RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Dr YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE DE LA MATIÈRE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master En Génie Mécanique

option Conception Mécanique

Théme

Analyse dynamique des plaques composites stratifiées

Proposé et dirigé par :

Dr.BACHENE Mourad

Présenté par:

Mr.AMMI Rachid

Promotion: 2011-2012

اهداء

اهدي هذا العمل المتواضع إلى من كان عونا لي

ودعما وسندا لي في الحياة منذ نعومة أظافري حتى بلغت اشدي

والدي العزيزين

إلى جميع أفراد العائلة والى كل من اشرف على تعليمي

وتكويني طيلة المشوار الدراسي

إلى كل زملائي في الجامعة والدراسة وخاصة من شاركني هذا العمل

لانجازه وتحقيقه

رشيد

Remerciement

Je remercie Allah avant tout.

Je tiens a remercies très chaleureusement mon encadreur ***Dr : BACHENE MOURAD*** *pour son aide et ses conseiltant au long de ce travail.*

Je remercie très chaleureusement Mon père et ma mère et toute la famille.

Un grand remerciement a tous les enseignants du département de génie de la matière et mes collègues et tous mes amis.

RESUME

L’utilisation des matériaux composites concerne aujourd’hui de nombreux secteurs industriels. Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement dynamique de ces structures est indispensable dans la conception ou la vérification de tout système déformable dans un environnement dynamique .pour atteindre de tels objectifs, la détermination des caractéristiques dynamiques est nécessaire.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement dynamique des structures des plaques stratifiées (multicouches) en composites. Le travail réalisé est présenté en deux grandes parties :

Première partie : est consacrée à l'étude bibliographique sur les stratifiés, suivi par un développement détaillé de la formulation du comportement dynamique des plaques stratifiées.
Deuxième partie : voir l’influence de certains paramètres, à savoir l anisotropie du matériau, le nombre de couches et l’influence de l’orientation des fibres sur les réponses dynamiques.

ABSTRACT

Using composite material concern, these days, lot of industrials domains. For modern technologic needs, a good knowledge of structure vibratory behavior is necessary in the design and verification of any deformed system in a dynamic environment. To reach such objective, it is necessarily to determine the dynamic characteristics.
In this memory, our work is dominated by the analytic of vibratory behavior and structures calculus of multilayer plates made from composite material. This work is presented in two important parts:
The first part: focuses on the literature review on laminates, followed by a detailed development of the formulation of the dynamic behavior of laminated plates.
The second part: see the influence of some parameters, namely the anisotropy of the material, the number of layers and the influence of fiber orientation on the dynamic responses.

ملخص

إن استعمال الصفائح المركبة يهم الآن عدة مجالات صناعية من اجل سد احتياجات التكنولوجيا الحديثة كالتكنولوجيا البحرية و صناعة الطائرات و غزو الفضاء.

من الضروري معرفة التصرف التحريكي و الاهتزازي للمنشات في الهياكل للحصول على مراقبة كل نضام قابل للتشوه وسط ميدان ديناميكي للوصول لهدا الغرض فان تعيين الخواص التحريكية (الديناميكية) المكافئة يعتبر ضروري

الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو التعرف على اكبر عدد من العوامل المؤثرة للتمكن من الفهم الجيد للتصرف ألتحريكي (الديناميكي) لصفائح.

تشمل الدراسة المنجزة على قسمين رئيسيي

القسم الأول يحتوي على دراسة شاملة للصفائح المركبة المتعددة الطبقات متبوعة بشرح لصياغة السلوك الديناميكي للصفائح

القسم الثاني يشمل تأثير بعض المعايير من بينها إبعاد الصفيحة-الطول والعرض-سمك الصفيحة--تعدد الأنماط طريقة التثبيت و عدد الطبقات- اتجاه الألياف تباين في الخصائص الميكانيكية على الصفائح المركبة وردودها الديناميكية.

TABLE DES MATIERES

Notations principales
Liste des figures
Liste des tableaux
Introduction générale 1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction 3
I.2. Généralités sur les matériaux composites 4
I.3. Caractéristiques générales 4
1.4. Classification des matériaux composites 6
1.4.1 Classification selon la forme des constituants 6
a) Composites à fibres 6
b) Composites à particules 6
1.4.2 Classification selon la nature des constituants 6
a) Composites à matrice organique 6
b) Composites à matrice métallique 6
c) Composites à matrice minérale 6
1.4.3 Classification suivant performance et diffusion 7
a) Les composites grandes diffusions 7
b) Les composites hautes performances 7
I.5. Éléments constituants d'un matériau composite 7
I.5.1. Divers types de résines 7
I.5.1.a. Les résines thermodurcissables 7
I.5.1.b. Les résines thermoplastiques 11
I.5.1.c. Les résines thermostables 11
I.5.2. Charges et les additifs 12
1.6. Les fibres et tissu 12
1.6.1. Formes linéiques 12
1.6.2. Fibres de formes surfaciques 12
a) Les mats 12
b) Les tissus et rubans 13
1.6.3. Structures tissées unidirectionnel 13
a) Tresses et préformes 13
b) Tissus multidirectionnels 14
1.6.4. Les principales fibres 14
1.6.4.1 Les fibres de verre 14
a) Elaboration des fibres de verre 14
b) Caractéristiques mécaniques des fibres de verre 15
1.6.4.2 Les fibres de carbone 16
a) Elaboration des fibres de carbone 16
b) Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone 16
1.6.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées 17
a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides 17

b) Domaines d'utilisation 18
1.6.4.4 Les fibres céramiques 18
a) Caractéristiques mécaniques et utilisation 18
1.6.4.5 Les fibres synthétiques thermostables 19
1.6.4.6 Autres fibres 19
a) les fibres d'origine végétale 19
b) les fibres d'origine minérale 19
c) les fibres synthétiques 19
d) les fibres métalliques 20
1.7 Les stratifiés composites 20
1.7.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels 21
I.8. Conclusion 22

Chapitre II : élasticité des matériaux composites

II.1. Introduction 23
II.2 Matrice de rigidité 24
II.3 Matrice de flexibilité ou souplesse 24
II.4 Changement de base 25
II.5 Caractérisation de matériaux 26
II.5.1 Matériau triclinique 26
II.5.2 Matériau monoclinique 26
II.5.3 Matériau orthotrope 26
II.5.4 Matériau unidirectionnel 27
II.5.5 Matériau isotrope 28
II.6 Matrice de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimé dans Les axes orthotropes 29
II.7 Comportement local décrit par la loi des mélanges 30
II.7.1 Module d'Young longitudinal 31
II.7.2 Module d'Young transverse 32
II.7.3 Module de cisaillement longitudinal 34
II.8 Détermination de l'équation constitutive du stratifié 35
II.8.1 Caractéristiques d'une couche rapportées au référentiel du stratifié 35
II.9 Etat de contraintes planes et constantes de rigidité réduites 40
II.9.1 Équations d'élasticité pour un état de contraintes planes 41
II.9.2 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux 43

Chapitre III : Généralités sur la théorie des stratifiés

III.1 Introduction 45
III.2. La théorie des stratifiés 45
III.3. Développement limite des déplacements selon la variable x3 [z] 47
III.4. Schéma de premier degré 48
III.5 Champ des déformations 49
III.5.1. Expression générale 49
III.5.2 Schéma du premier degré 50
III.6 Champ des contraintes 51
III.7. Résultantes et moments 51
III.7.1. Résultantes en membrane 51
III.7.2. Résultantes en cisaillement 52

III.7.3. Moments de flexion et de torsion 53
III.8. Théorie classique des stratifiés 53
III.9. Expression du champ des déformations 55
III.10. Champ des contraintes 56
III.10.1. Expression des contraintes 56
III.11. Expression des résultantes et moments 56
III.11.1 Résultant en membrane 56
III.11.2 Moments de flexion et de torsion 57
III.12 Équation du comportement mécanique d'un stratifié 58
III.12.1 Équation constitutive 58
II.13 Formulation du problème général de dynamique des stratifiés 59
II.13.1 Relations fondamentales des plaques dans un schéma 59
III.13.2 Equilibre par rapport aux résultantes en membrane 59
III.13.3 Équilibre par rapport aux résultantes de cisaillement 61
III.13.4 Équilibres par rapport aux moments 62
III.14 Equations du mouvement du stratifié 63

Chapitre IV : Analyse par éléments finis

IV.1 Introduction 65
IV.2 Méthode des éléments finis 66
IV.3 Types de problèmes MEF 67
IV.4 Formulation théorique 69
IV.4.1 Modèle de déplacement 69
IV.4.2 Expressions de contrainte 69
IV.4.3 Les équations du mouvement 70
IV.4.4 Énergie cinétique 71
IV.5 Discrétisation par éléments finis 72
IV.5.1 Discrétisation dans l'espace 72
IV.5.2 Fonction de déplacement 72
IV.5.3 Discret équations du mouvement 73
IV.5.4 Matrice de rigidité 74
IV.5.5 Matrice de masse 74
IV.5.6 Vecteur de charges 74
IV.6 Méthode directe l'intégration du temps– schéma de Newmark 75
VI.7 Analyse lainera de structurale 76
VI.7.1 Analyse modale 76
VI.7.1.1 MODÈLE 76
VI.7.2 Analyse transitoire 82
VI.7.2.1 MODÈLE 83

Chapitre V : Résultats et discussions

V.1 INTRODUCTION 89
V.2 ANALYSE VIBRATOIRE 89
V.2.1 Etude comparative 89
V.2.2 Convergence de maillage 89
V.2.3 Validation avec le cas de stratifié isotrope 90
(a)Plaque mince 91
(b)Plaque épaisse 92

V.2.4 Validation avec le cas de stratifie orthotrope 92
V.2.5 Validation avec le cas de stratifié croisé antisymétrique 93
V.3 APPLICATIONS 94
V.3.1 Influence du rapport épaisseur sur longueur h/a 94
V.3.2 Influence de l'anisotropie du matériau E1/E2 95
V.3.3 Influence du nombre de couches 96
V.3.4 Influence des orientations des fibres 98
V.3.5 Influence des conditions aux limites 101
V.3.6 Influence de l'empilement des couches 104
V.4 COMPORTEMENT EN VIBRATION FORCEE 107
V.4.1 VALIDATION 107
V.4.2 Convergence du maillage et applications 108
V.5.2 Cas d'un stratifie orthotrope 111
CONCLUSION GENERALE 114

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Chaine et trame d'un tissu 13
Figure I.2 : Modèle de base des stratifiés 20
Figure I.3 : Exemple de désignation d'un stratifié 21
Figure I.4 : Convention de sigue pour la désignation des stratifiés 22
Figure II.1 : Couche d'un matériau composite orthotrope 27
Figure II.2 : Matériau composite unidirectionnel 27
Figure II.3 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale 31
Figure II.4 : Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel. 33
Figure II.5 : Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal 34
Figure II.6 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre. 35
Figure II.7 : Axes principaux (1,2 ,3) d'une couche et référentiel (l',2',3') ou (x, y, z) du stratifié 36
Figure III.1 : (a) Vue d'ensemble, (b) décalée d'un composite stratifié définition de l'index des plis (k) et l'angle des plis (θ_k) 46
Figure III.2 : Définition des cordonnées des plis Z_k 46
Figure III.3 : Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transversal 48
Figure III.4 : Schématisation des résultantes en membranes des actions exercées sur un élément de stratifié 52
Figure III. 5 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement 52
Figure III- 6 : Schématisation des moments de flexion et de torsion. 53
Figure III- 7 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie Classique stratifiées 54
Figure IV.1 : Différents types des problèmes physiques en éléments finis 68
Figure IV.2 : Boîte de dialogue pour récupérer les résultats sur la base d'éléments numéros de séquence. 77
Figure IV.3 : Plaque en mailles 78
Figure IV.4 : Créer et modifier la boîte de dialogue Shell articles 79
Figure IV.5 : Les conditions aux limites 80
Figure IV.6 : Liste des fréquences des modes 81
Figure IV.7 : déformation de première mode 82
Figure IV.8 : utilisation de l'outil fonction 84
Figure IV.9 : Télécharger l'équation 85
Figure IV.10 : application de l'équation 85
Figure IV.11 : application de la charge 86
Figure IV.12 : contrôle du temps 87
Figure IV.13 : Variation dans le temps de la z-déplacement au point milieu 88
Figure V.1 : Influence de maillage sur la première fréquence propre adimensionnelle ω* 90
Figure V.2 : Influence du rapport h/a sur les quatre premières fréquences propres adimensionnelles ω* d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45°/-45°]_T$ 95

Figure V.3 : Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2 sur les quatre premières fréquences propres adimensionnelles ω* d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique [30°/-30°] 96

Figure V.4 : Influence du nombre de couches sur la première fréquence propre ω d'une plaque carrée simplement appuyée (a) : couches équilibrées antisymétriques $[45°/-45°]_{nT}$ (b) : couches croisées antisymétriques $[0°/90°]_{nT}$ 97

Figure V.5 : Influence de l'orientation des fibres θ sur la première fréquence propre adimensionnelle ω* d'un stratifié équilibré $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$. 99

Figure V.6 : Influence du rapport a/b sur la première fréquence propre adimensionnelle ω* pour trois types de stratifies. (a) : $[45°/-45°]_{\mathbf{T}}$, (b) : $[30°/-30°]_{\mathbf{T}}$, (c) : $[60°/-60°]_{\mathbf{T}}$. 100

Figure V.7 : déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (maillage 10 × 10) 110

Figure V.8 : déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (maillage 10 ×10). 110

Figure V.9: déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de trois couches $[0^0/90^0/0^0]$ et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10) 112

Figure V.10 : contrainte maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de trois couches $[0^0/90^0/0^0]$ et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10) 112

Figure V.11 : déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de quatre couches $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10) 113

Figure V.12 : contrainte maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de quatre couches $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10) 113

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Caractéristiques générales des composites. 5

Tableau I.2 : Diverses caractéristiques de résines polyester. 8

Tableau I.3 : Diverses caractéristiques des résines phénoliques. 9

Tableau I.4 : Diverses caractéristiques des résines époxydes. 10

Tableau I.5 : Diverses caractéristiques des résines thermoplastiques. 11

Tableau I.6 : Caractéristiques mécaniques des verres type E et R mesurées sur monofilaments à la sortie de la filière. 15

Tableau I.7 : Caractéristiques à la rupture d'un fil silionne industriel déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel verre/époxyde . 15

Tableau I.8 : Caractéristiques des fibres de carbone et du verre E. 16

Tableau I.9 : Caractéristiques mécaniques de différents types de. monofilaments aramides 17

Tableau I.10 : Caractéristiques mécaniques de quelques fibres céramiques. 18

Tableau I.11 : résume les caractéristiques mécaniques de quelques unes d'entre elles. 19

Tableau V .1 : Fréquences propres adimensionnelles ω_{mn}d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un matériau isotrope avec v = 0.3, h/a=0.01 91

Tableau V.2 : Fréquences propres adimensionnelles ω^*_{mn}d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un matériau isotrope avec v = 0.3, h/a=0.1 92

Tableau V.3 : Fréquences propres adimensionnelles ω^*_{mn}d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifié orthotrope de séquence d'empilement [0°/90°]s , avec h/a= 0.01 93

Tableau V.4 : Fréquences propres adimensionnelles ω^*_{mn}d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifie croisé de séquence d'empilement $[0°/90°]_T$ avec h/a= 0.01 94

Tableau V.5 : Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45°/-45°]_{6T}$ 101

Tableau V.6 : Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque carrée avec différentes séquences d'empilement 106

Tableau V.7 : Convergence de la déflexion centrale pour différents pas du temps, schéma de Newmark 108

Tableau V.8 : Convergence de la contrainte normale σ_x pour différents pas du temps, schéma de Newmark. 108

Tableau V.9: comparaison de la déflexion centrale d'une plaque carrée sur appuis simples sous une charge répartie sinusoïdalement pour différents types de matériaux 109

Tableau V.10: Déflexion Centre et Centre de la contrainte normale en fonction du temps pour isotrope simplement appuyée plaque carrée soumis à coup appliquée impulsion de chargement (maillage 10×10, $t = 5\mu.\text{sec}$). 111

NOTATIONS

E_1	Module d'Young longitudinal
E_2	Module d'Young transversal.
G_{12}	Module de cisaillement longitudinal.
G_{13}, G_{23}	Modules de cisaillement transversal.
$[K]$	Matrice de rigidité globale.
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire.
$[M]$	Matrice de masse globale.
$[Q]$	Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère principal (*1, 2, 3*).
$[Q']$	Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère du stratifié (*x, y, z*).
$[S]$	Matrice de souplesse
$[T]$	Matrice de changement de base des contraintes.
M_x, M_y	Moments de flexion.
M_{xy}	Moment de torsion.
n	Nombre de couches
NN	Nombre de nœuds par élément.
NE	Nombre des éléments.
N_x, N_y, N_{xy}	Résultantes en membrane.
Q_x, Q_y	Résultantes en cisaillement.

Z	cote du pli
a, b, h	Respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque.
[A]	Matrice de rigidité en membrane du multicouche.
[B]	Matrice de couplage membrane-flexion du multicouche.
[D]	Matrice de rigidité en torsion-flexion du multicouche
u, v, w	Respectivement, les déplacements suivant les directions *x, y, z*.
γ	Déformation angulaire.
ε	Déformation linéaire.
σ	Contrainte normale.
ν_{12} , ν_{21}	Coefficients de Poisson
τ	Contrainte tangentielle.
E_c	énergie cinétique
Π	L'énergie potentielle totale de la plaque
U	l'énergie de déformation de la plaque.
W	Représente le travail effectué par les forces appliquées de l'extérieur.
$\{q\}$	Vecteur de charge
ω	Fréquence propre de vibration.
ω^*	Fréquence propre adimensionnelle de vibration.
θ	L'angle que font le repère (*1,2)* et le repère (*x,y)*.
θ_x, θ_y	Respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes *x, y*.

t_k	Temps
$\{a\}$	Vecteur des déplacements globaux.
$\{\ddot{a}\}$	Vecteur des accélérations globales.

.

INTRODUCTION GENERALE

La technologie moderne a besoin des matériaux caractérisés à la fois par grande rigidité, résistance mécanique élevée, haute ténacité et grande légèreté. Aucun matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques, et pour atteindre cet objectif, il faut nécessairement utiliser les matériaux composites.

L'utilisation des matériaux composites dans tous les types d'ouvrages de génie a conduit à un intérêt accru pour la théorie, l'analyse, la conception et la fabrication de composants structuraux en matériaux composites. Les dernières décennies ont vu un effort important pour développer des systèmes en matériaux composites et d'analyser et de concevoir des composants structurels fabriqués à partir d'eux.

Les plaques composites à base de fibres unidirectionnelles sont intégrées dans plusieurs structures de différents secteurs industriels (constructions aérospatiales et aéronavales, transport et carrosseries, etc.), car elles permettent d'offrir aux structures concernées des avantages considérables, essentiellement en termes d'allégement, de rigidité spécifique et de résistance spécifique. Ces avantages sont généralement traduits par des bénéfices économiques (sur le plan des performances et/ou sur celui des économies de bilan d'exploitation). Ainsi, outre ces avantages, les plaques composites présentent d'autres avantages associés aux caractéristiques physiques, variant fortement suivant les fibres ou les résines utilisées (conductivité thermique ou électrique, anisotropies diverses, tenus aux chocs, état de surface, tenue à la fatigue et résistance à la corrosion).

Pendant leur fonctionnement, ces plaques peuvent être soumises à diverses forces d'excitation dont la source provient de différentes origines (moteur, rotor, vent, vagues, séisme, etc.). Ces forces excitatrices peuvent causer, sous le phénomène de résonance, des effets néfastes sur le comportement structural de la plaque. Afin de permettre à cette dernière de fonctionner, sans aucun effet néfaste, dans l'intervalle d'opération fréquentielle tout en supportant les conditions sévères aux quelles elle sera soumise pendant le service, il est nécessaire d'entreprendre une étude approfondie qui consiste à faire une analyse du

comportement dynamique de la plaque dans le but de dégager l'ordre des grandeurs des paramètres modaux nécessaires (fréquences propres et déformées modales) pour mettre en évidence d'éventuels problèmes de résonance.

L'analyse du comportement dynamique d'une plaque composite revient avant tout, à faire la meilleure formulation possible de son modèle mathématique. La théorie de Kirchoff fait l'hypothèse que les déformations en cisaillement transverse sont négligeables, ce qui limite son application au cas des plaques minces, car ces déformations ne peuvent plus être négligées dans la situation des plaques épaisses. La théorie de Mindlin tien compte, dans le cas des plaques épaisses, l'effet des déformations en cisaillement transverse qui ne sont pas négligeables.

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres.

- Le chapitre 1 est une présentation générale des composites stratifiés (multicouches) du point de vue définition, classification, principaux constituants, modes d'obtentions et désignation.
- Chapitre 2, on expose quelques lois de l'élasticité linéaire anisotrope, loi de Hooke généralisée des matériaux composites et divers état de contrainte.
- Chapitre 3, nous citons les diverses théories des plaques stratifiées et leurs comportements, relations fondamentales et formulation énergétique des stratifiées de première ordre.
- chapitre 4, une brève présentation de la méthode des éléments suivie par son application à l'analyse dynamique des plaques stratifiées, un exemple type à été traité par la suite avec ANSYS.
- chapitre 5, traite des applications sur l'analyse dynamique des plaques stratifiées où l'influence des paramètres géométriques et mécanique de ces plaques sur les réponses dynamiques ont été examiné.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

L'un des objectifs de l'industrie est de concevoir et d'élaborer des matériaux présentant une performance la plus élevée possible. Tous ces matériaux présentent un défaut majeur, ils sont fragiles et donc cassant ; un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure ; on n'obtient donc pas la résistance théorique espérée. Si ces mêmes matériaux sont fabriqués sous forme de fibres, leurs résistances pratiques sont augmentées considérablement. L'exemple le plus connu est celui du verre. Une plaque de verre casse facilement ; par contre, un ensemble de fibres de verre résiste à une contrainte de traction de l'ordre de 3000MPa, soit deux fois la résistance d'un acier très haute résistance. Cela tient au fait que :

- ✓ La probabilité d'avoir un défaut est plus faible sur une fibre que sur une plaque.
- ✓ Un défaut dans une fibre n'entraîne que la rupture de celle-ci ; le défaut ne se propage pas.

Pour utiliser pratiquement ces fibres, il est nécessaire de les lier par une matrice. Cette dernière a un rôle mécanique important ; en traction elle retransmet l'effort d'une fibre cassée vers les autres fibres ; en compression elle stabilise les fibres en flambage. Un tel matériau , constitué de fibres unidirectionnelles assemblées par une matrice ; est hétérogène puisqu'il est constitué de deux phases distinctes (fibre et matrice). Les caractéristiques macroscopiques peuvent cependant être considérées comme indépendantes du point géométrique considéré mais elles sont bien évidemment très dépendantes de la direction étudiée. On est en présence d'un matériau homogène anisotrope. Les propriétés sont élevées uniquement dans la direction des fibres. Pour réaliser des structures soumises à des efforts multiaxiaux, il est nécessaire d'orienter cet élément de base (pli ou monocouche) suivant des directions déterminées en fonction des sollicitations [1],[2] et [3] .

Le but de ce chapitre est de :

- ✓ Donner les caractéristiques importantes des fibres.
- ✓ Donner les caractéristiques des résines.

- ✓ Donner les domaines d'application de chaque résine et fibres.
- ✓ Donner les avantages et les inconvénients de chaque fibre.

I.2. Généralités sur les matériaux composites

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants.

La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite.

I.3. Caractéristiques générales

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phase discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celle de la phase continue. La phase continue appelée la matrice et la phase discontinue est appelée renfort

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- ➢ Des propriétés des matériaux constituants.
- ➢ De leur distribution géométrique.
- ➢ De leurs interactions.

Ainsi pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- ➢ La nature des constituants et leurs propriétés.
- ➢ La géométrie du renfort, sa distribution.
- ➢ La nature de l'interface matrice-renfort.

La géométrie de renfort sera caractérisée par : sa forme, sa taille, la concentration du renfort, sa disposition, etc.

Tableau (I-1) : *Caractéristiques générales des composites*.

Type de composite	Constituante	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charge/fibres cellulosiques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résine souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc /toile/acier Résine/charges/fibres de verre, Carbone, etc Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale Béton Composite carbone-carbone Composite céramique	Ciment /sable/granulats Carbone /fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, bio-médecine, etc. Pièces thermomécaniques
3. Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. Sandwiches $\begin{cases} Peaux \\ Ames \end{cases}$	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc	Domaines multiples

1.4. Classification des matériaux composites

La distinction entre les différents types de composites peut se faire selon les critères suivants :

1.4.1 Classification selon la forme des constituants

a) Composites à fibres

La matière renforçant se présente sous forme de fibres longues, courtes ou coupées, dont l'arrangement et l'orientation déterminent les propriétés mécaniques du matériau permettant une conception adaptée à l'application (conception à la carte) en agissant sur :

- ✓ La nature des constituants.
- ✓ La proportion de chaque constituant.
- ✓ L'orientation des fibres.

b) Composites à particules

Dans ce cas le renfort se présente sous forme de particules, qui sont utilisées pour l'amélioration de certaines propriétés mécaniques et physiques de la matrice (rigidité, tenue à la température, résistance à l'abrasion...) ou simplement pour diminuer le coût de production du matériau sans altérer ses caractéristiques.

1.4.2 Classification selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

a) Composites à matrice organique

Résines et charges associées à :

- ✓ Des fibres minérales : verre, carbone.
- ✓ Des fibres organiques : kevlar, polyamides.
- ✓ Des fibres métalliques : bore, aluminium.

b) Composites à matrice métallique

Métaux légers et leurs alliages associés à :

- ✓ Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) .
- ✓ Des fibres métalliques : bore.
- ✓ Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.

c) Composites à matrice minérale

Céramiques associées à :

- ✓ Des fibres métalliques : bore ;
- ✓ Des particules métalliques : cermets ;

- ✓ Des particules minérales : carburent, nitrures, etc.

1.4.3 Classification suivant performance et diffusion

a) Les composites grandes diffusions

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des coûts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

b) Les composites hautes performances

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc.

I.5. Éléments constituants d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et de charge dont le but est améliorer les caractéristiques de la résine en diminuant le cout de production, d'un point vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort. Le renfort apporte aux matériaux composite ses performances mécaniques élevées, alors quel matrice a pour rôle transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieurs et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

I.5.1. Divers types de résines

Les résines utilisées dans les composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présent une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

I.5.1.a. Les résines thermodurcissables

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des

matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- **Les résines polyesters**

Les résines polyesters insaturées viennent de très loin en tête dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultant :

- ✓ D'un faible coût de production.
- ✓ De leur diversité offrant de multiples possibilités.
- ✓ D'une adaptation à des procédés de fabrication faciles à mettre en œuvre et à automatiser.

Le tableau suivant illustre les diverses caractéristiques :

Tableau (I-2) : *Diverses caractéristiques de résines polyesters.*

Masse volumique	1200 kg/m^3
Module d'élasticité en traction	2.8 à 3.5 GPa
Module d'élasticité en flexion	3 à 4,5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	50 à 80 MPa
Contrainte de rupture en flexion	90 à 130 MPa
Allongement à la rupture en traction	2 à 5 %
Allongement à la rupture en flexion	7 à 9 %
Résistance en compression	90 à 200 MPa
Résistance en cisaillement	10 à 20 MPa
Température de fléchissement sous charge 1,8 (MPa)	60 à 100 °C

Parmi les avantages des polyesters insaturés :

- ✓ Une bonne rigidité résultant d'un module d'élasticité assez élevé.
- ✓ Une bonne stabilité dimensionnelle.
- ✓ Une bonne mouillabilité des fibres et des tissus.
- ✓ La facilité de mise en œuvre.
- ✓ Une bonne tenue chimique.
- ✓ Un faible cout de production.
- ✓ Une bonne résistance chimique aux hydrocarbures.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- ✓ Une tenue médiocre en température : inférieur à 120°C en service continu.
- ✓ Une sensibilité à la fissuration, essentiellement dans les cas de chocs.

- ✓ Un mauvais comportement à la vapeur, à l'eau bouillante avec risque d'hydrolyse.
- ✓ Une dégradation à la lumière par les rayons ultraviolets.
- ✓ Une inflammabilité.

- **Les résines de condensation**

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques.

- **Les résines phénoliques**

Sont les plus anciennes des résines thermodurcissables dont la plus connue est la bakélite.

Les caractéristiques de ces résines sont les suivants :

Tableau (I-3) : *Diverses caractéristiques des résines phénoliques.*

Masse volumique	1200 kg/m^3
Module d'élasticité en flexion	3 GPa
Contrainte à la rupture en traction	40 MPa
Allongement à la rupture en traction	2,5%
Contrainte à la rupture en flexion	90 MPa
Résistance à la compression	250 MPa
Température de fléchissement sous charge	120°C

Parmi les avantages, nous citerons :

- ✓ Une excellente stabilité dimensionnelle.
- ✓ Une bonne tenue à la chaleur et au fluage.
- ✓ Une bonne résistance aux agnats chimiques.
- ✓ Un faible retrait.
- ✓ De bonnes caractéristiques mécaniques.
- ✓ Un faible cout.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- ✓ Une mise en œuvre sous pression, donc à faible cadences.
- ✓ Les couleurs foncées des résines.
- ✓ Le non adaptation à des utilisations alimentaire.

- **Les caractéristiques des résines aminoplastes**

Sont voisines de celles des résines phénoliques. Aux avantages de ces résines, il faut ajouter :

- ✓ La possibilité d'utilisation alimentaire.

- ✓ La possibilité de colorer les résines.

- **Les résines puraniques**

Sont assez peu utilisées en Fran ce à couse de leur cout, trois fois plus élevé que les résine polyester. Parmi leurs avantages :

- ✓ Un durcissement plus rapide que les résines phénolique.
- ✓ Une grande inertie vis-à-vis des agnats chimique corrosifs.

Cette dernière caractéristique conduite à utiliser les résines furaniques dans le cas de matériaux devant résister aux produits chimiques : citernes, tuyaux, bacs.

- **Les résines époxydes**

Les résines les plus utilisées après les résines polyesters sont les résines époxydes. Elles ne repesent cependant que de l'ordre de 5% du marché composite, à cause de leur prix élevé.

Les caractéristiques mécaniques générales des résines époxydes sont les suivent :

Tableau (I-4) : *Diverses caractéristiques des résines époxydes.*

Masse volumique	1100 à 1500 kg/m^3
Module d'élasticité en traction	3à 5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	60 à 80 MPa
Allongement à la rupture en traction	2 à 5%
Contrainte à la rupture en flexion	100 à 150 MPA
Résistance au cisaillement	30 à 50 MPa
Température de fléchissement sous charge	190°C

Parmi les avantages des résines époxydes, nous retiendrons :

- ✓ De bonnes propriétés mécaniques.
- ✓ Une bonne tenue aux températures élevés jusqu'à 150°C à 190°C en continue.
- ✓ Une excellente résistance chimique.
- ✓ Un faible retrait au moulage.
- ✓ Une bonne mouillabilité des renforts.
- ✓ Une excellente adhérence aux matériaux métalliques.

Parmi les inconvénients, sont :

- ✓ Un temps de polymérisation long.
- ✓ Un coût élevé.
- ✓ La nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre.
- ✓ Une sensibilité à la fissuration.

I.5.1.b. Les résines thermoplastiques :

La famille des résines thermoplastiques est très vaste, et peut être séparée en plastique de grande diffusion et plastique techniques :

Les plastiques de grande diffusion sont mis en œuvre soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extraction pour obtenir des films, des plaques, des tubes, etc. Les plastiques techniques sont mis en œuvre par injection.

Parmi les résines thermoplastiques nous citerons : le polychlorure de vinyle, le polyéthylène, le polypropylène, polyamide.

Les caractéristiques de polypropylène et polyamide :

Tableau I-5 : *Diverses caractéristiques des résines thermoplastiques.*

	polypropylène	polyamide
Masse volumique (kg/m^3)	900	1140
Contrainte à la rupture (MPa)	20-35	60-85
Module d'élasticité (GPa)	1.1-1.4	1.2-2.5
Température de fléchissent sous charge (°C)	50-60	65-100

I.5.1.c. Les résines thermostables

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, ou les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables, nous donnons quelques éléments sur les résines bismaléimides et poly imides.

- **Les résines bismaléimides**

Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau se constitue par addition, sans produits de réaction, vers 180 à 200°C. L'application principal des composites à résines bismaléimides est moins la réalisation de matériaux de structures que leur emploi comme support dans les circuits imprimés.

- **Les résines poly imides**

Les poly imides sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevés. Ces résine permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250°C, à la résistance de l'aluminium.

I.5.2. Charges et les additifs

Différents produits peuvent être incorporés pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le cout. La quantité des produits ajoutés peut varier de :

- ✓ Quelque dizaines de % dans le cas de charges.
- ✓ A quelques % et mois dans le cas d'additifs.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini. Soit d'en facilité de mise en œuvre.

1.6. Les fibres et tissu

1.6.1. Formes linéiques

Les fibres sont élaborées en filaments unitaires de 5 à 15 µm de diamètre, appelés monofilaments. Ces filaments sont ensuite réunis en fils ou en mèches pour faciliter leur utilisation. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique dont l'unité est le tex qui représente la masse en gramme d'un fil de 1 Km de longueur, soit :

1 tex = 1g/km ou 1 tex = 10-6 kg/m

L'utilisation directe des formes linéiques pour la mise en œuvre de composites est limitée à quelques procédés particuliers tels que l'enroulement filamentaire et la pultrusion.

1.6.2. Fibres de formes surfaciques

Les fils sont transformés par les techniques de l'industrie papetière et de tissage pour réaliser des formes surfaciques : mats, tissus ou rubans, qui facilitent la manipulation et la mise en œuvre des renforts**.**

a) Les mats

Se sont des nappes de fils continus ou discontinus dispersés dans un plan et assemblés par un liant soluble ou non dans la résine, l'absence d'orientations préférentielles des fibres conduit à un comportement isotrope du mat dans son plan. Les mats de fils coupés, plus déformables, permettent d'obtenir des formes embouties. Les mats de fils continus sont utilisés pour réaliser des formes complexes par moulage.

b) Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. L'ensemble est maintenu par l'entrecroisement des fils suivant deux directions (figure I.1).

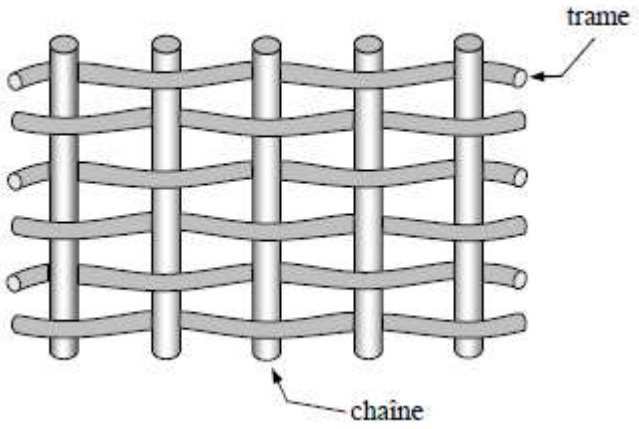


Figure (I.1). *Chaine et trame d'un tissu*

- ✓ Une direction chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.
- ✓ Une direction trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés, donc par la masse linéique du fils,et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame. Les armures classiques utilisées sont : toile (ou taffetas), satin, sergé, armure haut module, armure unidirectionnelle. Ces deux dernières donnent les meilleures performances (l'absence d'entrecroisement supprime les effets d'ondulation et de cisaillement des fils). Les mats et tissus sont caractérisés par leur masse surfacique en gramme/m^2.

1.6.3. Structures tissées unidirectionnel

a) Tresses et préformes

Des tissus tabulaires (tresses ou préformes) peuvent être obtenus par tissage cylindrique ou conique : les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation de pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit couvrir. On peut ainsi réaliser une pièce de révolution

ayant un diamètre variable le long de son arc, ce qui permet d'obtenir divers tissus en forme de « chaussettes » coniques, ogivales ou hémisphériques. Ces tissus sont utilisés dans les constructions aéronautiques (cône de rentrée, tuyères, etc.).

b) Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés. Ils se caractérisent par le nombre de directions de tissage 3D et 4D. La structure la plus simple est celle du tissage 3D où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales.

1.6.4. Les principales fibres

1.6.4.1 Les fibres de verre

Le comportement du verre dans sa forme massive est dominé par son caractère fragile. En revanche, lorsqu'il est élaboré sous forme de fibres de très faibles diamètres, il devient tenace et révèle de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres sont obtenues à partir du verre textile composé d'un mélange d'oxydes : silice, alumine, chaux, magnésie, et oxyde de bore. Les proportions du mélange, et l'ajout d'oxydes modificateurs donnent au matériau final ses propriétés spécifiques. Différents types de verre peuvent être distingués :

- ✓ Le verre E à usage général, bonnes propriétés électriques.
- ✓ Le verre D à hautes propriétés diélectriques, utilisé pour la construction de matériel de télécommunications.
- ✓ Le verre C résistant aux agents chimiques, enrobage des structures sévèrement exposées.
- ✓ Les verres R et S à caractéristiques mécaniques élevées, utilisés pour la réalisation de structures de hautes performances mécaniques.

a) Elaboration des fibres de verre

Les fibres de verre sont produites par étirement à grande vitesse et refroidissement de filaments obtenus par l'écoulement du verre en fusion à travers les orifices calibrés d'une filière. Les filaments sont aussitôt enduits d'un agent d'ensimage qui a pour rôles essentiels de protéger les filaments contre l'abrasion, de faciliter par la suite leur imprégnation par la résine et d'améliorer leur liaison avec cette dernière.

Deux procédés d'étirage peuvent être utilisés :

- Etirage mécanique donnant des fibres continues assemblées en fils de base silionne.
- Etirage pneumatique donnant des fibres discontinues assemblées en ruban verranne.

b) Caractéristiques mécaniques des fibres de verre

Les valeurs de référence pour les caractéristiques mécaniques des fibres de verre sont celles mesurées sur des monofilaments prélevés à la sortie de la filière. Le tableau (I.6) donne les valeurs usuelles de ces grandeurs. Cependant, les valeurs les plus représentatives, et en particulier pour les caractéristiques à la rupture des fibres (tableau I.7), sont celles déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel où la liaison verre-résine favorise une répartition assez homogène de la charge entre les filaments dont les caractéristiques sont diminuées par les différentes sollicitations mécaniques et chimiques subies lors des opérations de transformation en fils industriels.

Tableau I.6 : *Caractéristiques mécaniques des verres type E et R mesurées sur monofilaments à la sortie de la filière [1]*

Caractéristiques			Verre E	Verre R
Masse volumique	ρ	kg/m^3	2600	2550
Module de Young	E_f	GPa	73	86
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	MPa	340	4400
Allongement à la rupture	ε_{fu}	%	4.4	5.2
Coefficient de Poisson	ν_f		0.22	—

Tableau (I.7) : *Caractéristiques à la rupture d'un fil silionne industriel déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel verre/époxyde [1]*

	Verre E	Verre R
Contrainte à la rupture (Mpa)	2400-2600	3000-3600
Allongement à la rupture	3.4	4

En plus de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les fibres de verre ont aussi une bonne tenue thermique, elles conservent ces caractéristiques jusqu'à des températures assez élevées 200 °C pour le verre E et 250 °C pour le verre R.

1.6.4.2 Les fibres de carbone

La mise en œuvre des fibres de carbone est motivée par les caractéristiques spécifiques remarquablement élevées que prévoit la théorie pour la structure cristalline hexagonale du graphite. Les fortes liaisons entre atomes voisins d'un même plan cristallographique donnent un module de Young de l'ordre de 1200 GPa et une contrainte à la rupture de 20000 MPa dans les directions parallèles aux plans cristallographiques, pour une masse volumique inférieure à 2000 kg/m^3. Malgré les imperfections des cristaux obtenus par les procédés industriels, l'élaboration de fibres d'axes parallèles aux plans cristallographiques permet d'obtenir des fibres parmi les plus performantes (650 GPa pour le module de Young et 4000 MPa pour la contrainte à la rupture).

a) Elaboration des fibres de carbone

Les fibres de carbone sont élaborées par décomposition thermique sans fusion d'un polymère *précurseur* fibres ou fils. Trois opérations successives sont nécessaires : oxydation, carbonisation sous gaz inerte et graphitisation. Le *précurseur* peut être :

- **Des fibres acryliques**

Des mèches de filaments acryliques, obtenus à partir du poly acrylonitrile (PAN), sont traitées thermiquement. Après carbonisation les fibres de carbone obtenues ont une haute résistance (fibres HR). Une transformation supplémentaire par graphitisation permet d'obtenir des fibres à haut module de Young (HM) ou très haut module (THM). Les deux types de fibres HR et HM, subissent un traitement de surface (ensimage) pour amélioration de la liaison fibre-résine.

- **Le brai**

Le fil obtenu à partir du brai (résidu pâteux de la distillation du charbon ou du pétrole) donne après traitement un carbone de haut module, mais de caractéristiques légèrement plus faibles que celles des fibres (HM) obtenues par le procédé (PAN).

b) Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone

Sur le tableau 1.6 est reportée une comparaison des caractéristiques des fibres de carbone et des fibres de verre E. Les fibres de carbone se distinguent en plus par une excellente tenue à la température, jusqu'à 1500 °C environ, d'où le développement de composites à fibres de carbone et matrice de carbone à haute tenue thermique utilisés dans les tuyères, les disques de freins, etc.

Tableau (I.8) : *Caractéristiques des fibres de carbone et du verre E*

Caractéristiques			**Verre E**	**Carbone HR**	**Carbone HM**	**Carbone THM**	**Carbone HM (brai)**
Masse volumique	ρ	(kg/m^3)	2600	1750	1810	1950	2000
Diameter		(μm)		8	8	8	12
Module de Young	E_f	(Gpa)	73	220	400	600	380
Module spécifique	E_f/ρ	(MN m/kg)	28	120	210	310	190
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	(Mpa)	3400	3000-3500	2800	2000	2000-2400
Contrainte spécifique	σ_{fu}	(kN m/kg)	1300	1710-2800	1550	1030	1000-1200
Prix de revient / aux fibres de verre			1	25-30	50-60	65-70	25-30

1.6.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont des fibres de synthèse plus connues sous la désignation commerciale de fibres de « Kevlar », lancée par Dupont de Nemours (USA) depuis 1972. D'autres industriels commercialisent également ces fibres sous des désignations propres à chacun (Twaron, Technora, etc.). Elles sont élaborées par filage d'une solution sulfurique concentrée d'un haut polymère, polyaramide ou polyamide. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides

Le tableau I.9 résume les caractéristiques de différents types de fibres aramides, mesurées sur monofilaments. Les valeurs de contrainte à la rupture de ces fibres sont proches de celles des fibres de carbone HR, pour un prix de revient 3 à 5 fois moindre. Des ensimages adaptés sont développés pour améliorer l'adhérence fibre-résine. Les fibres de Kevlar sont associées à d'autres fibres (verre, carbone) pour former des composites hybrides.

Tableau I.9 : *Caractéristiques mécaniques de différents types de monofilaments aramides*

Caractéristiques			**Kevlar 29**	**Kevlar 49**	**Kevlar 149**	**Twaron**	**Technora**
Masse volumique	ρ	(kg/m^3)	1440	1450	1470	1440	1390
Diamètre		(μm)	12	12	12	12	12
Module de Young	E_f	(Gpa)	60	130	200	100	90
Module spécifique	E_f/ρ	(MNm/kg)	42	90	136	70	65
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	(Mpa)	3000	3600	3000	3500	38000
Contrainte spécifique	σ_{fu}/ρ	(kNm/kg)	2080	2480	2040	2430	2730
Allongement à la rupture		(%)	4	3	1.5	3	4

b) Domaines d'utilisation

L'une des premières utilisations des fibres d'aramides a été le remplacement des armatures d'acier dans les pneumatiques. En raison de leur légèreté et de leur résistance au choc et à l'impact, leur usage s'est développé dans la fabrication de protections contre projectiles (blindages, gilets pare-balles.., etc.), ainsi que dans certains articles de sports (skis, raquettes de tennis.., etc.).

1.6.4.4 Les fibres céramiques

Le principal intérêt des céramiques est leur caractère réfractaire. Diverses fibres sont obtenues par dépôt chimique en phase vapeur d'un revêtement céramique :
de bore (fibres de bore B), de bore-carbure de bore (fibres B-B4C), de silicium (fibres de silicium) ou de bore-silicium (fibres BorSic), sur un fil support en tungstène ou en carbone

a) Caractéristiques mécaniques et utilisation

Les différentes fibres céramiques ont des caractéristiques assez voisines (tableau 1.10). Ces caractéristiques restent maintenues jusqu'à des températures allant de 500 à 1000 °C. Les fibres SiC et BorSic sont utilisées avec des matrices métalliques ou céramiques pour la fabrication des aubes de compresseurs et de turbines. Les fibres de bore et de bore-carbure de bore associées aux résines thermoplastiques et thermodurcissables, notamment époxydes, sont utilisées dans les domaines des sports et loisirs.

Tableau I.10 : *Caractéristiques mécaniques de quelques fibres céramiques*

Caractéristiques			**Bore**	**Bore + B4C**	**SiC**
Masse volumique	ρ	(kg/m^3)	2600	2600	3000
Diamètre		(μm)	100-150	100-150	100-150
Module de Young	E_f	(Gpa)	430	430	410
Module spécifique	E_f/ρ	(MN	165	165	140
m/kg)			3800	400	3900
Contrainte à la	σ_{fu}	(Mpa)			
rupture			1460	1540	1300
Contrainte spécifique	σ_{fu}/ρ	(kNm/kg)			

1.6.4.5 Les fibres synthétiques thermostables

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse. Leurs caractéristiques mécaniques sont faibles mais restent conservées aux températures élevées.

Elles sont associées à des résines thermostables pour obtenir des matériaux composites de bonne tenue thermique, utilisés dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles et cônes de rentrée de véhicule spatial. Chaque fabricant propose sa propre formule sous une désignation commerciale.

Tableau I.11 : *résume les caractéristiques mécaniques de quelques unes d'entre elles.*

Caractéristiques			**Kermel**	**Nomex**	**Kynol**	**PBI**	**Apyeil**
Masse volumique	ρ	(kg/m3)	1350	1380	1270	1430	1380
Module de Young	E_f	(Gpa)	7	16	4.5	6	17
Contrainte à la rupture		(Mpa)	470	670	280	500	660
Allongement à la rupture	ε_{fu}	**%**	20	45	20-60	30	40

1.6.4.6 Autres fibres

Il existe d'autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques, et dont l'utilisation est réservée à la recherche de :

- ✓ produits à bas prix de revient.
- ✓ produits à haute isolation thermique.
- ✓ produits de bonne conductivité thermique ou électrique.

Parmi ces fibres nous avons :

a) les fibres d'origine végétale

- ✓ Le bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc.
- ✓ Le sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

b) les fibres d'origine minérale

- ✓ l'amiante (interdite dans certaines utilisations).
- ✓ la silice.

c) les fibres synthétiques

- ✓ fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.).
- ✓ fibres polyamides.

d) les fibres métalliques

- ✓ acier.
- ✓ cuivre.
- ✓ aluminium.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques afin d'obtenir des composites:

- ✓ de bonne conductivité thermique et électrique.
- ✓ de caractéristiques thermomécaniques élevées.

1.7 Les stratifiés composites

Les stratifiés sont des composites formés par un empilement de couches successives de renfort-matrice appelées plis ou encore monocouches constituant l'élément de base de toute structure composite. Les plis sont caractérisés par la forme du renfort (mat, fils, stratifié, tissu,..., etc.) qui détermine leur comportement mécanique, une répartition aléatoire de fibres courtes ou longues (mat par exemple) correspond à une couche pratiquement isotrope dans son plan, une orientation privilégiée des fibres correspond à une anisotropie marquée.

Les couches peuvent être de natures différentes en matière des fibres et forme du renfort. Ces deux paramètres, en plus de l'empilement et de l'orientation, permettent de moduler les caractéristiques du stratifié pour répondre au mieux aux sollicitations imposées.

La désignation d'un stratifié doit tenir compte de tous ces paramètres. Elle se fait généralement selon un code établi pour les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels auxquels peut se ramener l'étude de tout autre type de stratifiés (figure I.2).

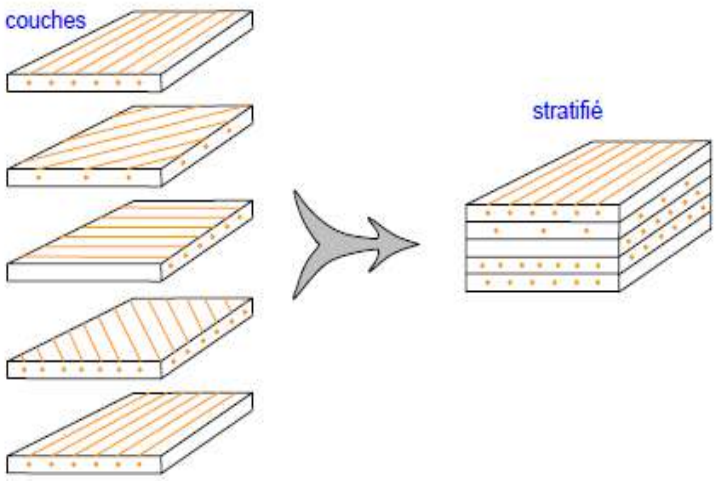


Figure (I.2). *Modèle de base des stratifiés*

1.7.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les règles de désignation d'un stratifié sont les suivantes :

- Chaque couche est désignée par la valeur de son angle d'orientation (angle d'orientation des fibres en degrés par rapport à l'axe x de référence). Le sens de l'orientation est pris en compte (positif ou négatif), la désignation dépend donc du référentiel choisi (figure I.3).
- Les couches successives d'angles différents sont séparées par un / si leurs anglais sont différence.
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique indiquant le nombre de couches dans cette direction.
- Si deux couches successives ont des orientations de même valeurs et de sens opposés, elles peuvent être désignées par le signe ± :

  $+\theta / -\theta = \pm\theta$ $-\theta / +\theta = \pm\theta$

- La désignation se fait couche par couche en allant d'une face à l'autre, des crochets indiquant le début et la fin.

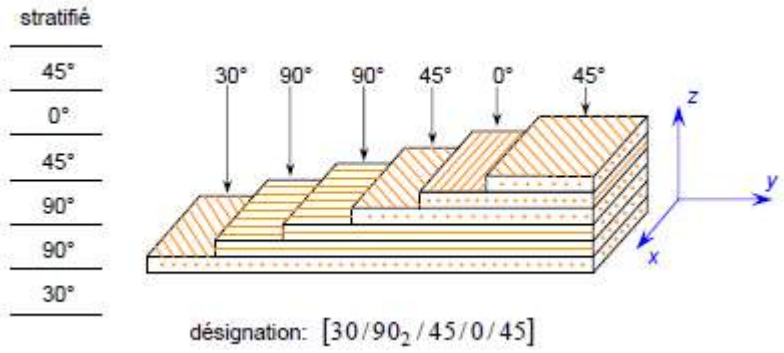


Figure (I.3). *Exemple de désignation d'un stratifié*

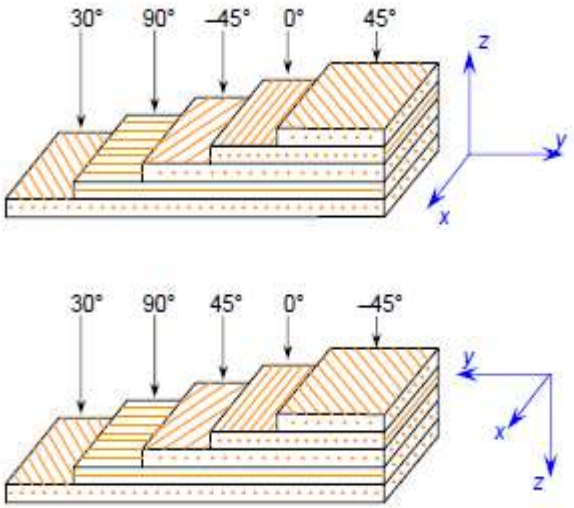


Figure (I.4). *Convention de sigue pour la désignation des stratifiés*

I.8. Conclusion

Ce chapitre, a fait une présentation des notions liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et ses caractéristiques mécaniques.

Chapitre II : élasticité des matériaux composites

II.1. Introduction

Dans les différents procédés de mise en œuvre, la réalisation de structures stratifiées en composites se fait par le dépôt de couches successives sur un moule, comportant des surfaces planes ou courbes. Par conséquent, le structures obtenues sont des structures multicouches de type plaques ou couque [6] comportant deux niveaux d'hétérogénéité :

- hétérogénéité à l'échelle des constituants d'une couche : fibres et matrice hétérogénéité microscopique.

- hétérogénéité à l'échelle des constituants du stratifié : plis de différentes compositions et/ou orientations : hétérogénéité macroscopique.

Pour faciliter la modélisation du comportement mécanique de tels composites, les milieux hétérogènes sont remplacés par des milieux homogènes de comportement moyen équivalent. Ce passage appelé homogénéisation s'effectue en deux étapes :

- Homogénéisation micromécanique

Le pli hétérogène est représenté par un pli homogène équivalent dont le modèle de comportement (isotrope, orthotrope ou anisotrope) dépend de la forme du renfort (mat, stratifiés ou tissus unidirectionnels, tissus 2D), et dont les caractéristiques dépendent de la nature et des proportions des constituants (fibres et résine).

- Homogénéisation macro-mécanique

Le stratifié est remplacé par un matériau homogène anisotrope dont les caractéristiques mécaniques sont déterminées à partir des propriétés homogénéisées des plis, à travers l'application des définitions de la Théorie des plaques multicouches. Les plis pouvant être orientés différemment, Pour pouvoir écrire la loi de comportement (ou équation constitutive) du stratifié, il est nécessaire d'exprimer leurs propriétés dans un même référentiel [7]

II.2 Matrice de rigidité

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56}\\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} \quad \text{(II.1)}$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma = C\varepsilon \quad \text{(II.2)}$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de Rigidité **C**, symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité Cij

II.3 Matrice de flexibilité ou souplesse

La relation d'élasticité (II.2) peut être écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon = S\sigma} \quad \text{(II.3)}$$

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice **S** est appelée matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général :

$$S = \begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36}\\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46}\\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{45} & S_{55} & S_{56}\\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66}\end{bmatrix} \quad \text{(II.4)}$$

Avec

$$\mathbf{S = C^{-1}} \quad \text{(II.5)}$$

Les coefficients $\mathbf{S_{ij}}$sont appelés constantes de flexibilité ou constantes de Souplesse.

II.4 Changement de base

Soit **C**= [$\mathbf{C}_{ij}$] la matrice de rigidité exprimée dane une base

$(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Et C= [$\mathbf{C'}_{ij}$] la matrice de rigidité exprimée dans une base

$(\overrightarrow{e'}) = (\overrightarrow{e'}_1, \overrightarrow{e'}_2, \overrightarrow{e'}_3)$

Ces matrices relient les contraintes et déformations exprimées dans les bases respectives :

-dans la base ($\vec{e}$) **:** $\boldsymbol{\sigma} = C_{\varepsilon}$ (II.6)

- dans la base ($\overrightarrow{e'}$) **:** $\boldsymbol{\sigma'} = C'_{\varepsilon'}$ (II.7)

Les relations de changements de base, relatives aux contraintes et déformations

$$\boldsymbol{\sigma'} = T_{\sigma}\sigma = T_{\sigma}\, C_{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma'} = T_{\sigma} C\, T_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon' \quad \text{(II.8)}$$

L'identification des expressions (II.7) et (II.8) conduit alors à la relation de changement de base des matrices de rigidité :

$$C' = T_{\sigma} C T_{\sigma}^{-1} \quad \text{(II.9)}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve de même la relation de changement de base des matrices de souplesse :

$$S' = T_{\varepsilon} S T_{\varepsilon}^{-1} \quad \text{(II.10)}$$

Les relations inverses s'écrivent respectivement :

$$C = T_{\sigma}^{-1} C' T_{\varepsilon} \quad \text{(II.11)}$$

Et $$S = T_{\varepsilon}^{-1} S' T_{\sigma} \quad \text{(II.12)}$$

II.5 Caractérisation de matériaux

II.5.1 Matériau triclinique :

Cas général à matrice complète 21 constantes d'élasticité

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.13)}$$

II.5.2 Matériau monoclinique :

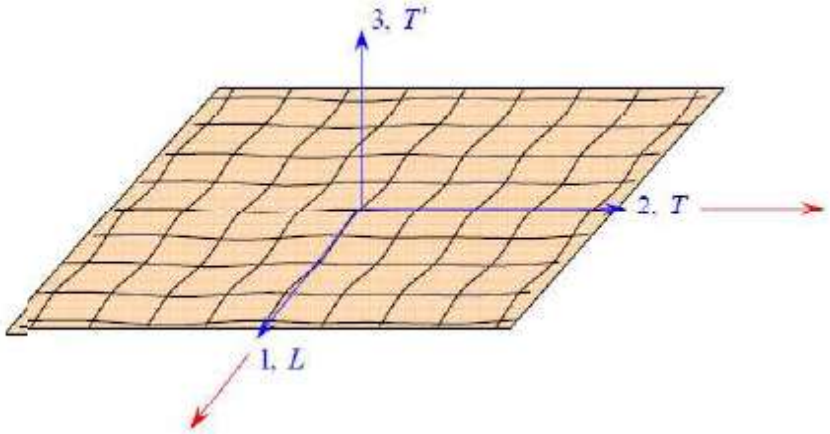
Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1, 2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :[1],[8],[9]

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.14)}$$

II.5.3 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme : [1] ,[10] ,[11]

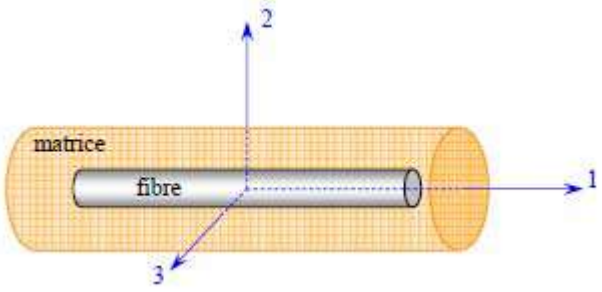
$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.15)}$$



Figure(II.1). *Couche d'un matériau composite orthotrope*

II.5.4 Matériau unidirectionnel

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (figure II.2). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à [1],[12]



Figure(II.2). *Matériau composite unidirectionnel*

$$C_{13}=C_{12}\,, \qquad C_{33}=C_{22}$$

$$C_{55}=C_{66} \qquad C_{44}=\frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) \tag{II.16}$$

Et $$S_{13}=S_{12} \qquad S_{33}=S_{22}$$

$$S_{55}=S_{66} \qquad S_{44}=2(S_{22}-S_{23}) \tag{II.17}$$

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{II.18}$$

Et la matrice de souplesse.

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \tag{II.19}$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

II.5.5 Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Les matériaux usuels (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations [1],[3]

$$C_{22}=C_{11}, \qquad C_{23}=C_{12}, \qquad C_{66}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{22})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{(II.20)}$$

II.6 Matrice de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimé dans Les axes orthotropes

Si les raisonnements élémentaires mentionnés ci-dessus sont étendus aux différentes sollicitations du matériau, il vient:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \text{(II.21)}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1/E_L & -\nu_{LT}/E_L & -\nu_{LT'}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT}/E_L & 1/E_T & -\nu_{TT'}/E_T & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT'}/E_L & -\nu_{TT'}/E_T & 1/E_{T'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{TT'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LT'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LT} \end{bmatrix} \quad \text{(II.22)}$$

Les constantes de rigidités sont déduites en inversant la matrice de souplesse

$C_{11}=\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}$

$C_{22}=\frac{1-\nu_{13}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}$

$C_{33}=\frac{1-v_{12}v_{21}}{E_2E_1\Delta}$

$C_{12}=\frac{v_{21}-v_{13}v_{23}}{E_2E_3\Delta}=\frac{v_{21}-v_{32}v_{13}}{E_1E_2\Delta}$

$C_{13}=\frac{v_{31}-v_{21}v_{32}}{E_2E_3\Delta}=\frac{v_{13}-v_{12}v_{23}}{E_1E_2\Delta}$ (II.23)

$C_{13}=\frac{v_{31}-v_{12}v_{31}}{E_1E_3\Delta}=\frac{v_{23}-v_{21}v_{13}}{E_1E_2\Delta}$

$C_{44}=C_{23}$

$C_{55}=C_{13}$

$C_{66}=C_{12}$

Avec :

$\Delta=\frac{1-v_{12}v_{21}-v_{23}v_{32}-v_{31}v_{13}-2v_{21}v_{32}v_{13}}{E_1E_2E_3}$

Dans le cas d'un matériau isotrope, les équations (II.23) se simplifient à :

$C_{11}=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}$

$C_{12}=\frac{E\,v}{(1+v)(1-2v)}$ (II.24)

$\frac{C_{11}-C_{12}}{2}=\frac{E}{2(1+v)}$

Il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson :

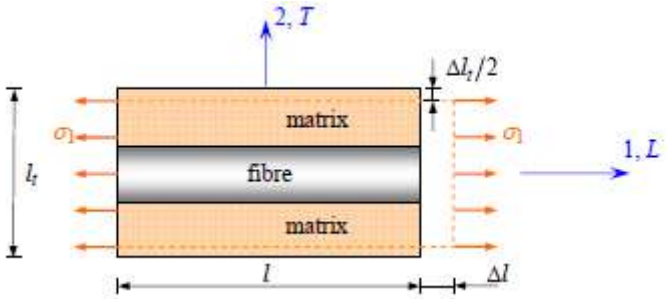
$$\frac{E_i}{v_{ij}}=\frac{E_j}{v_{ji}} \quad \text{(II.25)}$$

II.7 Comportement local décrit par la loi des mélanges

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un composite, nous étudions un assemblage de géométrie donné de deux phases (fibre et matrice) de caractéristiques mécaniques différentes, soumis à des sollicitations simples.

II.7.1 Module d'Young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (figure II.3). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice.



Figure(II.3). *Schéma simplifié d'une traction longitudinale*

Si l'allongement de la cellule (identique à celui de la fibre et de la matrice), la déformation longitudinale imposée à la cellule est :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}$$

Où la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l \tag{II.26}$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_l \tag{II.27}$$

$$\sigma_m = E_M \varepsilon_L$$

La charge totale appliquée est :

$$F_l = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m$$

Ou S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne σ_1=F_1/S s'écrit :

$$\sigma_1 = \sigma_f v_f + \sigma_m (1\text{-}v_f) \tag{II.28}$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1 \tag{II.29}$$

La combinaison des relations (II.27) à (II.29) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f v_f + E_m(1 - v_f) \tag{II.30}$$

II.7.2 Module d'Young transverse

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres. Une expression simplifiée de ce module peut être obtenue dans un schéma simpliste à deux dimensions. Dans un tel schéma, une tranche de matériau composite, d'épaisseur donnée, est considérée comme étant constituée (figure II.4) de couches successives, possédant alternativement les propriétés des fibres et de la matrice. La hauteur des couches doit simplement vérifier :

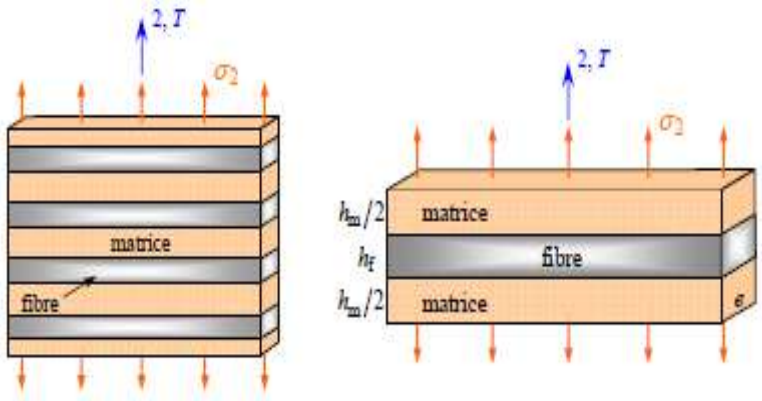
$$v_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \qquad \text{Et} \qquad 1\text{-}v_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \tag{II.31}$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \tag{II.32}$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \qquad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \tag{II.33}$$



Figure(II.4). *Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.*

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements fibre et la matrice. Cumulés dans la Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m \tag{II.34}$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \tag{II.36}$$

La combinaison des expressions (II.33) à (II.36) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{1 - v_f}{E_f} \tag{II.37}$$

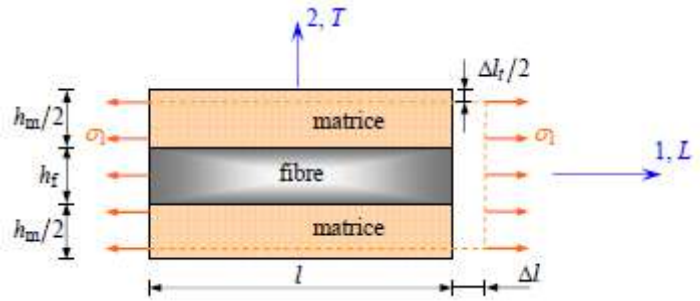
Cette expression est connue sous le nom de loi inverse des mélanges et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice suivant une relation sans dimension sous la forme :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + (\frac{E_m}{E_f} - 1) v_f} \tag{II.38}$$

II.7.3 Module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal GLT est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure II.5, en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes t imposées sur la cellule. Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \qquad \text{Et} \qquad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \tag{II.39}$$



Figure(II.5). *Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal*

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure II.6) sont :

$$\gamma_f = h_f\gamma_f \qquad \text{Et} \qquad \delta_m = h_m\gamma_m \tag{II.40}$$

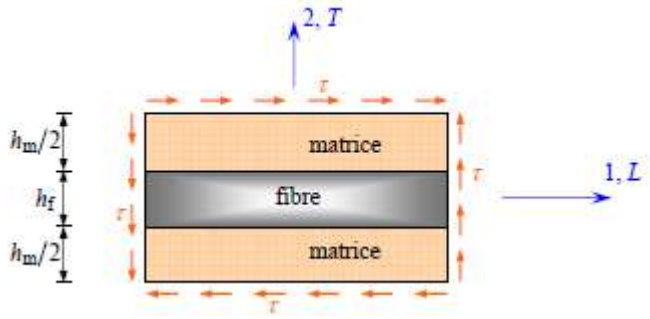
La déformation totale de la cellule (figure II.6) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f + h_m\gamma_m$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_m+h_f} = \gamma_f v_f + \gamma_m(1 - v_f) \tag{II.41}$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement



Figure(II.6). *Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.*

Longitudinal GLT suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \tag{II.42}$$

En combinant les expressions (II.39) à (II.42), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{v_f}{G_f} + \frac{1-v_f}{G_m} \tag{II.43}$$

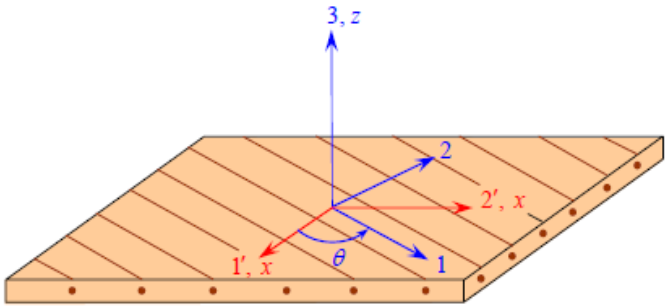
Cette expression a une forme identique à celle obtenue (II.37) pour le module d'Young transverse. Les mêmes considérations peuvent être transposées ici

II.8 Détermination de l'équation constitutive du stratifié

II.8.1 Caractéristiques d'une couche rapportées au référentiel du stratifié

Dans le cas général, un stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes, homogènes ou composites, chacune d'elles pouvant être orientée différemment par rapport au référentiel du stratifié.

L'orientation d'une couche est mesurée par l'angle θ (figure II.7), formé par son axe principal 1 **(L)** avec l'axe 1' (x) de référence. La notation (l',2',3') est utilisée dans les relations matricielles, tandis que la notation (x,y,z) trouve son application pour les relations tensorielles.



Figure(II.7). *Axes principaux (1,2 ,3) d'une couche et référentiel (l',2',3') ou (x,y,z) du stratifié*

La matrice de passage du système (1,2,3) au système de référence (x,y,z) est donnée par

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.44}$$

La relation de changement de base correspondante pour le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma']=[a][\sigma][a]^T \tag{II.45}$$

Qui après développement et réécriture en notation matricielle prend la forme :

$$\{\sigma'\}=[T_\sigma]\{\sigma\} \tag{II.46}$$

Ou

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

La relation de changement de base pour la matrice de rigidité s'écrit alors :

$$[C']=[T_\sigma][C][T_\sigma]^T \tag{II.47}$$

Quelque soit θ, la relation entre contrainte et déformation rapportée aux axes du stratifié possède la structure suivante :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16}\\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26}\\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{22} & 0\\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \quad \text{(II.48)}$$

Ou

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16}\\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26}\\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0\\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} \quad \text{(II.49)}$$

sont les constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel, dont la direction des fibres fait un angle θ avec la direction x de référence

$C'_{11} = C_{11}cos^4 + C_{22}sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})sin^2\theta cos^2\theta$

$C'_{12=}(C_{11} + C_{22} - 4C_{66})sin^2\theta cos^2\theta + C_{12}(sin^4\theta + cos^4\theta)$

$C'_{13} = C_{12}cos^2\theta + C_{23}sin^2\theta$

$C'_{14} = 0$ $\qquad$ $C'_{15} = 0$

$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})sin\,\theta cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})sin^3\theta cos\,\theta$

$C'_{22} = C_{11}sin^4\theta + C_{22}cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})sin^2\theta cos^2\theta$

$C'_{23} = C_{12}sin^2\theta + C_{23}cos^2\theta$

$C'_{24} = 0$ $\qquad$ $C'_{25} = 0$

$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})sin^3\theta\, cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})sin\theta cos^3\theta$

$C'_{33} = C_{22}$ $\qquad$ $C'_{34} = 0$ $\qquad$ $C'_{35} = 0$

$C'_{36} = (C_{12} - C_{23})sin\theta cos\theta$

$C'_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})cos^2\theta + C_{66}sin^2\theta$

$C'_{45} = \left[C_{66} - \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\right]\text{Sin}\theta cos\theta$ $C'_{46} = 0$

$C'_{55} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})sin^2\theta + C_{66}cos^2\theta$ $C'_{56} = 0$

$C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})]sin^2\theta cos^2\theta + C_{66}(sin^4\theta + cos^4\theta)$

Les constants de souplesse d'un composite unidirectionnel, hors de ses axes principaux

$S'_{11} = S_{11}cos^4 + S_{22}sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66})sin^2\theta cos^2\theta$

$S'_{12=}(S_{11} + S_{22} - S_{66})sin^2\theta cos^2\theta + S_{12}(sin^4\theta + cos^4\theta)$

$S'_{13} = S_{12}cos^2\theta + S_{23}sin^2\theta$

$S'_{14} = 0$ $S'_{15} = 0$

$S'_{16} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}]sin\,\theta cos^3\theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}]sin^3\theta cos\,\theta$

$S'_{22} = S_{11}sin^4\theta + S_{22}cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66})sin^2\theta cos^2\theta$

$S'_{23} = S_{12}sin^2\theta + S_{23}cos^2\theta$

$S'_{24} = 0$ $S'_{25} = 0$

$S'_{26} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}]sin^3\theta\, cos\theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}]sin\theta cos^3\theta$

$S'_{33} = S_{22}$ $S'_{34} = 0$ $S_{35} = 0$

$S'_{36} = 2(S_{12} - S_{23})sin\theta cos\theta$

$S'_{44} = 2(S_{22} - S_{23})cos^2\theta + S_{66}sin^2\theta$

$S'_{45} = [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})]\text{Sin}\theta cos\theta$ $S'_{46} = 0$

$S'_{55} = 2(S_{22} - S_{23})sin^2\theta + S_{66}cos^2\theta$ $S'_{56} = 0$

$S'_{66} = 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66})]sin^2\theta cos^2\theta + S_{66}(sin^4\theta + cos^4\theta)$

Les constantes de rigidité d'un matériau orthotrope, dont la direction principale l (ou L) fait un angle θ avec la direction x de référence :

$$C'_{11} = C_{11}cos^4 + C_{22}sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})sin^2\theta cos^2\theta$$

$$C'_{12=}(C_{11} + C_{22} - 4C_{66})sin^2\theta cos^2\theta + C_{12}(sin^4\theta + cos^4\theta)$$

$$C'_{13} = C_{13}cos^2\theta + C_{23}sin^2\theta$$

$$C'_{14} = 0 \qquad C'_{15} = 0$$

$$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})sin\,\theta cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})sin^3\theta cos\,\theta$$

$$C'_{22} = C_{11}sin^4\theta + C_{22}cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})sin^2\theta cos^2\theta$$

$$C'_{23} = C_{13}sin^2\theta + C_{23}cos^2\theta$$

$$C'_{24} = 0 \qquad C'_{25} = 0$$

$$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})sin^3\theta\, cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})sin\theta cos^3\theta$$

$$C'_{33} = C_{33} \qquad C'_{34} = 0 \qquad C'_{35} = 0$$

$$C'_{36} = (C_{13} - C_{23})sin\theta cos\theta$$

$$C'_{44} = C_{44}cos^2\theta + C_{55}sin^2\theta$$

$$C'_{45} = (C_{55} - C_{44})\text{Sin}\theta cos\theta \qquad C'_{46} = 0$$

$$C'_{55} = C_{44}sin^2\theta + C_{55}cos^2\theta \qquad C'_{56} = 0$$

$$C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})]sin^2\theta cos^2\theta + C_{66}(sin^4\theta + cos^4\theta)$$

Les constantes de souplesse d'un matériau orthotrope, hors de ses principaux

$$S'_{11} = S_{11}cos^4 + S_{22}sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66})sin^2\theta cos^2\theta$$

$$S'_{12=}(S_{11} + S_{22} - S_{66})sin^2\theta cos^2\theta + S_{12}(sin^4\theta + cos^4\theta)$$

$$S'_{13} = S_{13}cos^2\theta + S_{23}sin^2\theta$$

$$S'_{14} = 0 \qquad S'_{15} = 0$$

$$S'_{16} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}]sin\,\theta cos^3\theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}]sin^3\theta cos\,\theta$$

$$S'_{22} = S_{11}sin^4\theta + S_{22}cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66})sin^2\theta cos^2\theta$$

$$S'_{23} = S_{12}sin^2\theta + S_{23}cos^2\theta$$

$$S'_{24} = 0 \qquad S'_{25} = 0$$

$$S'_{26} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}]sin^3\theta\, cos\theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}]sin\theta cos^3\theta$$

$$S'_{33} = S_{22} \qquad S'_{34} = 0 \qquad S_{35} = 0$$

$$S'_{36} = 2(S_{13} - S_{23})sin\theta cos\theta$$

$$S'_{44} = S_{44}cos^2\theta + S_{66}sin^2\theta$$

$$S'_{45} = (S_{55} - S_{44})\text{Sin}\theta cos\theta \qquad S'_{46} = 0$$

$$S'_{55} = S_{44}sin^2\theta + S_{66}cos^2\theta \qquad S'_{56} = 0$$

$$S'_{66} = 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66})]sin^2\theta cos^2\theta + S_{66}(sin^4\theta + cos^4\theta)$$

II.9 Etat de contraintes planes et constantes de rigidité réduites

Un état de contraintes planes dans une couche est définie par le tenseur des contraintes au point(M), exprimé dans le référentiel du stratifié par :

$$\sigma'(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.50)}$$

En chaque point M du matériau. La direction z est la direction principale avec une valeur propre nulle. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de contraintes planes. En fait, il serait nécessaire de faire la distinction entre un état de contraintes planes et un état de contraintes à deux dimensions. En effet, dans un sens strict, un état de contraintes planes est un état particulier de contraintes à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée z.

II.9.1 Équations d'élasticité pour un état de contraintes planes

Les contraintes en un point M s'écrivent donc (II.50) sous la forme :

$$\begin{bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sigma'_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma'_{11}\\ \sigma'_{22}\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sigma'_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma'_{xx}\\ \sigma'_{yy}\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sigma'_{xy}\end{bmatrix} \qquad \text{(II.51)}$$

Soit $\sigma'_i \neq 0 \quad si \quad i = 1,2,6$

$\sigma'_i = 0 \quad si \quad i = 3,4,5$

Les déformations sont données par :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon'_1\\ \varepsilon'_2\\ \varepsilon'_3\\ \varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\\ \varepsilon'_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16}\\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26}\\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0\\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sigma'_6\end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_1 &= S'_{11}\sigma'_1 + S'_{12}\sigma'_2 + S'_{16}\sigma'_6\\
\varepsilon'_2 &= S'_{12}\sigma'_1 + S'_{22}\sigma'_2 + S'_{26}\sigma'_6\\
\varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6\\
\varepsilon'_4 &= 0\\
\varepsilon'_5 &= 0\\
\varepsilon'_6 &= S'_{16}\sigma'_1 + S'_{26}\sigma'_2 + S'_{66}\sigma'_6
\end{aligned} \qquad \text{(II.52)}$$

Nous en déduisons que:

$$\varepsilon'_i \neq 0 \quad si \quad i = 1,2,3,6 \qquad \text{(II.53)}$$

$$\varepsilon'_i = 0 \qquad si \qquad i = ,4,5$$

Il existe donc une déformation suivant la direction z, donnée par :

$$\varepsilon_{ZZ} = \varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6 \tag{II.54}$$

$$= S'_{13}\sigma'_{xx} + S'_{23}\sigma'_{yy} + S'_{36}\sigma'_{xy}$$

Les deux premiers termes sont des termes de couplage par effet Poisson, et le troisième est dû à un couplage par cisaillement. Les relations entre contraintes et déformations exprimées à l'aide des coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\sigma'_1 = C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{16}\varepsilon'_6$$

$$\sigma'_2 = C'_{12}\varepsilon'_1 + C'_{22}\varepsilon'_2 + C'_{23}\varepsilon'_3 + C'_{26}\varepsilon'_6 \tag{II.55}$$

$$0 = C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{33}\varepsilon'_3 + C'_{36}\varepsilon'_6$$

$$\sigma'_6 = C'_{16}\varepsilon'_1 + C'_{26}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_3 + C'_{66}\varepsilon'_6$$

Ces relatons montrent que les déformations ε'_1 , ε'_2 , ε'_3 et ε'_6 ne sont pas indépendantes. Nous en tirons :

$$\varepsilon'_3 = \frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_3) \tag{II.56}$$

Cette expression, reportée dans les relations (II.55), permet alors d'exprimer les contraintes $\sigma'_1, \sigma'_2\ et\ \sigma'_6$ en fonction des déformations $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 et\ \varepsilon'_6$.

Et des expressions analogues pour σ'_1etσ'_6 Ces trois relations en $\sigma'_1, \sigma'_2\ et\ \sigma'_6$ peuvent alors s'exprimer sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16}\\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26}\\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon'_1\\ \varepsilon'_2\\ \varepsilon'_6\end{bmatrix} \tag{II.57}$$

en posant :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C\prime_{i3}C\prime_{j3}}{C\prime_{33}}, \qquad i,j = 1,2,6 \tag{II.58}$$

Avec

$$Q'_{ji} = Q'_{ij}$$

Les coefficients Q'_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contraintes planes. La matrice :

$$Q' = \begin{bmatrix}Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16}\\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26}\\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q_{66}\end{bmatrix} \tag{II.59}$$

II.9.2 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Dans les axes principaux d'un composite orthotrope, les constantes de rigidité sont telles que :

$$C'_{11} = C_{11} \qquad C'_{12} = C_{12} \qquad C'_{13} = C_{13}$$

$$C'_{22} = C_{22} \qquad C'_{23} = C_{23} \qquad C'_{33} = C_{33}$$

$$C'_{66} = C_{66} \qquad C'_{16} = C'_{26} = C'_{36} = 0$$

Compte tenu de ces relations, les expressions (II.58) permettent de trouver les constantes de rigidité réduites exprimées dans les axes principaux, soit :

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \qquad Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \qquad Q_{16} = 0$$

$$Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, \qquad Q_{26} = 0 \qquad Q_{66} = C_{66} \tag{II.60}$$

Avec en outre pour un composite unidirectionnel :

$$C_{13} = C_{12}, \qquad C_{33} = C_{22}$$

La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux, s'écrit donc :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{II.61}$$

Les matrices $[s_{IJ}]$ et $[Q_{ij}]$ étant inverses, nous en déduisons les relations :

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \tag{II.62}$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux soit :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - V_{lt}V_{tl}} = \frac{E_L}{1 - v_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - V_{lt}V_{tl}} = \frac{E_L}{1 - v_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \tag{II.63}$$

$$Q_{12} = \frac{v_{LT}E_L}{1 - V_{lt}V_{tl}} = v_{LT}Q_{22}$$

$$Q_{11} = G_{LT}$$

Chapitre III : Généralités sur la théorie des stratifiés

III.1 Introduction

L'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites.

-suivant des plaques ou coques

- par stratification de couches successives

Ce mode de conception justifie l'importance donnée à l'étude des plaques dans des structures en composites. En effet, outre les structures de type plaques, l'analyse des plaques permet également, dans le cadre de calcul par éléments finis, de modéliser les structures coques

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles, dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme planO_{xy}. L'axe $\vec{O}$z correspond à la direction suivant l'épaisseur.

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plan (plan xy) que nous appelé surface moyenne et par une épaisseur petit par rapporte à l'autre dimension (largeur et langueur) .elle peut être constituée d'un matériau orthotrope.

III.2. La théorie des stratifiés

Un stratifié est obtenue par la combinaison de deux ou plusieurs plis ou strates comme illustre la figure, l'indice des plis k, et l'angle des fibres dans chacun des plis θ_K ,sont également indiqués. Le stratifié global a un total de N plis (k=1,2,….N).

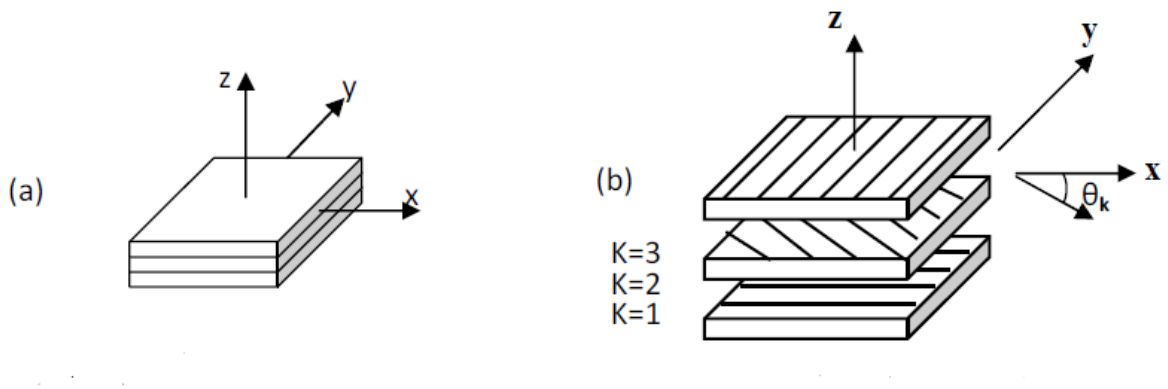
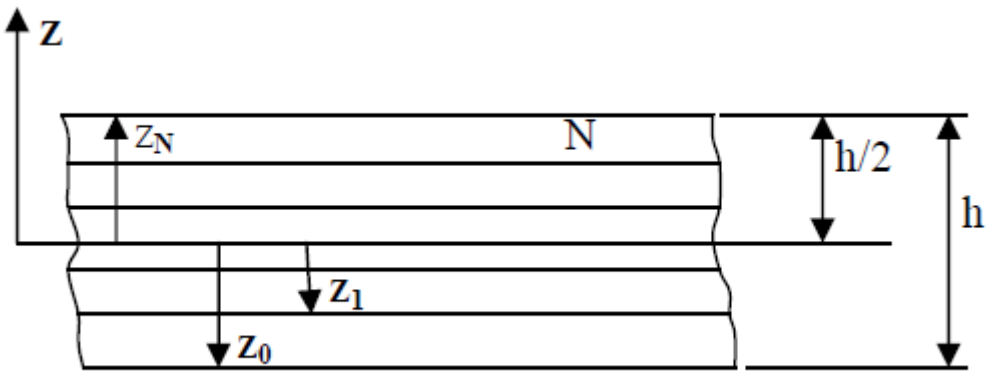


Figure (III.1). *(a) Vue d'ensemble, (b) décalée d'un composite stratifié définition de l'index des plis (k) et l'angle des plis (θ_K)*

Les cordonnées du stratifié sont définies avec un axe z perpendiculaire au plan de stratifié l'origine de l'axe z est au centre géométrique (plan médian) du stratifié les cordonnées dans le plan, xy, sont arbitraires. Il est cependant habituel d'assigner l'axe des x à une direction spécifique de changement ou à une direction principale de la structure. Une fois le système de coordonnées établi, les angles des strates, θ_K sont définis comme indiqué à la figure précédent c'est-à-dire que θ_K est l'angle entre la direction des fibres et l'axe x. pour des raisons d'analyse et de conception du stratifié, il est pratique de définir les coordonnées de la strate, Z_K , comme montré sur la figure suivent :



Figure(III.2). *Définition des cordonnées des plis Z_K*

Les coordonnées de la strate sont calculées selon :

$$Z_0 = -\frac{h}{2} \qquad \text{K= 0} \qquad \text{(III.1)}$$

$$Z_K = Z_{K-1} + h_K \qquad \text{K= 1, 2… N,} \qquad \text{(III.2)}$$

Où h_K est l'épaisseur de la $K^{iéme}$strate

La théorie de stratifié a été développée au début des années 1960. Cette théorie est basé sur les déformations, de cisaillement, de flexion et de torsion que subit un élément de stratifié fin lors de la mis en charge de la structure.

Les notations utilisées sont reportées sur le Figure (III-2).Le stratifié est constitué de (n) couches, numérotées de la face inferieur à la face supérieur. La surface moyenne est choisie comme plan de référence (O_{XY}) et l'axe $\overrightarrow{O_Z}$ est dirigé dans le sens croissent des numéros des couches. Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inferieur (h_{K-1}) et de sa face supérieur (h_K).

III.3. Développement limite des déplacements selon la variable x_3 [z]

Les schémas du premier ordre sont basés sur l'hypothèse de Kirchhoff qui stipule que "Les sections droites restent droites après chargement". L'expression mathématique de cette hypothèse consiste à développer les déplacements de tout point *M(x, y, z) de* la plaque, notés *u*, v et *w*, en polynômes du premier degré en z, fonctions des déplacements d'un point de référence du plan moyen M**o(x, y, z),** notés u_0 , $v_0$etw_0.

Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement selon la variable x_3.[13],[14]

Le champ des déplacements s'écrit alors

$$u(x,y,z,t)=u(x,y,0,t)+z\varphi_x(x,y,t)+z^2\Psi_x(x,y,t)+z^3\phi_x(x,y,t)$$

$$v(x,y,z,t)=v(x,y,0,t)+z\varphi_y(x,y,t)+z^2\Psi_y(x,y,t)+z^3\phi_y(x,y,t) \quad \text{(III.3)}$$

$$w(x,y,z,t)=w(x,y,0,t)+z\varphi_z(x,y,t)+z^2\Psi_z(x,y,t)$$

L'expression (II.3) est un développement en série selon x_3. Comme x_3 reste faible devant les autres dimensions, on supposera qu'un schéma du premier degré est suffisant (hypothèse de Hencky-Mindlin). D'autre part, on notera $u_1(x_1, x_2, 0)= u_1^0(x_1, x_2)$

de même pour $u_2(x_1, x_2, 0)= u_2^0(x_1, x_2)$

L'expression (III.3) devient :

$u(x, y, z, t)= u_0(x, y, 0, t)+z\varphi_x(x, y, t)$

v(x, y, z, t)= v_0 (x, y, 0, t)+zφ_y(x, y, t) (III.4)

w(x, y, z, t)= w_0 (x, y, 0, t)

u_0, v_0 : Déplacements en membrane

w_0 : Déplacement transversal (flèche)

III.4. Schéma de premier degré

Les schémas les plus simples et les plus utilisé pour décrire le comportement à de schéma du premier degré de la forme [13],[14],[15]

u(x, y, z, t)= u (x, y, 0) +zφ_x(x, y)

v(x, y, z, t)= v (x, y, 0) +zφ_y(x, y) (III.5)

w(x, y, z, t)= w(x, y, 0)

Ou

u(x, y, z, t)= u_0(x, y) +zφ_x(x, y)

v(x, y, z, t)= v_0 (x, y) +zφ_y(x, y) (III.6)

w(x, y, z, t)= w_0 (x, y)

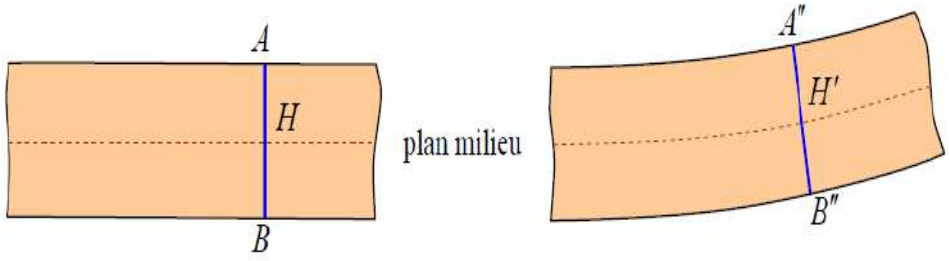


***Figure (III.3)**. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transversal*

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'un normal AB est donnée par :

u (a, b, z) =$A_u + B_u z$

v (a, b, z) =$A_v + B_v z$ (II.7)

w (a, b, z) =A_w

La déformée A"B" reste dans ce cas un segment de droite :

Les points situés sur une normale au plan mo yen (Oxy) avant déformation restent sur segment de droit au cours de déformation Figure (III-3).

De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas modifiés lors de déformation et la déformée de AB reste normale à la déformée du plan moyen (0xy) avant déformation restent sur segment de droit au cours de la déformation.

De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte, les angles ne sont pas modifiés lors de la déformation et la déformée de AB reste normale à la déformée du plan moyen. Dans ce cas, la déformée en H (déformée du plan (0xy) et déformée de la normal AB)

Pourra être caractérisée par :

- Les déplacements du point H : déplacement dans le plan (Oxy)
  [u(a,b,0)= A u , v(a,b,0)= Av] et déplacement transverse [w(a,b,0)=Aw] ;
- Les rotations $\theta_X$et $\theta_y$autour des directions i, j.

Un schéma de premier degré permet de résoudre la plupart de problèmes élémentaires. Dans les cas où un schéma de premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il serait alors nécessaire de considérer un schéma du deuxième ordre, voire du troisième ordre.

III.5 Champ des déformations

III.5.1. Expression générale

Le champ des déformations est exprimé en coordonnées cartésiennes. Dans le cas d'une théorie générale du troisième ordre, le champ des déformations se déduit de l'expression (III.3) du champ des déplacements. Soit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3\frac{\partial \phi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + z^2\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + z^3\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \quad \text{(III.8)}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \varphi_x(x,y) + 2z\psi_z(x,y)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + z\left(2\psi_y + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}\right) + z^2\left(3\phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + z\left(2\psi_x + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}\right) + z^2\left(3\phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) + z^2\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) + z^3\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right)$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des déplacements dans le plan sont du même ordre en z que les déformations déterminées par le déplacement transverse w.

III.5.2 Schéma du premier degré

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déplacements est exprimé par les relations (III.6). Le champ des déformations se déduit alors simplement des relations (III.8) et s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{ZZ} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad \text{(III.9)}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse.

III.6 Champ des contraintes

Le champ de contrainte d'une couche de composite unidirectionnel ou tissus, rapportée aux axes (O_{xyz}) du stratifiés, à été étudiée au chapitre précédent. Si le point M appartient à la couche k du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16}\\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26}\\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0\\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \quad \text{(III.10)}$$

III.7. Résultantes et moments

III.7.1. Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté N(x, y), est définir par [15], [16]

$$\mathrm{N(x,\ y)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_K(\mathrm{M}) d_z \quad \text{(III.11)}$$

Ou σ_K(M) est la matrice des contraintes en membrane, noté N(x, y), $\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$dane la couche k, soit :

$$\mathrm{N(x,\ y)}=\begin{bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} d_z \quad \text{(III.12)}$$

Les composantes $N_x\ N_y\ N_{xy}$ sont les résultantes, par unité de longueur de plaque

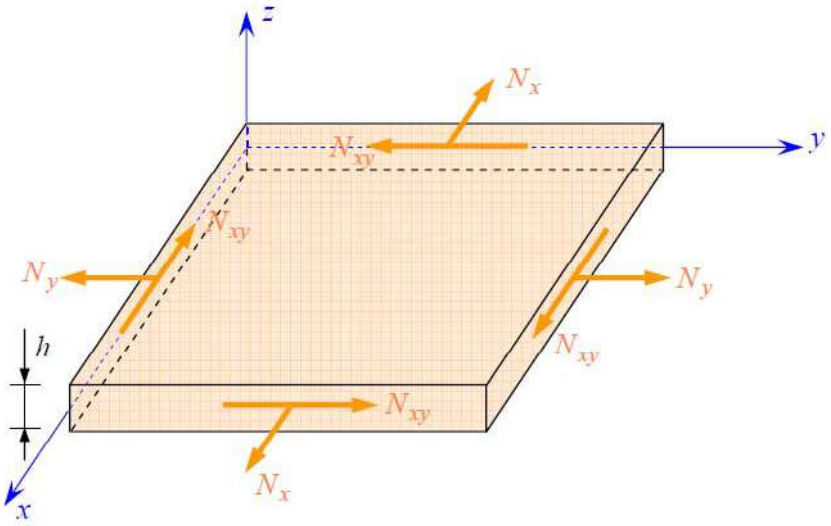


***Figure (III.4)**. Schématisation des résultantes en membranes des actions exercées sur un élément de stratifié*

III.7.2. Résultantes en cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manier par :

$$Q(x, y)=\begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \end{bmatrix}=\sum_{K=1}^{N} \int_{h_k}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} d_z \qquad \text{(II.13)}$$

Les résultantes en cisaillement sont défiées par unité longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure suivent :

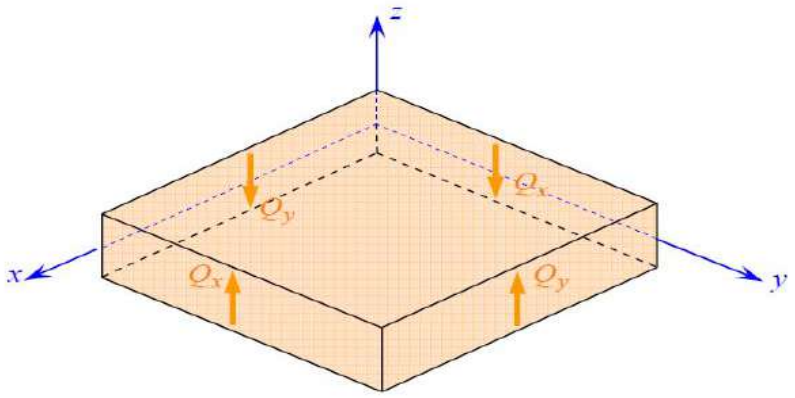


***Figure (III- 5).** Représentation schématique des résultantes de cisaillement*

III.7.3. Moments de flexion et de torsion

Les relations fondamentales des stratifié font également intervenir les moments résultants contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les moments de flexions et de torsions sont définis par [15], [16] :

$$N(x, y)=\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} =\sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} d_z \qquad \text{(III.14)}$$

Les composantes Mx et My sont les moments de flexion suivant les directions x , y respectivement, et la composante Mxy est le moment de torsion.

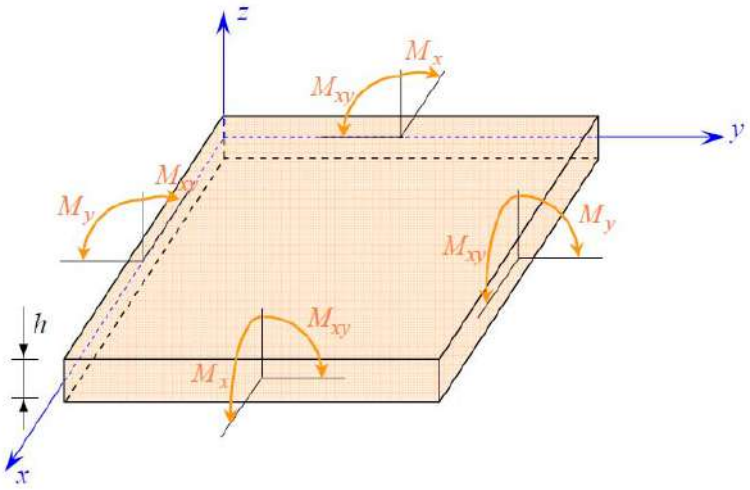


Figure (III- 6). *Schématisation des moments de flexion et de torsion.*

III.8. Théorie classique des stratifiés

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré. Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse.

Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles,[17],[18] ,[19] soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \ , et \qquad \gamma_{xy} = 0 \qquad \text{(III.15)}$$

Cette hypothèse implique, d'après (III.9)

$$\varphi_x(x,y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\varphi_y(x,y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad \text{(III.16)}$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (III.6)

u(x, y, z)= u_0(x, y) -z$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ (x, y)

v(x, y, z)= v_0 (x, y) -z $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ (x, y) (III.17)

w(x, y, z)= w_0 (x, y)

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen l'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sue la figure suivant :

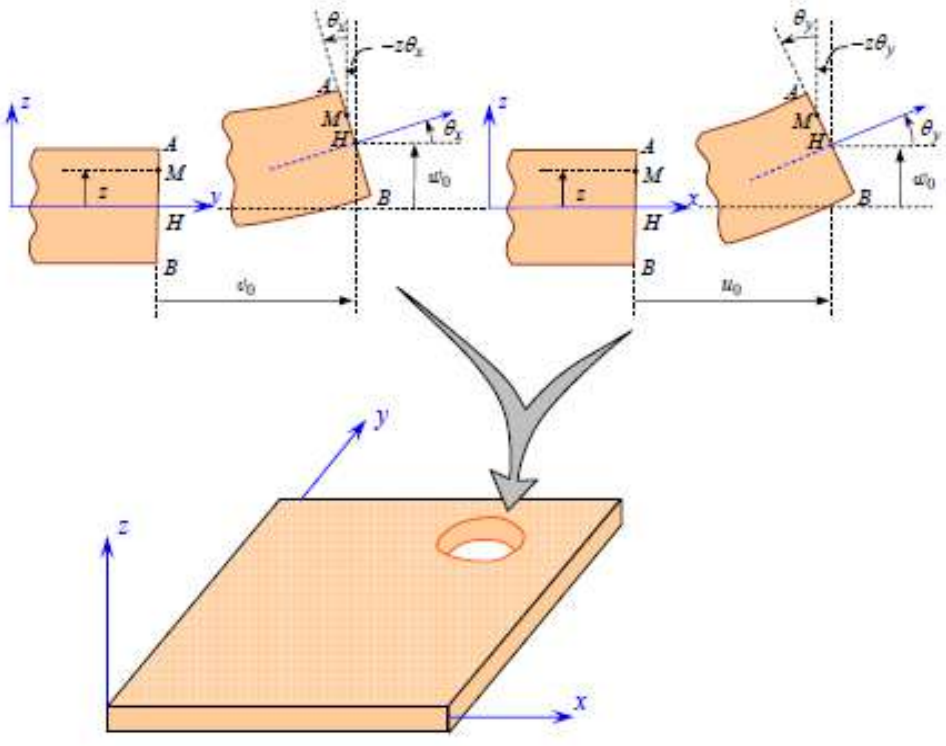


Figure (III- 7) . *Schématisation des déformations dans le cas de la théorie Classique stratifiées*

III.9. Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit, d'après (III-9) et en tenant compte des ex pressions (III-16)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

$$\gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = (\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}) \text{ -2z}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Les déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.19)}$$

Les déformations en flexion :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \varepsilon^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.20)}$$

Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = \text{zk(x, y)} \qquad \text{(III.21)}$$

$$k(x,y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.22)}$$

La où Matrice (x, y) est appelée matrice d es courbures de la plaque e sollicitée flexion. Le champ des déformations final :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(III.23)}$$

III.10. Champ des contraintes

Le tenseur des contraintes en M est donc de la forme :

$$\sigma\ (\mathrm{M}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.24)}$$

III.10.1. Expression des contraintes

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant ,[20] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(III.25)}$$

III.11. Expression des résultantes et moments

III.11.1 Résultant en membrane

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme

$$\mathrm{N(x,y)} = \mathrm{A}\varepsilon_m\mathrm{(x,y)} + \mathrm{Bk(x,y)} \quad \text{(III.26)}$$

Avec : $$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{n} (h_k - h_{k-1}) Q'_k \quad \text{(III.27)}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij}')_k e_k \quad \text{(III.28)}$$

Et

$$B = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} (k_k^2 - k_{k-1}^2)\, Q'_k \quad \text{(III.29)}$$

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (h_k^2 - h_{k-1}^2)(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij}')_k e_k z_k \quad \text{(III.30)}$$

L'expression développée des résultants en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(III.31)}$$

III.11.2 Moments de flexion et de torsion

La relation de torsion s'écrit sous la forme:

$$M_f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[z Q'_k \varepsilon_m(x,y) + z^2 Q'_k k(x,y) \right] dz \quad \text{(III.32)}$$

Ce que conduit à :

$$M_f(x,y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x,y) + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^{n} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x,y) \quad \text{(III.33)}$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$M_f(x,y) = B\varepsilon_m(x,y) + Dk(x,y) \quad \text{(III.34)}$$

Avec

$$D = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad \text{(III.35)}$$

$$D = [D_{ij}] \text{ avec, } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3)(Q'_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad \text{(III.34)}$$

L'expression développée des moments s'écrit sou s la forme :

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(III.35)}$$

III.12 Équation du comportement mécanique d'un stratifié

III.12.1 Équation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures [20]

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{33} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(III.36)}$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(h_k - h_{k-1})\left(Q'_{ij}\right)_k = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^k e^k$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(h_k^2 - h_{k-1}^2)\left(Q'_{ij}\right)_k = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^k e^k z^k \quad \text{(III.37)}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(h_k^3 - h_{k-1}^3)\left(Q'_{ij}\right)_k = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^k \left[e^k(z_k^2 + \frac{z_k^3}{12}\right]$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(h_k - h_{k-1})\left(C'_{ij}\right)_k = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e^k$$

Ou

A_{ij}: est la matrice de rigidité en membrane ;

B_{ij}: est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

D_{ij} : est la matrice de rigidité en flexion-torsion ;

F_{ij} : est la matrice de rigidité en cisaillement transverse ;

Ce couplage est nul pour une stratification symétrique. Mais même dans ce cas, ils subsistent d'autres niveaux de couplage qui font la spécificité du comportement des stratifiés. Il s'agit du :

- Couplage traction-cisaillement induit par les termes A_{16} et A_{26} *;*
- Couplage flexion-torsion induit par les termesD_{16} et D_{26} *;*
- Couplage cisaillement-cisaillement induit par le terme F_{45}

II.13 Formulation du problème général de dynamique des stratifiés

II.13.1 Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'un solide élastique sont données par la forme élémentaire :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i \qquad \text{i,j=1,2 ,3} \tag{III.38}$$

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, le champ magnétique...) sont fx, fy et fz et si le repère choisi est galiléen, la Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit localement suivant les axes x, y et z

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x = \rho a_x \\ &\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + f_y = \rho a_y \\ &\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + f_z = \rho a_z \end{aligned} \tag{III.39}$$

Ou

fx, fy et fz : sont les forces volumiques appliqué au point M.

a_x, $a_y$et a_z : sont les composantes d'un vecteur d'accélération au point M.

ρ : la masse volumique.

L'expression de l'accélération écrire

$$a_x = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$a_y = \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \tag{III.40}$$

$$a_z = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

Dans le cas des plaques multicouches, l'intégration de ces équations suivant l'épaisseur de la plaque permet d'obtenir les relations d'équilibres relatives aux résultantes et moments

III.13.2 Equilibre par rapport aux résultantes en membrane

La première équation d'équilibre, exprimée dans le référentiel du stratifié (i = x), correspond à l'équilibre des efforts en membrane dans la direction x et s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{f_x}\, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_{\boldsymbol{x}}\, dz \qquad \text{(III.41)}$$

La continuité des contraintes dans chaque couche ***k,*** et leur discontinuité d'une couche à l'autre conduisent à écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k-1}^{k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^k dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \qquad \text{(III.42)}$$

De même pour la contrainte de cisaillement plan σ_{XZ} :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_y}{\partial y} \qquad \text{(III.43)}$$

Ainsi que pour la contrainte de cisaillement transversale σ_{XZ} :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} dz = \sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right) - \sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right) \qquad \text{(III.44)}$$

Où $\sigma_{xz}(\frac{h}{2})$ et $\sigma_{xz}(-\frac{h}{2})$ sont les contraintes de cisaillement extérieures exercées respectivement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, notées :

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz}(\tfrac{h}{2}) \qquad \text{et} \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz}(-\tfrac{h}{2}) \qquad \text{(III.45)}$$

L'intégrale de la composante suivant ***x*** de la force de volume se note :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{f_x}\, dz = F_X \qquad \text{(III.46)}$$

L'intégration du second terme de l'équation (III.41), compte tenu de la forme du champ des déplacements (III.4) nous permet d'écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_{\boldsymbol{x}}\, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}\right) dz$$

$$= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz$$

Finalement en posant :

$$(\rho_s, R) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\,(1, z) dz \qquad \text{(III.47)}$$

L'équation d'équilibre en membrane, dans la direction x et de même pour la direction y dont l'équation d'équilibre est donnée par :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad \text{(III.48)}$$

Ou

$\tau_{1x} = \sigma_{xy}(\frac{h}{2})$, $\tau_{2x} = \sigma_{xy}(-\frac{h}{2})$

$\tau_{2y} = \sigma_{yw}(\frac{h}{2})$, $\tau_{2y} = \sigma_{yz}(-\frac{h}{2})$

Et $\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k (h_k - h_{k-1})$

$$\rho_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad \text{(III.49)}$$

III.13.3 Équilibre par rapport aux résultantes de cisaillement

La dernière relation d'équilibre pour (i = z) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z \, dz \quad \text{(III.50)}$$

La même démarche précédente conduit à

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \, dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad \text{(III.51)}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \, dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad \text{(III.52)}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \, dz = \sigma_{zz} - (\frac{h}{2}) - \sigma_{zz} - (-\frac{h}{2}) = q(x, y) = q \quad \text{(III.53)}$$

Où q est la différence entre les pressions exercées sur les faces de la plaque.

La relation d'équilibre devient alors

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_Z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad \text{(III.54)}$$

$$F_x, F_y, F_Z = \int_{-h/2}^{h/2} (f_x, f, f_Z) \, dz \quad \text{(III.55)}$$

III.13.4 Équilibres par rapport aux moments

L'expression de l'équilibre des moments, pour un élément de plaque, s'obtient en multipliant les deux premières équations d'équilibre par Z et en les intégrant dans l'épaisseur. L'équilibre des moments le long de la direction X s'exprime selon l'équation :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dz+\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}dz+\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}dz+\int_{-h/2}^{h/2} zf_z\,dz=\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_z\,dz \quad \text{(III.56)}$$

Les deux premiers termes s'écrivent :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dz=\frac{\partial M_x}{\partial x} \quad \text{(III.57)}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}dz=\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad \text{(III.58)}$$

L'intégration par parties du troisième terme aboutit à

$$\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}dz = \left[z\sigma_{xy}\right]_{h/2}^{h/2} - \int_{h/2}^{h/2}\sigma_{xz}=\frac{h}{2}\sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}\sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right)-Q_x$$

$$=\frac{h}{2}(\tau_{1x}-\tau_{2x})-Q_x$$

Finalement en introduisant le moment d'inertie par rapport au plan moyen (x_{oy}) de l'élément de plaque unitaire situé au point (x, y) :

$$\text{R},I_{xy} \;=\int_{-h/2}^{h/2}(z,z^2)\rho\,dz \quad \text{(III.59)}$$

Avec :

$$I_{xy} \;=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\rho_k(h_k^3-h_{k-1}^3)\,dz \quad \text{(III.60)}$$

En en posant :

$$P_X,P_y=\int_{-h/2}^{h/2}(zf_x,z\,f_y)dz \quad \text{(III.61)}$$

L'équilibre des moments le long de la direction x s'écrit :

$$\frac{\partial M_{\text{X}}}{\partial \text{x}}+\frac{\partial N_{\text{Xy}}}{\partial \text{y}}+\frac{h}{2}(\tau_{1x}-\tau_{2x})+P_X-Q_x=R\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2} \quad \text{(III.62)}$$

De la même manière, nous obtenons l'équation d'équilibre des moments le long de la direction y :

$$\frac{\partial M_{\text{y}}}{\partial \text{y}}+\frac{\partial N_{\text{Xy}}}{\partial \text{y}}+\frac{h}{2}(\tau_{1y}-\tau_{2y})+P_Y-Q_Y=R\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial t^2} \quad \text{(III.63)}$$

Les relations (III.48), (III.54), (III.62), et (III.63) constituent les équations d'équilibre ou équations du mouvement dans le cas de la théorie classique des plaques. Elles s'appliquent aussi bien à des plaques homogènes qu'à des stratifiés

Finalement en obtient les équations d'équilibre suivant :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_Z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \qquad \text{(III.64)}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} - \tau_{2x}) + P_X - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} - \tau_{2y}) + P_Y - Q_Y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

La combinaison des trois dernières relations d'équilibre permet d'écrire une nouvelle équation du mouvement indépendante des résultantes de cisaillement :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial X\, \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R\left(\frac{\partial^3 U_0}{\partial X\, \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y\, \partial t^2}\right) + I_{xy}\left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x\, \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y\, \partial t^2}\right) \qquad \text{(II.65)}$$

III.14 Equations du mouvement du stratifié

Les équations du mouvement du stratifié sont obtenues en reportant les expressions des résultantes et des moments données par l'équation constitutive dans les relations fondamentales des plaques. Dans le cas où les faces du stratifié sont libres de toutes contraintes et les forces de volume sont nulles, les équations du mouvement du stratifié sollicité transversalement par une charge q sont données par :

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2} + 2A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\, \partial y} + A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial X^2} + (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}$$
$$+B_{11}\frac{\partial^2 \varphi_X}{\partial x^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 \varphi_X}{\partial x \partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 \varphi_X}{\partial y^2} + B_{16}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2 \varphi_X}{\partial x \partial y} + B_{26}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2}$$
$$= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \qquad \text{(III.66)}$$

$$A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2} + (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial X\, \partial y}$$
$$+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2 \varphi_X}{\partial x \partial y} + B_{26}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + B_{66}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2}$$

$$+2B_{26}\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial x\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}=\rho_s\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+\mathrm{R}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2} \quad \text{(III.67)}$$

$$F_{55}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2w_0}{\partial X^2}\right)+F_{45}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2w_0}{\partial X\,\partial y}\right)$$

$$F_{44}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2w_0}{\partial y^2}\right)+q=\rho_s\frac{\partial^2w_0}{\partial t^2} \quad \text{(III.68)}$$

$$B_{11}\frac{\partial^2u_0}{\partial X^2}+2B_{16}\frac{\partial^2u_0}{\partial X\,\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2u_0}{\partial y^2}+B_{16}\frac{\partial^2v_0}{\partial X^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2v_0}{\partial x\partial y}$$

$$+B_{26}\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}+D_{11}\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial x^2}+2D_{16}\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial x\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial y^2}+D_{16}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x^2}$$

$$+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial x\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}-F_{55}\left(\varphi_x+\frac{\partial w_0}{\partial X}\right) \quad \text{(III.69)}$$

$$-F_{45}\left(\varphi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)=R\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2}$$

$$B_{16}\frac{\partial^2u_0}{\partial X^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2u_0}{\partial x\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2u_0}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}+2B_{26}\frac{\partial^2v_0}{\partial X\,\partial y}$$

$$+B_{22}\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}+D_{16}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial x\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2}+D_{66}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x^2}$$

$$+2D_{26}\frac{\partial^2\varphi_X}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}-F_{45}\left(\varphi_x+\frac{\partial w_0}{\partial X}\right) \quad \text{(III.70)}$$

$$-F_{44}\left(\varphi_x+\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)=\rho_s\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+\mathrm{R}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2}$$

La solution analytique des équations précédentes est difficile à obtenir si l'on tient en compte de tous les termes de couplage. Elle n'est possible que si certains termes de ces équations sont négligés, il faut avoir recours aux méthodes numériques vu leur puissance dans la résolution de tels problèmes. L'utilisation de méthodes numériques facilite la solution de ces équations pour des problèmes d'importance pratique. Parmi les méthodes numériques les plus utilisées, on cite la méthode des éléments finis qui a montré son efficacité dans la résolution des problèmes de la dynamique des structures. La méthode sera utilisée dans le présent travail pour la recherche des réponses dynamiques des plaques composites stratifiées.

Chapitre IV : Analyse par éléments finis

IV.1 Introduction

Pratiquement tous les phénomènes physiques peuvent être décrits mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles applicables dans l'espace modélisé (volume, temps,…), avec des conditions établies aux frontières (ou limites) de l'espace considéré. Pour la résolution de ce système, deux voies sont possibles : analytique ou numérique.

Les solutions analytiques consistent à résoudre directement les équations différentielles au moyen des techniques mathématiques habituelles telles que la séparation des variables, les solutions analogues ou les transformées de Fourier et de Laplace .A la fin du 19ème siècle, les fonctions d'Airy ont permis la résolution d'un certain nombre de problème d'élasticité, en particulier les problèmes de champs singuliers en point de fissures. L'avantage de ces solutions est qu'elles restent valables indépendamment des valeurs numériques des paramètres du système (géométrie, matériaux et charges).

Aidées par le développement spectaculaire des moyens de calculs (sur tous les plans : méthodes, machines et logiciels), les solutions numériques consistent à donner une solution approchée d'un système complètement défini. Deux approches sont envisageables : locales ou globale. Dans l'approche locale, les équations différentielles sont directement discrétisées (le système différentiel d'équilibre est appelé formulation forte) ; à titre d'exemple, on peut citer la méthode de différences finies. Dans l'approche globale, l'équilibre du système est exprimé sous une formulation plus générale (appelée formulation faible), souvent en terme de bilan énergétique, qui est ensuite discrétisé dans cette deuxième approche, l'équilibre énergétique n'est pas assuré localement (en tout point d'un milieu), mais seulement au niveau global d'un élément de volume. Cette approche présente des avantages considérables pour le traitement des systèmes complexe.

Au début du 20ème siècle, la méthode de Rayleigh-Ritz a permis de poser les

bases de méthode des éléments fins en introduisant la notion de champs approchés. Les trois dernières décennies ont vu des développements intenses en éléments finies pour l'analyse des différents types de structures et de comportement complexes. Pour les structures allongées telles que les ponts, les poutres en caisson , la techniques de bondes finies a permis d'augmenter l'efficacité des calculs en combinant les principes d'approximation par éléments finies et la théorie poutres, ainsi la discrétisation se fait seulement pour la coupe droite de la structure (dans le plans perpendiculaire à l'axe longitudinale). Dans le but de gagner en efficacité, la méthode des éléments de frontière constitue un progrès considérable en limitant la discrétisation à la frontière du domaine étudié. Récemment, la technique des volumes finis présente une évolution qui reste adaptée au problème de champ linéaire. Dans tout le développement, la recherche du meilleur rapport entre coût de calcul, précision et généralité, a été l'objectif essentiel permettant d'aller encore plus dans la représentation des systèmes industriels

IV.2 Méthode des éléments finis

Pour évaluer les états de contraintes, de déformation et les caractéristiques vibratoires dans la conception des produits, des pièces mécaniques et des structures, l'ingénieure doit décrire le comportement des systèmes physique grâce à des équations aux dérivées partielles. Et vu la difficulté de résoudre ces équations on a besoin de modèle qui permettent de simuler le comportement de ces systèmes physiques complexes. Pour cela, on a recours à plusieurs techniques dont la méthode des éléments finis. Cette méthode est une technique mathématique

D'intégration des équations aux dérivées partielles. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles
- méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques
- programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur

Cette méthode a connu plusieurs développements depuis son apparition en 1956, plus exactement par l'apparition des publications de Turner, Clough,Martin et Topp qui ont introduit le concept d'élément fini.

Soulignons également le travail d'Argyrise et Kelesy qui systématise l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures.

Dés 1960 cette méthode subit un développement rapide dans plusieurs directions

- la méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes stationnaires, non linéaires dans le domaine des ainsi que dans d'autres domaines.
- une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle.
- la méthode est reformulée, à partir de considérations énergétiques et vibrationnelles sous la forme générale des résidus pondérés.

Anis on assiste au développement de nouveaux éléments tels que poutre, plaques, coques et l'établissement de nouvelles formulations telles que la formulation hybride.

IV.3 Types de problèmes MEF

La méthode des éléments finis permet la résolution de trois types de problèmes principaux :

❖ Problèmes d'équilibre stationnaire

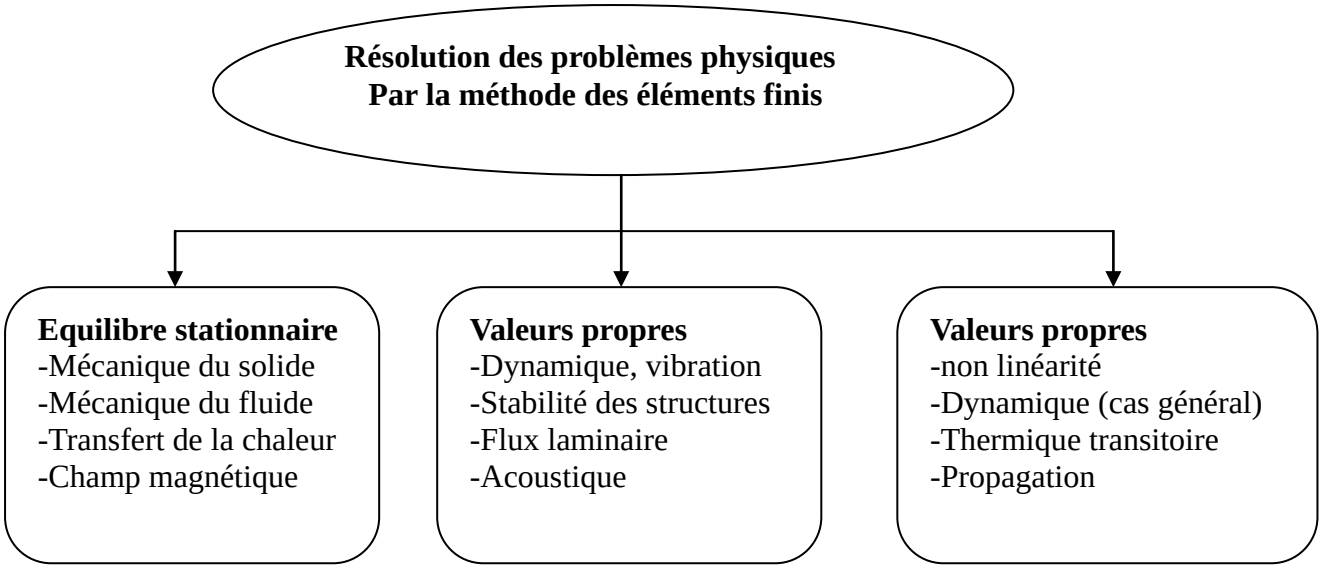
Dans ce type de problèmes, le comportement est défini en fonction de l'état du système, de la géométrie, du chargement et des conditions aux limites, sous forme d'un système d'équations linéaires en fonction des variables nodales. On trouve dans cette catégorie l'équilibre statique et les régimes stationnaires d'écoulement, de transfert de chaleur et d'électromagnétisme.

❖ Problèmes aux valeurs propres

Il s'agit des phénomènes de vibration ou d'instabilité d'un état stationnaire. Les modes propres de vibration, le flambage des structures o u l'instabilité des flux laminaires font partie de cette catégorie.

❖ Problèmes dépendant du temps

Lorsque l'état du système dépend de son histoire ou bien des paramètres de sortie, le système devient interdépendant et la résolution directe n'est plus possibles. Ce cas inclus le comportement non linéaire (matériaux et géométrie), la dynamique non linéaire (amortissement, rigidité,…), les régimes transitoires et la fissuration des pièces.



Figure(IV.1) : *Différents types des problèmes physiques en éléments finis*

IV.4 Formulation théorique

IV.4.1 Modèle de déplacement

le modèle de déplacement est basé sur la théorie des déformations avec cisaillement [21].

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)+z\theta_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\theta_y(x,y,t) \quad \text{(IV.1)}$$
$$w(x, y, z, t)=w_0(x, y, t)$$

t c'est le temps

u_0, v_0: Déplacements en membrane

w_0: Déplacement transversal

θx, θy : Rotations des sections droites respectivement dans les plans (x, z) et (y, z).

Les paramètres u, v et z sont les composantes de déplacement dans les directions x, y et z, respectivement, d'un point générique de la espace stratifié.

IV.4.2 Expressions de contrainte

Les tensions associées à des déplacements dans équation (IV.1) sont les suivantes:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + zk_x$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + zk_y$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy0} + zk_{xy} \quad \text{(IV.2)}$$
$$\gamma_{yz} = \phi_y + z\psi_y$$
$$\gamma_{xz} = \phi_x + z\psi_x$$

avec

$$\varepsilon_0 = \left[\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \varepsilon_{xy0}\right]^T = \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right]^T$$
$$k=\left[k_x, k_y, k_{xy}\right]^T=\left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right]^T \quad \textit{(IV.3)}$$
$$\phi = \left[\phi_x, \phi_y\right]^T = \left[\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right]^T$$

IV.4.3 Les équations du mouvement

Le principe variationnel de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations de mouvement stratifié. La mathématique l'affirmation du principe de Hamilton dans l'absence d'amortissement peut être écrite comme

$$\int_{t1}^{t2} \delta\,(\Pi - E)dt = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Π et E sont l'énergie potentielle totale et la l'énergie cinétique, respectivement.

L'énergie potentielle de la plaque avec le volume V et de la surface A peut être écrite comme

$$\Pi = U - W$$

Où

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon^T \sigma dv - \int_v u^T P dA \qquad \text{(IV.5)}$$

U est l'énergie de déformation de la plaque; W représente le travail effectué par les forces appliquées de l'extérieur; P est le vecteur d'intensités de force correspondant à stratifié La direction (x, y, z); et u = $[u, v, w]^T$ est le déplacement selon l'une quelconque point générique (x, y, z) dans l'espace. L'expression pour les composantes des déformations données par l'équation (IV.2) sont substituées dans l'expression d'énergie (IV.5). Une intégration explicite à travers l'épaisseur stratifiée est ensuite effectuée pour obtenir l'expression suivante:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_A \overline{\varepsilon}^T \overline{\sigma}\ dA - \int_A d^T\, F dA \qquad \text{(IV.6)}$$

F est le vecteur de charge par unité de surface correspondant à la direction de déplacement généralisé vecteur **d** et le nouveau vecteur $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ est défini dans manière suivante:

$$\overline{\sigma}=\left[N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, S_x, S_t,\right]^T$$

Équation (IV.6) définit la forme bidimensionnelle du l'énergie potentielle dans lequel la relation entre $\overline{\sigma}$ et $\overline{\varepsilon}$ allons maintenant définir les deux dimensions stratifié relations constitutives. Sur l'intégration des contraintes sur l'épaisseur en stratifié.

$$(N_x\,, N_y, N_{xy}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \left[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}\right] dz$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \left[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}\right] dz \qquad \text{(IV.7)}$$

$$\begin{pmatrix} Q_x, S_x \\ Q_y, S_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} [1 \;\; z \;\; z^2] dz$$

Les relations ci-dessus peuvent être concise exprimée en

$$\overline{\sigma} = D\overline{\varepsilon} \tag{IV.8}$$

Où

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & D_c & 0 \\ D_c^T & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \tag{IV.9}$$

Avec le modèle de déplacement supposé, la matrice de rigidité différents dérivés sont :

D_m: membrane; D_c: membrane-flexion couplage

D_b: Flexion; D_s: cisaillement.

IV.4.4 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du corps est donnée par

$$E = \frac{1}{2} \int_v \dot{u}^T \rho \dot{u} \, dv \tag{IV.10}$$

$\dot{u}$ Est la vectrice vitesse d'un point quelconque générique (x, y, z) dans l'espace et ρ est la densité de masse de l'matériau. L'expression de lui est substitué dans équation (IV.10) en utilisant équation (IV.1) et à la réalisation d'explicite l'intégration à travers l'épaisseur du stratifié, ce relation peut être réduit en une forme à deux dimensions comme

$$E = \frac{1}{2} \int_A \dot{d}^T \overline{m} \dot{d} \; dA \tag{IV.11}$$

Où $\overline{m}$ est la matrice d'inertie

IV.5 Discrétisation par éléments finis

IV.5.1 Discrétisation dans l'espace

$$\Pi(d) = \sum_{e=1}^{n} \Pi_e\,(d)$$

$$\mathrm{E(d)} = \sum_{e=1}^{n} E_e\ \ (d) \qquad \text{(IV.12)}$$

où Π etΠ_e, sont les énergies totales potentielles de le système et l'élément, E et E_e, sont les énergies cinétiques du système et l'élément,

IV.5.2 Fonction de déplacement

$$\mathrm{d(t)} = \sum_{i=1}^{NN} N_i(x,y) d_i\,(t) \qquad \text{(IV.13)}$$

Où N_i est la fonction d'interpolation correspondant au nœud i, NN est le nombre de nœuds dans l'élément et d_i est le vecteur de degrés de liberté nodaux correspondant au nœud i.

$$d_i = \left[u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}\right] \qquad \text{(IV.14)}$$

Équation (IV.14) peut être écrite comme suit

$$\mathrm{d(t)=Na}_e(t) \qquad \text{(IV.15)}$$

Où N est la matrice de fonction de forme donnée par

$$\mathrm{N}=[N_1, N_2 \ldots N_{NN}] \qquad \text{(IV.16)}$$

Et a_e est le vecteur de déplacement élément qui est écrite comme

$$\mathrm{a}_e = [d_1^T, d_2^T \ldots d_{NN}^T]^{\,T} \qquad \text{(IV.17)}$$

Connaissant le vecteur de déplacement généralisé d de l'élément, les déformations peuvent être exprimées comme suit :

$$\overline{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{NN} B_i d_i \qquad \text{(IV.18)}$$

L'équation (IV.18) est également écrit dans une forme alternative comme

$$\overline{\varepsilon}=\mathrm{B}a_e \tag{IV.19}$$

Où

$$\mathrm{B}=[B_1, B_2 \dots B_{NN}] \tag{IV.20}$$

IV.5.3 Discret équations du mouvement

L'énergie potentielle pour un élément (e) peut être exprimée en termes de l'énergie de déformation U_e interne, et le travail extérieur w_e.

$$\Pi_e = U_e - W_e \tag{IV.21}$$

Pour un élément, l'énergie de déformation interne peut être écrite comme suit

$$\partial U_e = \delta \mathrm{a}_e^T k_e a_e \tag{IV.22}$$

Où

$$k_e = \int_A B^T\, DB\, dA \tag{IV.23}$$

La première variation du travail δW, pour un élément est

$$\delta W_e = \delta \mathrm{a}_e^T f_e(t) \tag{IV.24}$$

Où l'élément de charge équivalente nodale vecteur.

$$f_e = \int_A N^T\, F\, dA \tag{IV.25}$$

Et

$$\mathrm{F}=[0,0,q,0,0]^T \tag{IV.26}$$

Où q est l'intensité de la charge appliquée transversale.

La première variation d'énergie cinétique, δE, pour un élément peut être écrite sous forme matricielle.

$$\delta E_e = -\delta \mathrm{a}_e^T \left[\int_A N^T \overline{m}\, N\, dA\right] \ddot{\mathrm{a}}_e = -\delta \mathrm{a}_e^T M_e \ddot{\mathrm{a}}_e \tag{IV.27}$$

Où

$$M_e = \int_A N^T\, \overline{m} N\, dA \tag{IV.28}$$

Est la matrice de masse des éléments cohérents, $\ddot{a}$ est le vecteur de l'élément nodal accélération, N est la fonction de forme matrice et $\overline{m}$ est la matrice d'inertie.

On applique le principe de Hamilton, on obtient :

$$\int_{t1}^{t2} \delta \mathrm{a}_e^T \left[M_e \ddot{\mathrm{a}}_e + k_e \mathrm{a}_e - f_e(t)\right] dt = 0 \qquad \text{(IV.29)}$$

Cette relation est valable pour tous les déplacements virtuel δa, on obtient

$$M_e \ddot{\mathrm{a}}_e + k_e \mathrm{a}_e = f_f(t) \qquad \text{(IV.30)}$$

Qui est l'équation de mouvement d'un élément du stratifié. Ces équations sont assemblées par la suite pour donner les équations du mouvement de l'ensemble du stratifié

$$M\ddot{a}+Ka=f(t) \qquad \text{(IV.31)}$$

Dans laquelle ä et a sont respectivement la vectrice accélération et déplacement globaux.

La matrice de rigidité globale K, la matrice de masse M et le vecteur force f (t) sont calculées comme suit:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{e=1}^{NE} M_e \\ K &= \sum_{e=1}^{NE} k_e \\ f(t) &= \sum_{e=1}^{NE} f_e(t) \end{aligned} \qquad \text{(IV.32)}$$

IV.5.4 Matrice de rigidité

Le calcul d'élément de matrice de rigidité K^e à partir équation (IV.23) est économisé par multiplication explicite des matricesB_i, B_j et D, comme suit :

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_i^T D B_j |J| d\xi d\eta \qquad \text{(IV.33)}$$

IV.5.5 Matrice de masse

Le calcul de la matrice de masse cohérente M^e à partir équation (IV.28) est évalué en utilisant l'expression suivante:

$$M_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^T \overline{m} N_j |J| \, d\xi d\eta \qquad \text{(IV.34)}$$

IV.5.6 Vecteur de charges

Le vecteur de chargement est donnée par :

$$f_i(t) = \int_A N_i^T \, F \, dA \qquad \text{(IV.35)}$$

Ou bien sous forme élémentaire :

$$\{F\}_e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T\{q\}d\xi d\eta \qquad \text{(IV.36)}$$

IV.6 Méthode directe l'intégration du temps– schéma de Newmark

Dans ce dispositif les vecteurs $\dot{a}$ et a un à la fin d'un l'étape de temps Δt sont exprimés sous la forme

$$\dot{a}^{n+1} = a^n + \Delta t[(1-\delta)\ddot{a}^n + \delta\ddot{a}^{n+1}]$$
$$a^{n+1} = a^n + \Delta t\dot{a}^n + (\Delta t)^2[(1/2-\alpha)\ddot{a}^n + \alpha\ddot{a}^{n+1} \qquad \text{(IV.37)}$$

α Et δ sont des paramètres qui commandent la précision et la stabilité du régime et l'exposant n indique que la solution est évalué à la nième l'étape de temps. La sélection d'une α = 1/4 et δ= 1/2,

On réarrangeant (IV.31) et (IV.36), nous arrivons à

$$\hat{k}a^{n+1} = \hat{f} \qquad \text{(IV.38)}$$

Où

$$\hat{k} = k + a_0 M$$
$$\hat{f} = f^n + M(a_0 a^n + a_1\dot{a}^n + a_2\ddot{a}^n)$$
$$a_0 = 1/(\alpha\,\Delta t^2) \qquad \text{(IV.39)}$$
$$a_1 = a_0\Delta t$$
$$a_2 = \frac{1}{(2\alpha)} - 1$$

Une fois la solution à est connu à t^{n+1}, la vitesse ȧ et l'accélération ä à t^{n+1}peut être calculée en expressions de réarrangement dans équation (IV.40).

$$\ddot{a}^{n+1} = a_0(a^{n+1} - a^n) - a_1\dot{a}^n - a_2\ddot{a}^n$$
$$\dot{a}^{n+1} = \dot{a}^n + a_3\ddot{a}^n + a_4\ddot{a}^{n+1}$$

Où

$$a_3 = \Delta t(1-\delta)\ et\ \ a_4 = \delta\,\Delta t \qquad \text{(IV.40)}$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES

VI.7 ANALYSE LINEAR DE STRUCTURALEA

VI.7.1 Analyse modale :

Les étapes suivantes sont utilisées dans l'analyse modale par ANSYS Construire le modèle.

- Appliquer les charges et d'obtenir la solution.
- Développer les modes.
- Examiner les résultats.

Les résultats comprennent des fréquences naturelles, les formes des modes, et le champ de contraintes correspondant.

VI.7.1.1 MODÈLE:

On va traiter un exemple type, afin de montrer les différentes étapes de l'analyse dynamique des plaques par ansys :

Preprocessor

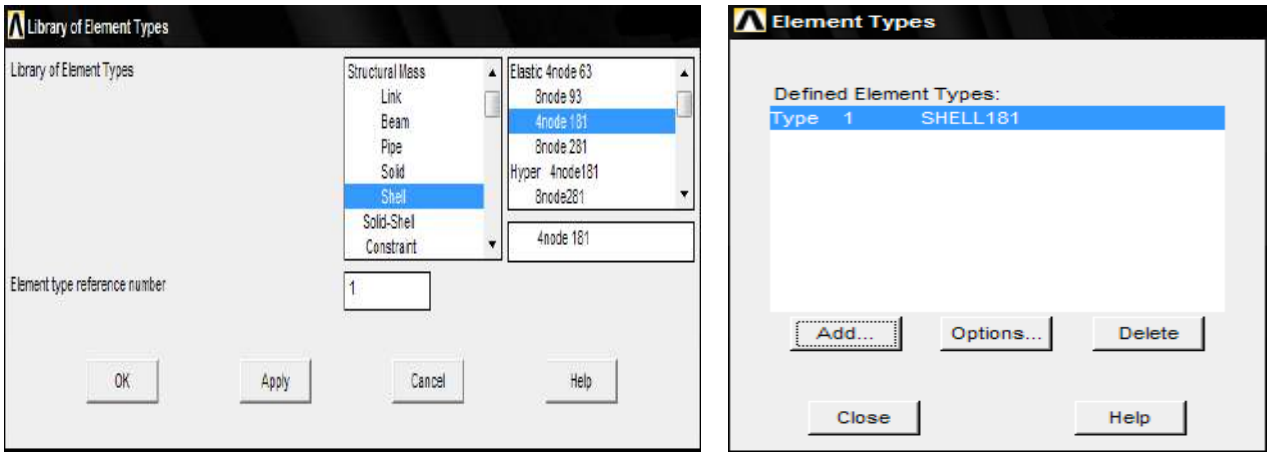
Définir un type d'élément

Il ya plusieurs éléments ANSYS qui permettent le traitement des plaques composites à titre d'exemple le SHELL181. Cet élément peut être utilisé pour des applications en couches stratifiées, pour la modélisation des coques composites ou pour les structures en sandwich. La précision de la modélisation des coques composites est régie par la théorie de Mindlin-Reissner.

- Définir les types d'éléments en utilisant le chemin de menu suivant :

Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete

- Cliques sur Add
- Sélectionnez Shell dans la bibliothèque de l'élément de dialogue . Cliquez sur OK.
- Cliques sur **Close**



Figue(IV.2) *Boîte de dialogue pour récupérer les résultats sur la base d'éléments numéros de séquence.*

- Spécifiez les constantes réelles (R commande) en utilisant le chemin de menu suivant :

  Main Menu > Preprocessor > Real Constants > Add/Edit/Delete

  - Mettez en surbrillance Type 1 SHELL181, cliquez sur OK.
  - Entrez 0.05 pour TK(I), cliquez sur OK.
  - Sortir de la boîte de dialogue des constantes réelles en cliquant sur **Close**
- Spécifier les propriétés des matériaux pour le faisceau (MP commande) en utilisant le suivre le chemin de menu:

  Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models

Dans la boîte de définir un modèle de comportement des matériaux de dialogue, dans la fenêtre de droite, successivement double-cliquez sur structurel, linéaire, élastique, et, enfin. Isotrope, ce qui fera apparaître une autre boîte de dialogue.

- Entrez 10.920 pour EX et de 0,3 pour PRXY, cliquez sur OK.
- cliquez sur **densité** et Entrez 1000 sur DENS.
- Fermez la boite de dialogue en utilisant le chemin :

Material > Exit

- Définir la géométrie de la pièce est généralement la première étape dans le développement d'un modèle par éléments finis**.**

  Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Rectangle >By Dimensions

Dans la boîte de dialogue qui s'affiche, entrez les valeurs suivantes:

X_1= 0, X2= 0.25

Y_1= 0, Y_2= 0.25

- Click OK.

- Précisez le nombre de divisions sur toutes les lignes de commande (LESIZE) à l'aide le chemin de menu suivant :

Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > ManualSize > Global > Size

Tailles éléments sur All boîte de dialogue Lignes sélectionnée apparaît, entrez 10 pour NDIV, cliquez sur OK

- Créer le maillage (LMESH commande) en utilisant le chemin de menu suivant :

  Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas >Free

Choisissez le menu apparaît; cliquez sur **Pick All.**

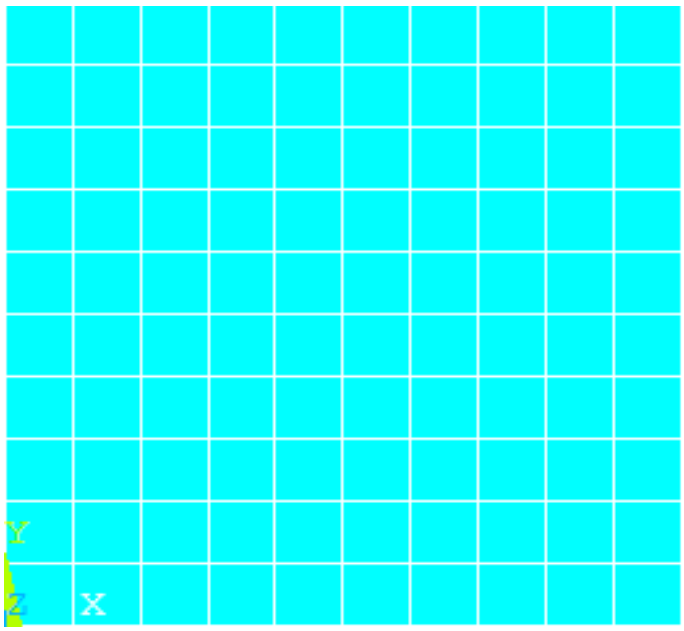


Figure (IV.3) *Plaque en mailles*

- Précisez le nombre de couche à l'aide le chemin de menu suivant :

Main Menu >Preprocessor >Sections >Shell >Lay-up >Add/Edit.

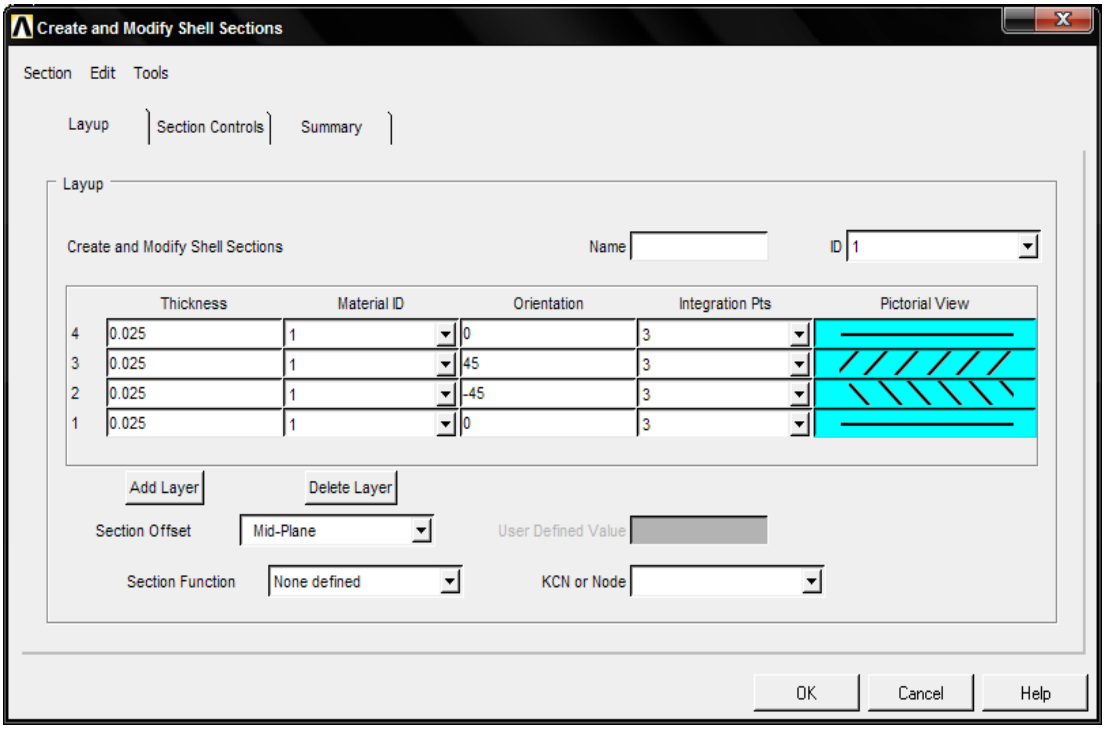


Figure (IV.4) *Créer et modifier la boîte de dialogue Shell articles*

Solution

- Spécifiez le type d'analyse que Modale, en utilisant le chemin de menu suivant (**ANTYPE** commande), ce qui fera apparaître la boîte de dialogue Nouvelle analyse:

Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis

- Cliquez sur le bouton modale; cliquez sur OK.
- méthode d'extraction en mode :

Main Menu > Solution > Analysis Type > Analysis Options

- Cliquez sur le bouton **PCG Lanczos** cliquez sur OK, ce qui fera apparaître une autre boîte de dialogue.
- Entrez 10 pour **No. of modes to extract** cliquez sur OK
- cliquez sur OK pour **PCG**

- Spécifiez les conditions aux limites de déplacement en utilisant le suivant chemin de menu:

  Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x= 0,a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y= 0,b

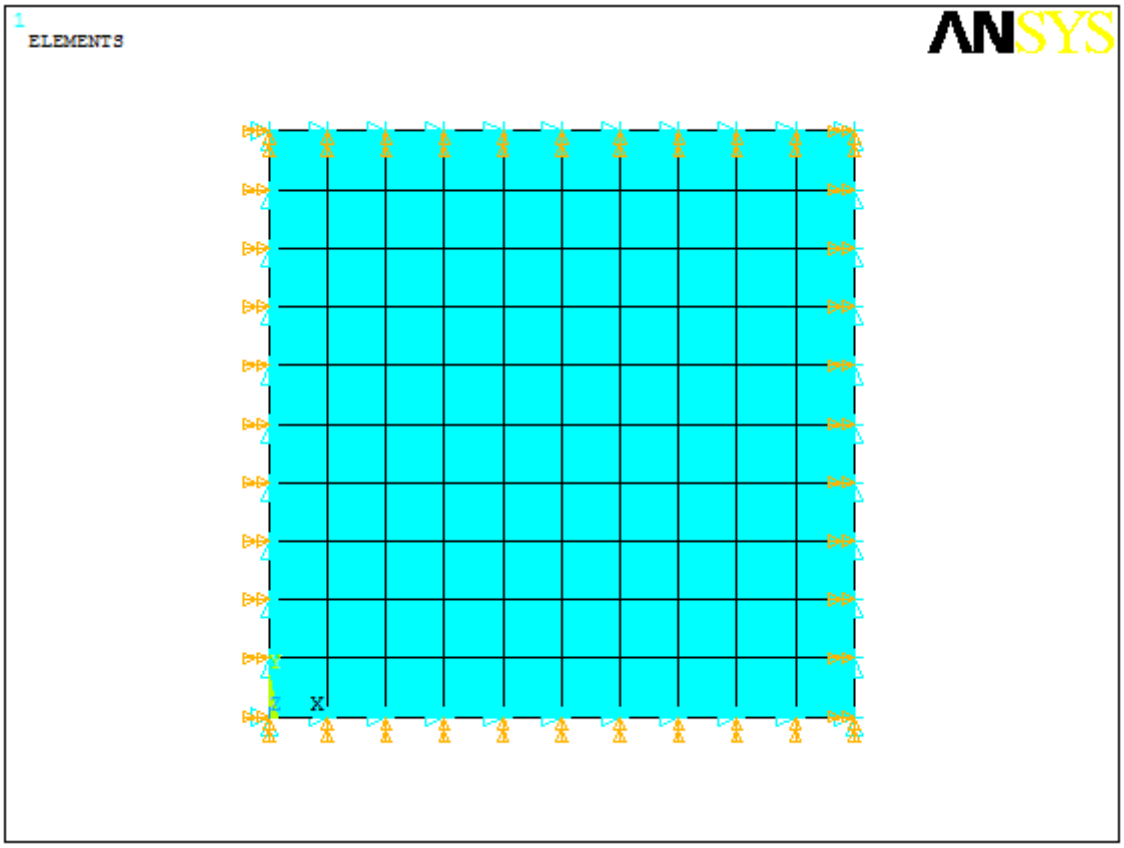


Figure (IV.5) *Les conditions aux limites*

- Obtenir la solution en utilisant le chemin de menu suivant :

Main Menu > Solution > Solve > Current LS

- Cliquez sur OK pour lancer la solution.
- Attendez que ANSYS réponde avec la **Solution is done!**

POSTPROCESSING

- Examiner les résultats en utilisant le chemin de menu suivant:

  Main Menu > General Postproc > Results Summary

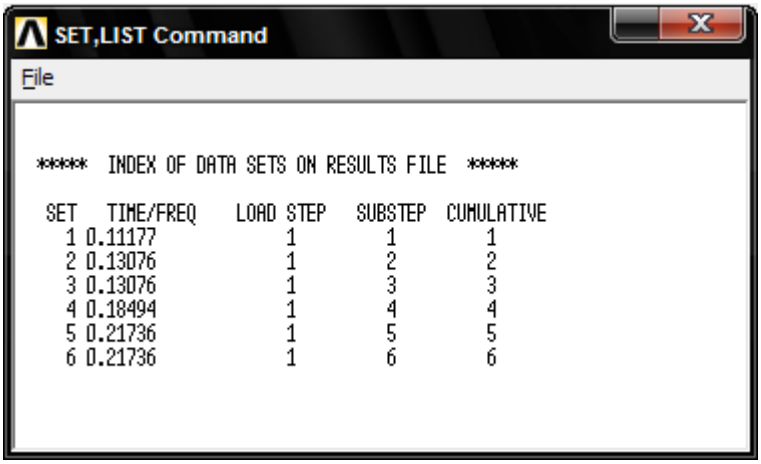


Figure (IV.6) *Liste des fréquences des modes*

- Tracer les formes de mode

- Définir la solution de régler d'abord en utilisant le chemin de menu suivant :

  Main Menu > General Postproc > Read Results > First

- Tracer la forme de mode en utilisant le chemin de menu suivant:

  Main Menu > General Postproc > Plot Results > Deformed Shape

- Cliquez sur **Def+ undefedge ;** click sur OK.

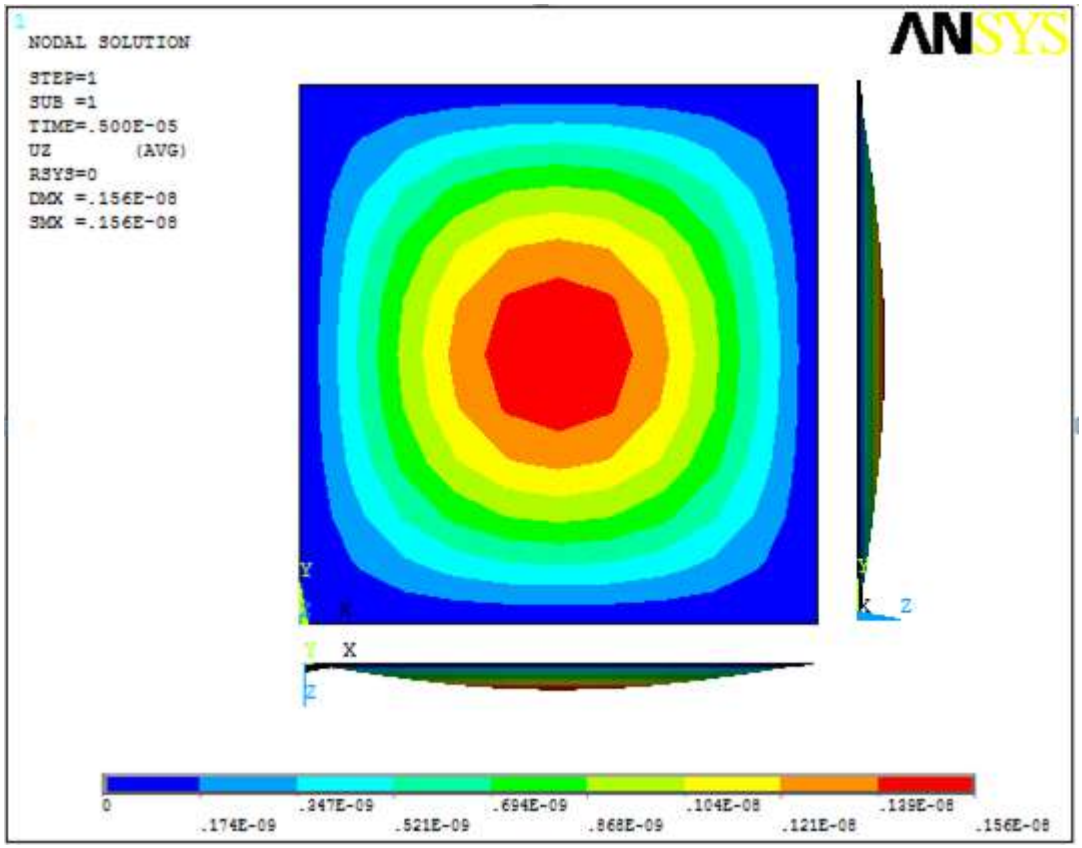


Figure (IV.7) *déformation de première mode*

VI.7.2 Analyse transitoire

Dans ANSYS., les étapes suivantes sont utilisées pour une analyse transitoire:

- Préciser les conditions initiales.
- Spécifiez les contrôles de solutions.
- Appliquer les charges.
- Écrire dans un fichier Étape charge
- Appliquer / modifier des charges et des contrôles solution pour la phase de charge suivante (s) et écrire Charger le fichier Etape (s).
- Obtenir une solution à partir de fichiers échelon de charge.
- Examiner les résultats.

VI.7.2.1 MODÈLE:

Preprocessor

Le modèle éléments finis de Plaque carrée été créé à la section (Analyse modale) Par conséquent, le modèle ne sera pas régénéré ici.

Pour Créer le modèle par la lecture du fichier d'entrée de Plaque carrée en utilisant le chemin de menu suivant:

Utility Menu > File > Read Input from

- Parcourir pour le Plaque carrée à partir du dossier ci-dessus; cliquez sur OK.
- Attendez que le modèle soit généré.

Solution

- Spécifiez le type d'analyse que transitoire en utilisant le chemin de menu suivant:
  Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis

- Cliquez sur **Transient**, cliquez sur **OK**
- Une nouvelle boîte de dialogue apparaît; cliquez sur **OK**

- Spécifier des contraintes de déplacement en utilisant le chemin de menu suivant:

  Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x= 0, a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y= 0, b

Charge uniforme :

- Appliquer la charge uniforme sur la surface de plaque en utilisant le chemin de menu suivant:

Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Areas

- Sélectionnez la surface; cliquez sur **OK.**
- Entre 1000 **(VALUE Load PRES value)**; cliquez sur **OK**.

Charge sinusoïdalement:

- Appliquer la charge sinusoïdalement sur la surface de plaque en utilisant le chemin de

menu suivant:

Parameters > functions >define/Edit

- Ecrive l'équation q=q_0 sin (π x/a)sin (π y/a)
- Enregistre l'équation

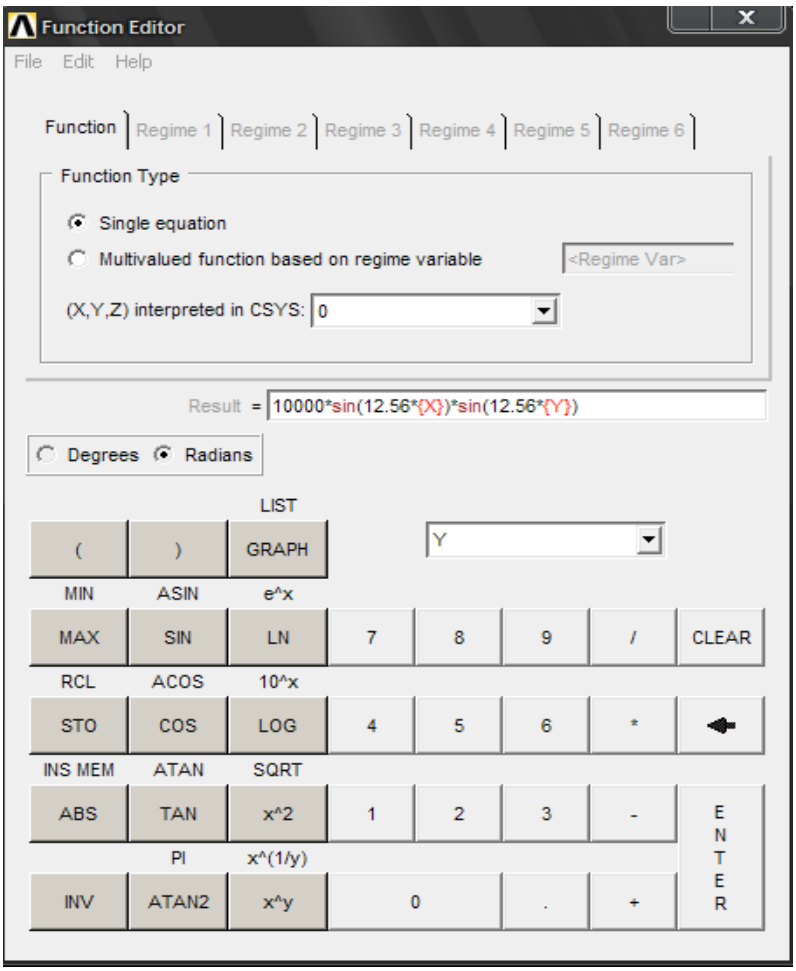


Figure (IV.8) *utilisation de l'outil fonction*

Parameters > functions >Read from file

- Oeuvre le fiche
- Saisissez un nouveau nom pour le fiche

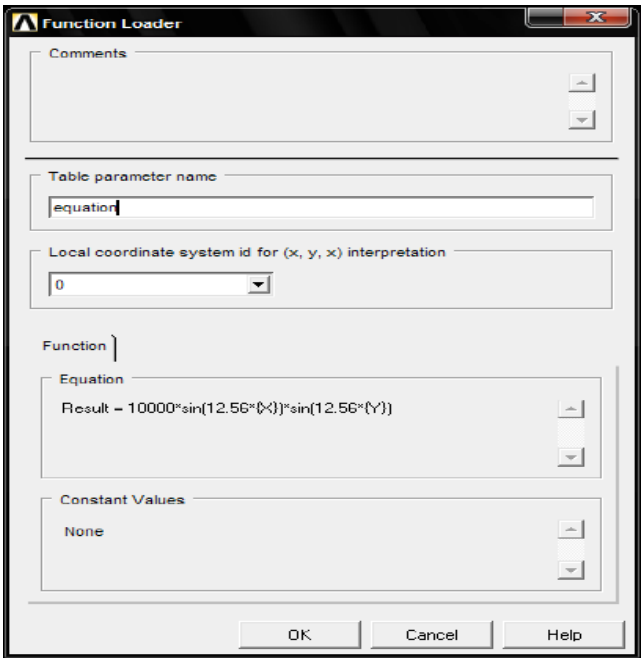


Figure (IV.9) *Télécharger l'équation*

- Cliquez sur OK.

Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Areas

- Sélectionnez la surface; cliquez sur OK.
- [SFA](Apply PRES on areas as a) sélectionner **Existing table;** cliquez sur OK.

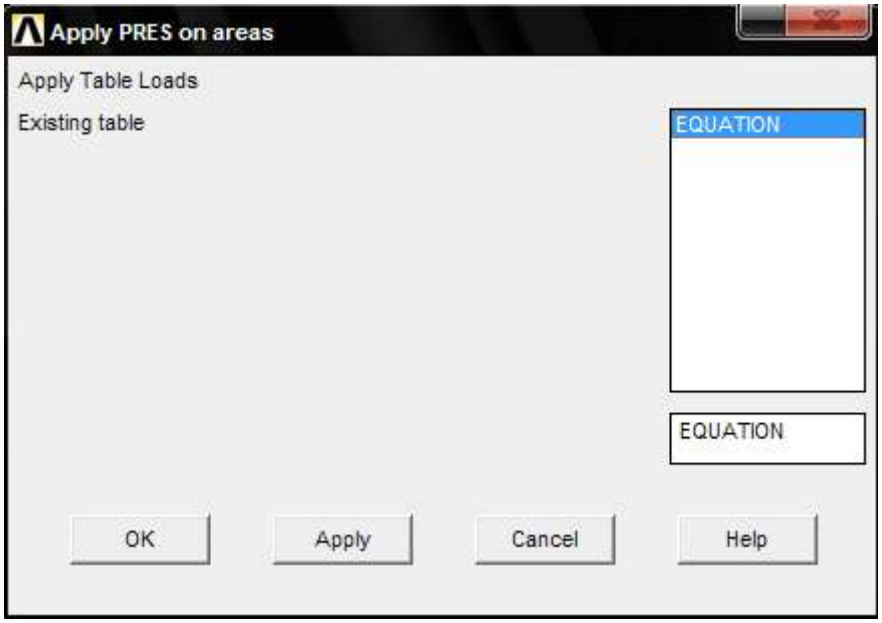


Figure (IV.10) *application de l'équation*

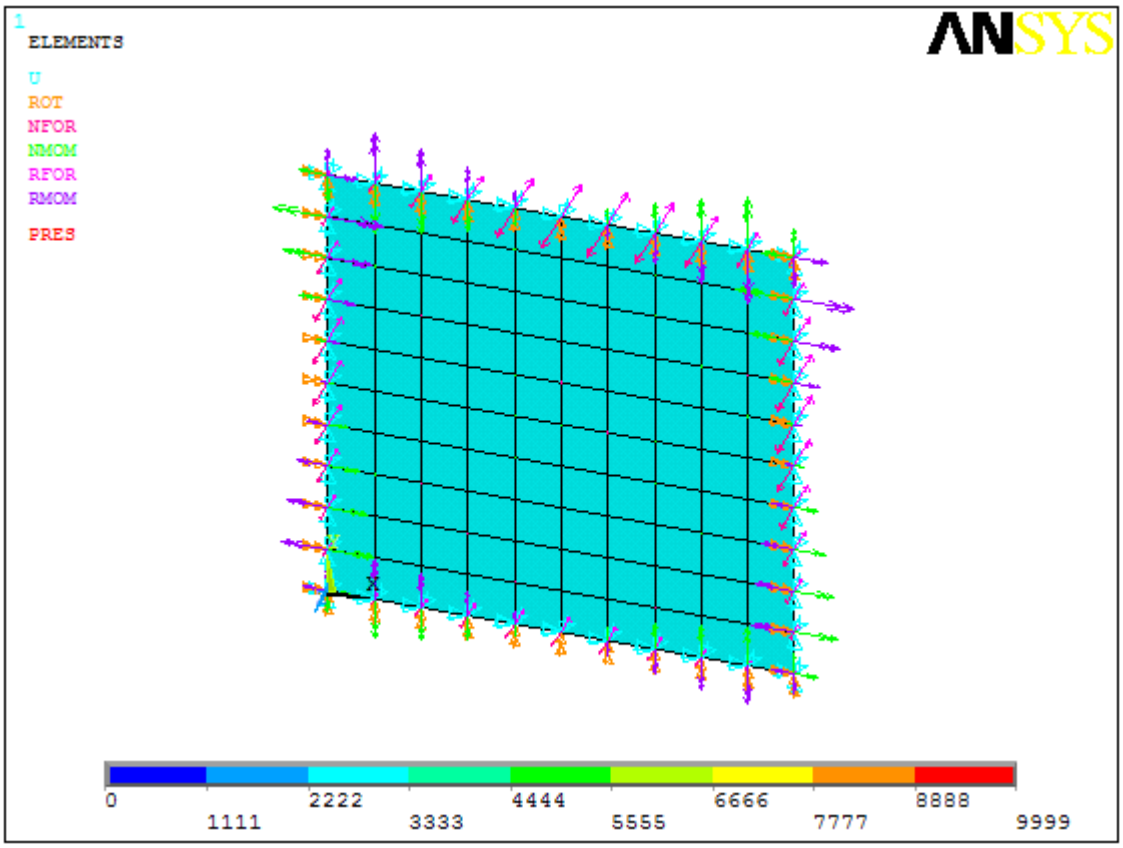


Figure (IV.11) *application de la charge*

- Définir les options de solution pour l'aide le chemin de menu suivant:

Main Menu > Solution > Analysis Type > Sol'n Controls.

- Entre 360 e-6 dans(**Time at end of loadstep**) ,5e-6 dans(**Time increment**)
- cliquez sur (**write every Nth substep**) dans le menu déroulant Fréquence menu, cliquez sur **OK.**

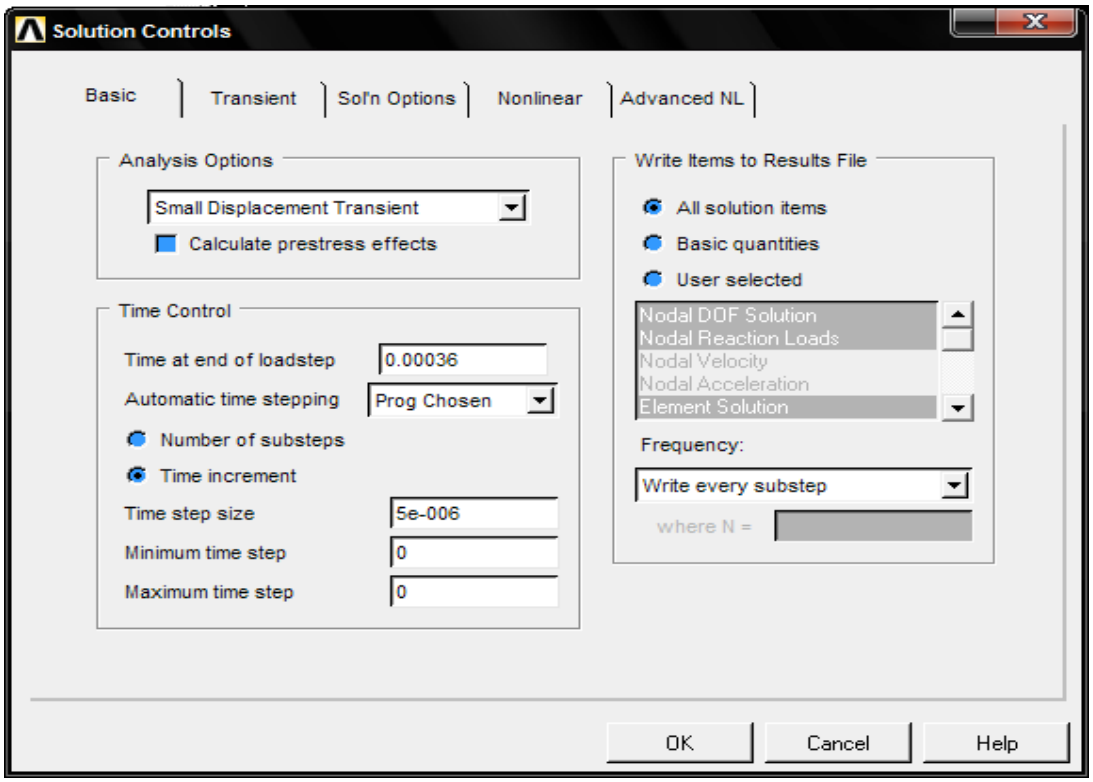


Figure (IV.12) *contrôle du temps*

- Obtenir la solution en utilisant le chemin de menu suivant :

Main Menu > Solution > Solve > Current LS

- Cliquez sur OK pour lancer la solution.
- Attendez que (ANSYS) réponde avec la **Solution is done!**

Postprocessing

- Examen des déplacements au milieu dépendant du temps en utilisant le chemin de menu suivant:

Main Menu > TimeHist Postpro

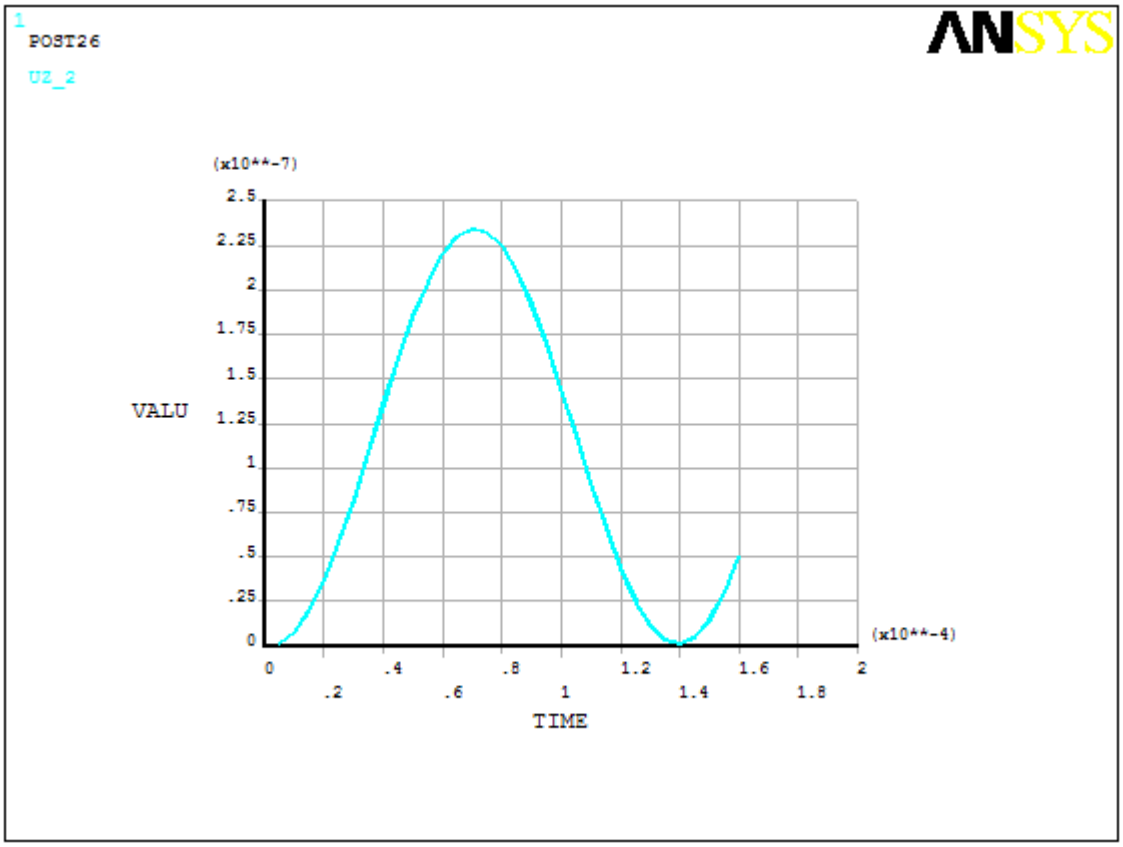


Figure (IV.13) *Variation dans le temps de la z-déplacement au point milieu*

Chapitre V : Résultats et discussions

V.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, des applications portent sur l'influence des caractéristiques géométriques et mécaniques des plaques composites sur leurs réponses dynamiques seront présentées. L'élément de référence utilisé est celui le Layer 99 qui est bien adapté aux structures composites. Sa formulation est basée sur la théorie Mindlin qui permet le traitement des plaques minces et épaisses

V.2 ANALYSE VIBRATOIRE

V.2.1 Etude comparative

Avant de passer aux applications numériques, il est souhaitable de faire une étude comparative afin de valider le modèle élément fini utilisé. Pour cela, nous allons considérer les cas de stratifiés suivants ;

- Stratifié isotrope.
- Stratifié orthotrope.
- Stratifié croisé antisymétrique.

V.2.2 Convergence de maillage :

Dans le but d'examiner l'influence de maillage. Nous considérons une plaque carrée de côté a ,Les conditions à la frontière :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x=0, a

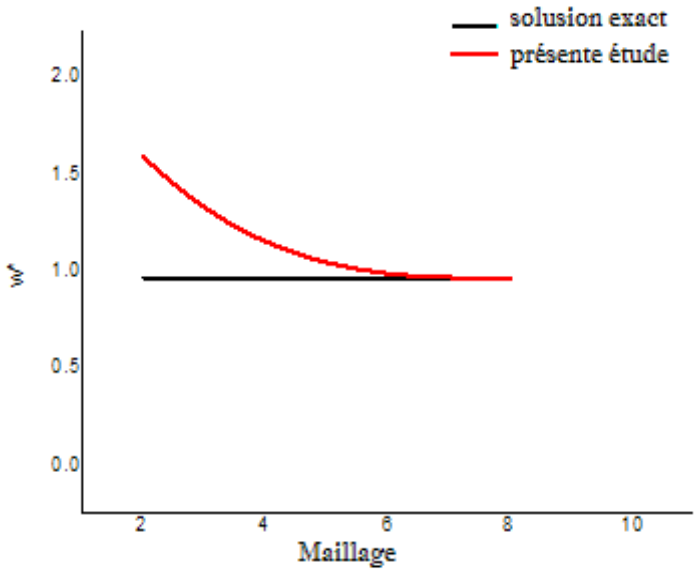
$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y=0, a

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont données, pour les deux types de plaques, comme suit :

- Module d'Young : E=10.920 N/m^2

- Module du cisaillement : G=4.2 N/m^2
- Coefficient de Poisson : ν=0.3
- Masse volumique : ρ=1000 Kg/m^3

La variation de la solution numérique en terme de la fréquence propre de vibration en fonction du maillage est illustrée sur la figure (V.1), sur la même figure on trace la solution exacte, on faisant la comparaison des deux courbes, on constate que la solution numérique se stabilise lorsque le maillage dépasse 6×6 éléments.



Figure(V.1) : *Influence de maillage sur la première fréquence propre adimensionnelle ω**

V.2.3 Validation avec le cas de stratifié isotrope :

Dans cette comparaison deux types de plaques sont examinées :

-Plaque carrée mince Longueur et largeur (1m) et épaisseur (h=0.01m).

-Plaque carrée épaisse Longueur et largeur (1m) et épaisseur (h=0.1m).

Les caractéristiques mécaniques ainsi que les conditions de fixations sont celles utilisées précédemment.

(a)Plaque mince :

Dans le cas d'une plaque mince, les valeurs exactes des fréquences propres de vibration peuvent facilement être obtenues à partir de l'expression mathématique suivante [21]:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)\sqrt{\frac{D}{\rho_Z}} \qquad \text{(V.1)}$$

Où :

m et n sont respectivement les numéros de demi-onde suivant les directions x y.

D est la rigidité flexionnelle de la plaque, D = $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

ρ_Z est la densité par unité de surface.

Les valeurs des fréquences propres adimensionnelles$\omega^*_{mn} = \omega_{mn}(\frac{\rho}{Gh})^{1/2}$ obtenues par le ANSYS et ceux calculées par la relation mathématique (V.1) sont reportées dans le tableau(V.2). On remarque que les résultats du programme sont très satisfaisants en les comparants aux résultats exacts. On note que l'erreur est estimée par rapport aux valeurs exactes par l'expression suivante :

$$\text{Erreur} = \frac{valeur\ numérique - valeur\ exacte}{valeur\ exacte} * 100$$

Tableau (V .1) : *Fréquences propres adimensionnelles ω_{mn}d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un matériau isotrope avec ν = 0.3, h/a=0.01*

m	n	ω^*_{mn}		Erreur (%)
		Présente étude(ANSYS)	Solution exacte	
1	1	0.9623	0.9632	-0.09
2	1	2.4054	2.4080	-0.10
2	2	3.8478	3.8529	-0.13
3	1	4.8140	4.8161	-0.04
3	2	6.2580	6.2604	-0.03

(b)Plaque épaisse :

La comparaison entre les fréquences adimensionnelles $\omega^*_{mn} = \omega_{mn}(\frac{\rho h^2}{G})^{1/2}$ [21] obtenues par ANSYS est présentée sur le tableau (V.2). On constate que l'erreur maximale est à peut prés de l'ordre 0.5%,

***Tableau (V.2)** : Fréquences propres adimensionnelles ω^*_{mn} d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un matériau isotrope avec ν = 0.3, h/a=0.1*

m	n	ω^*_{mn}		Erreur (%)
		Présente étude	Solution exacte	
1	1	0.09298	0.09315	-0.18
2	1	0.22188	0.22260	-0.32
2	2	0.34051	0.34207	-0.45
3	1	0.41542	0.41714	-0.41
3	2	0.52100	0.52391	-0.55

V.2.4 Validation avec le cas de stratifie orthotrope :

Un stratifié orthotrope est obtenu, soit à partir d'une seule couche de matériau orthotrope, soit à partir d'un stratifie symétrique constitué de couches orthotropes dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence du stratifié.

Nous considérons une plaque carrée de côté a, constituée d'un stratifié orthotrope [0°/90°]s dont les caractéristiques mécaniques sont données comme suit :

$E_1 = 40\ \mathrm{N/m^2}$, $E_2 = E_3 = 1\ \mathrm{N}/m^2$

$G_{12} = G_{13} = 0.6\ N/m^2$, $G_{23} = 0.5\ \mathrm{N}/m^2$

$v_{12} = v_{23} = 0.25$, $v_{13} = 0.01$

$\rho = 1000\ Kg/m^3$

Les conditions aux limites :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x=0, a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y=0, a

Ces caractéristiques sont typiques à celles du composite Graphite/Epoxyde. Le choix de E_2 et ρ est arbitraire à cause de l'addimensionnalité des résultats. L'expression des fréquences propres, pour une plaque orthotrope simplement appuyée, s'écrit, [21] :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{1}{\rho_z}[D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2 + D_{22}n^4]} \quad \text{(V.2)}$$

Les six premières valeurs $\omega^*_{mn} = \omega_{mn}(\frac{a^2}{h})\sqrt{\rho/E_2}$ obtenues par la relation (V.2) ainsi que les résultats de ANSYS sont reportés dans le tableau (V.3). On note que pour un stratifié orthotrope, les fréquences propres ne sont pas symétriques. (ω12≠ω21) .

***Tableau (V.3)** : Fréquences propres adimensionnelles ω^*_{mn} d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifié orthotrope de séquence d'empilement [0°/90°]s , avec h/a= 0.01*

m	n	ω^*_{mn}		Erreur (%)
		Présente étude	Solution exacte	
1	1	18.827	18.891	-0.33
1	2	33.681	33.823	-0.41
1	3	65.614	66.079	-0.70
2	1	67.804	68.637	-1.21
2	2	74.700	75.565	-1.14
2	3	95.319	96.363	-1.08

V.2.5 Validation avec le cas de stratifié croisé antisymétrique :

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des fibres est antisymétrique par rapport au plan moyen du stratifié.

L'alternance $[0^0/90^0]_T$est souvent désignée par stratifier croisé

Nous considérons une plaque rectangulaire de dimension a=1 m, b=0.5 m et h=0.01m

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont données

E_1=40 N/m^2 ,E_2=E_3=1 N/m^2

G_{12}=G_{13}=0.6 N/m^2 , G_{23}=0.5 N/m^2

v_{12} =v_{23}=0.25,v_{13} =0.01, ρ=1000 Kg/m^3

Les conditions à la frontière :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x=0, a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y=0, b

Les valeurs des fréquences propres adimensionnelles $\omega^*_{mn} = \omega_{mn}(\frac{a^2}{h})\sqrt{\rho/E_2}$, pour un rapport épaisseur sur longueur égal à 0.01, sont reportées dans le tableau (V.4). Un écart de 3% au maximum peut être remarqué en comparant les six premières valeurs de ANSYS avec celle de la solution exacte.

Tableau (V.4) : *Fréquences propres adimensionnelles ω^*_{mn} d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifie croisé de séquence d'empilement $[0°/90°]_T$ avec h/a= 0.01*

m	n	ω^*_{mn}		Erreur (%)
		Présente étude	Solution exacte	
1	1	49.034	49.479	0.89
2	1	68.613	69.366	-1.08
3	1	117.508	119.521	-1.68
1	2	183.782	189.590	-3.06
2	2	191.870	197.916	-3.05
3	2	217.040	223.796	-3.01

V.3 APPLICATIONS

Dans cette section, l'ensemble des types de stratifiés étudiés constitue une bonne référence des stratifiés usuels. Assez souvent la réalisation des stratifiés est faite à partir des couches qui ont les mêmes caractéristiques (mêmes constituants, mêmes configurations géométriques, mêmes épaisseurs, etc.), mais ont des orientations différentes de leurs axes principaux par rapport aux axes des références du stratifié.

V.3.1 Influence du rapport épaisseur sur longueur h/a

Nous considérons une plaque carrée de côté a, constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45°/-45°]_{5T}$.

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont données

E_1=40 N/m^2,$E_2 = E_3$=1 N/m^2

$G_{12} = G_{13}$=0.6 N/m^2 , G_{23}=0.5 N/m^2

$v_{12} = v_{23}$=0.25,v_{13} =0.01, ρ=1000 Kg/m^2

Les conditions à la frontière :

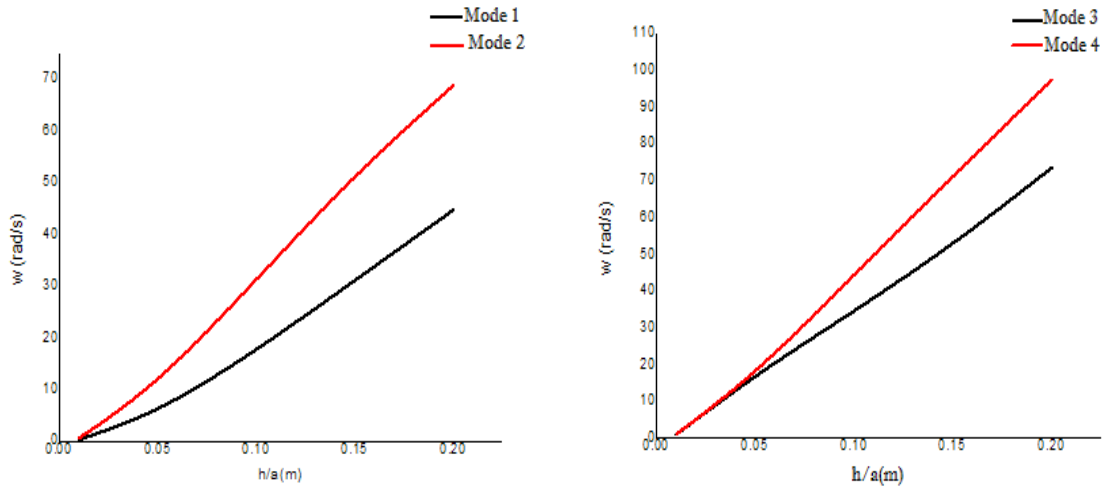
$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x=0, a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y=0, a

La figure(V.2) illustre la variation des quatre premières fréquences propres adimensionnelles $\omega^* = \omega\sqrt{\rho h^2/E_2} * 100$ en fonction du rapport h/a (h/a varie de 0.01 à 0.2). On remarque que la fréquence propre augmente avec l'augmentation du rapport h/a. cette augmentation passe par deux zones différentes :

Zone 1 : caractérisée par une variation parabolique des fréquences adimensionnelles pour des valeurs de h/a appartenant à [0.01 0.1] (cas des plaques minces).

Zone 2 : caractérisée par une variation de ω presque linéaire pour des valeurs de h/a appartenant à [0.1 0.2] (cas des plaques épaisses).



Figure(V.2) : *Influence du rapport h/a sur les quatre premières fréquences propres adimensionnelles ω^* d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45°/\text{-}45°]_T$*

V.3.2 Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2

Dans le but d'examiner l'influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2. Nous considérons une plaque rectangulaire de dimension a=2 m, b=1 m et h=0.4, constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[30°/-30°]_{4T}$ de caractéristiques mécaniques.

$G_{12} = G_{13}$=0.6 N/m^2 , G_{23}=0.5 N/m^2

$v_{12} = v_{23}$=0.25,v_{13} =0.01, ρ=1000 Kg/m^2

L'effet de l'anisotropie du matériau sera examiné pour un rapport E1/E2 varie de 3à 40. Ainsi, les conditions aux limites utilisées sont les conditions d'appuis simples, elles sont données comme suit :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x = 0, a.

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y = 0, b.

La variation des quatre premières fréquences propres adimensionnelles

$\omega^* = \omega\sqrt{\rho h^{2/E_2}}$ en fonction du rapport E_1/E_2,

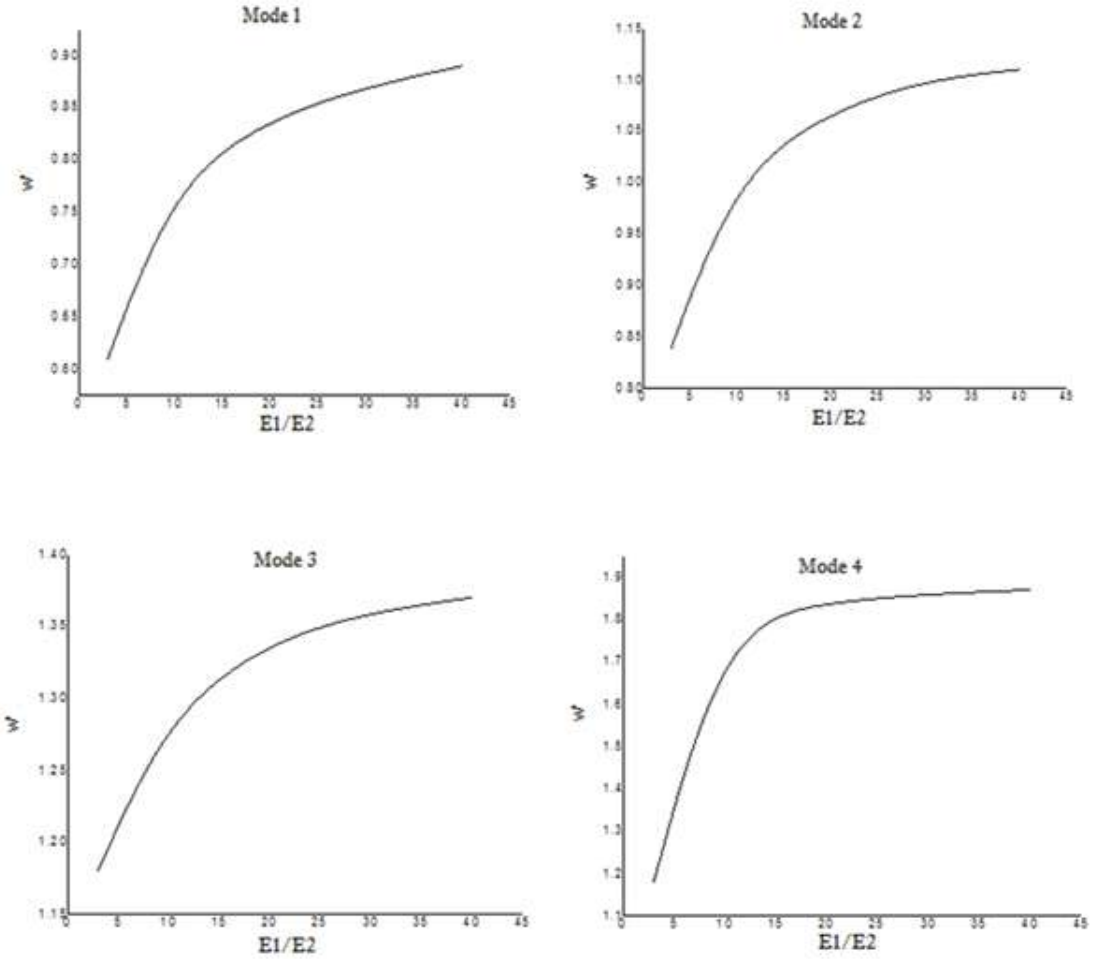


Figure (V.3) : *Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2 sur les quatre premières fréquences propres adimensionnelles ω^* d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[30°/-30°]_{4T}$*

V.3.3 Influence du nombre de couches

Pour cette application, nous considérons le cas d'une plaque carré d'un rapport *h/a*=0.2 et constituée d'un stratifié antisymétrique. Nous examinons deux types de séquences d'empilement différentes :

- couches équilibrées $[45°/-45°]_{nT}$
- couches croisées $[0°/90°]_{nT}$

où *n* représente le nombre de pairs de couches constituant le stratifié.

Pour chaque couche, les caractéristiques suivantes du composite verre–epoxyde sont utilisées :

$\boldsymbol{E_1 = 46\ \text{GPa}}$ $\boldsymbol{E_2 = E_3 = 10\ GPa}$

$\boldsymbol{G_{12} = G_{13} = 4.6}$ GPa $\boldsymbol{G_{23} = 3.27}$GPa

$\boldsymbol{\nu = 0.31}$

$\boldsymbol{\rho = 2040 kg/m^3}$

Les conditions à la frontière :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x=0, a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y=0, b

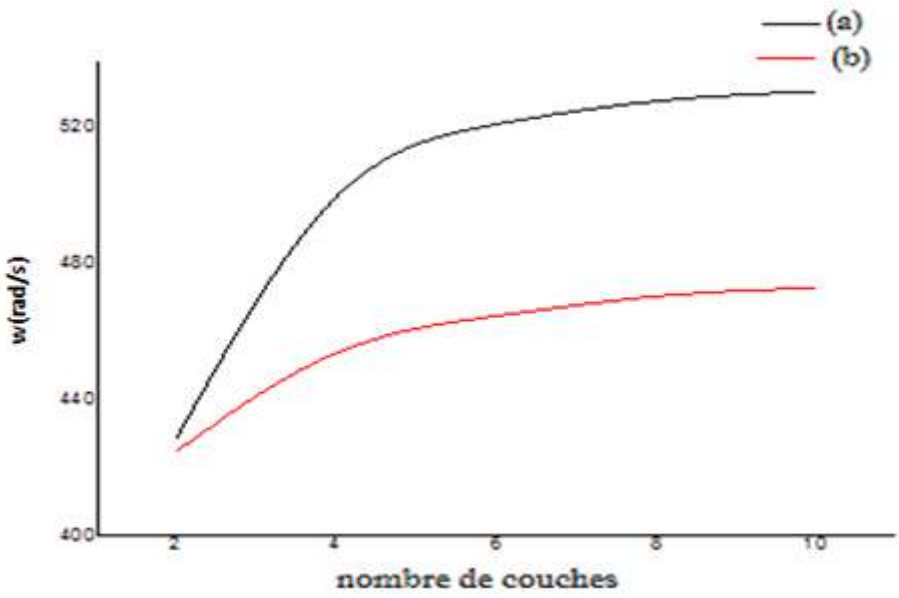


Figure (V.4) : *Influence du nombre de couches sur la première fréquence propre ω d'une plaque carrée simplement appuyée (a) : couches équilibrées antisymétriques $[45°/-45°]_{nT}$ (b) : couches croisées antisymétriques $[0°/90°]_{nT}$*

La courbe de la première fréquence propre ω qui en résulte est reportée sur la figure(V.4). On constate que l'augmentation du nombre de couches, sauf pour le cas de passage de deux couches à quatre, ne crée pas un grand changement sur la valeur de ω (de

l'ordre de 3%). La figure (V.4) indique également que les stratifiés équilibrés sont plus rigides que les stratifiés croisés. Ainsi, la rigidité obtenue par un stratifié équilibré constitué de quatre couches est supérieure à celle obtenue par un stratifié croisé d'un nombre de couches élevé. Cependant, il est important de noter que les coefficients de rigidité en membrane A_{ij} ainsi que les coefficients de rigidité en flexion et en torsion D_{ij} sont indépendants du nombre de couches et du type de stratifié. Par contre, le couplage membrane–flexion/torsion qui provient des termes B_{ij} décroît lorsque le nombre de couches augmente.

V.3.4 Influence des orientations des fibres

Nous considérons une plaque rectangulaire d'une longueur *a* et d'une largeur *b*, constituée d'un stratifié antisymétrique de séquence d'empilement [θ/ -θ/θ/-θ], où θ est l'angle entre la direction des fibres est la direction du stratifié *x*, varié de 0° à 90°. Pour ce type de stratifié nous avons :

$$A_{16}=A_{26}=0 \qquad B_{11}=B_{12}=B_{22}=B_{66}=0$$
$$D_{16}=D_{26}=0 \qquad F_{45}=0$$

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont données

E_1=40 N/m^2 ,E_2=E_3=1 N/m^2

G_{12}=G_{13}=0.6 N/m^2 , G_{23}=0.5 N/m^2

v_{12} =v_{23}=0.25,v_{13} =0.01

ρ=1000 Kg/m^3

Les conditions à la frontière :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x=0, a

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y=0, b

L'influence de l'angle θ sur les fréquences propres de vibration sera examinée pour un rapport *a/b* égal à 0.5, 1 et 2

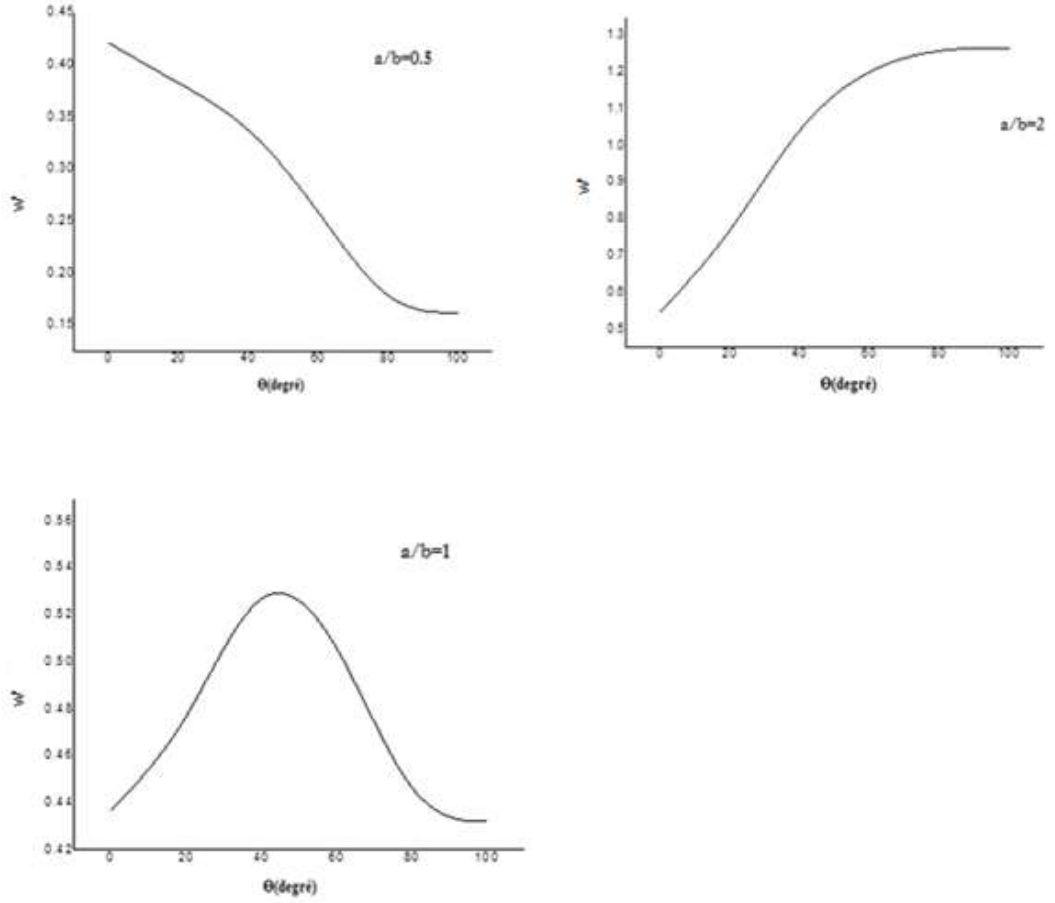


Figure (V.5) : *Influence de l'orientation des fibres θ sur la première fréquence propre adimensionnelle ω* d'un stratifié équilibré [**θ/−θ/θ/−θ**].*

La variation de la première fréquence propre adimensionnelle $\omega^* = \omega\sqrt{\rho h^2 / E_2}.10$ en fonction des orientations des fibres, pour les différents rapports *a/b*, Est illustrée sur la figure (V.5). On remarque que la fréquence ω* passe par un maximum pour θ=45° dans le cas de a/b=1 et par θ=90° dans le cas de a/b=2, et sa variation est symétrique de part et d'autre de ces valeurs. Par contre, dans le cas de a/b=0.5, l'allure de ω* passe par un maximum pour θ=0° et prend une forme symétrique de part et d'autre de cette valeur. La figure montre également que les valeurs extrémales de ω* sont atteintes pour des orientations confondues avec les directions principales (0° et 90).

En outre, la figure (V.5) indique que les fréquences les plus élevées sont obtenues pour un rapport a/b=2, les fréquences les plus basses sont obtenues pour un rapport a/b=0.5. En effet, la fréquence propre augmente avec l'augmentation du rapport a/b, ceci peut être illustré sur la figure (V.6). On remarque d'après cette figure que la fréquence propre croît paraboliquement pour un rapport a/b varie de 0.5 à 4.

D'après ce qui vient d'être dit précédemment, on peut faire les conclusions suivantes :

•Pour un comportement plus rigide, on opte pour des plaques rectangulaires d'un rapport a/b >1 et θ=90°.

•Pour un comportement plus flexible, on opte pour des plaques rectangulaires d'un rapport a/b< 1 et θ=90°.

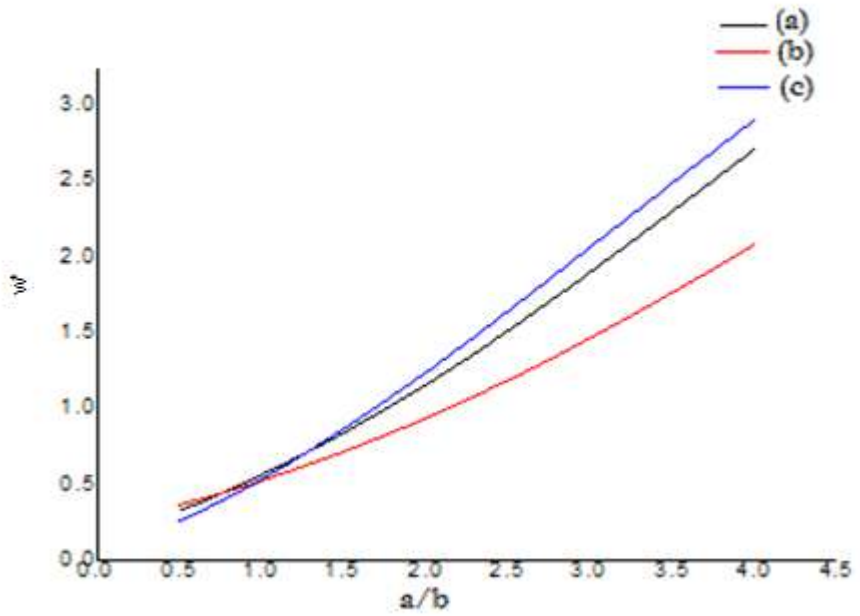


Figure (V.6) : *Influence du rapport a/b sur la première fréquence propre adimensionnelle ω* pour trois types de stratifies. (a) : [45°/-45°]* $_T$ *, (b) : [30°/-30°]* $_T$*, (c) : [60°/-60°]* $_T$.

Enfin, on peut dire que le contrôle de la géométrie des plaques stratifiées et l'orientation des fibres permet d'augmenter la rigidité de ces plaques et par conséquent leur durée du fonctionnement.

V.3.5 Influence des conditions aux limites

Nous considérons une plaque rectangulaire de dimension : a=1m, b=0.5m et h=0.3m constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45°/-45°]_{6T}$. Les caractéristiques mécaniques de ce stratifié sont typiques à celles du composite carbone–epoxyde :

E_1=230 GPa $E_2 = E_3$=14.4 GPa

$G_{12} = G_{13}$=4.9 GPa , $G_{23} = 4$ GPa

v_{12}=0.32 ,$v_{23} = 0.32$,v_{13} =0.31

ρ =1650 kg/m^3

Extrémités simplement appuyées :

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à y = 0.

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à y = b.

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à x = 0.

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à x = a.

Extrémités encastrées :

$u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0$. sur les quatre côtés

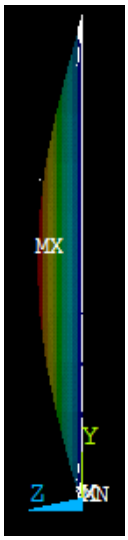
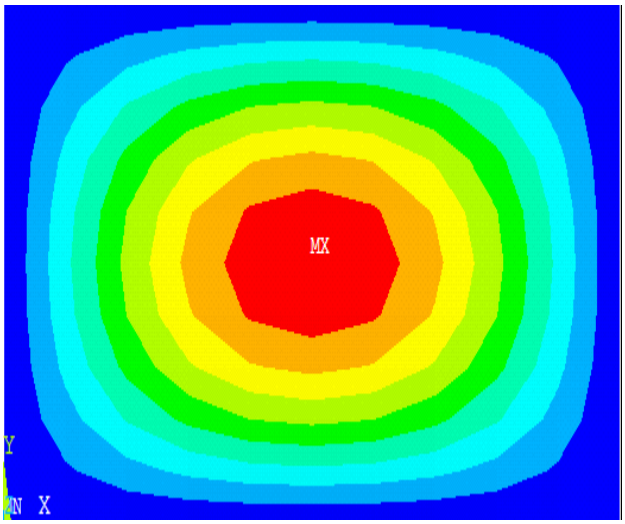
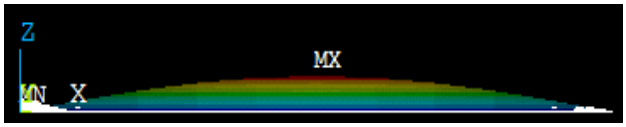
Tableau(V.5) : *Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique [45°/-45°]* $_{6T}$

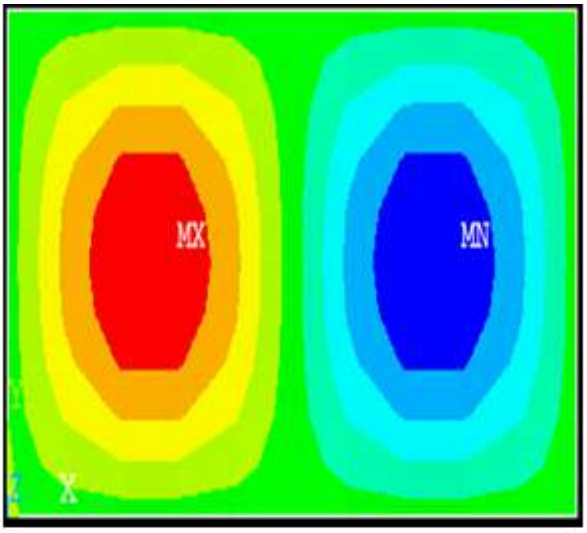
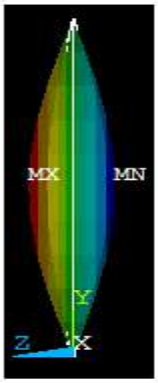
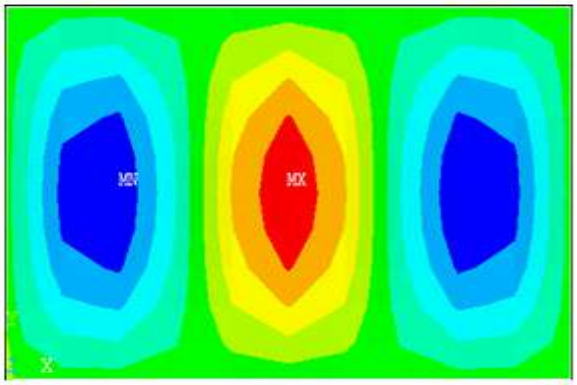
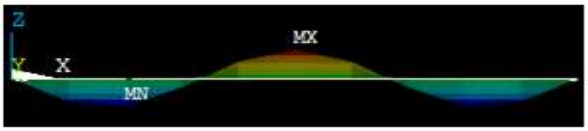
Type de condition aux limites	$\omega\ rd/s$			
	Mode 1.1	Mode 1.2	Mode 2.2	Mode 1.3
SSSS	$\omega = 0.047843$	$\omega = 0.060584$	$\omega = 0.077252$	$\omega = 0.095779$
ESES	$\omega = 0.0479$	$\omega = 0.060587$	$\omega = 0.077257$	ω=0.095795
SSSE	$\omega = 0.048013$	ω =0.060646	$\omega = 0.077333$	$\omega = 0.095827$
SSEE	$\omega = 0.047896$	$\omega = 0.060564$	$\omega = 0.077236$	$\omega = 0.095791$
SEEE	ω=0.047971	$\omega = 0.060627$	ω=0.077300	ω=0.095832
EEEE	$\omega = 0.047878$	$\omega = 0.060557$	$\omega = 0.077268$	$\omega = 0.095794$

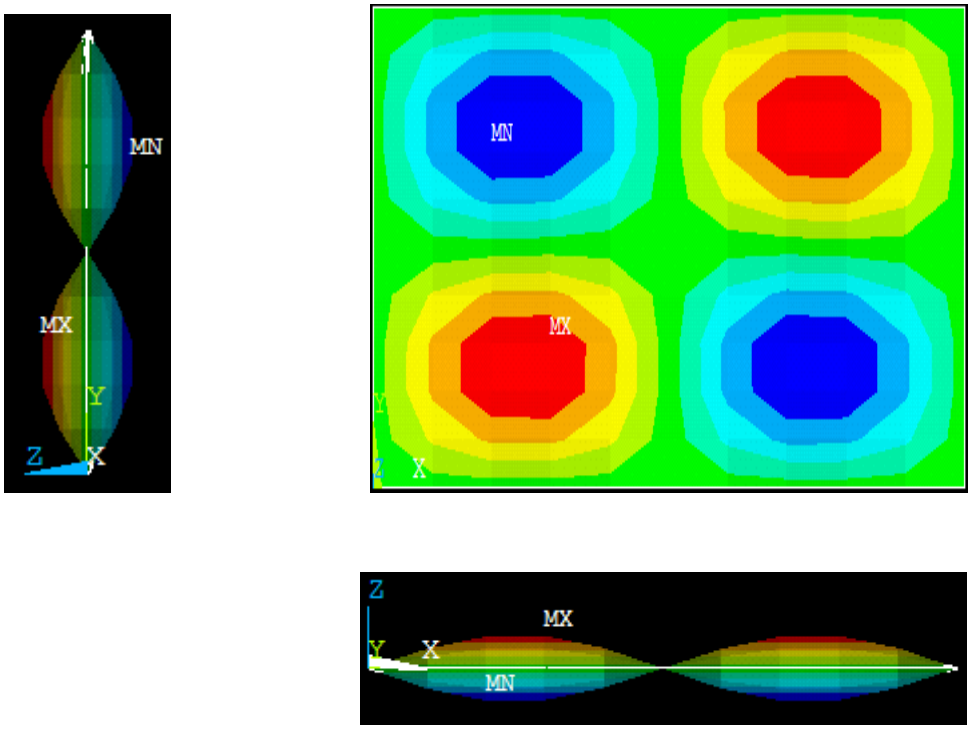
E : Extrémité encastrée. S : Extrémité simplement appuyée.

ESES : Plaque (i) : encastrée suivant x=0, (ii) : simplement appuyée suivant y=0,

(iii) : encastrée suivant x=a, (iv) : simplement appuyée suivant y=b.

Mode 1	  

Mode 2	  
Mode 3	  

Mode 4	

V.3.6 Influence de l'empilement des couches

L'étude de l'influence de l'empilement des couches permet d'appréhender les phénomènes de couplages entre membrane, flexion, cisaillement et torsion. Divers couplages peuvent être observés et mis en évidence. Le couplage traction – cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26}.Le couplage membrane – flexion résulte des termes B_{11}, B_{12} et B_{22}, alors que le couplage membrane – torsion résulte des coefficients B_{16} et B_{26}. Enfin, le couplage flexion – torsion résulte des termes D_{16} et D_{26}.

Pour cette application, nous considérons une plaque carrée de caractéristiques géométriques a=1 m, b=1m, h=0.4m

Nous étudions les séquences d'empilement suivantes :

- Stratifié croisé symétrique (SCS) [0°/90°/0°/90°/90°/0°/90°/0°] pour lequel il n'existe aucun type de couplage (A_{16}=A_{26}=0, B_{ij}=0, D_{16}=D_{26}=0).

- Stratifié croisé antisymétrique (SCAS) [0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°/90°] qui est caractérisé par la présence de couplage membrane–flexion (A_{16}=A_{26}=0, B_{12}=B_{16}=B_{26}= B_{66}=0 , D_{16}=D_{26}=0).

- Stratifié équilibré symétrique (SES) [45°/-45°/45°/-45°/-45°/45°/-45°/45°] qui présente un couplage flexion–torsion (A_{16}=A_{26}=0 , B_{ij}=0).

- Stratifié équilibré antisymétrique (SEAS) [45°/-45°/45°/-45°/45°/-45°/45°/-45°] qui présente un couplage membrane–torsion (A_{16}=A_{26}=0, B_{11}=B_{22}=B_{12}=B_{66}=0, D_{16}=D_{26}=0)

- Stratifié équilibré quelconque (SEQ) [0°/30°/45°/60°/0°/-30°/-45°/-60°] qui est caractérisé par un couplage membrane–flexion/torsion (A_{16}=A_{26}=0).

- Stratifié quelconque (SQ) [0°/15°/30°/45°/60°/70°/80°/90°] où nous avons la présence simultanée de tous les types de couplages.

Les couches des stratifiés étudiés ont les mêmes caractéristiques mécaniques, ces caractéristiques sont typiques à celles du composite Kevlar–epoxyde :

E_1=125 GPa $\boldsymbol{E_2}$ =E_3=8.5 GPa

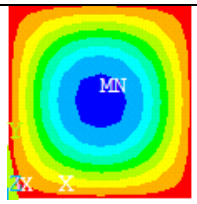
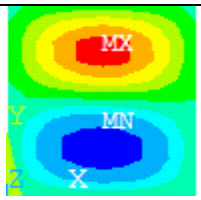
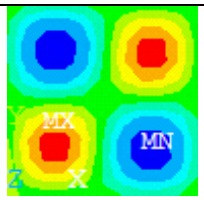
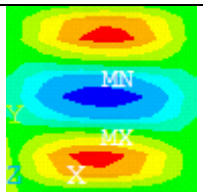
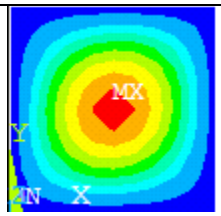
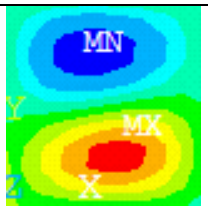
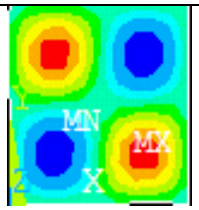
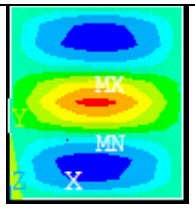
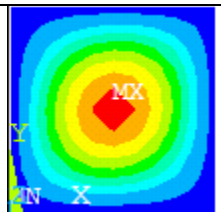
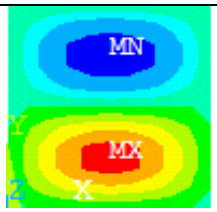
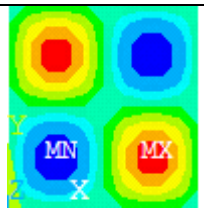
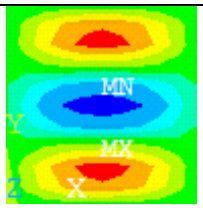
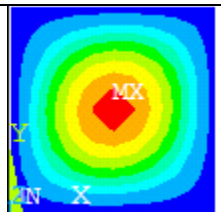
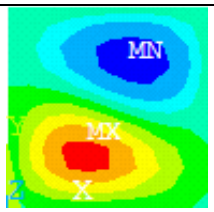
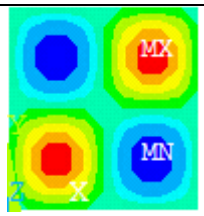
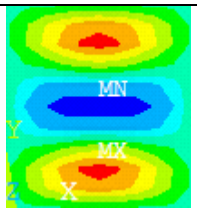
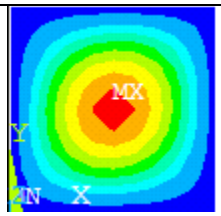
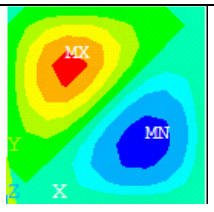
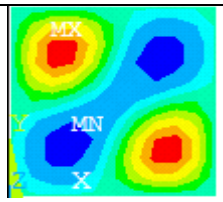
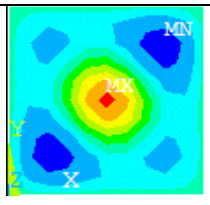
G_{12}=$\boldsymbol{G_{13}}$ =4.5 GPa, $\boldsymbol{G_{23}}$ = 3.27GPa

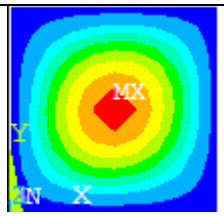
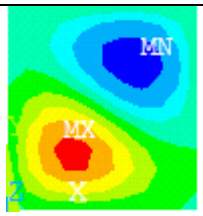
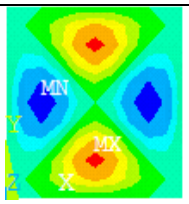
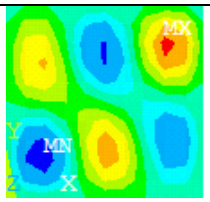
v_{12}=$\boldsymbol{v_{13}}$ =0.3 ,$\boldsymbol{v_{23}}$ = **0.31**

ρ=1550 kg/m^3

D’après les résultats présentés dans le tableau (V.10), on constate que la présence simultanée des couplages entre membrane, cisaillement, flexion et torsion réduit la fréquence propre de vibration. Par contre, l’absence des couplages membrane flexion, flexion torsion et traction cisaillement (cas d’un stratifié équilibré antisymétrique), permet d’avoir un comportement plus rigide de la structure. Les résultats montrent également que les stratifiés symétriques sont plus flexibles que les stratifiés antisymétriques. Cependant, il est intéressant de noter qu’une stratification symétrique garantira une bonne planéité du stratifié après démoulage.

Tableau (V.6): *Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque carrée avec différentes séquences d'empilement*

Type de stratifie	Mode 1. 1	Mode 1.2	Mode 2. 2	Mode 1. 3
SEQ	 $\omega = 348.94$	 $\omega = 528.369$	 $\omega = 840.06$	 $\omega = 758.86$
SQ	 $\omega = 318.39$	 $\omega = 675.86$	 $\omega = 948$	 $\omega = 1100$
SCS	 $\omega = 505.20$	 $\omega =1035$	 $\omega =1532$	 $\omega = 1736$
SCAS	 $\omega = 500.07$	 $\omega = 1169$	 $\omega = 1527$	 $\omega = 1895$
SES	 $\omega = 614.84$	 $\omega = 1150.6$	 $\omega = 1704.6$	 $\omega = 1871.2$

SEAS	 ω =615.83	 ω = 1170	 ω = 1834	 ω = 2271

V.4 COMPORTEMENT EN VIBRATION FORCEE

Dans cette section, le comportement des plaques composites en vibration forcée est traité. Le schéma de newmark est utilisé pour la résolution de l'équation d'équilibre. Les résultats ont été obtenus avec un maillage 10×10

V.4.1 VALIDATION

Nous considérons le cas d'une plaque carrée de dimensions a=0.25m, b=0.25m et h=0.05m,

Deux cas de stratifiés sont traités :

- Stratifié isotrope de caractéristiques mécaniques :

  $E=2.1\ e10\ N/m^2$, $\rho=800Kg/m^3$, $v = 0.25$

- Stratifie orthotrope d'empilement [0°/90°/0°] dont les caractéristiques mécaniques sont comme suit :

  $E_1/E_2=25$, $E_2=2.1\times10^{10}\ N/m^2$,

  $G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.5\ E_2$

  $v_{12}=0.25$

Les conditions aux limites utilisées sont les conditions d'appuis simples, elles sont données comme suit :

$v_0=w_0=\theta_x=0$ à x = 0, a.

$u_0=w_0=\theta_y=0$ à y = 0, b.

La plaque est soumise à une charge répartie sinusoïdale d'intensité $q_0=10000\ N/m^2$

V.4.2 Convergence du maillage et applications

Cette étape est très importante dans le début de chaque analyse afin de choisir le maillage optimal qui permet de minimiser le coût du calcul. Les résultats présentés sur les (V.7) pour la déflexion centrale et la contrainte montrent que la solution est stable lorsque le maillage dépasse le nombre 6x6 éléments

Tableau (V.7): *Convergence de la déflexion centrale pour différents pas du temps, schéma de Newmark*

Maillage	$\Delta t(\mu.\sec)$			
	10	20	40	80
2×2	0.135×10^{-5}	0.505×10^{-5}	0.168×10^{-4}	0.407×10^{-4}
4×4	0.594×10^{-6}	0.300×10^{-5}	0.126×10^{-4}	0.359×10^{-4}
6×6	0.625×10^{-6}	0.274×10^{-5}	0.116×10^{-4}	0.343×10^{-4}
8×8	0.631×10^{-6}	0.270×10^{-5}	0.113×10^{-4}	0.337×10^{-4}
10×10	0.632×10^{-6}	0.268×10^{-5}	0.112×10^{-4}	0.335×10^{-4}

Tableau (V.8): *Convergence de la contrainte normale σ_x pour différents pas du temps, schéma de Newmark.*

Maillage	$\Delta t(\mu.\sec)$			
	10	20	40	80
2×2	24688.8	144346	558941	0.141×10^{7}
4×4	24167.7	191616	902848	0.262×10^{7}
6×6	-6684.31	80397	736661	0.259×10^{7}
8×8		65953.9	685110	0.256×10^{7}
10×10		61990.5	663437	0.255×10^{7}

Le tableau (V.8) présente les résultats de la flèche centrale en fonction de l'incrément du temps pour différents types de stratifiés, ces résultats sont comparés à ceux de l'analytique où une bonne concordance est observée.

Tableau (V.9): *comparaison de la déflexion centrale d'une plaque carrée sur appuis simples sous une charge répartie sinusoïdalement pour différents types de matériaux*

temps (μ.sec)	isotropic		Orthotropic $[0^0]$		2 couche $[0^0/90^0]$		2couche $[45^0/-45^0]$	
	Présente étude (ANSYS)	Solution exacte [22]	Présente étude (ANSYS)	Solution exacte [22]	Présente étude (ANSYS)	Solution exacte [22]	Présente étude (ANSYS)	Solution exacte [22]
10	0.0078	0.0079	0.0078	0.0079	0.0079	0.0079	0.0078	0.0079
20	0.0391	0.0399	0.0395	0.0398	0.0401	0.0404	0.0393	0.0396
40	0.1885	0.1855	0.1861	0.1939	0.1894	0.2065	0.1769	0.1929
60	0.5487	0.5339	0.3863	0.4303	0.3131	0.3876	0.2627	0.3337
80	0.9314	0.9249	0.4188	0.5531	0.2534	0.4094	0.1615	0.2901
100	1.2297	1.2278	0.3104	0.5264	0.1367	0.3420	0.0514	0.1799
120	1.4737	1.4591	0.1259	0.3705	-0.0005	0.1449	-0.0135	0.0202
140	1.6627	1.6537	0.0131	0.1779	0.0091	0.0039	0.0791	-0.0140
160	1.6482	1.6667	0.0089	0.0353	0.1547	0.0182	0.2234	0.1206
180	1.4325	1.4604	0.1135	-0.0395	0.2695	0.1173	0.2310	0.2478
200	1.1632	1.1728	0.3314	0.1105	0.3032	0.3239	0.1452	0.3371
220	0.8545	0.8669	0.4273	0.3296	0.1730	0.4314	0.0090	0.2680
240	0.4859	0.5410	0.3518	0.4781	0.0236	0.3646	0.0003	0.0767
260	0.1421	0.1711	0.1991	0.5548	0.0062	0.2495	0.1359	0.0116
280	0.0130	-0.0041	0.0487	0.4797	0.0854	0.0473	0.2251	0.0226
300	0.0112	0.0009	-0.0171	0.2006	0.2547	-0.0182	0.2291	0.1653
320	0.1038	0.1045	0.0717	0.0840	0.3071	0.0082	0.0939	0.3300
340	0.3297	0.2958	0.2570	-0.0302	0.2115	0.2263	-0.0130	0.3024
360	0.7154	0.6295	0.4168	0.0459	0.0801	0.4007	0.0445	0.1963

La Figure (V.7) présente la déflexion centrale pour différents pas du temps. Il est évident que la flèche est maximale lorsque le pas du temps est très serré. On constate aussi que la flèche est fortement affectée par le pas du temps utilisés

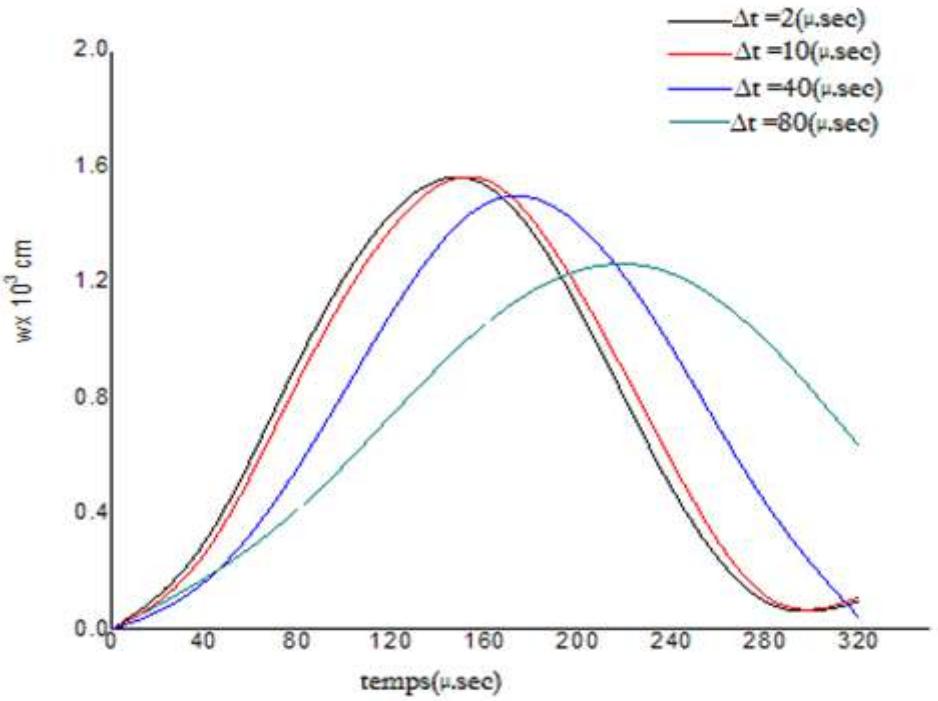


Figure (V.7): *déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (maillage 10 × 10)*

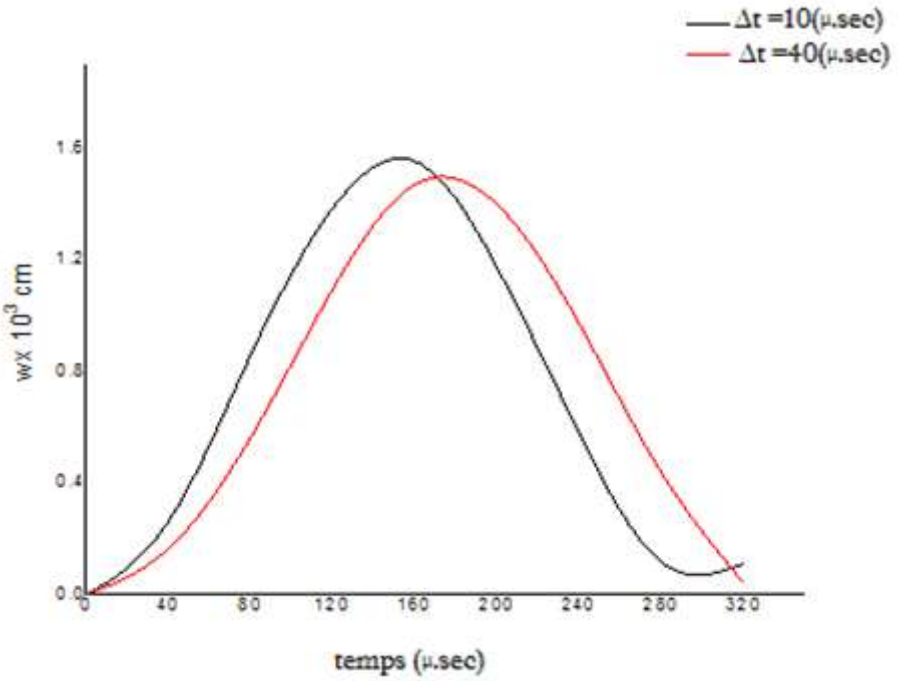


Figure (V.8): *déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (maillage 10 × 10).*

Tableau (V.10): *contraintes en fonction du temps pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (maillage 10× 10, $t = 5\mu.sec$).*

Δt (μ.sec)	$\sigma_x 10^{-3}(N/m^2)$
10	0.00123
20	-0.10516
40	6.96781
60	46.5516
80	82.6721
100	102.433
120	121.883
140	146.566
160	146.362
180	119.291
200	95.875
220	75.394
240	40.919
260	1.2317
280	-2.4462
300	1.3204
320	3.1055

V.4.3 Cas d'un stratifie orthotrope:

Nous considérons une plaque carrée de côté a, constituée d'un stratifié orthotrope avec deux configurations de séquence d'empilement [0°/90°/0°] et [0°/90°/90°/0°] dont les caractéristiques mécaniques sont données comme suit :

E_1/E_2=25, $E_2 = 2.1 \times 10^{10}$ N/m^2,

$G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.5\ E_2$

V_{12}=0.25

q_0=10000 N/m^2

Dans le cas où la plaque est en appuis simples, les conditions aux limites s'écrivent :

$u_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à x = 0, a.

$v_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à y = 0, b.

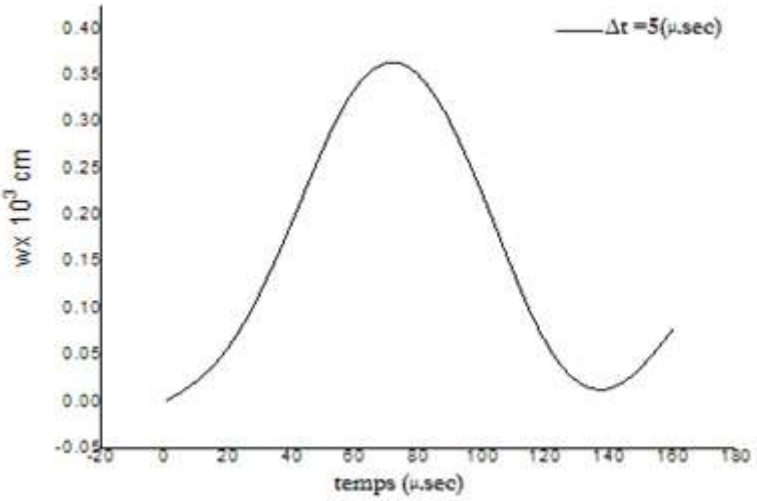


Figure (V.9): *déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de trois couches [$0^0/90^0/0^0$] et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10)*

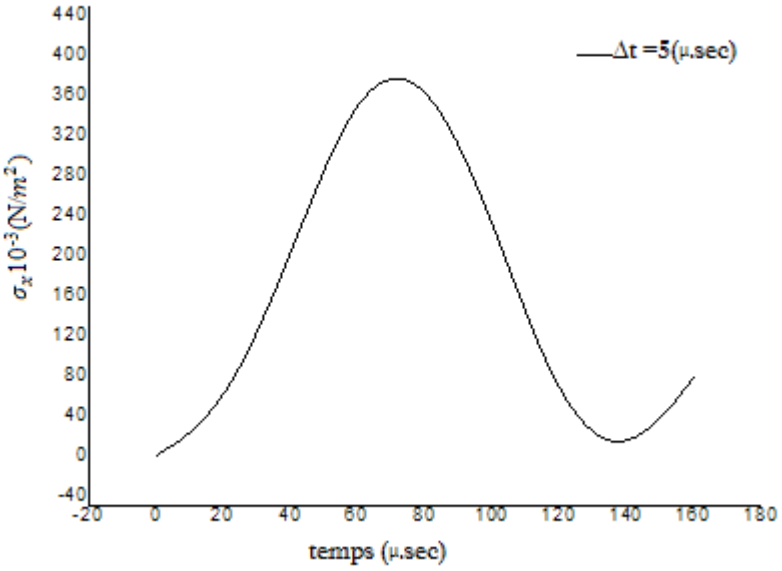


Figure (V.10): *contrainte maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de trois couches [$0^0/90^0/0^0$] et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10)*

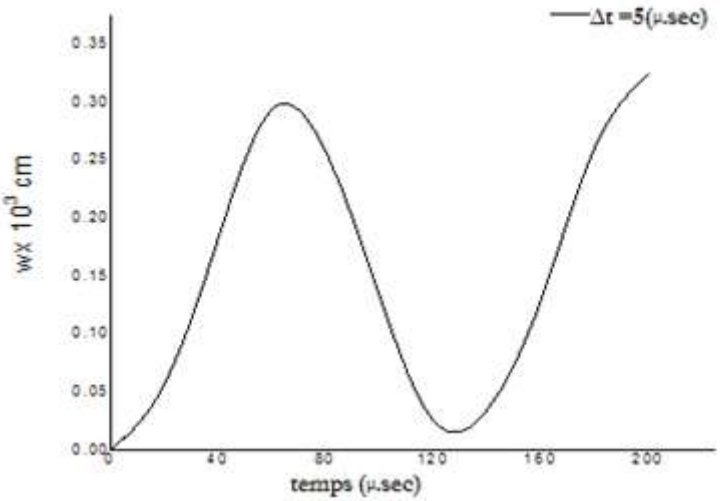


Figure (V.11): *déflexion centrale maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de quatre couches [0^0/90^0/90^0/$0°$] et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10)*

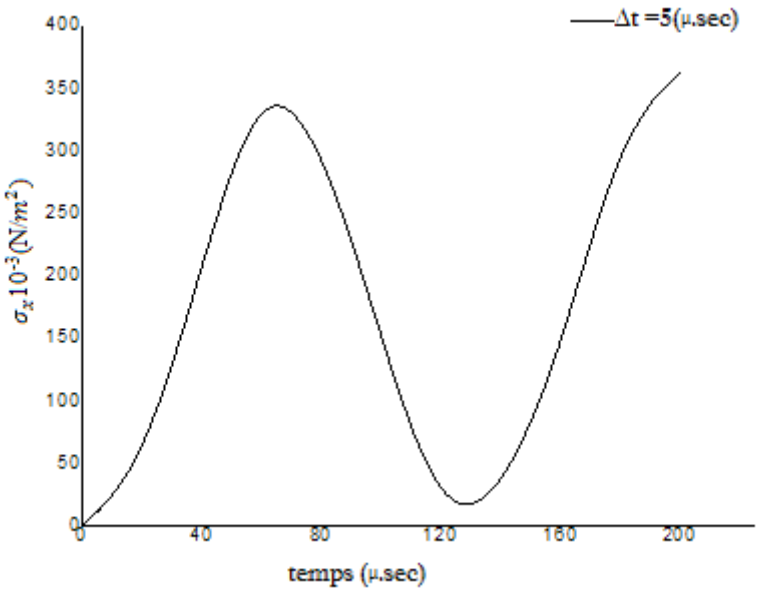


Figure (V.12): *contrainte maximale en fonction du temps pour une plaque carrée simplement appuyée constituée de quatre couches [0^0/90^0/90^0/$0°$] et soumise à un chargement repartie sinusoïdalement (Maillage 10×10)*

CONCLUSION GENERALE

L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement dynamique des plaques Composites Multicouche. Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique détaillée sur les composites multicouches de nombreux travaux sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des structures multicouches dans le souci d'avoir une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes dynamiques.

Le travail de mémoire est une étude des vibrations libres et forcées des plaques stratifiées en matériaux composites possédant un comportement mécanique anisotrope élastique par l'approche numérique. Dans ce cadre, un code de calcul (ANSYS) a été utilisé pour déterminer les réponses dynamiques des plaques. Le problème en déformation linéaire a été discrétisé par la méthode des éléments finis pour décrire le système d'équations algébriques linéaire.

Dans chaque analyse par éléments finis, l'élément de référence, le nombre des éléments utilisés, le type de l'intégration numérique sont des paramètres très importants et doivent être soigneusement choisies car ils influent d'une manière directe sur la convergence des solutions et par conséquent sur la précision des résultats.

Une étude sur l'influence du rapport épaisseur/longueur de la plaque sur les fréquences propres de vibration a été effectuée. Cette étude nous a montré l'importance des déformations en cisaillement transverse dans le cas des plaques épaisses. L'effet du nombre de couches sur les fréquences propres a été également examiné, il a été constaté que la rigidité de la plaque est légèrement affectée par la variation de ce nombre. L'influence de (i) l'anisotropie du matériau (ii) l'orientation des fibres, (iii) l'empilement des couches et (iv) les conditions aux limites, sur les fréquences propres de vibration ont été complètement examinées.

Au-delà des résultats numériques, il est certain que le comportement dynamique des plaques stratifiées ne doit pas dépendre uniquement d'une seule analyse. Il est alors conseillé, pour un travail futur, de mener plusieurs tests d'expérimentations, puis effectuer une corrélation calculs-essais afin de valider le modèle numérique.

Références bibliographiques

[1] Jean-Marie Berthelot “Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures” 4^{iém} édition vol (645) Avril 2005

[2] S.K.Sahu, A.V.Chistilina (vibration and stability of cross-ply laminated twisted cantlever plates) Vibration Problem ICOVP-200

[3] Pierre-Etienne (Matériaux composites à matrice organique) presse polytechniques et universitaires romandes vol 228 (2004)

[4] BERBAIN F., CHEVALIER A,(Mise en œuvre des plastiques renforcés),Technique de l'ingénieur, traité A 9 III, article 3250.

[5] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., (Mécanique des matériaux solides), 2emeédition, Dunod 1988.

[6] Song Xiang,ke-MingWang (Fee vibration analysis of symmetric laminated composite plate by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF) Thin-Walled Structure 47 edition,vol 22,No9,Sep 2001

[7] Y.Z.Zhang (A simple displacement-based 3-node triangular element for linear and geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates) Comput.Methods Appl.Mech.Engrg.194 (2005)4607-4632

[8] WU Hui YU Huan-ran (Natural frequency for rectangular orthotropic corrugated-core sandwich plates with all edges simply-supported) Applied Mathematics and Mechanics (English edition, vol 22, No9, Sep 2001.

[9] Hiroyuki Matsunaga (free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading)composites structures 77 (2007) 249-262.

[10] Sung-Eock Kim (A two variable refined plate theory for laminated composite plates) composite Structures 89 (2008) 197-205.

[11] Zienkiewicz and Taylor (the finite elements method for solid and structure mechanics) vol (619) Sixth edition.2005.

[12] Zhen Wu (Refined laminated composites plate element based on global-local-order shear deformation theory) composite structures 70 (2005) 135-4276

[13]A.Bhar (Finite element analysis of laminated composite stiffened plates using FSDT and HSDT) composite structures 92 (2010) 312-321.

[14]L.X.Luccioni and S.B.Dong (Levy-type finite element analyses of vibration and stability of thin and thick laminated composite rectangular plates) composites Part B 29B (1998) 459-475.

[15] GAJBIR Singh and Vankateswara Rao (Nonlinear oscillation of laminated plates using an accurate four-node rectangular shear flexible material finite element) Sddhan& Vol.25, Part 4,August 2000,pp.367-380.

[16]M.K.Singha Rupash Daripa (Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skewplates by finite element method) International Journal of Non-linear Mechanics 24 (2007) 1144-1152.

[17]Karim S.Numayr, Rami H. Haddad, Madhar A. Haddad (Free vibration of composite plated using the finite difference method) Thin-Walled Structures 42(2004) 399-414

[18]Song Xiang Ke-mingWang, Yan-tingAi, Yun-dongSha, HongShi (Natural frequencies of generally laminated composite plates using the Gaussian radial basis function and first-order shear deformation theory) Thin-Walled structure 47 (2009) 1265-1271.

[19] Hakan Tanri over and Erol Senocak (Nonlinear transient analysis of rectangular composite plates) faculty of mechanical engineering, Istanbul Technical university , TR-34437

[20] T.KANT.J.H.Varaiya and C.P.ARORA (department of civil engineering. Indian Instate of Thcnology, Powi Bombay 400 076, Indian. (22June 1989)

[21] J.-M. Berthelot, *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures*, Masson (1992).
[22] S. Srinivas, C. V. Joga Rao and A. K. Rao, *An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates*, J. Sound Vib. 12, 187-199 (1970).