إقتصرنا في دراستنا للقانون ثنائي الحد على العينات الصغيرة الحجم، غير أنه وفي حالة العينات كبيرة الحجم ($n=800$ مثلا) يكون من الصعوبة بما كان إجراء العمليات الحسابية على هذا التوزيع –الثنائي– لذا فكلما

كانت n كبيرة بكفاية وإحتمال النجاح p قريبا من $1/2$ ، كان القانون الثنائي يقترب بشكل جيد من القانون الطبيعي. وكقاعدة عملية، يمكن تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي، عندما $n \cdot p \geq 5$ ونكتب[11]:

$$si \quad X \rightsquigarrow B(n;p) \quad et \quad n \cdot p \geq 5$$
$$\Longrightarrow X \rightsquigarrow N[\,E(X)\,;\,V(X)\,] \quad avec: \quad E(X) = n\,p\,;\,V(X) = n\,p\,q$$
$$\Longrightarrow X \rightsquigarrow N[\,n\,p\,;\,n\,p\,q\,]$$

- **مثال (1) :**

إذا كان: $X \rightsquigarrow B(20\,;\ 0.5)$ نلاحظ من خلال التمثيل البياني طريقة الاقتراب في ظل تحقق الشرطين السابقين:



- **مثال (2):** إذا كان لدينا:

$$X \rightsquigarrow B(10\,;\ 0.5)$$

نلاحظ أنه : $n\,p = 10 \times 0.5 = 5 \geq 5 \quad et \quad p = 0.5$

وكذلك: $E(X) = n\,p = 10 \times 0.5 = 5\,;\,V(X) = n\,p\,q = 10 \times 0.5 \times 0.5 = 2.5$

$$\Longrightarrow X \rightsquigarrow N(5\,;\ 2.5)$$

نريد حساب $P(X \leq 2)$ لنطبق على كلا القانونين :

1- باستخدام التوزيع الثنائي:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} C_{10}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$
$$= C_{10}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} + C_{10}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = 0.054$$

2- باستخدام التوزيع الطبيعي:

$$P(X \leq 2) = P\left(\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] \leq \frac{2-5}{1.58}\right)$$

$$= P(Z \leq -1.89)$$
$$= 1 - P(X > 1.89) = 1 - 0.9706 = 0.03$$

نلاحظ أن النتيجتين متقاربتين بشكل مقبول لكن تكون فعالية التقارب واضحة لما تكون $n \geq 30$ وكلما ارتفعت قيمة حجم العينة كان التقارب جيد جدا مع اقتراب قيمة الاحتمال من 0.5 طبعا.

- **مثال (3):** بأخذ نفس معطيات المثال السابق، نجيب على نفس السؤال ولكن نرفع في حجم العينة إلى 15 أي:

- $X \rightsquigarrow B(15\,;\ 0.5)$

لدينا: $n\,p = 15 \times 0.5 = 7.5 \geq 5 \quad et \quad p = 0.5$

$E(X) = n\,p = 15 \times 0.5 = 7.5\,;\ V(X) = n\,p\,q = 15 \times 0.5 \times 0.5 = 3.75$

- $\Longrightarrow X \rightsquigarrow N(7.5\,;\ 3.75)$

1- باستخدام التوزيع الثنائي:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} C_{15}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{15-x}$$
$$= C_{15}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + C_{15}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{14} + C_{15}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = 0.0036$$

2- باستخدام التوزيع الطبيعي:

$$P(X \leq 2) = P\left(\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] \leq \frac{2 - 7.5}{1.93}\right)$$
$$= P(Z \leq -2.84)$$
$$= 1 - P(X < 2.84) = 1 - 0.9977 = 0.0023$$

نلاحظ أن النتيجتين متقاربتين بشكل أكثر من السابق وهذا راجع إلى زيادة عدد التجارب.

- **تقريب توزيع Poisson من التوزيع الطبيعي:**

رأينا سابقا العلاقة التقريبية من توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون، ثم العلاقة التقريبية من توزيع ذي الحدين إلى القانون الطبيعي، فإننا نتوقع علاقة تقاربية بين توزيع بواسون والتوزيع الطبيعي، وهذه هي الحقيقة في الواقع حيث يتقارب توزيع بواسون من التوزيع الطبيعي كلما كان الوسيط لامدا كبيرا (وعمليا ا لامدا أكبر من 10)[12].

$X \rightsquigarrow \rho(\lambda)\colon P(X = x) = \frac{\lambda^{x}\, e^{-\lambda}}{x\,!}\ ;x \in \mathbb{N}\ ;\ \lambda \to +\infty$

$E(X) = V(X) = \lambda$

$$\Rightarrow\ \rho(\lambda) \rightsquigarrow N(\lambda\ ;\ \lambda)$$

- **مثال (1):**

بفرض أنه لدينا المعطيات التالية:

- $X \rightsquigarrow \rho(10): P(X = x) = \frac{10^x\, e^{-10}}{x\,!}\ ; x \in \mathbb{N}$

نحسب الإحتمال التالي:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{10^x\, e^{-10}}{x\,!}$$

$$= \frac{10^0\, e^{-10}}{0\,!} + \frac{10^1\, e^{-10}}{1\,!} + \frac{10^2\, e^{-10}}{2\,!} \approx 0.0027$$

نستخدم خاصية التقارب:

- $X \rightsquigarrow N(10\,;\ 10)$

ثم نعيد حساب الإحتمال بغستخدام التوزيع الجديد:

$$P(X \leq 2) = P\left(\left[\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right] \leq \frac{2-10}{\sqrt{10}}\right) = P(Z \leq -2.52) = 1 - P(Z < 2.52)$$

$$= 1 - 0.9941 \approx 0.0059$$

نلاحظ أن درجة التقارب مقبولة نوعا ما لكن يكون التقارب جيدا من أجل قيم كبيرة للامدا. ونأخذ المثال الموالي:

- **مثال (2):**

بفرض لدينا ما يلي:

- $X \rightsquigarrow \rho(100): P(X = x) = \frac{100^x\, e^{-100}}{x\,!}\ ; x \in \mathbb{N}$

نريد أن نحسب الإحتمال التالي:

- $P(X \leq 80) = \sum_{x=0}^{80} \frac{100^x\, e^{-100}}{x\,!} = \frac{100^0\, e^{-100}}{0\,!} + \frac{100^1\, e^{-100}}{1\,!} + \cdots + \frac{100^{100}\, e^{-100}}{100\,!}$

نلاحظ صعوبة الحسابات وتعقدها لذلك يصبح التقريب أحد الحلول العملية هنا:

- $X \rightsquigarrow N(100\,;\ 100)$

نحسب الإحتمال المطلوب:

- $P(X \leq 80) = P\left(\left[\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right] \leq \frac{80-100}{\sqrt{100}}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z < 2)$

$$= 1 - 0.9772 \approx 0.0228$$

نلاحظ سهولة الحساب ولو يتاح لنا حساب هذا الإحتمال بدون استخدام التقارب –وهو عملية شاقة– سنلاحظ دقة النتيجة بإستخدام التقارب نظرا لكبر قيمة لامدا والتي تساوي هنا 100.

6– قانون توزيع كاي–تربيع : Chi–deux (χ^2)

إذا كانت لدينا n متغيرة طبيعية معيارية، مستقلة $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ بتربيعها نحصل على: $Z_1^2, Z_2^2, \cdots, Z_n^2$ فإن المجموع $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = Z_1^2, Z_2^2, \cdots, Z_n^2$ ، يتبع توزيع يسمى كاي–تربيع χ^2، بدرجة حرية n.

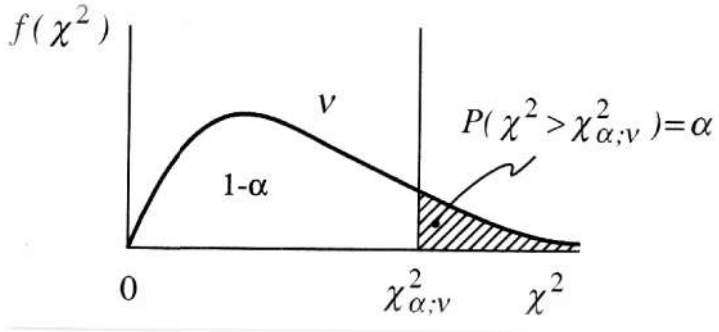
1–6– تعريف : نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع توزيع كاي–تربيع إذا كانت دالة كثافة إحتماله تكتب بالشكل[13]:

$$X \rightsquigarrow \chi^2_{(v)}:$$

$$f(x) = \frac{x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \cdot 2^{\left(\frac{v}{2}\right)}} \; ; x > 0 \; ; \; v \in \mathbb{N}$$

الخصائص العددية الشهيرة:

$$E(X) = v \; ; \; V(X) = 2\,v$$

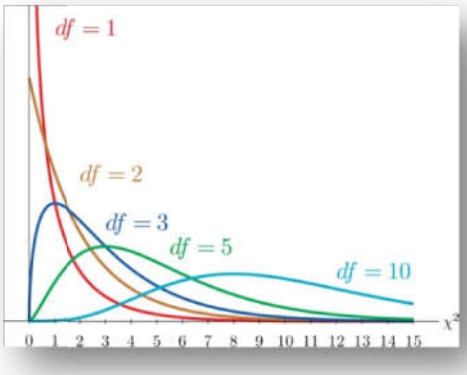


- **ملاحظات:**

– هذا التوزيع موجب الإلتواء (ملتوي نحو اليمين) ولا يحتوي على قيم سالبة، أي أن خاصية التناظر غير مستخدمة هنا.

– له إستخدامات واسعة في إختبار الفروض ويعتبر حالة خاصة من توزيع *gamma*، لما: $\gamma = \frac{v}{2}; \; \lambda = \frac{1}{2}$ ونكتب: $\chi^2 = \Gamma(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})$

– التمثيل البياني يخضع لتغير درجة الحرية للتوزيع كاي–تربيع حيث كلما زادت اقترب التمثيل من التناظر، والشكل التالي يبين بعض الأمثلة:



– الرمز: $\chi^2_{(\alpha;\,v)}$ أو $\chi^2_{\alpha}(v)$ يعني إحصائية كاي–تربيع عند مستوى معنوية α وبدرجة حرية v وبصيغة إحتمالية تعني أن إحتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من هذه الإحصائية هو ألفا. ونكتب :

$$P\left(X \geq \chi^2_{(\alpha;\,v)}\right) = \alpha$$

كما يمكن أن تعني العكس (أصغر) لكن نستبدل α بـ $(1-\alpha)$ والذي يدعى عادة بمجال الثقة $P\left(X \leq \chi^2_{(1-\alpha;\,v)}\right) = 1-\alpha$. لكن جرت العادة على استخدام المفهوم الأول.

– وتحسب هذه الإحتمالات إنطلاقا من جداول خاصة وضعت لهذا الغرض –أنظر الملحق 5– وعلى الباحث أخذ الحذر عند الرجوع إلى هذه الجداول وطريقة تصميمها (من الشكل أصغر أو أكبر)

- **مثال:** أوجد $\chi^2_{(0.95\,;\,7)}$ أي بالرجوع إلى جدول كاي–تربيع في الملاحق، وبتقاطع الإحداثيات $\alpha = 0.95$ و $v = 7$ نجد $\chi^2_{(0.95\,;\,7)} = 2.167$ وتعني أن: $P(X \geq 2.167) = 0.95$

6–2– تقريب أول لتوزيع كاي–تربيع إلى القانون الطبيعي:

عندما تكون درجة الحرية كبيرة جدا (وعمليا أكبر أو تساوي 30) يؤول توزيع كاي–تربيع إلى التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهارية المركزية التي نذكرها لاحقا ونكتب[14]:

$$v \rightsquigarrow +\infty : \quad \chi^2_{(v)} \rightsquigarrow N(v\,;\,2v)$$

لأن الخصائص العددية لتوزيع كاي–تربيع هي: $E(X) = v;\; V(X) = 2\,v$ ولإستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نضع:

$$Z = \frac{X - v}{\sqrt{2\,v}} \rightsquigarrow N(0;1)$$

6-3- تقريب ثاني لتوزيع كاي-تربيع إلى القانون الطبيعي[*] :

عندما تكون درجة الحرية كبيرة جدا (وعمليا أكبر أو تساوي 30) يؤول المتغير $\sqrt{2\ \chi_v^2}$ إلى التوزيع الطبيعي ذو التوقع $\sqrt{2\ v-1}$ و التباين 1 ، بطريقة أسرع من χ_v^2، وإذا كان $X \rightsquigarrow \chi_{(v)}^2$ نكتب[15]:

$$v \rightsquigarrow +\infty : \ Z = \sqrt{2\,X} - \sqrt{2\,v-1} \ \rightsquigarrow N(0;1)$$

7- قانون توزيع ستيودنت[**]: Student (t)

إذا كان Z متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، وY بتبع قانون توزيع كاي-تربيع بدرجة حرية v، فإذا عرفنا المتغيرة T حيث : $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}}$ يكون لهذه الأخيرة توزيع ستيودنت بدرجة حرية v. [16]

نلخص ما سبق:

$$\left.\begin{matrix} Z \rightsquigarrow N(0;1) \\ Y \rightsquigarrow \chi_v^2 \end{matrix}\right\} et : T = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}} \Rightarrow T \rightsquigarrow t(v)$$

7-1- تعريف: نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع قانون توزيع ستيودنت بدرجة حرية v (وسيط) إذا كانت دالة كثافة إحتماله تكتب من الشكل[17]:

$$X \rightsquigarrow t(v) :$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\,\pi}}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad ; x \in \mathbb{R} \, ; \ v \in \mathbb{N}^*$$

الأمل الرياضي والتباين:

$$E(X) = 0\,, v \geq 2 \quad ; \quad V(X) = \frac{v}{v-2}\,, v \geq 3$$

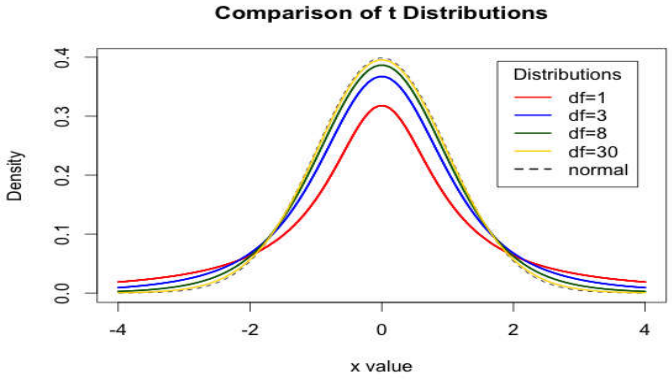
- **ملاحظات:**

- يلعب هذا التوزيع دورا هاما في العينات الصغيرة $n<30$ وكذا في إختبار الفروض.
- التمثيل البياني لتوزيع ستيودنت يخضع لدرجة الحرية، غير أن التناظر حول الصفر قائم دائما والإختلافات تكمن في الإنخفاض من أجل درجات حرية منخفضة والإرتفاع من أجل درجات حرية مرتفعة، وحيث كان توزيع

[*] يسمى هذا التقريب بتقريب فيشر.

[**] قدم العالم الإرلندي *W. S. Gosset* الذي نشر بحثا عام 1908 تحت إسم مستعار ***Student*** توزيع سمي على هذا الإسم وأشتهر به لاحقا نظار لأهميته الكبيرة في نظرية المعاينة وإختبار الفرضيات وخاصة بالنسبة للعينات صغيرة الحجم.

ستيودنت منخفظ عن التوزيع الطبيعي المعياري، فإنه كلما ارتفعت (اقتربت من 30) درجة حرية توزيع ستيودنت اقترب من التوزيع الطبيعي المعياري، كما هو موضح في الشكل الموالي:



– الرمز $t_\alpha(v)$ يرمز لإحصائية ستيودنت عند درجة حرية v ومستوى معنوية a ، وتعني إحتمال أن يكون المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ستيودنت أكبر من $t_\alpha(v)$ هو a ، ونكتب: $P(X \geq t_\alpha(v)) = \alpha$

كما يمكن أن تعني العكس (أصغر) مع استبدال α بـ $1-\alpha$ أي $P(X \leq t_{1-\alpha}(v)) = 1-\alpha$ لكن الإستخدامات الأكثر شيوعا تلزم علينا المفهوم الأول.

– لإجراء الحسابات وإيجاد مختلف الإحتملات لهذا التوزيع أعدت جداول خاصة تسمى جداول توزيع ستيودنت وعند الرجوع إليها يجب الحذر من طريقة تصميم هذه الجداول (من الشكل اكبر أو أصغر) وكذا (على الجانب أو الجانبين) –انظر الملحقين رقم: 03 و04-

– بإستخدام خاصية التناظر نجد: $t_\alpha(v) = -t_{1-\alpha}(v)$

- **مثال**: أوجد $t_{0.05}(10)$ ثم $t_{0.95}(10)$
- **الحل:**

(1) بالرجوع إلى توزيع ستيودنت ذو الجانب الواحد (ملحق 03) عند السطر 10 و العمود الممثل للمساحة 0.05 نجد : $t_{0.05}(10) = 1.812$

وهذا يعني أن : $P(X \geq 1.812) = 0.05 \;\; ; \; X \rightsquigarrow t(v)$

(2) $t_{0.95}(10) = -t_{0.05}(10) = -1.812$

7-2- تقارب توزيع ستيودنت من التوزيع الطبيعي:

لما درجة حرية توزيع ستيودنت تؤول إلى المالانهاية يؤول توزيع ستيودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري[18]:

$$v \rightsquigarrow +\infty : t(v) \rightsquigarrow N(0;1)$$

8- قانون توزيع فيشر Fisher (F)

إذا كان X_1، X_2 متغيران عشوائيان يتبعان توزيع كاي-تربيع بدرجتي حرية، v_1، v_2 على الترتيب وعرفنا f متغيرا عشوائيا كما يلي: $f = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$ يكون له توزيع فيشر بدرجتي حرية، v_1، v_2 على الترتيب.

نلخص ما سبق:

$$\left.\begin{matrix} X_1 \rightsquigarrow \chi^2_{v_1} \\ X_2 \rightsquigarrow \chi^2_{v_2} \end{matrix}\right\} et : f = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2} \Rightarrow f \rightsquigarrow F(v_1; v_2)$$

v_1 : درجة حرية البسط.

v_2 : درجة حرية المقام.

8-1- تعريف: نقول عن X متغير عشوائي يتبع قانون توزيع فيشر بدرجتي حرية، v_2، v_1 إذا كانت دالة كثافته تكتب من الشكل[19]:

$$X \rightsquigarrow F(v_1; v_2) :$$

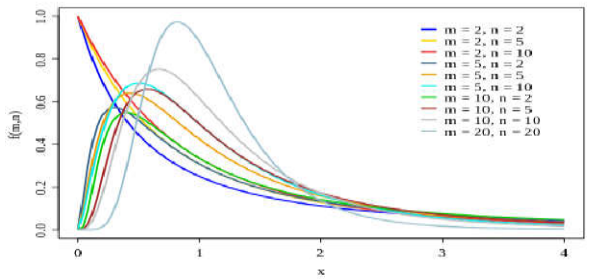
$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{1})\Gamma(\frac{v_2}{2})} v_1^{(v_1/2)} \; v_2^{(v_2/2)} \; \frac{x^{(\frac{v_1}{2}-1)}}{(v_1 x + v_2)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \; ; x > 0 \; ; \; (v_1, v_2) \in \mathbb{N}^{*2}$$

الأمل الرياضي، والتباين موجودين بشروط حدود دنيا لدرجتي الحرية كما يلي:

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \, , v_2 \geq 3 \; ; \; V(X) = \frac{2\, v_2^2 (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 (v_2 - 2)^2 (v_2 - 4)} \, , v_2 \geq 5$$

- **ملاحظات:**

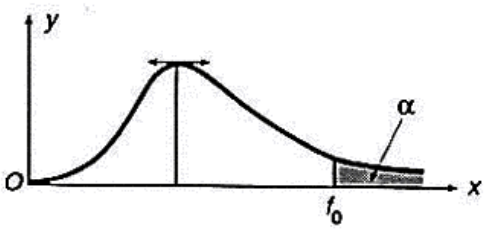
– التمثيل البياني لتوزيع فيشر يتغير حسب درجتي الحرية $(v_1=m \; ; \; v_2=n)$ وبأخذ بعض القيم كأمثلة ينتج الشكل التالي:



نلاحظ كلما ارتفعت قيمتهما اقترب التوزيع من التناظر، وعلى العموم هو توزيع غير متناظر ولا يحوي قيم سالبة.

- الرمز $F_\alpha(v_1; v_2)$ أو $F(\alpha; v_1; v_2)$ يعني إحصائية فيشر عند مستوى معنوية α ودرجتي حرية v_1، v_2 على الترتيب وعادة ما تعني إحتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من $F_\alpha(v_1; v_2)$ يساوي α أي $P\left(X \geq F_\alpha(v_1; v_2)\right) = \alpha$ ،

كما يمكن أن تعني العكس (أصغر) $P\left(X \leq F_{1-\alpha}(v_1; v_2)\right) = 1 - \alpha$ لكن الإستخدامات الأكثر شيوعا تلزم علينا المفهوم الأول كما في الرسم الموالي حيث نعبر f_0 عن هذه الإحصاءة:



$P(F > f_0) = \alpha$

- توزيع فيشر له جداول خاصة أعدت لغرض حساب الإحتمالات –أنظر الملحق 6 – ، حيث تم وضع بعض القيم الممكنة لألفا فقط وهي 0.01، 0.05، 0.025 وهناك قيم أخرى بطبيعة الحال لكن تعد هذه القيم الأشهر وخاصة عند إختبار الفرضيات ونظرية التقدير –الإستدلال الإحصائي– ويجب الحذر عند إستخدام هذه الجداول والتركيز في طريقة تصميم الجدول (من الشكل أكبر أو أصغر) .

- تجدر الإشارة إلى إمكانية إستنتاج إحصائية فيشر عندما لا تتوفر لنا جداول عند القيم $(1 - \alpha)$ لمستوى المعنوية، وذلك بتطبيق القاعدة التالية (مقلوب إحصائية فيشر عند α وبقلب درجتي الحرية)[20]:

$$F_{1-\alpha}(v_1; v_2) = \frac{1}{F_\alpha(v_2; v_1)}$$

- **مثال**: أوجد $F_{0.05}(5; 8)$ و $F_{0.99}(6; 8)$.
- **الحل**:

(1) $F_{0.05}(5; 8) = 3.69$ وذلك بالرجوع إلى جدول فيشر عند 5 % $(a=0.05)$

وتعني هنا: $P(X \geq 3.69) = 0.05$

(2) $F_{0.99}(6; 8) = \frac{1}{F_{0.01}(8; 6)} = \frac{1}{6.37} = 0.156$ إذن إنتقلنا من جدول 99 % $(\alpha = 0.99)$غير المتوفر لنا إلى إستخدام جدول 1 % $(\alpha = 0.01)$والذي يتوفر لنا .

ونكتب : $X \rightsquigarrow F(6; 8) : P(X \geq 0.156) = 0.99$

- توزيع مقلوب متغيرة فيشر هي توزيع فيشر بقلب درجتي الحرية أي:

$$X \rightsquigarrow F(v_1; v_2) \Rightarrow \frac{1}{X} \rightsquigarrow F(v_2; v_1)$$

8-2- العلاقة بين توزيع فيشر وتوزيع كاي-تربيع:

يمكن صياغة العلاقة بين توزيعي "فيشر" و"كاي-مربع"، كمايلي[21]: $F_\alpha(v;+\infty)=\frac{\chi^2_\alpha(v)}{v}$

- **مثال:**

بوضع مثلا: $\alpha=0.05$

$$F_{0.05}(v;+\infty)=\frac{\chi^2_{0.05}(v)}{v}$$

ثم بوضع مثلا: $v=10$

$$F_{0.05}(10;+\infty)=1.83$$
$$\frac{\chi^2_{0.05}(10)}{10}=\frac{18.307}{10}=1.83$$

ونلاحظ تساوي النتيجتين.

8-3 العلاقة بين توزيع فيشر وتوزيع ستيودنت:

يمكن صياغة العلاقة بين توزيعي "فيشر" و"كاي-مربع"، كمايلي[22]: $F_\alpha(1;v)=t^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}(v)$

- **أمثلة:**

(1) بوضع $v=10$ و $\alpha=0.05$

$$F_{0.05}(1;10)=t^2_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)}(10)=t^2_{(0.975)}(10)$$

$$F_{0.05}(1;10)=4.96$$
$$t^2_{(0.975)}(10)=\left(-t_{(0.025)}(10)\right)^2=(-2.228)^2=4.96$$

وهي نفس النتيجة

(2) بوضع $v=15$ و $\alpha=0.01$

$$F_{0.01}(1;15)=t^2_{(0.995)}(15)=(2.947)^2=8.68$$

(3) بوضع $v=18$ و $\alpha=0.025$

$$F_{0.025}(1;18)=t^2_{(0.9875)}(18)=(2.445)^2=5.98$$

9- نظرية النهاية المركزية:

إذا كانت لدينا X_1، X_2، ... ، X_n مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والموحدة التوزيع* [لها نفس قانون التوزيع]**، وبغض النظر عن توزيعها الإحتمالي، وكانت :

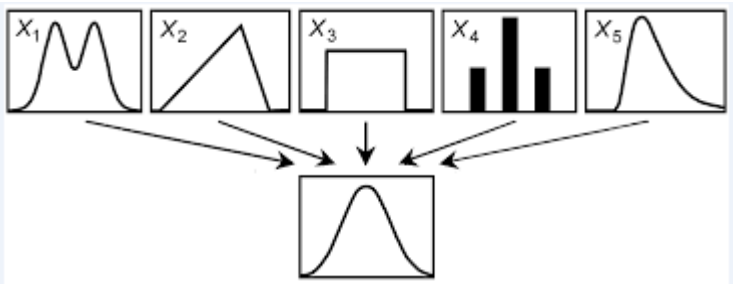
$$E(X_1) = \mu_1 \; ; \quad V(X_1) = \sigma_1^2$$
$$E(X_2) = \mu_2 \; ; \quad V(X_2) = \sigma_2^2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$E(X_n) = \mu_n \; ; \quad V(X_n) = \sigma_n^2$$

وعرفنا S متغيرا عشوائيا جديدا بحيث[23]: $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

فإن S يتبع القانون الطبيعي تقريبا بمتوسط $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ وتباين $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ وذلك بشرط : عندما تكون n كبيرة أي تؤول إلى المالانهاية (وعمليا أكبر أو تساوي 30) عند إختلاف أو مجهولية توزيع المتغيرات العشوائية، وتجدر الإشارة إلى أن هذا الشرط غير لازم في حالة توزع المتغيرات العشوائية X_1، X_2، ... ، X_n توزيعا طبيعيا.

ونكتب[24]:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; \rightsquigarrow \;\; N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \; ; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$



القيمة المعيارية كما جرت العادة:

$$Z = \frac{S - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \rightsquigarrow N(0;1)$$

* تعرف هذه المتغيرات العشوائية بالإختصار الإنجليزي *iid* أي:
Independent and identically distributed random variables

** قد يكون التوزيع الأصلي غير معلوم وهنا تكمن أهمية هذه النظرية، ويمكن الاستدلال على أن للمتغيرات نفس التوزيع أي أن العينات مسحوبة من نفس المجتمع الإحصائي.

- **حالة خاصة:**

إذا كان للمتغيرات العشوائية توقع متساوي وتباين متساوي أي[25]:

$E(X_i) = \boldsymbol{\mu} = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n$ و $V(X_n) = \boldsymbol{\sigma^2} = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2$ فإن:

$$S \rightsquigarrow N(n\,\mu\,;\, n\,\sigma^2)$$

والقيمة المعيارية Z:

$$Z = \frac{S - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0;1)$$

- **تمرين تطبيقي:** توضع 100 زجاجة، في صندوق تزن الواحدة منها واحد أنص (1 ance=25.38 g)، مع إنحرا ف معياري قدره 0.01 أنص.

فما هو إحتمال أن يزن الصندوق أكثر من 102 أنص ؟

- **الحل:**

$E(X_i) = \mu = 1 \;\; \forall\, i: \overline{1-100}$

$V(X_n) = \sigma^2 = (0.01)^2 \;\forall\, i: \overline{1-100}$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

$$S \rightsquigarrow N(100 \cdot 1\,;\, 100 \cdot (0.01)^2)$$

$$S \rightsquigarrow N(100\,;\, 0.01)$$

$$P(S > 102) = P\left(\frac{S-100}{\sqrt{0.01}} > \frac{102-100}{0.1}\right)$$

$$= P(Z > 20)$$

$$= 1 - P(Z \leq 20)$$

$$= 1 - 0.9999\cdots$$

$$= 0.000\cdots$$

$$\approx 0$$

وهو إحتمال ضئيل جدا يكاد يساوي الصفر

تمارين

- **التمرين 1:** إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون التوزيع المنتظم في الفترة [9، 2] فأحسب:

$$P(0 \leq X \leq 4), P(X \geq 2), \quad P(X > 3), \quad P(X^2 < 9)$$

- **التمرين 2:** إذا كان الزمن الذي تستغرقه مكالمة هاتفية بالدقائق في إحدى الإدارات يتبع قانون التوزيع الأسي، بمتوسط 5 دقائق، وتم إختيار إحدى هذه المكالمات بطريقة عشوائية، فأوجد إحتمال وقوع الأحداث التالية:

(1) أن تستغرق هذه المكالمة أقل من دقيقتين.

(2) أن تستغرق هذه المكالمة أكثر من دقيقتين.

(3) أن تستغرق هذه المكالمة من 5 إلى 9 دقائق.

- **التمرين 3:** ليكن المتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 24$ وانحراف معياري $\sigma = 1.5$ المطلوب: حساب الإحتمالات التالية:

$$P(X \geq 27), \quad P(21.09 \leq X \leq 24.63), \quad P(22 \leq X \leq 26)$$

- **التمرين 4:** ينتج مصنع بطاريات صغيرة الحجم، متوسط عمرها الزمني 48 ساعة وتباين 64 ساعة، فإذا علمت أن العمر الزمني لهذه البطاريات يتبع قانون التوزيع الطبيعي، فأوجد إحتمال أن يكون العمر الزمني لبطارية إختيرت بطريقة عشوائية:

(1) بين 46 و52 ساعة.

(2) أكثر من 42 ساعة.

(3) أقل من 52.4 ساعة.

- **التمرين 5:** كانت نتائج امتحان القبول في إحدى المدارس العليا كما يلي: $\mu = 12$ و $\sigma = 2$ ، وليكن X متغير عشوائي طبيعي يمثل العلامة المحصل عليها في الامتحان.

(1) إذا كانت نسبة الطلبة الناجحين في هذا الامتحان هي 30.5 %، فما هي العلامة التي يجب أن يتحصل عليها أي طالب حتى يعتبر ناجحا ؟

(2) إذا اعتبرنا أن علامة النجاح تم تحديدها وهي 11.5، فما هي نسبة الطلبة الناجحين ؟

- **التمرين 5_:** تمرر أحد الآلات 10 % من الوحدات المنتجة التالفة، نختار عينة حجمها 200 وحدة، وليكن X يمثل عدد الوحدات التالفة في هذه العينة، أحسب:

[مستعملا تقريب ذي الحدين بالقانون الطبيعي المعياري]

$$P(X = 20), \quad P(X \leq 20), \quad P(15 \leq X \leq 20)$$

- **التمرين 6:** ليكن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي، فإذا كانت لدينا المعلومات التالية:

$$P(X \geq 3) = 0.8413 \quad \text{و} \quad P(X \geq 9) = 0.0228$$

المطلوب: إيجاد المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري لهذا التوزيع.

- **تمرين 7**: إذا كانت X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع **ستيودنت** بدرجة حرية 18 أي: $X \rightsquigarrow \boldsymbol{t}(18)$ ، أحسب:

(1) $P(X > 1.338)$.

(2) قيمة k عندما $P(X > k) = 0.05$.

(3) $t_{(0.99)}(11)$.

- **تمرين 8**: إذا كانت X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع **كاي–تربيع** بدرجة حرية 5، $X \rightsquigarrow \boldsymbol{\chi^2}_{(5)}$ فأحسب ما يلي:

(1) $P(X < 9.24)$ ، $P(X > 12.38)$

(2) قيمة k عندما $P(X < 2k) = 0.025$

- **تمرين 9**: إذا كان: $X_1 \rightsquigarrow \chi^2_{(10)}$; $X_2 \rightsquigarrow \chi^2_{(100)}$ المطلوب:

(1) أحسب $P(X_1 > 9)$ ، $P(X_2 < 85)$

(2) هل يمكن إستخدام جدول $\mathbf{Z}$ لإيجاد $P(X_2 < 85)$ ؟ علل إجابتك؟

- **تمرين 10**: إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع قانون توزيع **فيشر**، ونكتب: $X \rightsquigarrow \boldsymbol{F_{(\alpha)}(\nu_1;\ \nu_2)}$ أوجد مايلي:

(1) $F_{(0.05)}(3;\ 7)$ ، $F_{(0.1)}(11;8)$ ، $F_{(0.95)}(3;\ 5)$.

(2) إذا كان $F_{(\alpha)}(3,5) = 7.76$ أوجد قيمة α .

(3) $P(X \leq 8.47) \quad si:\ v_1 = v_2 = 6$

- **تمرين 11**: تنظم مؤسسة تجارية سلسلة من المعارض لدى زبائنها الرئيسيين إلى غاية التوقيع على أول عقد. تكلفة إقامة معرض واحد هي 000 1 د. ج.، أما ثمن التنقل من زبون إلى آخر هو 000 3 د. ج. :

(1) عين التكلفة المتوقعة لهذه العملية، إذا علمت أن إحتمال الحصول على صفقة بيع إثر معرض واحد هو 0.1

(2) إذا كان الربح المتوقع إثر هذه العملية هو 000 15 د. ج.، هل هذه العملية تكون مربحة ؟

(3) إذا منح مجلس إدارة المؤسسة مبلغ 000 100 د. ج.، لأجل هذه العملية، فما هو إحتمال صرف جميع هذه الميزانية دون الحصول على صفقة بيع ؟

- **تمرين 12**: تنوي القيادة العسكرية لبلد ما تحطيم قاعدة للعدو، إحتمال أن تصيب طلعة جوية هذه القاعدة هو 0.8 ، وتحطم القاعدة عن آخرها، إذا أصيبت 4 مرات.

– ما إحتمال أن تحطم هذه القاعدة كليا، إذا علمت أن سلاح الجو للقوات المجابهة لا يمكنه القيام بأكثر من 7 طلعات قبل أن تفقد القاعدة أهميتها ؟

- **تمرين 13**: ينتج مصنع للأزرار الكهربائية 1 % من التالف، نسحب عينة من 100 وحدة.

- أحسب $P(\hat{P} \leq 0.03)$ ، حيث $\hat{P}$ تمثل نسبة التالف في العينة.

- **تمرين 14**: تجرى في مخبر 5 تجارب متماثلة ومستقلة، نتائج هذه التجارب جد مرتبطة بالظروف البيئية، واحتمال نجاح التجربة هو P.

(1) مثل بيانيا وبدلالة P احتمال حصول فشل عند التجربة 5.

(2) عين قيمة P حتى يصبح هذا الاحتمال أعظميا.

- **تمرين 15**: توصل حافلة بين مدينتين كبيرتين مرورا بـ 08 مدن صغيرة، إذا علمنا أن الزمن المستغرق للمرور من مدينة إلى مدينة يتبع التوزيع الطبيعي. وكان المتوسط والإنحراف المعياري لأوقات المرور معطاة في الجدول الموالي، فماهو إحتمال أن تنتهي الرحلة في أقل من 24 ساعة ؟

المسارات من المدينة i إلى i+1	1--2	2--3	3--4	4--5	5--6	6--7	7--8
متوسط زمن المرور (ساعة)	2	3	2	4	6	4	2
الإنحراف المعياري (ساعة)	0.5	0.5	0.25	1	0.75	0.5	0.25

- **مراجع وإحالات الفصل الرابع:**

[1] مجدي الطويل "الإحتمالات-النظرية والتطبيق" دار النشر للجامعات، 2009، مصر، ص 131.
[2] ROSS S. «A First Cours in Probability» Pearson, 8th ed., 2010, N. J., USA, p 214.
[3] ibid., p 215
[4] دولينغ إ. ت. "الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد" سلسلة ملخصات شوم، مترجم للعربية، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، ط1، 2003، مصر، ص 384.
[5] عبد الله بن عبد الكريم الشيحة "أسس نظرية التقدير" جامعة الملك سعود، 2007، م. ع. السعودية، ص 21.
[6] ROSS S., Op Cit, p 218.
[7] Ibid., p 218.
[8] SOONG T. T. « Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers » Wiley, New York, USA, p 215.
[9] دومينيك سالفاتور "الإحصاء والإقتصاد القياسي" مترجم، د. م. ج.، الجزائر، ص 65.
[10] مجدي الطوبل، مرجع سابق، ص 146.
[11] عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى "الاستدلال الإحصائي (1) : نظرية التقدير" مجموعة النيل العربية، ط1، 2000، مصر، ص 33.
[12] مجدي الطويل، مرجع سابق، ص 212.
[13] BRETON J-C. « Statistiques » Université de la Rochelle, 2008, France, P 10.
[14] Ibid ; P 11.
[15] Ibid ; P 12.
[16] إياد محمد الهوبي "الإحصاء التطبيقي" الكلية الجامعية للعلوم والتكنلوجيا، ط1، 2014، فلسطين، ص 28.
[17] MEJLBRO L. « Continuous Distributions » p. 16 ; le : 09.11.2017 ; site web : http://www.bookboon.com
[18] Ibid ; p 17.
[19] علاء الدين القبانجي، حسام حمامة كرمجي "الاحتمال والإحصاء" منشورات جامعة دمشق، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، 2012/2011، سوريا، ص 197.
[20] سليمان محمد طشطوش "أساسيات الإحصاء الرياضي" دار اليازوري، مؤسسة حمادة للدراسات الجامعية والنشر والتوزيع، 2012، الأردن، ص 84.
[21] ZWILLINGER D., KOKOSKA S., « Standard probability and Statistics tables and formulae » champan and hull/CRC, 200, USA. P 155.
[22] Ibid, P 156.
[23] DODGE Y., MELFI G. «Premier Pas en Simulation » Springer, 2008, France, p 27.
[24] Ibid, P 173.
[25] موقع MM stat الإحصائي، شوهد يوم: [2017/11/09] الرابط:
http://mars.wiwi.hu-berlin.de/mediawiki/mmstat_ar

خاتمة

خاتمة

لاحظنا مما سبق أن الإحصاء الرياضي يرتكز بالأساس على نظرية الإحتمالات التي عرفت النور منذ القرن السابع عشر وبخاصة مع رواج ألعاب الحظ ومنذ ذلك الحين وضعت لها أهم المبادئ والمسلمات على يد ألمع رياضيي ذلك العصر، وارتباطها بألعاب الحظ يرجع لكونها تعبر عن الأوضاع الخاضعة للصدفة، غير أن مثل هذه الأوضاع موجودة في كل مناحي الحياة، كالتأمين وعمل المؤسسات في ظل المخاطرة ... الخ، ولذلك خرجت هذه النظرية من المجال الضيق إلى المجال العلمي الواسع، حيث عرفت تطبيقات واسعة في مختلف المجالات كالهندسة، الديمغرافيا، علم الإجتماع، العلوم الإقتصادية، علم النفس، وغيرها من المجالات، لهذا الغرض تم تبسيط هذه النظرية في مستوياتها الأولى دون إهمال محتواها، لمساعدة الطالب على التأقلم مع المصطلحات الجديدة عليه، والتدرج المنهجي في تلقينها بدءا بحساب الإحتمال وتعريف المتغير العشوائي وقانون التوزيع الإحتمالي، وهذا قبل الولوج في الفصلين الأخيرين إلى قوانين التوزيع ذات الشهرة الكبيرة سواء المنفصلة أو المتصلة وتنبع شهرة هذه القوانين من الإستخدامات الواسعة لها، حيث يجد طالب الإقتصاد الحاجة لها في دراسته مواضيع الإحصاء الإستدلالي، الإقتصاد القياسي أو الإحصاء التطبيقي والطرق الكمية لإتخاذ القرار، ... الخ، تم أيضا التطرق إلى مسألة التقارب بين التوزيعات الإحتمالية وأخذنا عددا لا بأس به من هذه التقاربات، بالإضافة إلى نظرية النهاية المركزية. من خلال هذه المطبوعة حاولنا تذليل الصعوبات التي قد تصادف الطالب في دراسة التوزيعات الإحتمالية ومسألة التمييز بينها وكذا توجيهه إلى طريقة استخدام الجداول الإحصائية بطريقة سليمة وذلك بلغة بسيطة لا تخل بالمحتوى الدقيق لهذا المقياس، من خلال أمثلة تطبيقية محلولة عند الحديث عن كل بند، وكذا إعطاء مجموعة من التمارين غير المحلولة في نهاية كل فصل تغطي جميع محاور المطبوعة.

المراجع

قائمة المراجع

- **باللغة العربية:**

1- إياد محمد الهوبي "**الإحصاء التطبيقي**" الكلية الجامعية للعلوم والتكنلوجيا، ط1، 2014، فلسطين.

2- بارا ج. ر.، بيل أ. "**مسائل في الإحصاء الرياضي**" ترجمة: محمد بن حلي، الهيئة القومية للبحث العلمي، ط1، 1975، ليبيا.

3- حامد الشمرتي، مؤيد الفضل "**الأساليب الإحصائي في اتخاذ القرار**" دار مجدلاوي، الأردن

4- جلال الصياد، عبد الحميد محمد ربيع "**مبادئ الطرق الإحصائية**" الناشر تهامة، ط1، 1983، م. ع. السعودية.

5- دلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي "**الإحصاء للإداريين والإقتصاديين**" دار الحامد، 2003، الأردن.

6- دومينيك سالفاتور "**الإحصاء والإقتصاد القياسي**" مترجم، د. م. ج.، الجزائر.

7- دولينغ إ. ت. "**الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد**" سلسلة ملخصات شوم، مترجم للعربية، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، ط1، 2003، مصر.

8- سيمور ليبشتز "**نظريات ومسائل في الإحتمالات**" سلسلة ملخصات شوم، ترجمة: عبد العظيم أنيس، الدار الدولية للنشر والتوزيع، ط 2، 2000، مصر.

9- سليمان محمد طشطوش "**أساسيات الإحصاء الرياضي**" دار اليازوري، مؤسسة حمادة للدراسات الجامعية والنشر والتوزيع، 2012، الأردن.

10- عبد الحفيظ مصطفى "**نظرية الإحتمالات –مبادئ وتطبيقات–**" ج. 1، د. م. ج.، ط. 2، 2004، الجزائر.

11- عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى "**الاستدلال الإحصائي (1) : نظرية التقدير**" مجموعة النيل العربية، ط1، 2000، مصر.

12- عبد الله بن عبد الكريم الشيحة "**أسس نظرية التقدير**" جامعة الملك سعود، 2007، م. ع. السعودية.

13- علاء الدين القبانجي، حسام حمامة كربجي "**الاحتمال والإحصاء**" منشورات جامعة دمشق، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، 2012/2011، سوريا.

14- رأفت رياض رزق الله "**مباديء الاحتمالات**" ج. 1، المكتبة الأكاديمية، مصر.
15- مبارك اسبر ديب، "**مبادئ في الاحتمالات والإحصاء**" جامعة تشرين، كلية العلوم، 2009/2008، سوريا.
16- مجدي الطويل "**الإحتمالات–النظرية والتطبيق**" دار النشر للجامعات، 2009، مصر.
17- مديحة السيد محمد موسى "**أساسيات الإحصاء الرياضي وتطبيقاتها**" دار الكتاب الحديث، 2008، مصر.
18- موراي ر. شبيجل "**نظريات ومسائل في الإحصاء**" سلسلة ملخصات شوم، ترجمة: شعبان عبد الحميد شعبان، دار ماكجروهيل للنشر، مصر.
19- موراي شبيجل، جون شيلر، ألو سرينيقاسان "**الإحتمالات والإحصاء**" سلسلة ملخصات شوم إيزي، ترجمة: محمود علي أبو النصر، مصطفى جلال مصطفى، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، ط 1، مصر.

- **باللغات الأجنبية:**

I- BOGAERT P. «**Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs**» Edition de boeck, 2006, Belgique.
2- CANTONI E ., HUBER P., RONCHETTI E. « **Maîtriser l'aléatoire : *exercices résolus de probabilités et statistique*** » Springer, 2006, France.
3- BRETON J-C. « **Statistiques** » Université de la Rochelle, 2008, France.
4- DODGE Y., MELFI G. «**Premier Pas en Simulation** » Springer, 2008, France.
5- DRESS F., « **Les probabilités et la statistique** » DUNOD, France.
6- FREDON D.,MAUMY-BERTRAND M., BERTRAND F., « **Mathématiques *: statistique et probabilités*** » Dunod, 2009, Paris.
7- GHORBANZADEH D. « **PROBABILITES : exercices corrigés** » Edition Technip, 1998, Paris.
8- HWEI P. H. « **Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes** » schaum's outline series, McGRAW-HILL, 1996, USA.
9- POSIER J-P «**Mathématiques Appliquées a la Gestion**» collection les zoom's ; Gualino éditeur, 2005, France.ROUAD M. « **Probabilités, Statistique et Analyse Multicritères** » ebook, 2017.
10- ROSS M. S. «**Initiation aux probabilités** » Trad. Par HOFER C. , Presses polytechnique romandes, 1987, Lausanne, Suisse.
11- ROSS S. «**A First Cours in Probability**» Pearson, 8th ed., 2010, N. J., USA.
12- SAPORTA G. « **PROBABILITES : *analyse des données et statistique*** » Edition Technip, 3eme éd., 2011, Paris.
13- SOONG T. T. « **Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers** » Wiley, New York, USA.

14- VEYSSEYRE R. «**Statistique et Probabilités pour l'ingénieur**» Dunod, 2eme ed., 2006, Paris.
15- ZWILLINGER D., KOKOSKA S., « **Standard probability and Statistics tables and formulae** » champan and hull/CRC, 200, USA.

- **مواقع الانترنت:**

(1) http://students.brown.edu/seeing-theory/basic-probability/index.html#first
(2) https://www.stat.washington.edu/~nehemyl/pages/stat-math394.html
(3) http://mars.wiwi.hu-berlin.de/mediawiki/mmstat_ar
(4) http://www.bookboon.com

الملاحق

- **الملحق (1) : قائمة الأحرف الإغريقية:**

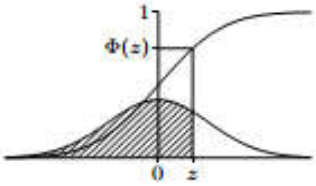
المرتبة	الحرف الكبير	الحرف الصغير	باللاتنية	بالعربية
1	Α	α	*Alpha*	ألفا
2	Β	β	*Bêta*	بيتا
3	Γ	γ	*Gamma*	قاما
4	Δ	δ	*Delta*	ديلتا
5	Ε	ε	*Epsilon*	إيبسيلون
6	Ζ	ζ	*Zeta*	زيتا
7	Η	η	*Eta*	إيتا
8	Θ	θ	*Thêta*	ثيتا
9	Ι	ι	*Iota*	يوتا
10	Κ	κ	*Kappa*	كبا
11	Λ	λ	*Lambda*	لمدا
12	Μ	μ	*Mu*	ميو
13	Ν	ν	*Nu*	نيو
14	Ξ	ξ	*Xi*	كسي
15	Ο	ο	*Omicron*	أوميكرون
16	Π	π	*Pi*	پـي
17	Ρ	ρ	*Rho*	رو
18	Σ	σ	*Sigma*	سيقما
19	Τ	τ	*Tau*	تو
20	Υ	υ	*Upsilon*	يوبسيلون
21	Φ	ø	*Phi*	في
22	Χ	χ	*Chi ou Khi*	كي
23	Ψ	ψ	*Psi*	پـسي
24	Ω	ω	*Omega*	أوميقا
	ϑ	φ	*Formes archaïques de "thêta" et "phi".*	*الأشكال القديمة لـ"ثيتا" و"في".*
	ς	ϖ	*ς Est la forme de "sigma" comme lettre finale.*	*ς شكل "سيقما" كحرف أخير.*

- **الملحق (2) : التوزيع الطبيعي المعياري (Z).**

TABLES DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

A. Tables des lois associées à la loi Normale

A.1. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$



1° *Fonction de répartition de la loi Normale.* — La fonction de répartition Φ de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du/\sqrt{2\pi}$, $z \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

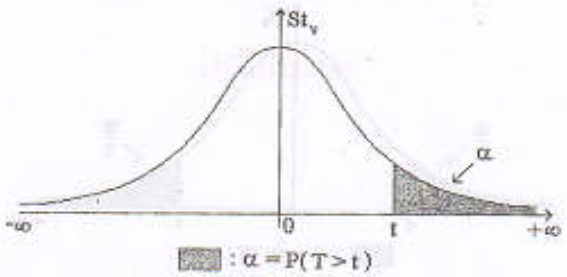
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Exemples. — $\Phi(0{,}25) \approx 0{,}5987$, $\Phi(-0{,}32) = 1 - \Phi(0{,}32) \approx 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$.

- **الملحق (3) : توزيع ستيودنت (t).** ذو الجانب الواحد

LOI DE STUDENT

On connaît α et on cherche t vérifiant P(T>t)

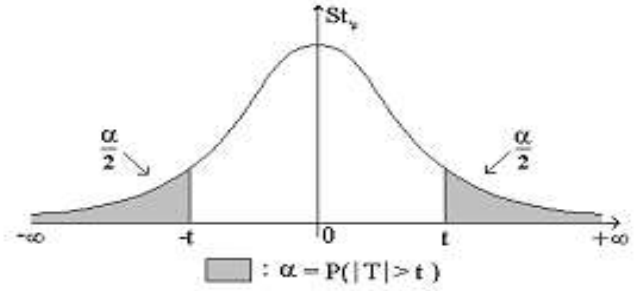


ν \ α	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.0125	0.01	0.005	0.0025	0.0005
1	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	25.45	31.82	63.66	127.3	636.6
2	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.205	6.965	9.925	14.09	31.60
3	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.177	4.541	5.841	7.453	12.93
4	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.495	3.747	4.604	5.598	8.610
5	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.163	3.365	4.032	4.773	6.869
6	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.969	3.143	3.707	4.317	5.959
7	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.841	2.998	3.499	4.029	5.408
8	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.752	2.896	3.355	3.833	5.041
9	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.685	2.821	3.250	3.690	4.781
10	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.634	2.764	3.169	3.581	4.587
11	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.593	2.718	3.106	3.497	4.437
12	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.560	2.681	3.055	3.428	4.318
13	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.533	2.650	3.012	3.373	4.221
14	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.510	2.624	2.977	3.326	4.140
15	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.490	2.602	2.947	3.286	4.073
16	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.473	2.583	2.921	3.252	4.015
17	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.458	2.567	2.898	3.223	3.965
18	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.445	2.552	2.878	3.197	3.922
19	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.433	2.539	2.861	3.174	3.883
20	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.423	2.528	2.845	3.153	3.850
21	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.414	2.518	2.831	3.135	3.819
22	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.406	2.508	2.819	3.119	3.792
23	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.398	2.500	2.807	3.104	3.767
24	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.391	2.492	2.797	3.091	3.745
25	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.385	2.485	2.787	3.078	3.725
26	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.379	2.479	2.779	3.067	3.707
27	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.373	2.473	2.771	3.057	3.690
28	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.369	2.467	2.763	3.047	3.674
29	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.364	2.462	2.756	3.038	3.659
30	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.360	2.457	2.750	3.030	3.646
40	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.329	2.423	2.704	2.971	3.551
50	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.311	2.403	2.678	2.937	3.497
60	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.298	2.390	2.660	2.921	3.460
120	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.267	2.358	2.617	2.873	3.373
∞	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.236	2.326	2.576	2.828	3.291

- **الملحق (4) : توزيع ستيودنت (t).** ذو الجانبين

LOI DE STUDENT

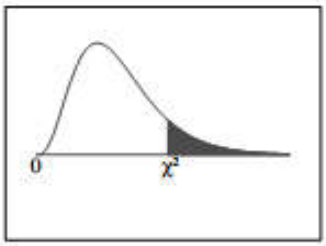
On connaît α et on cherche t vérifiant $P(|T|>t) = \alpha$



ν \ α	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	25.45	31.82	63.66	127.3	636.6
2	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.205	6.965	9.925	14.09	31.60
3	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.177	4.541	5.841	7.453	12.93
4	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.495	3.747	4.604	5.598	8.610
5	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.163	3.365	4.032	4.773	6.869
6	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.969	3.143	3.707	4.317	5.959
7	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.841	2.998	3.499	4.029	5.408
8	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.752	2.896	3.355	3.833	5.041
9	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.685	2.821	3.250	3.690	4.781
10	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.634	2.764	3.169	3.581	4.587
11	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.593	2.718	3.106	3.497	4.437
12	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.560	2.681	3.055	3.428	4.318
13	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.533	2.650	3.012	3.373	4.221
14	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.510	2.624	2.977	3.326	4.140
15	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.490	2.602	2.947	3.286	4.073
16	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.473	2.583	2.921	3.252	4.015
17	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.458	2.567	2.898	3.223	3.965
18	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.445	2.552	2.878	3.197	3.922
19	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.433	2.539	2.861	3.174	3.883
20	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.423	2.528	2.845	3.153	3.850
21	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.414	2.518	2.831	3.135	3.819
22	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.406	2.508	2.819	3.119	3.792
23	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.398	2.500	2.807	3.104	3.767
24	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.391	2.492	2.797	3.091	3.745
25	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.385	2.485	2.787	3.078	3.725
26	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.379	2.479	2.779	3.067	3.707
27	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.373	2.473	2.771	3.057	3.690
28	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.369	2.467	2.763	3.047	3.674
29	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.364	2.462	2.756	3.038	3.659
30	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.360	2.457	2.750	3.030	3.646
40	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.329	2.423	2.704	2.971	3.551
50	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.311	2.403	2.678	2.937	3.497
60	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.298	2.390	2.660	2.921	3.460
120	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.267	2.358	2.617	2.873	3.373
∞	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.236	2.326	2.576	2.828	3.291

- **الملحق (5) : توزيع كاي–تربيع (χ^2).**

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

- **الملحق (6) : توزيع فيشر (F).**

1- عند 5 %

TABLES DE LA LOI DE FISHER-SNEDECOR

X étant une variable aléatoire de loi $F(\nu_1,\nu_2)$, les tables donnent les valeurs $f_{\nu_1,\nu_2,\alpha}=F^{-1}_{F(\nu_1,\nu_2)}(1-\alpha)$ telles que $P(X>f_{\nu_1,\nu_2,\alpha})=\alpha$ pour $\alpha=5\%$ et $\alpha=1\%$.

En R, la commande correspondante est `qf(1-alpha,nu1,nu2)`. $f_{\nu_2,\nu_1,\alpha}=\dfrac{1}{f_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha}}$

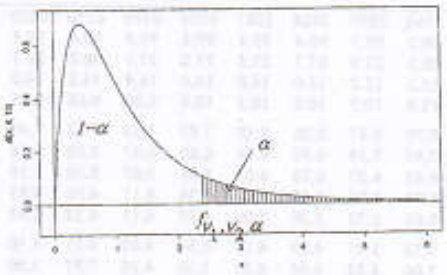


Table 1 : $\alpha=5\%$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	16	20	24	40	60	100	+∞
1	161,5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	241.9	243.9	246.5	248.0	249.1	251.1	252.2	253.0	254.2
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.47	19.48	19.49	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.69	8.66	8.64	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.84	5.80	5.77	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.60	4.56	4.53	4.46	4.43	4.41	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.92	3.87	3.84	3.77	3.74	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.49	3.44	3.41	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.20	3.15	3.12	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	2.99	2.94	2.90	2.83	2.79	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.83	2.77	2.74	2.66	2.62	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.70	2.65	2.61	2.53	2.49	2.46	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.60	2.54	2.51	2.43	2.38	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.51	2.46	2.42	2.34	2.30	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.44	2.39	2.35	2.27	2.22	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.38	2.33	2.29	2.20	2.16	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.33	2.28	2.24	2.15	2.11	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.29	2.23	2.19	2.10	2.06	2.02	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.25	2.19	2.15	2.06	2.02	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.21	2.16	2.11	2.03	1.98	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.18	2.12	2.08	1.99	1.95	1.91	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.16	2.10	2.05	1.96	1.92	1.88	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.13	2.07	2.03	1.94	1.89	1.85	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.11	2.05	2.01	1.91	1.86	1.82	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.09	2.03	1.98	1.89	1.84	1.80	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.07	2.01	1.96	1.87	1.82	1.78	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	1.99	1.93	1.89	1.79	1.74	1.70	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.08	2.00	1.90	1.84	1.79	1.69	1.64	1.59	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.03	1.95	1.85	1.78	1.74	1.63	1.58	1.52	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.82	1.75	1.70	1.59	1.53	1.48	1.39
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.77	1.70	1.65	1.54	1.48	1.43	1.32
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.75	1.68	1.63	1.52	1.45	1.39	1.28
+∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.64	1.57	1.52	1.39	1.32	1.24	1.00

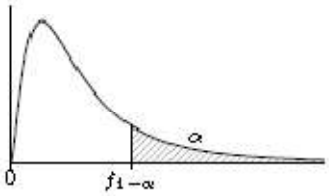
2- تابع توزيع فيشر عند 2.5 %

A.5. Lois de Fisher–Snedecor ($\alpha = 0,025$)

Si F est une variable aléatoire suivant la loi de Fisher–Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne la valeur $f_{1-\alpha}$ telle que

$$\mathbb{P}\{F > f_{1-\alpha}\} = \alpha = 0,025.$$

Ainsi, $f_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha = 0,975$ de la loi de Fisher–Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté.



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

3- تابع: توزيع فيشر عند 1 %

Table 2 : $\alpha = 1\%$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	16	20	24	40	60	100	$+\infty$
1	4052	4999	5403	5624	5764	5859	5928	5981	6056	6106	6170	6209	6235	6287	6313	6334	6368
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.9	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.8	26.7	26.6	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.6	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.0	9.89	9.68	9.55	9.47	9.29	9.20	9.13	9.02
6	13.8	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.52	7.40	7.31	7.14	7.06	6.99	6.88
7	12.3	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.28	6.16	6.07	5.91	5.82	5.75	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.48	5.36	5.28	5.12	5.03	4.96	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.92	4.81	4.73	4.57	4.48	4.41	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.52	4.41	4.33	4.17	4.08	4.01	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.21	4.10	4.02	3.86	3.78	3.71	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	3.97	3.86	3.78	3.62	3.54	3.47	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.78	3.66	3.59	3.43	3.34	3.27	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.62	3.51	3.43	3.27	3.18	3.11	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.49	3.37	3.29	3.13	3.05	2.98	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.37	3.26	3.18	3.02	2.93	2.86	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.27	3.16	3.08	2.92	2.83	2.76	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.19	3.08	3.00	2.84	2.75	2.68	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.12	3.00	2.92	2.76	2.67	2.60	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.05	2.94	2.86	2.69	2.61	2.54	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	2.99	2.88	2.80	2.64	2.55	2.48	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.94	2.83	2.75	2.58	2.50	2.42	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.89	2.78	2.70	2.54	2.45	2.37	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.85	2.74	2.66	2.49	2.40	2.33	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.81	2.70	2.62	2.45	2.36	2.29	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.66	2.55	2.47	2.30	2.21	2.13	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.80	2.66	2.48	2.37	2.29	2.11	2.02	1.94	1.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.70	2.56	2.38	2.27	2.18	2.01	1.91	1.82	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.31	2.20	2.12	1.94	1.84	1.75	1.60
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.23	2.12	2.03	1.85	1.75	1.65	1.49
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.19	2.07	1.98	1.80	1.69	1.60	1.43
$+\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.00	1.88	1.79	1.59	1.47	1.36	1.00

- **الملحق (7) : مثلث باسكال: Pascal**

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \; ; \; k \leq n$$

ci-dessous.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1															
2	1	2	1														
3	1	3	3	1													
4	1	4	6	4	1												
5	1	5	10	10	5	1											
6	1	6	15	20	15	6	1										
7	1	7	21	35	35	21	7	1									
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1								
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1

- **الملحق (8) : جدول الأرقام العشوائية.**

Random Number Table

13962 70992 65172 28053 02190 83634 66012 70305 66761 88344
43905 46941 72300 11641 43548 30455 07686 31840 03261 89139
00504 48658 38051 59408 16508 82979 92002 63606 41078 86326
61274 57238 47267 35303 29066 02140 60867 39847 50968 96719
43753 21159 16239 50595 62509 61207 86816 29902 23395 72640
83503 51662 21636 68192 84294 38754 84755 34053 94582 29215
36807 71420 35804 44862 23577 79551 42003 58684 09271 68396
19110 55680 18792 41487 16614 83053 00812 16749 45347 88199
82615 86984 93290 87971 60022 35415 20852 02909 99476 45568
05621 26584 36493 63013 68181 57702 49510 75304 38724 15712
06936 37293 55875 71213 83025 46063 74665 12178 10741 58362
84981 60458 16194 92403 80951 80068 47076 23310 74899 87929
66354 88441 96191 04794 14714 64749 43097 83976 83281 72038
49602 94109 36460 62353 00721 66980 82554 90270 12312 56299
78430 72391 96973 70437 97803 78683 04670 70667 58912 21883
33331 51803 15934 75807 46561 80188 78984 29317 27971 16440
62843 84445 56652 91797 45284 25842 96246 73504 21631 81223
19528 15445 77764 33446 41204 70067 33354 70680 66664 75486
16737 01887 50934 43306 75190 86997 56561 79018 34273 25196
99389 06685 45945 62000 76228 60645 87750 46329 46544 95665
36160 38196 77705 28891 12106 56281 86222 66116 39626 06080
05505 45420 44016 79662 92069 27628 50002 32540 19848 27319
85962 19758 92795 00458 71289 05884 37963 23322 73243 98185
28763 04900 54460 22083 89279 43492 00066 40857 86568 49336
42222 40446 82240 79159 44168 38213 46839 26598 29983 67645
43626 40039 51492 36488 70280 24218 14596 04744 89336 35630
97761 43444 95895 24102 07006 71923 04800 32062 41425 66862
49275 44270 52512 03951 21651 53867 73531 70073 45542 22831
15797 75134 39856 73527 78417 36208 59510 76913 22499 68467
04497 24853 43879 07613 26400 17180 18880 66083 02196 10638
95468 87411 30647 88711 01765 57688 60665 57636 36070 37285
01420 74218 71047 14401 74537 14820 45248 78007 65911 38583
74633 40171 97092 79137 30698 97915 36305 42613 87251 75608
46662 99688 59576 04887 02310 35508 69481 30300 94047 57096
10853 10393 03013 90372 89639 65800 88532 71789 59964 50681
68583 01032 67938 29733 71176 35699 10551 15091 52947 20134
75818 78982 24258 93051 02081 83890 66944 99856 87950 13952
16395 16837 00538 57133 89398 78205 72122 99655 25294 20941
53892 15105 40963 69267 85534 00533 27130 90420 72584 84576
66009 26869 91829 65078 89616 49016 14200 97469 88307 92282
45292 93427 92326 70206 15847 14302 60043 30530 57149 08642
34033 45008 41621 79437 98745 84455 66769 94729 17975 50963
13364 09937 00535 88122 47278 90758 23542 35273 67912 97670
03343 62593 93332 09921 25306 57483 98115 33460 55304 43572
46145 24476 62507 19530 41257 97919 02290 40357 38408 50031
37703 51658 17420 30593 39637 64220 45486 03698 80220 12139
12622 98083 17689 59677 56603 93316 79858 52548 67367 72416
56043 00251 70085 28067 78135 53000 18138 40564 77086 49557
43401 35924 28308 55140 07515 53854 23023 70268 80435 24269
18053 53460 32125 81357 26935 67234 78460 47833 20496 35645