République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE MEDEA
Faculté de la technologie
Département de Génie des Procédés et Environnement

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Génie des Procédés
Option : Pollution Chimique et Gestion Environnementale

Thème

Contribution à l'etude de la Convection Thermosolutale Dans Une Cavite Poreuse inclinée

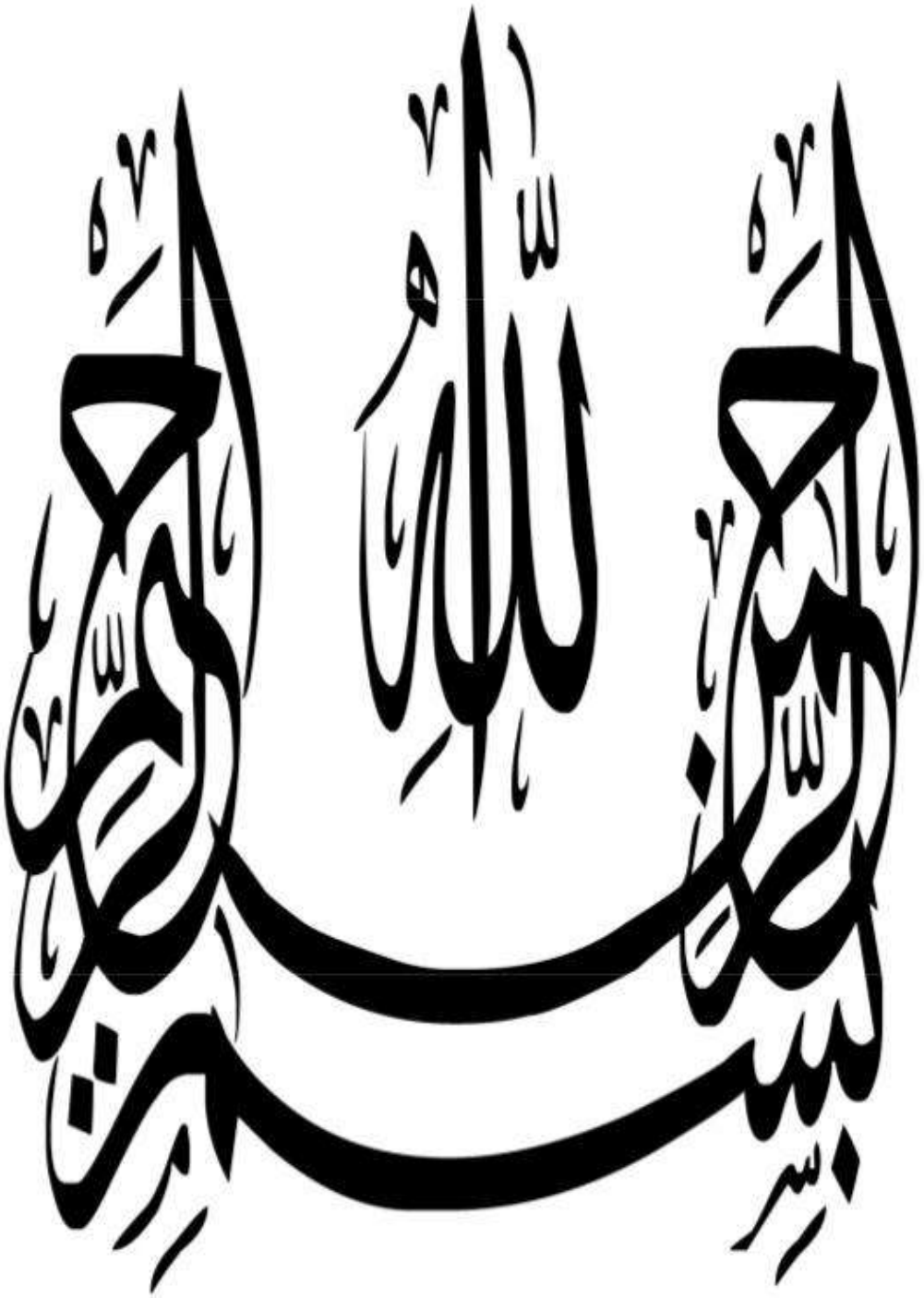
Réalisé par :

- **DERIADI Sihem**
- **BERBER Razika**

Proposé et dirigé par :

- **Dr. HADIDI Noureddine**
- **Dr. REBHI Ridha**

Promotion : 2016/2017


بسم الله الرحمن الرحيم

REMERCIEMENTS

Avant tout, nos remerciements infinis sont adressés à « ***ALLAH*** le Tout Puissant » de m'avoir donné le courage et la santé pour achever ce travail.

Nous remercions vivement notre promoteur Monsieur ***HADIDI Noureddine*** pour sa générosité, sa patience et ses précieux conseils sans lesquels ce travaille n'aurait pas vu le jour.

Sans oublier Mr. ***REBHI Ridha*** pour son encadrement, ses conseils, ainsi que pour son encouragement.

Nous tenons également à remercier tous nos enseignants de 2ème année mastère, ainsi que tous les autres qui nous ont suivis durant notre cursus universitaire.

Nous tenons à exprimer notre respectueuse gratitude à monsieur le président de jury et les nombres de jury d'avoir accepté de nous faire l'honneur de jury ce travail et de participer au jury.

Nous tenons à remercier tous les responsables de département Génie des procédé et Environnement, et en particulier tous les enseignants de Génie des procédé

Nos sentiments vont également à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

اهداء

الى... من وضعت الجنة تحت قدميها... و حملني رحمها قبل يديها... الى القلب الكبير... امي الغالية.

الى.... من بحياته فداني ....و حصد الاشواك عن دربي ... ليمهد لي طريق العلم... ابي العزيز.

الى ... مورد الحب الصادق... ونبع الحنان الدافئ ... اخوتي و اخواتي و ازواجهم.

الى ...من سأشاركه حياتي زوجي الغالي و الى كل عائلته.

الى....من براءتهم تذكرني بطفولتي ... الى من يناديونني عمتي او خالتي: ليلى، شعيب، اسماء، محمد مناف ،ميساء ،رنيم ،محمد عبد الجليل.

الى ... من تذوقت معهم اجمل اللحظات .. و احببتهم في الله صديقاتي و اصدقائي .

الى .... من سرنا معا لنشق طريق النجاح... زميلاتي و زملائي من الابتدائي الى الجامعي.

الى... من كانوا لي خير مثل للاجتهاد و النجاح...اساتذتي من الابتدائي الى الجامعي.

الى ...كل من يعرف سهام الفوضوية المشاكسة من قريب او بعيد.



Dédicace

Il me fait le plaisir de dédier ce modeste travail qui ne sera pas réalisé sons l'aide de ALLAH le tout puissant.

À la femme la plus importante du monde à celle qui hante mon cœur mon âme et ma raison ma très chère mère qui dieu la garde.

À la lumière qui m'éclaire le chemin de le succès

Pour la cause de ma vie... mon père bien-aimé

Vous avez tous Transfiguration et le respect

À mes chères frères Abed El Kader et sa marie,

Mohamed, Yaakoub.

À mes sœurs et ses maries hafid, mohamed,

Abdelssalem.

À les petits-fils de mon famille: Nour Elhoda, Hiba, Abdenour, Mossab Younes, Yacine Abd el basset, Baylasan.

À mes amis : Sihem, Hedda, Hacina, Khalida, Fayza, Karima. Mon amour M.

À mes collègues et amis à l'université Dr. Yahia Farès et ma promotion génie des procédés PCGE (2016/2017).

À tous ceux que j'aime.



ملخص :

في هذه المذكرة، قمنا بالدراسة العددية لانتقال الحرارة والكتلة بواسطة الحمل الحراري الطبيعي في وسط مسامي. الشكل الهندسي المقترح هو تجويف مربع مائل يحتوي على وسط مسامي مشبع بسائل أو بمزيج من السوائل. في هذه الدراسة، يتم التحكم في تدفقات الحمل الحراري بواسطة الشروط الحدودية: نوع نيومان (تدفق ثابت للحرارة والتركيز)، مع استعمال نموذج دارسي. كما تم استخدام طريقة الفروق المتناهية (ADI) و (SOR) للحصول علي الحلول العددية للمعادلات العامة. يتم عرض النتائج العددية من اجل قيم العوامل المقترحة كما يلي : عدد رايلي R_T ، نسبة قوى الحجم، N ، عدد لويس،Le ، درجة ميل التجويف، Φ، بنسبة للمستوى الأفقي والمسامية، ε.

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري الطبيعي ،وسط مسامي، طريقة الفروق المتناهية، دارسي، انتقال الحرارة والكتلة.

يتم عرض النتائج

RÉSUMÉ :

Dans la présente mémoire, ont étudié numériquement les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans un milieu poreux. La géométrie considérée est une cavité carrée inclinée contenant un milieu poreux saturé par un fluide ou mélange de fluide. Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont pilotés par des conditions aux frontières thermiques et solutale de type Neumann c'est-à-dire flux constants de chaleur et de masse. Le milieu poreux est modélisé à l'aide du modèle de Darcy. Les méthodes de l'ADI et de SOR sont basées sur la méthode de différence finies employée pour obtenir des solutions numériques des équations gouvernantes générales. Les résultats numériques sont présentés pour différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh thermique,R_T le rapport de force de volume,N,le nombre de Lewis,Le,l'angle d'inclinaison, Φ, de la cavité par rapport au plan horizontal et la porosité normalisée, ε, de la matrice poreuse.

Mot clés : Convection naturelle, milieu poreux, méthodes des différences finies, Darcy, transfert de chaleur et de masse.

ABSTRACT:

In this study, the heat and mass transfer by natural convection in porous media has been numerically studied. The investigation is conducted in a square inclined cavity containing a porous medium saturated by a binary fluid. The convective flow is driven by either applying constant fluxes of heat and mass. The porous medium considered here is modeled according to the Darcy formulation. The methods of equations ADI and SOR based on finite difference schema, were employed to obtain numerical solutions of the full

governing equation. The numerical results are presented for different governing parameters are the following : thermal Rayleigh number, R_T, buoyancy ratio, N, Lewis number, Le, the inclination angle, Φ, of the cavity with respect to the horizontal plane and the normalized porosity, ε , of the porous matrix.

Keyword: Natural convection, porous medium, method of the finite differences, Darcy, heat and mass transfer.

Table des matières :

Table des matières…….... i

Liste des figures…… iv

Liste des tableaux ……..iv

Nomenclature……..v

Introduction générale……..……01

Chapitre I : Généralité sur les milieux poreux

I.1 Introduction ……03

I.2.Milieu poreux...……...….03

I.2.1.Définition :……03

I.2.2. Objectif du milieu poreux :……..……05

I.3.Quelques exemples des milieux poreux ……...……..…… 05

I.3.1.Milieux poreux naturel ……..05

I.3.2. Milieux poreux artificiels……..05

I.3.3.Milieux poreux isotropes…...……....06

I.3.4.Milieux poreux anisotropes.…….……..……06

I.4.Notion de volume élémentaire représentatif(V.E.R) .……07

I.5.Equations générales de l'écoulement et du transport en milieu poreux ……07

I.5.1. L'hydrodynamique .…….……..07

I.5.2. Le transfert de masse ……...……..08

I.6.Propriétés structurales et thermo-physique d'un milieu poreux ……08

I.6.1.Porosité :…….……08

I.6.2.Perméabilité :……..……09

I.6.3. Tortuosité : ……10

I.6.4.Conductivité thermique effective ….……...……..11

I.6.4.1.Modèle série ……..……11

I.6.4.2.Modèle parallèle...……..12

I.6.5. Conductivité thermique équivalente……...……..12

I.7. Déférents types d'écoulement dans les milieux poreux……..…...13

I.8.Modèles d'écoulement en milieux poreux……..…….13

I.8.1.La loi de darcy ……13

I.8.2.Formulation de forchheimer..……...……...14

I.8.3.Modèle de Carman-Kozeny……..14

I.8.4.Equation de Brinkman……..15

I.8.5.Approximation de Boussinesq……..16

I.8.5.1.Définition de l'approximation de Boussinesq……16

I.8.6.Modèle générale……18

I.9.Conclusion……...18

Chapitre II : phénomène de transfert

II.1.Introduction……19

II.2. Les modes de transferts de chaleur……20

II.2.1.Transferts de chaleur par conduction……..20

II.2.2.Transferts de chaleur par convection……..20

II.2.2.1.Convection en milieu poreux……...22

II.2.2.2.La convection naturelle……22

II.2.2.2.1.Les équations de la convection naturelle……...23

II.2.2.3.La convection forcée……23

II.2.2.4.Convection double-diffusive……....24

II.2.3.Evaluation de coefficient d'échange de chaleur par convection, (analyse dimensionnelle et détermination des groupes adimensionnels)……..…..25

II.3.Transfert de chaleur par rayonnement ……...25

Chapitre III : Formulation mathématique

III.1.Définition du problème……27

III.2.Hypothèses simplificatrices ……27

III.3.Modèles physique et mathématique……28

III.3.1.Convection en milieu poreux……29

III.3.2.Équation de continuité ……29

III.3.3.Equation de conservation de quantité de mouvement……29

III.3.4.Equation d'énergie……31

III.3.5.Equation de conservation de la fraction massique……31

III.4. Conditions aux frontières……31

III.4.1.Conditions aux frontières hydrodynamiques……32

III.4.2.Conditions aux frontières thermiques et massiques……...32

III.5.Equations adimensionnelles……..32

III.6.Transfert de chaleur et de masse……...33

III.7.Conclusion……34

Chapitre IV : Méthode Numérique

IV.1. Introduction……35

IV.2. Discrétisation des conditions aux frontières thermiques……36

IV.2.1.Selon les parois adiabatiques et imperméables……..36

IV.2.2.Selon les parois actives……..36

IV.3. Discrétisation de l'équation d'énergie……37

IV.3.1.Schéma implicite en *x* et explicite en *y*……..37

IV.3.2.Schéma implicite en *y* et explicite en *x*……..38

IV.4. Discrétisation de l'équation de concentration……39

IV.4.1.Schéma implicite en *x* et explicite en *y*……..39

IV.4.2.Schéma implicite en *y* et explicite en *x*…….….39

IV.5. Discrétisation de l'équation du mouvement……...40

IV.5.1. Milieu poreux Darcy……40

IV.6. Discrétisation des champs de vitesse……...41

IV.7. Discrétisation des conditions aux frontières des vitesses……41

IV.8. Algorithme de calcul……..……..42

IV.9. Conclusion……...44

chapitre V : résultats et discussion

V.1. Introduction…….…….……44

V.2. Validation de code numérique…….……...……..44

V.3. Résultats et discussion…...…….……..……45

Liste des figures :

Figure I.1 : Exemples de milieux poreux (Bories et al. (2010))……..……04

FigureI.2 : volume élémentaire représentatif (V.E.R)……..……...07

Figure I.3 : les deux types de porosité……..……...08

FigureI.4 : Exemple de géométrie Kozeny-Carman……..……..09

Figure I.5 : définition schématique de la tortuosité……..…….……..11

Figure I.6 : modèle série de la conductivité thermique effective……..…….……12

Figure I.7 : modèle parallèle de la conductivité thermique effective…..…….……...12

Figure I.8 : Bloc poreux soumis à un écoulement…….....14

Figure II.1 : transfert de chaleur par conduction……20

Figure II.2 : Transfert de chaleur……20

Figure II.3 : Exemple de Chauffage par convection……21

Figure II.4 : Transfer de chaleur par rayonnement……..25

Figure III.1 : Représentation schématique du problème……28

Figure IV.1 : Maillage du domaine de calcul en (i, j) ……...……..35

Figure V.1 : Influence du nombre de Rayleigh,R_T, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $A = 1$, $N = 0.1$, $Le = 0.1$ et Φ=0…….....46

Figure V.2 : Influence du nombre de Lewis,Le, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), iso concentrations (droit) pour $A = 1$, $N = 0.5$ et Φ=0……46

Figure V.3 : Influence du rapport des forces de volume, N, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), iso concentrations (droit) pour $A = 1$, $Le = 5$ et Φ=0……47

Figure V.4 : Influence de l'angle d'inclinaison,Φ, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $A = 1$, $Le = 2$ et $N = -0.1$……..48

Figure V.5 : Profils de fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $A = 1$, $R_T = 200$, $N = 1$ Et Φ=45°……...……....49

Figure V.6: Profils de fonction de courant, Ψ de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $A = 1$, $R_T = 200$, $Le = 10$ Et Φ=0°……..……50

Figure V.7 : Profils de fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $A = 1$, $R_T = 200$, $Le = 2$ et $N = 1$……52

FigureV.8 : Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et du nombre de Lewis, Le pour$A = 1$,

$R_T = 200,\ N = -0.1$ sur : a) l'intensité de l'écoulementΨ_0, b) le nombre de Nusselt Nu et c) le nombre de Sherwood Sh……...54

Figure V.9 : Effet du nombre de Rayleigh, R_T, et l'angle d'inclinaison, Φ, sur a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) taux de transfert de chaleur, Nu, et c) taux de transfert de masse, Sh pour $A = 1$, $Le = 10$ et $N = -0.5$……..55

Figure V.10 : L'effets du nombre de Rayleigh R_T et le rapport des forces de volume N sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt, Nu, et c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 1$, $Le = 10$ et $\Phi = 0°$…….57

FigureV.11 : L'effet du nombre de Rayleigh sur a) l'intensité de l'écoulement,Ψ_0 b) du nombre de Nusselt, Nu, et c) du nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 1$, $Le = 5$ et $N = -0.5$ avec un écoulement monocellulaire et bicellulaire……...59

Figure V.12 : L'effet du nombre de Rayleigh sur a) l'intensité de l'écoulement,Ψ_0 b) du nombre de Nusselt, Nu, et c) du nombre de Sherwood, Sh, $A = 1$, $Le = 5$ et $N = -0.5$ avec un écoulement monocellulaire et trois cellules…….60

FigureV.13 : Solutions multiples stables pour$A = 1$,$R_T = 400$, $N = -0.5$ et $Le = 10$……62

Liste des tableaux :

Tableau I.1 : valeur moyennes de porosité de quelques matériaux……...……..09

Tableau I.2 : les valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux. O. Reynolds et Dullien……..……..10

Tableau II.1 : les valeurs de a et n……...23

Tableau V.1 : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max}, des nombres moyens de Nusselt, Nu_m, et de Sherwood, Sh_m, pour $A = 8$, $R_T = 100$, $N = -8$ et $Le = 10$…….45

Nomenclature :

Symbole

H' hauteur de cavité [m]

G Paramètre qui mesure les effets d'inertie

L' largeur de cavité [m]

K perméabilité du milieu poreux m^2

ℓ* longueur caractéristique de la cavité

P* pression caractéristique, ($\rho_0 U^{*2}$)

U* vitesse caractéristique (m/s)

Pr* nombre de Prandtl modifié, $1/G$

C Concentration sans dimension

g Accélération gravitationnelle ms^{-2}

j′ Flux de soluté par unité de surface kg m^{-2} s^{-1}

N Fraction de masse

N_0 Fraction de masse de référence

P' pression

ΔN Différence caractéristique de la fraction de masse

q′ Flux de chaleur constant par unité de surface W m^{-2}

S Fraction de masse normalisée N/ΔN

t Temps sans dimension $t'\alpha / H'^2$

T Température sans dimension $(T' - T'_0)/\Delta T'$

ΔT' Différence de température caractéristique q'H'/h

U Vitesse sans dimension dans la direction x, u'H'/x

V Vitesse sans dimension dans la direction y, v'H'/x

(x,y) Coordonnées cartésiennes (x',y')/H'

Nombres adimensionnels

Da nombre de Darcy, K/ℓ^{*2}

Re nombre de Reynolds, $V_a\sqrt{K}/\nu$

Nu nombre de Nusselt

R_T nombre de Rayleigh, $K\beta T\Delta T^*\ell^*/\nu\alpha_p$

Sh nombre de Sherwood local

Sh_m nombre de Sherwood local massique

Le nombre de Lewis =α /D

R^*_T Numéro de Rayleigh thermique modifié ,$R_T/(1+Ha^2)$

Symboles Grecs

$\boldsymbol{\varepsilon}$ Porosité du milieu poreux

$\boldsymbol{\beta}$ Coefficient de La dilatation thermique à pression constante [$\widehat{K}\square$]

$\boldsymbol{\mu}$ viscosité dynamique du fluide

$\boldsymbol{\alpha_p}$ Diffusivité thermique de milie326u poreux saturé

$\boldsymbol{\lambda}$ paramètre pour faciliter l'étude, *Pr*/*Pr**

$\boldsymbol{\Psi}$ fonction de courant adimensionnelle, Ψ/α_p

$\boldsymbol{\Gamma}$ Coefficient de diffusion de l'équation générale du transport

$\boldsymbol{\beta_N}$ Coefficient de dilatation de concentration

$\boldsymbol{\varphi}$ Ratio de flottabilité $\beta_N \Delta N/ \beta'_T \Delta T'$

$\boldsymbol{\sigma}$ Conductivité électrique $ohm^{-1}m^{-1}$

$\boldsymbol{p}$ Densité de fluide Kg m^{-3}

$\boldsymbol{(PC)_f}$ Capacité calorifique du fluide W K^{-1}

$\boldsymbol{(PC)_P}$ Capacité calorifique du milieu poreux saturé W K^{-1}

$\boldsymbol{\gamma}$ Rapport de capacité thermique $(PC)_P / (PC)_f$

Ψ_0 Fonction de flux sans dimension au centre de la cavité

Φ potentiel électrique

Introduction générale

Introduction Générale :

Jusqu'à ces dernières année, peu d'auteurs se sont préoccupés d'analyser le problème du transfert simultané et couplé de chaleur et de matière dans les milieux poreux. Etant donné son implication dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels, les chercheurs s'intéressent de plus en plus à ce problème et plus précisément aux transferts de chaleur et de masse qui se développent dans les enceintes fermées, souvent en convection naturelle.

De ce fait, les études de la convection double diffusive en présence d'un milieu poreux font actuellement l'objet d'un intérêt sans cesse accru. Cet intérêt est dû aux nombreuses applications pratiques qui s'y rapportent, et cela dans divers domaines tels que :

- La filtration massique ;
- Dans les industries de fabrication des différents types de mousse (différentes perméabilités, conductivité thermique) pour l'utilisation dans différents domaine ;
- La dispersion des polluants dans les aquifères ;
- La séparation membranaire d'espèces chimique ;
- Le stockage de déchets toxiques ou radioactif et des gaz liquides ;
- Le séchage ;
- Dans le domaine médical où on utilise des membranes poreuses pour concevoir des reins artificiels pour les processus de dialyse ;
- L'isolation thermique ;
- L'extraction dans les gisements d'hydrocarbures ;
- Le refroidissement des circuits électronique et des réacteurs nucléaires ;

Dans la présente étude nous nous intéressons à la double diffusive générée dans une cavité carrée inclinée par rapport à l'horizontale saturée par fluide binaire.

La présente investigation a pour but l'étude de la convection double diffusive dans les milieux une enceinte carrée sur les faces horizontales tandis que les faces actives gauche et droite de l'enceinte. Deux flux de température et massique est imposé.

Notre étude porte essentiellement sur la mise en évidence de l'influence des paramètres adimensionnels (le nombre de Rayleigh thermique R_T, le Nombre de Lewis, l'angle de l'inclinaison ainsi que le rapport de force de volume) sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur dans le système et le profile de vitesse.

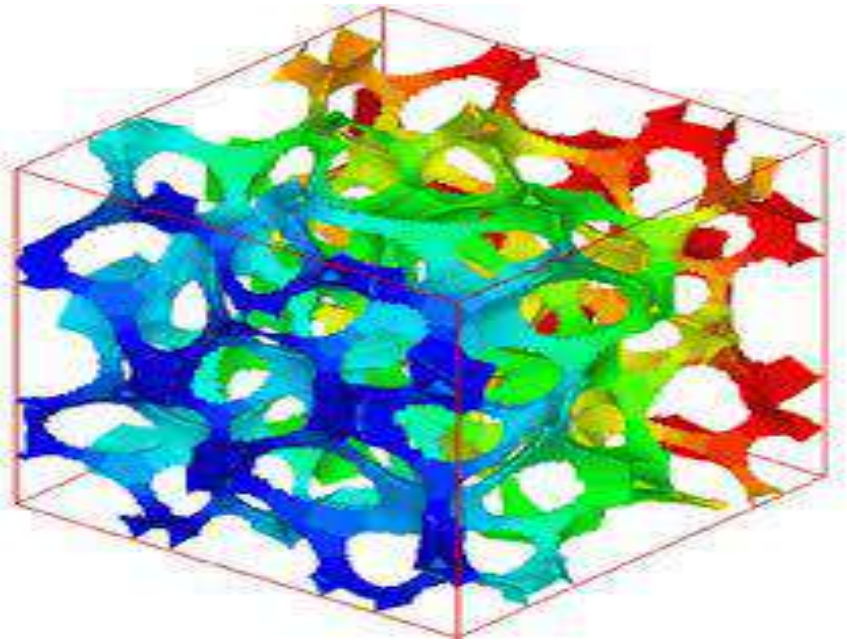
Ce manuscrit est structuré comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les milieux poreux. Les phénomènes de transfert faisant l'objet du deuxième chapitre dans notre travail. La formulation mathématique du problème physique, les hypothèses considérées, ainsi que les équations de conservation mises sous formes adimensionnelles sont développées dans le troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre est présentée la méthode numérique (Différence finie) choisie pour la résolution des équations de conservation.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation et à la discussion des résultats obtenus. On termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I : Généralité sur les milieux poreux



GENERALITE SUR LES MILIEUX POREUX

I.1.Introduction :

Dans le catalogue des milieux divis, les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide, est fixe. On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple).

D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelés pores, délimites par une matrice solide
- le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

Ces deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux :

La porosité la fraction de vide et la perméabilité qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement. Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, c'est- a- dire estimées sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau: les pores [1].

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est possible si la plupart des espaces vides sont interconnectés. Le milieu poreux est généralement supposé saturé par un fluide quand ce dernier est formé d'une seule phase. [2].

I.2.Milieu poreux :

I.2.1.Définition :

On appelle milieu poreux un corps composé d'une matrice solide à l'intérieur de laquelle se trouvent des vides appelés pores. Généralement, ces pores peuvent communiquer entre eux ou éventuellement sont isolés **(Figure 1.1).** Dans cette étude, nous nous intéressons aux phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux.

L'étude de la convection naturelle dans des espaces confinés a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. Cela s'explique par le vaste domaine d'applications pratiques. Nous

nous limitons à citer quelques exemples parmi les plus typiques : l'extraction de pétrole et de gaz, les problèmes de purification de l'eau, le problème de transport des polluants dans le sol etc. [3]

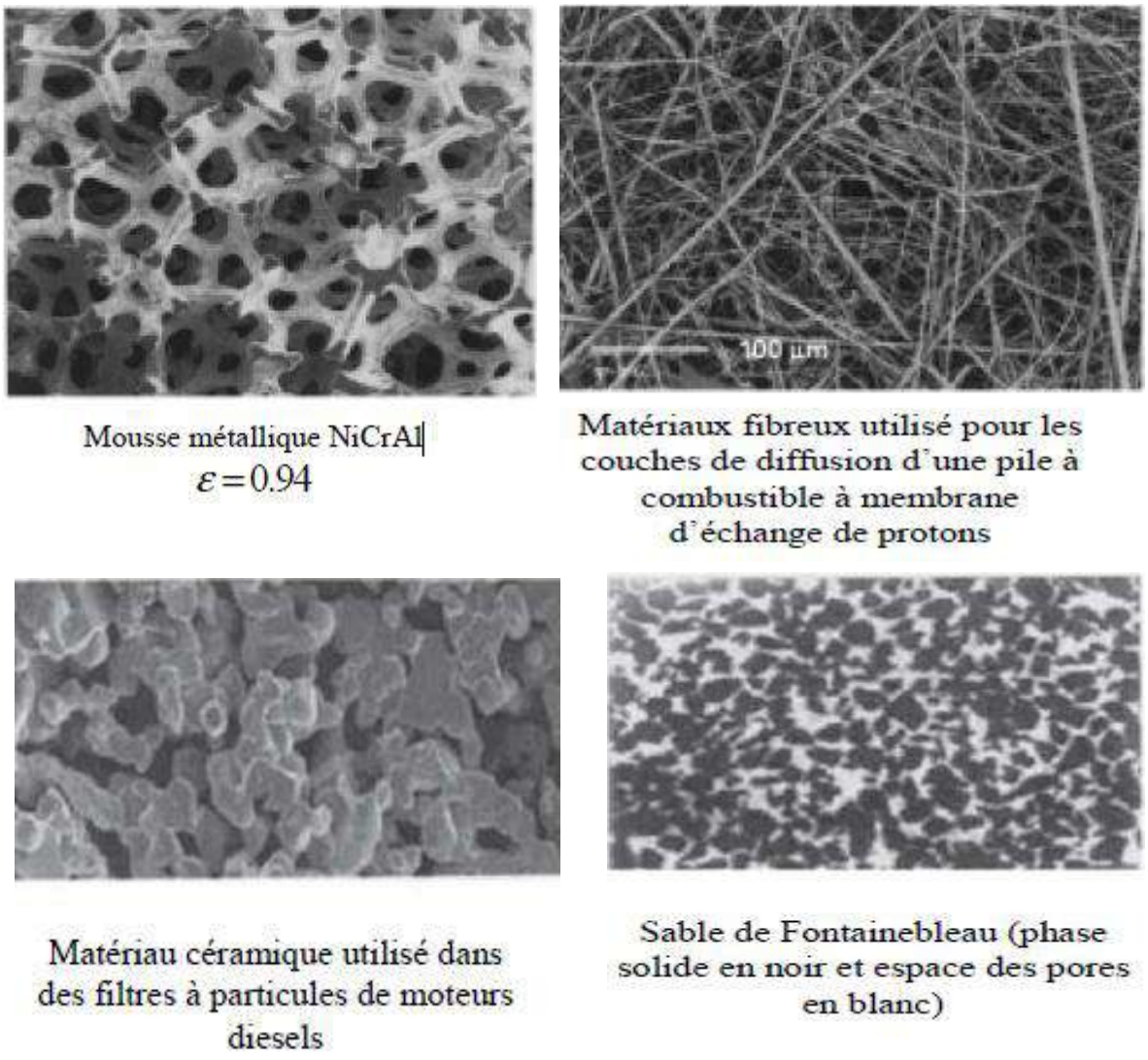


Figure I.1 : **Exemples de milieux poreux (Bories et al. (2010))**

La phase solide d'un milieu poreux peut se présenter sous deux formes différentes, ainsi on distingue deux types de milieux poreux :

- **milieu poreux non consolidés :**

Un milieu poreux est dit non consolidés si sa phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, solide, limons, billes de verre… etc.).

- **milieu poreux consolidés :**

  Dans ce genre de milieu poreux la matrice est compacte, et formée de grains cimentés (calcaire, grés,…etc.).[2]

I.2.2. Objectif du milieu poreux :

Un milieu poreux est un milieu se composant d'une matrice solide et de son complément géométrique, l'espace poreux, ce dernier pouvant peut être occupé par un ou plusieurs fluides, sous une ou plusieurs phases. Les milieux poreux sont omniprésents dans notre environnement naturel comme dans les systèmes technologiques et industriels.

Ce module vise à présenter dans sa généralité la "science des poreux ", à partir des champs d'application visés dans le domaine des sciences de la nature ou de la technologie, donnant une place importante aux méthodes d'investigation expérimentale, en incluant un éventail des phénomènes en jeu.

Il vise à faire intégrer la connaissance des poreux dans une culture scientifique générale. [4].

I.3.Quelques exemples des milieux poreux :

I.3.1.Milieux poreux naturels :

Dans la nature, les roches et les sols sont certainement les milieux poreux les plus exploites. L'étude géologique des sous-sols permet de classifier les différentes couches géologiques selon la perméabilité à un écoulement de fluide. Les couches d'argile constituent en général les parois imperméables de réservoirs naturels d'eau ou d'hydrocarbures. On nomme aquifère un réservoir qui non seulement contient de l'eau mais qui peut aussi être le lieu d'écoulement, par gravité ou par pompage. Les roches poreuses peuvent contenir également des hydrocarbures. C'est pourquoi la compréhension des écoulements multiphasiques est très importante pour l'industrie de l'extraction pétrolière. La porosité des roches est très variable selon les conditions de température et de pression lors de la formation et de l'évolution géologique.

I.3.2. Milieux poreux artificiels :

Lors de la fabrication des bétons et des ciments, une certaine porosité est nécessaire pour permettre un séchage lent et progressif et l'obtention d'un matériau robuste. Parfois, la porosité (fine) est complétée par un réseau de fractures qui fragilise le béton. La porosité d'un bon béton est comprise entre 6 et 10 %. Le contrôle de la porosité et de la structure

poreuse joue un grand rôle dans l'industrie du papier. Selon les méthodes de fabrication, on peut obtenir un papier filtre très absorbant avec une porosité de 80 %, ou au contraire un papier très (serre) et transparent (le papier calque) avec une porosité proche de 0. On a alors des pores de diamètres compris entre 0,2 à 4 µm.

Une méthode de réalisation de poreux de formes diverses est le frittage. Un empilement de grains en contact est chauffé de manière - à ce que les contacts entre grains fondent et réalisent une soudure. Le frittage peut se réaliser avec des grains en métal (bronze, cuivre par exemple), en plastique ou en verre. [1]

I.3.3.Milieux poreux isotropes :

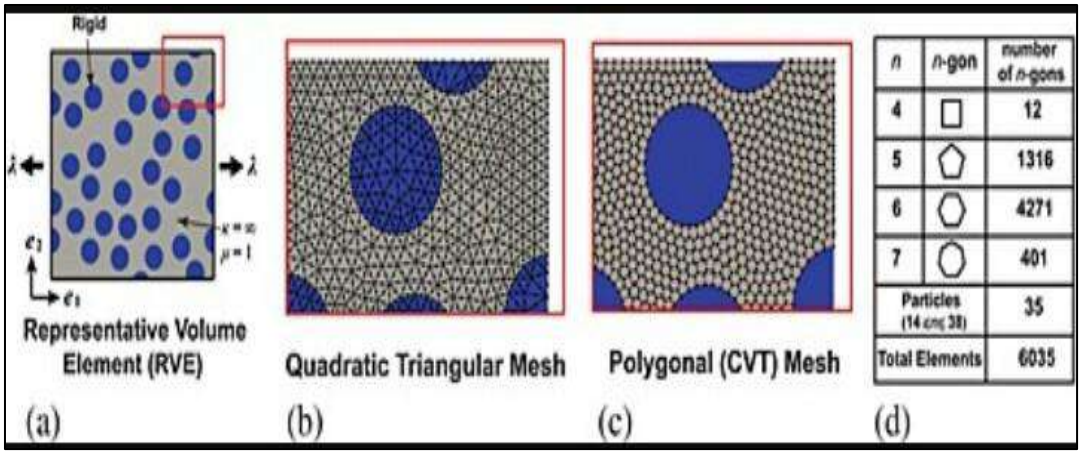
L'effet de l'inversion de la densité sur le transfert de chaleur dans un milieu poreux chauffé par le bas a été étudié expérimentalement par Yen [5]. Il a été démontré dans cette étude que le nombre Rayleigh critique, caractérisant le seuil de convection dépend essentiellement de deux paramètres adimensionnels identiques à ceux établis par S Les résultats prédits par la stabilité linéaire dans le travail de Sun et al. [6] ont été vérifiés numériquement par Blake et al. [7]. Ces derniers ont étudié le phénomène de la convection naturelle pour le cas d'une couche poreuse saturée par de l'eau froide et chauffée par le bas. L'influence du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur pour le cas de la convection d'amplitude finie a été également déterminée par ces auteurs. Un et al. [8]

I.3.4.Milieux poreux anisotropes :

En se basant sur le modèle de la convection anisotrope de Tyvand et Storesletten [9], Straughan et Walker [10] ont utilisé une forme quadratique de la relation entre la densité et la température pour résoudre le problème de la convection pénétrante. Un modèle mathématique a été développé en utilisant les analyses de stabilité linéaire et non linéaire (prédiction de la bifurcation sous-critique). Les résultats indiquent que la bifurcation obtenue en utilisant une forme quadratique pour relier la densité à la température est très différente de celle obtenue en utilisant une relation densité-température linéaire. Plus récemment Mahidjiba et al. [11] ont étudié le seuil de convection pour le cas d'une couche poreuse anisotrope saturée par l'eau au voisinage de 4 C^{o}. La méthode des éléments finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations linéaires de la stabilité. Les résultats obtenus relient le seuil du mouvement convectif au rapport de perméabilité K et au paramètre d'inversion γ.

I.4.Notion de volume élémentaire représentatif(V.E.R) :

Par analogie avec la notion de particule fluide, on définit pour les milieux poreux un volume élémentaire représentatif (V.E.R) contenant un grand nombre de cavités. les dimensions caractéristiques du volume élémentaire doivent satisfaire la double inégalité qui dicte que ses dimensions sont très grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores, mais très petites devant l'encombrement de la matrice solide [12].



FigureI.2 : volume élémentaire représentatif (V.E.R)

I.5.Equations générales de l'écoulement et du transport en milieu poreux :

I.5.1. L'hydrodynamique :

L'hydrodynamique d'un milieu poreux est régie d'une part par la loi de Darcy :

$$\vec{q} = -\overline{\overline{K}}\vec{\nabla}h \qquad \text{(I.1)}$$

Avec $\vec{q}$ le vecteur de vitesse unitaire [$L\cdot T^{-1}$], $\overline{\overline{K}}$ le tenseur de perméabilité [$L\cdot T^{-1}$] et$\vec{\nabla}h$ le gradient de charge [-], d'autre part par l'équation de continuité, issue du principe de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla}.\vec{q} + s\frac{\partial h}{\partial t} = f \qquad \text{(I.2)}$$

Avec s le coefficient d'emmagasinement spécifique [L^{-1}], h la charge hydraulique [L] et f le terme puits-source [T^{-1}]. L'équation de diffusivité est obtenue, pour un fluide

incompressible de masse volumique et de viscosité dynamique constante, en associant ces deux équations :

$$\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{K}}\vec{\nabla}h\right) + f = s\frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{(I.3)}$$

Les conditions aux limites permettant d'intégrer cette équation sont de trois types :

- Conditions de Dirichlet, la charge est imposée.
- Conditions de Neumann, le flux est imposé.
- Conditions de Cauchy ou conditions mixtes, le flux est imposé en fonction de la charge.

I.5.2. Le transfert de masse :

L'écoulement décrit ci-dessus entraîne des éléments en solution dans le mouvement moyen du fluide qui se déplace : c'est l'advection. L'équation qui régit ce phénomène est obtenue en appliquant le principe de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{D}}\vec{\nabla}C.C\vec{U}\right) = \frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{(I.4)}$$

Les conditions aux limites sont du même type que pour l'écoulement. L'intégration de ces équations implique souvent d'avoir une valeur unique pour les paramètres tels que la porosité, la perméabilité et la dispersive et ce soit à l'échelle du domaine dans le cas d'une solution analytique, soit à l'échelle d'une maille dans le cas d'une modélisation numérique. L'échelle considérée et la notion de paramètres équivalents prennent alors toute leur importance. [13]

I.6.Propriétés structurales et thermo-physique d'un milieu poreux :

I.6.1.Porosité :

La porosité d'un milieu poreux notée Ɛ, est la fraction du volume moyen de milieu poreux occupé par les espaces vides .L'espace vide est égale au rapport du volume totale du milieu poreux V duquel on soustrait le volume de la matrice solide V_S par le volume total de milieu poreux V_S.

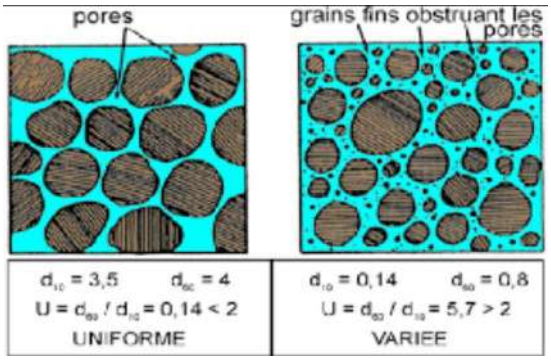


Figure I.3 : les deux types de porosité

$$\varepsilon = \frac{V_T - V_S}{V_T} \quad (I.5)$$

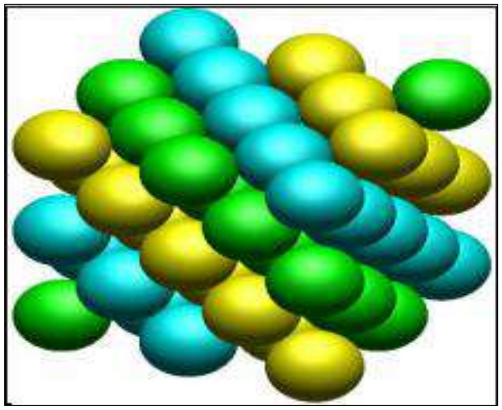
En autre on distingue plusieurs définitions de la porosité selon les littératures et les académies.

Tableau I. 1 : valeur moyennes de porosité de quelques matériaux. [14]

SUBSTANCE	POROSITE
Matériau mousseux	0 .98
Fibre de verre	0.88_0.93
Fil à tisser	0.68_076
Grain de silice	0.65
Poudre d'ardoise noire	0.57_0.66
Cuir	0.65_0.59
Terre	0.43_0.54
Sable	0.37_0.70
Empilement de sphères	0.36_0.43
Filtre à cigarette	0.17_0.49
Brique	0.16_0.34

I.6.2.Perméabilité :

La perméabilité K d'un milieu poreux dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. L'unité de la perméabilité K est le Darcy (1 Darcy est la perméabilité d'un milieu poreux de $1cm^2$ de section, 1cm de longueur, soumis à une différence de pression de 1 bar et traversé par un fluide dont la vitesse de filtration est 1 / cm s) 1 Darcy = $9.87x10^{-9}m^2$.



FigureI.4 : Exemple de géométrie Kozeny-Carman

La valeur de la perméabilité est généralement déterminée expérimentalement. Plusieurs modèles empiriques ont été proposées. On rappelle notamment :

- La relation de Kozeny-Carman (1927) pour un milieu poreux consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple:

$$K = \frac{d^2\varepsilon^3}{36C_0(1-\varepsilon)^2} \quad (I.6)$$

-Quand on modélise la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles, l'expression de la perméabilité est :

$$K = \varepsilon^2 \frac{d^2}{32} \quad (I.7)$$

Où $\varepsilon = n\pi d^2/4$ et n le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens d'écoulement et d le diamètre des capillaires [15].

Tableau I.2 : les valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux. O. Reynolds et Dullien [16]

SUBSTANCE	PERMEABILITE
Briques	$4.8\ 10^{-15}$ à $2.2\ 10^{-13}$
Cuir	$9.5\ 10^{-14}$ à $1.2\ 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$8.9\ 10^{-14}$ à $1.2\ 10^{-13}$
Terre	$2.9\ 10^{-13}$ à$1.4\ 10^{-11}$
Fibre de verre	$2.4\ 10^{-11}$ à $5.1\ 10^{-11}$
Sable	$2.0\ 10^{-11}$ à $1.8\ 10^{-08}$
Fibre à tisser	$3.8\ 10^{-09}$ à $1.0\ 10\ -10^{-08}$
Cigarette	1.0 à10^{-09}

I.6.3. Tortuosité :

Dans un milieu poreux formé d'un empilement de grains, la vitesse réelle locale du fluide n'est pas tout à fait parallèle à la direction moyenne de l'écoulement du fait des

obstacles constitués par la phase solide .Le trajet suivi par un filet fluide est $\mathbf{L_m}$< **L** ou **L**est la longueur du milieu poreux.

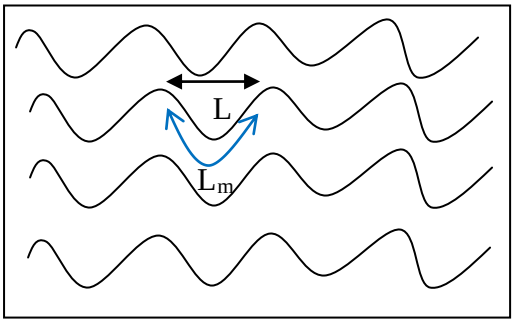


Figure I.5 : définition schématique de la tortuosité

On appelle tortuosité le rapport entre la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide et la longueur de l'échantillon.

Dans le cas des milieux poreux constitués d'empilement de particules sphériques, la tortuosité varie pue et reste sensiblement égale à π/2. [17].

I.6.4.Conductivité thermique effective :

Les phases fluides et solides en présence dans le milieu poreux contribuent généralement, avec des proportions différentes, au mode de conduction. De ce fait, la modélisation de transfert de chaleur à traverse les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion et des conductivités thermiques effectives. Cette dernière est fortement dépendante de la porosité et des conductivités thermiques des phases solides et fluides de la matrice poreuse. D'une manière générale les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles en série et parallèle basés sur l'analogie électrique. [18]

I.6.4.1.Modèle série :

Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solides et fluides. La résistance thermique du fluide est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases.

$$\frac{1}{k_{ff}} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{(1+\varepsilon)}{k_s} \qquad (I.8)$$

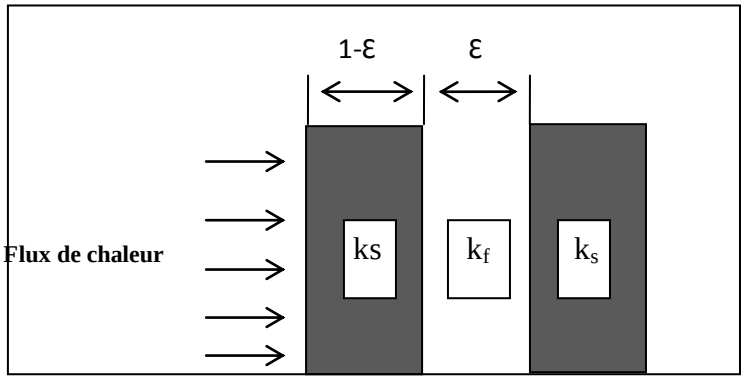


Figure I.6 : modèle série de la conductivité thermique effective

I.6.4.2.Modèle parallèle :

Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse les deux phases fluide et solide en même temps. La conductivité thermique effective est alors la somme pondérée des taux d'occupation d'espace conductivité phasiques. [17]

$$k_{eff} = \varepsilon . k_f + (1 - \varepsilon) k_s \qquad \text{(I.9)}$$

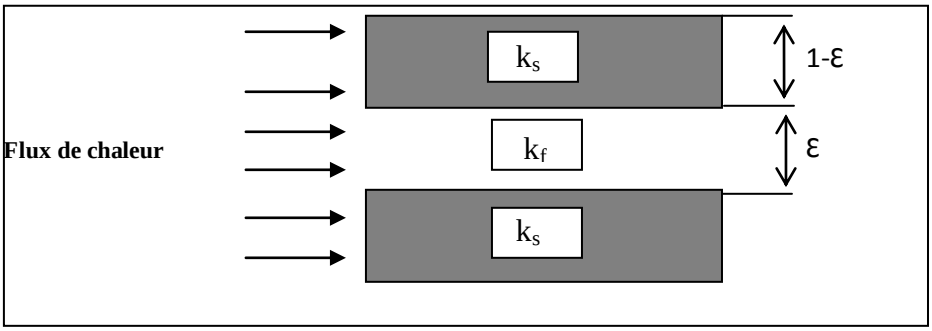


Figure I.7 : modèle parallèle de la conductivité thermique effective

I.6.5. Conductivité thermique équivalente :

La conductivité thermique équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En générale, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent. Pour plus de détail sur l'évaluation de la conductivité. [18].

I.7. Déférents types d'écoulement dans les milieux poreux :

Selon les phases en présence dans les pores, on peut distinguer trois types d'écoulements :

- Ecoulement ou le milieu poreux est saturé par une seule phase de fluide (gazeux ou liquide), tel que : sol complètement imbibé d'eau.
- Ecoulement ou plusieurs fluides miscibles ou non, coexistent dans le milieu poreux ; exemple : mélange eau-huile dans les roches pétrolières.
- Filtration ; exemple : liquide à travers un filtre qui arrête les particules solides.

I.8.Modèles d'écoulement en milieux poreux :

Les lois de l'écoulement en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'aux phénomènes à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées. [19]

I.8.1.La loi de darcy :

On considère dans cette section que le milieu poreux est totalement imbibe, C'est- à -dire que le volume des pores est entièrement rempli de fluide. L'étude fondatrice des écoulements dans les poreux a et e réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856 avec un ((Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon)). Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux.

La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse. Avec ces hypothèses, la vitesse moyenne de l'écoulement est

$$v_f = -\frac{k}{\mu}\frac{\Delta_p}{L} \qquad (I.10)$$

Avec (η) la viscosité dynamique du fluide, $\Delta_p/_L$ le gradient de pression appliqué à un échantillon de longueur L **(figure I.8),** et k la perméabilité du milieu poreux. Il est important de noter que ce paramètre est indépendant de la nature du fluide. Il ne dépend que de la structure du réseau de pores du matériau.

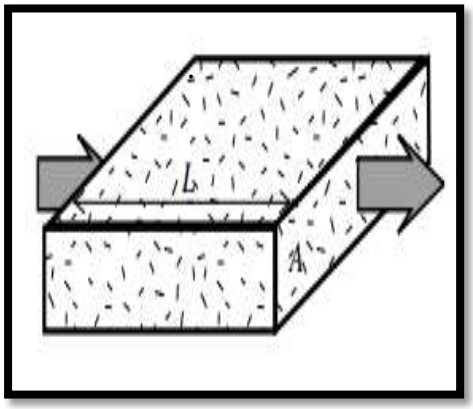


Figure I.8 : Bloc poreux soumis à un écoulement.

Nous nous attacherons dans la suite à relier cette perméabilité aux propriétés géométriques du matériau. Il ne faut pas confondre la vitesse de filtre et la vitesse du fluide dans les pores. En effet, la vitesse de filtre est bien une vitesse moyenne de l'écoulement, moyenne effectuée sur un volume comprenant une partie de solide immobile.

Par conséquent, la vitesse du fluide dans les pores, appelée vitesse interstitielle est

$$v_i = \frac{v_f}{\varepsilon} \qquad (I.11)$$

vitesse supérieure à la vitesse de filtre (car ε < 1). [20]

I.8.2.Formulation de forchheimer :

La formulation de Darcy-Forchheimer la plus couramment utilisée, pour décrire l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène et isotrope, en régime stationner et en présence de pesanteur, est la suivent :

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} V + \frac{b\rho}{\sqrt{k}} \qquad (I.12)$$

Ou ***b*** est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, appelé paramètre de forchheimer. Résultat de la prise de moyenne sous forte hypothèses. Cette formulation introduit un terme convectif qui exprime la contribution inertielle devenant importante avec les **(Re)** croissant. [19]

I.8.3.Modèle de Carman-Kozeny :

La description géométrique du milieu poreux est identique à celle du modèle des tubes tortueux. Mais on va chercher à exprimer la perméabilité en fonction de l'aire spécifique $\mathbf{A_S}$ plutôt qu'en fonction de la taille des pores **a**. [20]

Dans un échantillon de longueur **L** et de section **A** comprenant n pores tortueux par unité de surface (dans le plan perpendiculaire à l'écoulement), la surface de contact solide/ fluide est

$$S = (nA)(2\pi aL_e) \quad \text{(I.13)}$$

Et l'aire spécifique est $A_S = 2\pi na\tau$ (I.14)

Avec ces notations, la porosité est $\varepsilon = n\pi a^2\tau$ (I.15)

Et on a donc $A_s = \frac{2\varepsilon}{a}$ (I.16)

I.8.4 Equation de Brinkman :

Brinkman introduit en [21] un terme empirique de force de volume dans l'équation de Stokes modélisant la force exercée par le fluide en écoulement sur les particules :

$$\mu_{eff}\Delta\,\vec{v} - \vec{\nabla}\,P - \frac{\mu}{k_i}\,\vec{v} = 0 \quad \text{(I.17)}$$

μ_{eff} : viscosité effective

μ : viscosité dynamique du fluide

$\in$: Porosité du milieu

$\vec{v}$: vitesse moyenne de filtration

P : Pression

K_i: perméabilité du milieu

L'équation de Brinkman permet de décrire de manière continue le passage d'un écoulement de type Darcy à un écoulement du type Stokes. Lorsque le milieu est très poreux, la porosité tend vers 1 et la perméabilité est très grande, on retrouve ainsi l'équation de Stokes. Par contre, lorsque le milieu est faiblement poreux, la perméabilité est faible et le terme de

Darcy $\frac{\mu}{k_i}\vec{v}$ devient prépondérant devant le terme de diffusion $\mu_{eff}\Delta\,\vec{v}$, l'écoulement devient Darcéen. [21]

I.8.5.Approximation de Boussinesq :

L'approximation de Boussinesq est un moyen de résoudre l'écoulement non-isotherme, comme les problèmes de convection naturelle, sans avoir à résoudre la formulation complète compressible des équations de Navier-Stokes.

L'approximation de Boussinesq était une méthode populaire pour résoudre le flux non-isotherme, en particulier dans les années précédentes, car les coûts de calcul étaient plus faibles lors de la résolution de cette méthode et la convergence était plus susceptible d'être atteinte.

L'approximation est précise lorsque les variations de densité sont faibles car cela réduit la non-linéarité du problème. Il suppose que les variations de densité n'ont aucun effet sur le champ d'écoulement, sauf qu'elles entraînent des forces de flottabilité. En termes plus pratiques, cette approximation est habituellement utilisée pour modéliser les liquides autour de la température ambiante, de la ventilation naturelle dans les bâtiments ou de la dispersion de gaz dense dans les installations industrielles.

Alors que l'approximation de Boussinesq a été utilisée pour simplifier la mise en œuvre de certains solveurs CFD, son utilisation de nos jours devient de moins en moins courante. C'est parce que cela réduit seulement légèrement la non-linéarité du système et, avec les solveurs actuels et le matériel informatique, entraîne par conséquent une réduction marginale des coûts de calcul. Une plus grande différence de coût de calcul entre les équations de Navier-Stokes et l'approximation de Boussinesq peut indiquer que l'approximation de Boussinesq n'est pas valide.

I.8.5.1.Définition de l'approximation de Boussinesq :

Les équations de Navier-Stokes régissent le mouvement des fluides. Dans le cas général d'un fluide compressible, cela produit

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla_u\right) = -\nabla_p + \nabla.\left(\mu(\nabla_u + (\nabla_u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla.u)I\right) + \rho g \qquad \text{(I.18)}$$

Où u est la vitesse du fluide, p la pression du fluide, ρ la densité du fluide, μ la viscosité dynamique des fluides, I la matrice d'identité et g l'accélération due à la gravité.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues avec l'équation de continuité:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D_\rho}{D_t} + \nabla.u = 0 \qquad \text{(I.19)}$$

L'approximation de Boussinesq indique que la variation de densité est seulement importante dans le terme de flottabilité, ρg et peut être négligée dans le reste de l'équation. Cela produit

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla_u\right) = -\nabla p + \nabla.\left(\mu(\nabla_u + (\nabla_u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla.u)I\right) + \rho g \qquad \text{(I.20)}$$

Où la température et la densité dépendant de la pressionρ, ont été remplacées par une densité constante ρ_0 sauf dans le terme de force du corps représentant la force de flottabilité.

Sous l'approximation de Boussinesq, l'équation de continuité $\frac{1}{\rho}\frac{D_\rho}{D_t} + \nabla.u = 0$ Se réduit à la forme incompressible $+\nabla.u = 0$, car l'ampleur de $\frac{1}{\rho}\frac{D_\rho}{D_t}$ d'Est petit par rapport aux gradients de vitesse $\nabla.u$. Il s'ensuit que le terme $-\frac{2}{3}\mu(\nabla.u)I$ Dans les équations de Navier-Stokes est également égal à zéro. On suppose généralement que la viscosité μ , est constante. Le terme de diffusion $\nabla.(\mu(\nabla_u + (\nabla_u)^T))$ Peut donc être réécrit$\mu\nabla^2\mu$ quant au rendement:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla_u\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mu + \rho g \qquad \text{(I.21)}$$

Le terme de flottabilité u peut-être réécrit$(\rho_0 + \nabla\rho)g$ comme, où $\nabla\rho = \rho - \rho_0$ représente la variation de densité par rapport à la densité de référenceρ_0. Cela cède:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla_u\right) = -\nabla pp + \mu\nabla^2\mu + (\rho_0 + \nabla\rho)g \qquad \text{(I.22)}$$

Pour éviter d'avoir à évaluer la densité de fluide en fonction de la température et de la concentration locale, le terme de flottabilité $\nabla\rho g = (\rho - \rho_0)g$ Peut également être réécrit comme :

$$(\rho - \rho_0)g = -\rho_0[\beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0)]g \qquad \text{(I.23)}$$

où β_T et β_S sont des coefficients d'expansion thermique et soluatle de fluide

Les paramètres apparaissant dans les équations sont définis dans la nomenclature conditions aux limites adimensionnelles :

Pour : $Y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ $U = V = 0$ et

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \ , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 \tag{I.24}$$

Pour $Y = 1$ et $0 \leq x \leq 1$ $U = V = 0$ et

$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial Y} = 0$

Pour : $X = 0$ et $0 \leq Y \leq 1$ $U = V = 0$

$$\theta = 1/2 \quad S = 1/2 \tag{I.25}$$

Pour : $X = 1$ et $0 \leq Y \leq 1$ $U = V = 0$

$\theta = -1/2$ $S = -1/2$

I.8.6.Modèle générale :

On généralité les trois dernières équations en introduisant un terme transitoire et le terme convectif (V∇) V ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2}(V\nabla)V = \nabla P + \rho g - \frac{\mu}{k}V + \frac{b_\rho}{\sqrt{k}}|V|V + \mu_{eff}\nabla^2 V \tag{I.26}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Navier Stokes issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide. Il faut également noter que la complexité d'un écoulement en milieu poreux peut être le résultat des effets d'inertie et de viscosité, et d'une variation importante de la porosité au niveau des parois. [19].

I.9.Conclusion :

Ce chapitre a fait l'objet des définition des principales caractéristiques des milieux poreux ainsi que des différents nombres régissant l'écoulement du fluide dans ces milieux.

Ces définitions ont permis à de nombreux auteurs d'effectuer plusieurs études traitant de différentes géométries avec une variété de conditions aux limites.

Chapitre II: phénomène de transfert

LES PHENOMENES DE TRANSFERT

II.1.Introduction :

La thermodynamique nous apprend que l'énergie peut être transférée à partir d'interactions entre le système et son environnement, sous forme de chaleur et de travail. Cependant, la thermodynamique ne se préoccupe que de l'état initial et de l'état final du système à l'équilibre, et ne fournit aucune information sur la nature des interactions mises en jeu et sur l'évolution temporelle du système entre les deux états d'équilibre.

Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace. Le but de l'analyse des transferts de chaleur est d'identifier quels sont les modes de transfert mis en jeu au cours de la transformation et de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps. [22].

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. [23].

Les 3 modes de transfert de Chaleur sont :

- La conduction
- La convection
- Le rayonnement

II.2. Les modes de transferts de chaleur:

II.2.1.Transferts de chaleur par conduction :

La conduction est le mode de transfert de chaleur existant dans un milieu donné sans qu'il y ait déplacement apparent de matière .C'est ce qui se passe en particulier dans un milieu solide homogène (métal, paroi …), mais qui a lieu les fluides immobiles.

La conduction ne peu exister que s'il existe des écarte de température c'est-à-dire si le gradient n'est pas nul .Dans le cas contraire le milieu est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Pour que ce gradient de températures données aux limites du système. [24]

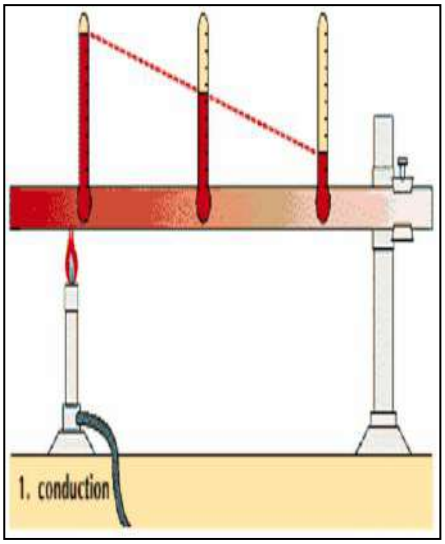


Figure II.1 : transfert de chaleur par conduction

II.2.2.Transferts de chaleur par convection :

On appelle convection un transfert thermique consécutif à un déplacement de matière. On ne peut donc envisager la convection que lorsqu'un fluide est présent. Elle se produit `a la surface d'un solide avec comme fluide de convection un liquide ou un gaz, ou bien encore `a la surface d'un liquide avec comme fluide de convection un gaz. L'abaissement de la température et le gel d'un lac en hiver est essentiellement un effet de convection de l'air froid qui balaye la surface du lac.

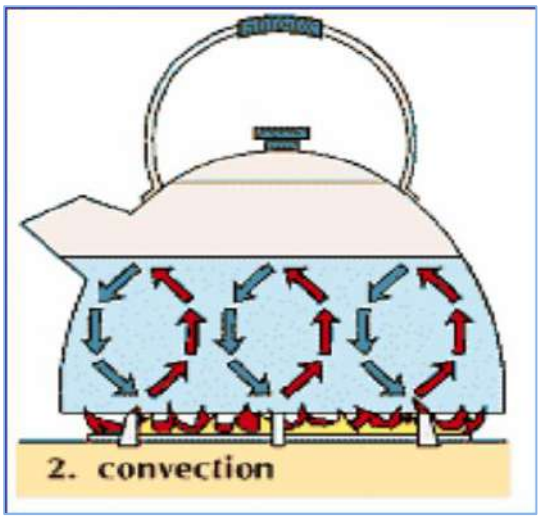


Figure II.2 : Transfert de chaleur

On peut décrire la convection en deux phases : tout d'abord `a l'interface solide-fluide il y a, comme dans le cas de la conduction thermique, transmission répartition de l'´energie cinétique d'agitation thermique. La conséquence est alors des inhomogénéités de température

au sein du fluide et par conséquent des inhomogénéités de masse volumique. Le fluide présentera des zones plus ou moins denses en particules.

Ces inhomogénéités en densité de particules vont entrainer des déplacements de matière des zones les plus denses vers les moins denses donc des zones froides vers les zones chaudes. Si le solide est `a une température plus élevée que le fluide, il y aura remplacement progressif des parties du fluide en contact avec le solide par du fluide froid qui `a son tour recevra de l'´energie de la part du solide. Ceci durera jusqu'`a ce qu'il y ait homogénéisation de la température. [25]

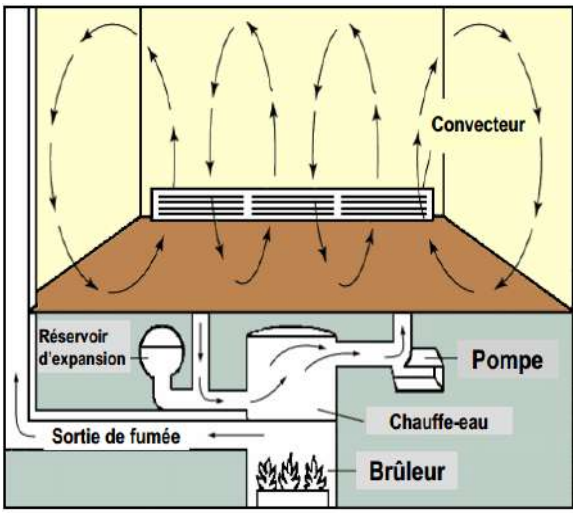


Figure II.3 : Exemple de Chauffage par convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte le fluide et l'énergie. L'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de température, on dit que la **convection est naturelle** ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé **convection forcée**.

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide au moyen de l'équation :

$$P = hS(T_1 - T_2) \qquad \text{(II.1)}$$

Sous cette forme, l'équation de la convection semble être tout à fait simple. En réalité, il n'en est rien, car l'Eq. Est une définition de l'unité de conductance thermique moyenne par convection plutôt qu'une loi de transmission de la chaleur par convection. Le coefficient d'échange de chaleur par convection est, en effet, une fonction l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système. Sa valeur numérique n'est généralement pas uniforme sur une surface et elle dépend également du lieu où on mesure la température. [26]

II.2.2.1.Convection en milieu poreux :

Nous considérons dans cette étude, la matrice poreuse est supposée solide, perméable, homogène, isotrope et saturée par un fluide binaire non newtonien. Les équations relatives aux flux de chaleur et de la matière en présence de gradients thermique et solutale sont données par DeGroot et Mazur (1969):

$$\vec{Q}' = -k_f \nabla T' \qquad \text{(II.2)}$$

$$\vec{j}' = -\rho D_m \nabla S' - a\rho D' S_0 (1 - S_0') \nabla T' \qquad \text{(II.3)}$$

Où D_m est la diffusivité massique de la concentration dans la matrice poreuse saturée, *D*'étant le coefficient d'effet Sorte et *a* un coefficient qui vaut 0 pour la double diffusion ou 1 pour la convection induite par l'effet Sorte, i.e. la séparation massique due au gradient de température.

II.2.2.2.La convection naturelle :

La convection naturelle est un phénomène important de la mécanique des fluides. Elle est généralement due à des variations de la masse volumique causées par une distribution non uniforme de la température et/ou de la concentration des espèces dans un mélange.

Pour cette raison on parle soit de convection thermique et/ou de convection d'origine solutale. Les gradients de température et de concentration peuvent agir selon le cas, ensemble ou en opposition, donnant ainsi naissance à des comportements dynamiques intéressants. Deux variantes sont possibles : pour la convection thermosolutale, les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposés sur les frontières du système, tandis que dans le problème de Sorte, le gradient de concentration et induit par le gradient thermique. Ce dernier phénomène est connu sous le nom de l'effet Sorte (1880). [27]

La convection naturelle dans des milieux poreux saturés par un mélange binaire est importante dans les nombreux problèmes naturels et industriels. Ces applications comprennent la pollution des eaux souterraines, les systèmes géothermiques, la production de pétrole brut, le stockage de l'énergie, etc. Une revue exhaustive de la convection naturelle due à la chaleur combinée et solutale forces motrices a été menée par Ingham et Pop [28], Nield et Bejan [29] et Vadász [30]. Des études passées sur le problème d'instabilité convective dans un Couche saturée d'un fluide binaire ont été conduites dans deux configurations géométriques différentes. Une grande partie dès Les travaux sur ce thème concernent la configuration classique de Bénard, à savoir le problème de l'apparition de la convection dans une couche poreuse horizontale chauffée et salée d'en bas [31-32].

II.2.2.2.1.Les équations de la convection naturelle :

En prenant

$$T_m = \frac{1}{2}(T_P - T_\infty) \qquad \text{(II.4)}$$

On obtient la loi générale suivante :

$$Nu = a(Gr.Pr)^n = Ra^n \qquad \text{(II.5)}$$

Avec Ra = Gr • Pr Ra étant le nombre de Rayleigh avec :

Tableau II.1 : les valeurs de a et n. [26]

Gr•Pr	A	N
de 10^{-3} à 5 10^{2}	1.18	1/8
de 5 10^{2} à 2 10^{7}	0.54	¼
de 2 10^{7} à 10^{13}	0.135	1/3

II.2.2.3.La convection forcée :

Le phénomène de convection forcée dans une cavité annulaire verticale a de nombreuses applications dans de multiples domaines. Depuis peu, les travaux prennent en compte l'existence d'une cloison poreuse dans une cavité annulaire afin de mieux appréhender les transferts dans certains problèmes d'isolation thermique et de filtration massique.

Cette étude trouve son intérêt dans des systèmes d'applications très variés, notamment dans les systèmes de filtration par centrifugation des déchets toxiques d'origine industrielle ou biomédicale, la récupération d'énergie géothermique, la manipulation d'éléments de stockage isolés pour les besoins de l'industrie nucléaire, ainsi que pour le refroidissement des moteurs électriques et des systèmes tournants grâce à l'air ambiant humide.

Les travaux publiés ont concerné le transfert de chaleur dans des cavités annulaires renfermant uniquement du fluide ou remplies en totalité par un milieu poreux [33-34]. D'autre part, la convection forcée avec des transferts couplés de chaleur et de concentration dans des cavités contenant un fluide ou un milieu poreux saturé a été l'objet de travaux d'autres auteurs. [35-36]

II.2.2.4.Convection double-diffusive :

En convection double-diffusive, lorsque les forces de flottabilité thermique et solutale sont comparables et s'opposent à chacune Autre, une riche variété de phénomènes peuvent se produire (ici, le mot solutal se réfère à des effets de transfert de soluté ou de masse). Celles-ci Phénomènes incluent l'existence éventuelle de solutions multiples stationnaires et statiques pour un même ensemble de règles Des paramètres, des écoulements sous-critiques et oscillatoires, des ondes de déplacement et des schémas d'écoulement asymétriques (voir par exemple Nield [37], Taunton et al. [38], Mamou et al. [39] Et Mamou et Vasseur [40]).

Ces phénomènes convectifs sont causés par le fait Que les diffusivités thermique et solutale sont différentes les unes des autres, ce qui conduit à des échelles de temps différentes pour la chaleur Et le transfert de soluté. Par conséquent, les transferts de chaleur et de soluté peuvent se déphaser et provoquer la convection différente Phénomènes susmentionnés. La différence dans les échelles de temps peut également se produire lorsque le matériau solide du milieu poreux Est imperméable. Le transfert de chaleur est transféré à travers les régions fluide et solide. Cependant, le soluté est Transporté seulement par la région fluide par diffusion et convection. Ainsi, la porosité du milieu poreux peut Ont un fort effet sur le comportement d'écoulement transitoire à l'intérieur du milieu poreux, même lorsque les propriétés thermique et solutale Les diffusivités sont égales.

II.2.3.Evaluation de coefficient d'échange de chaleur par convection, (analyse dimensionnelle et détermination des groupes adimensionnels) :

Il existe quatre méthodes générales pour déterminer les coefficients d'échange de chaleur par convection :

1-L'analyse dimensionnelle combinée avec les expériences.

2- Les solutions mathématiques exactes des équations de la couche limite.

3-Les études approchées de la couche limite par les méthodes d'intégration.

4-L'analogie entre le transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement.

L'analyse dimensionnelle nécessite des calculs mathématiques simples, son champ d'application est le plus vaste. La principale restriction de cette méthode provient du fait que les résultats obtenus sont incomplets et tout à fait inutiles sans les données expérimentales. Elle contribue peu à notre compréhension du processus de transfert mais facilite l'interprétation et étend le domaine d'application des données expérimentales en les rassemblant suivant des groupes adimensionnels. Dans la pratique, les coefficients d'échange de chaleur par convection sont généralement calculés à partir des équations empiriques obtenues en établissant une corrélation entre les données expérimentales au moyen de l'analyse dimensionnelle. Pour appliquer l'analyse dimensionnelle il est indispensable de connaître au préalable les variables qui influencent le phénomène, et le succès ou l'échec de la méthode dépend du choix approprié de ces variables.

La première étape consiste à choisir un système de dimensions fondamentales. Celles-ci seront la longueur L, le temps T, la température θ et la masse M. A partir ces dimensions fondamentales toutes les autres grandeurs peuvent être définies. [26]

$$Q = mC\Delta \tag{II.6}$$

$$[J] = Nm = kgm^2s^{-2} \tag{II.7}$$

$$[Q] = ML^2T^{-2} \tag{II.8}$$

II.3.Transfert de chaleur par rayonnement :

Le rayonnement est un mode de transfert énergétique qui se distingue des deux précédents car il ne nécessite pas de support matériel comme la conduction et la convection. En effet, ce transfert d'énergie peut se produire dans le vide.

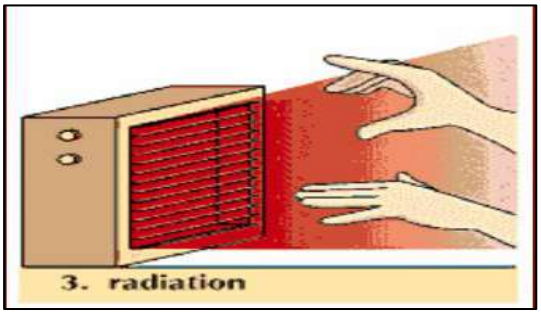


Figure II.4: Transfer de chaleur par rayonnement

Il correspond à la propagation d'une onde électromagnétique constituée par le couple (E, B). L'exemple le plus important pour nous est le rayonnement provenant du Soleil. ` A la propagation de l'onde est associée un transport d'´energie auquel nous sommes bien sensibles. Actuellement, le Soleil rayonne majoritairement Dans le visible et plus particulièrement dans le jaune autour de $\lambda = 0,5\ \mu m$. Lorsque les réactions de fusion nucléaire qui sont `à l'origine du rayonnement ne pourront plus entretenir les mouvements accélères des particules chargées, ni la présence de nombreux atomes dans des niveaux élèves d'énergie, le rayonnement solaire évoluera vers le rouge.

Ceci devrait se produire dans environ 5 milliards d'années selon certains modèles, le Soleil, alors, se dilatera et deviendra ce qu'on appelle une g´ rouge. Le rayonnement peut avoir des applications plus proches de nous : un feu dans une cheminée conduit `à l'obtention de braises incandescentes. Le rayonnement qu'elles émettent est compos´e d'une partie lumineuse `a dominante rouge mais aussi d'une grande partie d'infrarouges qui sont responsables de notre sensation de chaleur. Il en va de même lorsqu'on utilise un four de cuisine sur la position grill. Les résistances électriques rougissent et rayonnent alors beaucoup dans l'infrarouge. Nous ne retiendrons que le rayonnement thermique dépend fortement de la température de l'émetteur. [25]

Chapitre III : Formulation mathématique

FORMULATION MATHEMATIQUE

III.1.Définition du problème :

La recherche réalisée dans cette mémoire porte de façon générale sur la modélisation des écoulements et des transferts dans les milieux poreux. Pour réaliser une formulation simple du modèle mathématique décrivant le phénomène, nous considérons un milieu poreux saturé confiné dans une enceinte rectangulaire imperméable de largeur L et de hauteur H inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal (voir la figure III.1). La cavité est placée dans un champ de pesanteur uniforme est constant g. L'interaction entre la gravité et les gradients de température et de soluté donnent naissance à des mouvements convectifs. Les parois de la cavité sont soumises à des flux de chaleur q et de masse j par unité de surface. Les constantes α, β, γ et δ servent à contrôler l'intensité relative des flux. Leur valeur maximum est l'unité. Elles prennent la valeur zéro en l'absence de flux. L'originalité du problème consiste en la perturbation apportée par ces conditions à frontières transversales sur la solution. [41]

III.2.Hypothèses simplificatrices :

Afin de simplifier l'étude du problème, nous allons considérer les approximations suivantes :

- ✓ L'écoulement engendré est supposé laminaire et incompressible.
- ✓ Le travail des forces visqueuses et de pression ainsi que les échanges thermiques par rayonnement sont négligeables.
- ✓ Il n'y a ni source de chaleur ou de masse ni réaction chimique.
- ✓ Le gradient de température induit par le gradient de concentration, connu sous le nom d'effet Dufour, est supposé négligeable.
- ✓ Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la T_0' et à la concentration S_0' de référence. Cependant, la masse volumique r dépend linéairement de la température et de la concentration. Elle varie selon 31 l'approximation de Boussinesq [Gray and Giorgini (1976)]. D'où son expression s'écrit :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_T'(T' - T_0') - \beta_S'(S' - S_0')] \qquad \text{(III.1)}$$

Où T ' et S ' représentent respectivement la température et la concentration du fluide en un point du système. T_0', S_0' et ρ_0 représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence. Dans la relation (III.1), β_T' et β_S' sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutale. Ils sont définis par :

$$\beta'_T = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{P'S'} : \beta'_S = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{P'T'} \quad \text{(III.2)}$$

En général, β'_T est positif à température et pression ordinaires, à l'exception de l'eau en dessous de 4°C, tandis que β'_S peut être négatif ou positif selon le soluté considéré. À titre d'exemple, dans le cas où l'eau est considérée comme un solvant et le sel comme un soluté, le coefficient β'_S est négatif car le sel contribue à l'augmentation de la densité de l'eau. Par contre, dans le cas d'un mélange air-vapeur d'eau, le coefficient β'_Sest positif car l'air humide est moins dense que celui de l'air sec.

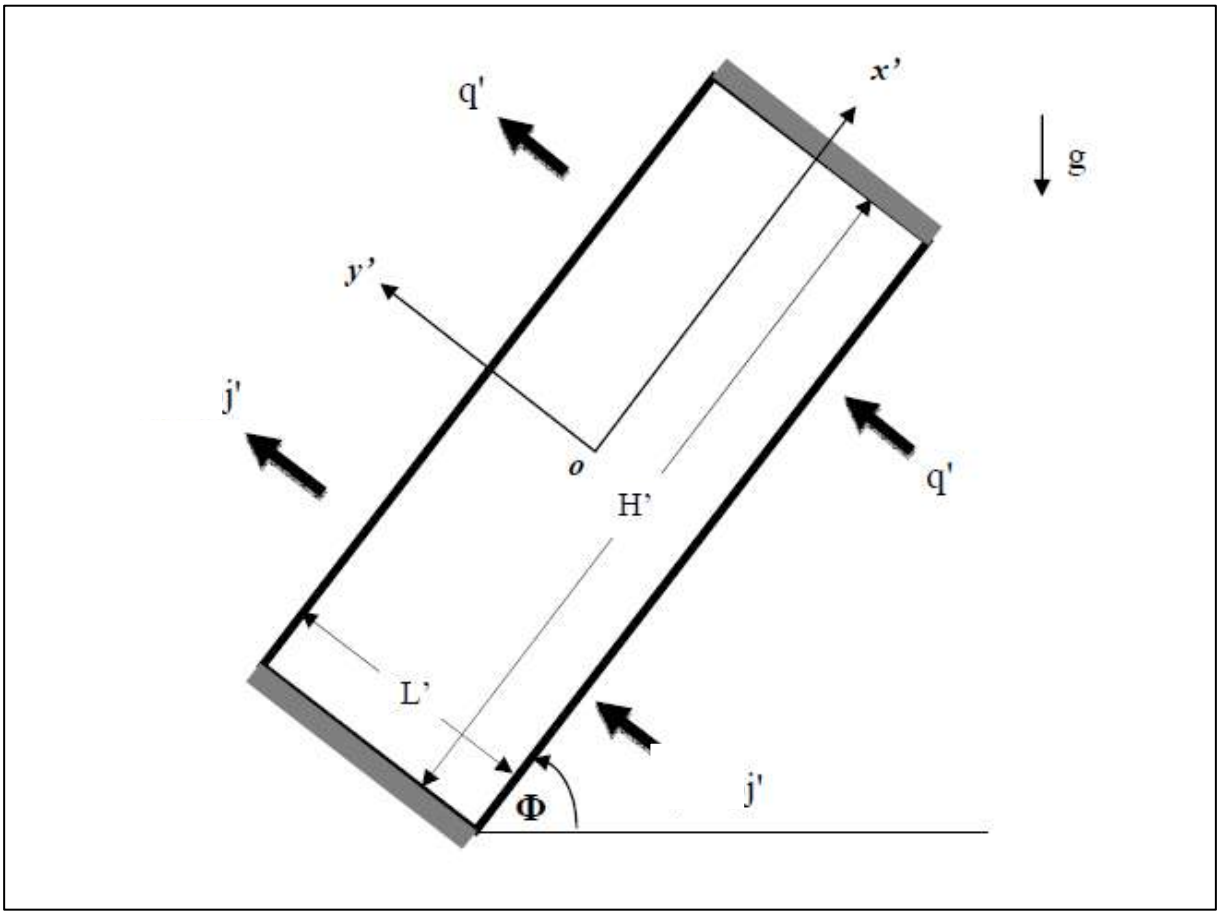


Figure III.1 : Représentation schématique du problème

III.3.Modèles physique et mathématique :

Pour la formulation mathématique du problème, nous considérons d'abord le cas du milieu poreux ensuite nous examinerons celui du milieu fluide.

III.3.1.Convection en milieu poreux :

Nous considérons dans cette étude, la matrice poreuse est supposée solide, perméable, homogène, isotrope et saturée par un fluide binaire non newtonien. Les équations relatives aux flux de chaleur et de la matière en présence de gradients thermique et solutale sont données par DeGroot et Mazur (1969):

$$\overrightarrow{Q'} = -k_f \nabla T' \qquad \vec{J}' = -\rho D_m \nabla S' \tag{III.3}$$

Où D_m est la diffusivité massique de la concentration dans la matrice poreuse saturée, D' étant le coefficient d'effet Soret et a un coefficient qui vaut 0 pour la double diffusion ou 1 pour la convection induite par l'effet Soret, i.e. la séparation massique due au gradient de température.

III.3.2.Équation de continuité :

En considérant l'hypothèse d'un fluide incompressible, le principe de la conservation de la masse mène à l'équation de continuité pour un écoulement à deux-dimensions d'un fluide incompressible, à savoir :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u'}}{\partial \boldsymbol{x'}} + \frac{\partial \boldsymbol{v'}}{\partial \boldsymbol{y'}} = \mathbf{0} \tag{III.4}$$

Les composantes $\boldsymbol{u'}$ et $\boldsymbol{v'}$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} et\ v' = \frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \tag{III.5}$$

Où $\boldsymbol{\Psi'}$ représente la fonction de courant.

III.3.3.Equation de conservation de quantité de mouvement :

Dans le domaine de la modélisation des écoulements dans les milieux poreux, le modèle de Darcy compte de nos jours parmi le plus utilisé [Nield et Bejan (1999)]. Dans ce modèle on néglige l'effet des forces d'inertie et visqueuses (connues sous les noms de termes de Forchheimer et de Brinkmann). Pour que la validation de la loi de Darcy, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\varepsilon \leq 0.8;\ Da = \frac{K}{L^2} \leq 10^{-6};\quad Re = \frac{\nabla \sqrt{K}}{V} < 1 \tag{III.6}$$

Où ε représente la porosité du milieu poreux, *K*, la perméabilité, *Da*, le nombre de Darcy, *Re*, le nombre de Reynolds, $\bar{V}$, la vitesse moyenne de filtration des particules fluides à travers la matrice solide et ν la viscosité cinématique du fluide.

Dans notre étude, ce modèle est adopté. La vitesse d'infiltration est donnée par :

$$\vec{V}' = -\frac{K}{\mu_a'}\left(\nabla'\vec{p'} + \rho\vec{g}\right) \quad \text{(III.7)}$$

En tenant compte des composantes de la gravité $\vec{g}$ et l'approximation de Boussinesq (III.1), les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$\mathrm{u}' = -\frac{\mathrm{K}}{\mu_a'}\left[\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x'} + \rho_0 \mathrm{g}\{1 - \beta'_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}' - \mathrm{T}'_0) + \beta'_{\mathrm{s}}(\mathrm{S}' - \mathrm{S}'_0)\cos\phi\}\right] \quad \text{(III.8)}$$

$$\mathrm{v}' = -\frac{\mathrm{K}}{\mu_a'}\left[\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y'} + \rho_0 \mathrm{g}\{1 - \beta'_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}' - \mathrm{T}'_0) + \beta'_{\mathrm{s}}(\mathrm{S}' - \mathrm{S}'_0)\sin\phi\}\right] \quad \text{(III.9)}$$

Où p est la pression locale, μ_a' la viscosité apparente et Φ l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale.

L'équation de la fonction de courant peut donc s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2\Psi' = -\frac{1}{\mu_a'}\left(u'\frac{\partial \mu_a'}{\partial y'} - v'\frac{\partial \mu_a'}{\partial x'}\right) + K\rho_0 g\beta'_T\left[\left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{\beta'_S}{\beta'_T}\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)\cos\phi - \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} + \frac{\beta'_S}{\beta'_T}\frac{\partial S'}{\partial y'}\right)\sin\phi\right] \quad \text{(III.10)}$$

III.3.4.Equation d'énergie :

Le premier principe de la thermodynamique permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergie mises en jeu dans le milieu poreux. En supposant que l'équilibre thermique local est atteint $\left(T'_s = T'_f = T'\right)$, où T'_s et T'_f représentent respectivement la température de la phase solide et fluide et en tenant compte de la non existence de transfert de chaleur entre elles, l'équation de l'énergie s'écrit comme suit :

$$(\rho C)_m \frac{\partial T'}{\partial t} + (\rho C)_f\left(u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + v'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right) = K_m\nabla'^2 T' \quad \text{(III.11)}$$

Où $(\rho C)_m$ et $(\rho C)_f$ représentent respectivement la capacité calorifique du fluide et celle du milieu poreux saturé et K_m , la conductivité thermique de la matrice poreuse saturée.

III.3.5.Equation de conservation de la masse :

Le principe de conservation de la masse s'écrit

$$\phi\frac{\partial S\prime}{\partial t\prime} + u'\frac{\partial S\prime}{\partial x'} + v'\frac{\partial S\prime}{\partial y'} = D_m\nabla'^2 S' \quad \text{(III.12)}$$

Où *a* un coefficient qui vaut 0 pour la double diffusion ou 1 pour la convection induite par l'effet Soret.

III.4. Conditions aux frontières :

Les équations de base décrites précédemment sont résolues en tenant compte des conditions aux frontières spécifiques à notre problème. Elles sont les suivantes :

III.4.1.Conditions aux frontières hydrodynamiques :

La condition d'imperméabilité imposée sur les frontières de la cavité se traduit par:

$$x' = \pm\frac{H\prime}{2} \;\; \Psi' = 0 \; ; y' = \pm\frac{L\prime}{2} \; ; \;\; \Psi' = 0 \qquad \text{(III.13)}$$

III.4.2.Conditions aux frontières thermiques et massiques :

Les conditions thermiques et massiques sur les parois actives sont exprimées par le biais des lois de Fourrier et Fick, à savoir:

$$x' = \pm\frac{H\prime}{2} \; ; \;\; \frac{\partial T\prime}{\partial x\prime} = 0; \;\; \frac{\partial S\prime}{\partial y\prime} = 0$$

$$y = \pm\frac{L\prime}{2} \; ; \frac{\partial T'}{\partial y'} = -\frac{q\prime}{K_m} \; ; \frac{\partial S'}{\partial y'} = -\frac{j'}{\rho D_m} \qquad \text{(III.14)}$$

III.5.Equations adimensionnelles :

Pour mettre les équations précédentes sous une forme adimensionnelle, nous introduisons des variables caractéristiques du problème. La dimension L' de la cavité a été choisie comme longueur de référence. La diffusivité thermique α a été utilisée pour adimensionné la vitesse et la fonction du courant. La température et la concentration sont

Adimensionnées respectivement par rapport aux écarts de température $\Delta T'$ et de concentration $\Delta S'$ entre les deux parois actives de la cavité. Les variables adimensionnelles utilisées sont donc les suivantes:

$$(x, y) = (x', y')/L' \qquad (u, v) = (u, v)L'/\alpha_m \quad t = t'\alpha_m/(\sigma L'^2)$$

$$\Psi = \frac{\Psi'}{\alpha_m}; \qquad T = \frac{(T'-T'_0)}{\Delta T'}; \quad \Delta T' = q'L'/k_m \qquad \text{(III.15)}$$

$$S = (S' - S'_0)/\Delta S' \;\; , \Delta S' = j'/\rho D_m$$

En introduisant les variables sans dimensions (III.15) dans les équations (III.10), (III.16), (III.18), nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\nabla^2\Psi = -R_T\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varphi\frac{\partial S}{\partial x}\right)\cos\Phi + \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \varphi\frac{\partial S}{\partial y}\right)\sin\Phi\right] \qquad \text{(III.16)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \qquad \text{(III.17)}$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = Le^{-1}(\nabla^2 S) \qquad \text{(III.18)}$$

Les conditions aux frontières sont données par:

$$x = \pm \frac{1}{2} \quad \Psi = 0 \; ; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

(III.19)

$$y = \pm \frac{1}{2} \quad \Psi = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = -1$$

Les paramètres apparaissant dans les équations sont définis dans la nomenclature conditions aux limites adimensionnelles :

Pour : $Y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ $U = V = 0$ et

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \; , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(I.20)}$$

Pour $Y = 1$ et $0 \leq x \leq 1$ $U = V = 0$ et

$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial Y} = 0$

Pour : $X = 0$ et $0 \leq Y \leq 1$ $U = V = 0$

$$\theta = 1/2 \quad S = 1/2 \qquad \text{(I.21)}$$

Pour : $X = 1$ et $0 \leq Y \leq 1$ $U = V = 0$

$$\theta = -1/2 \quad S = -1/2$$

Dans les équations (III.16)-(III.19), on note la présence de quatre nombres sans dimensions, à savoir le nombre de Rayleigh thermiqueR_T, le nombre de Lewis *Le*, le rapport des forces de volume N et la porosité normalisée ε.

$$R_T = \frac{K \rho_0 g \beta_T' \Delta T' (L'/\alpha_m)^n}{\varepsilon} \qquad N = \frac{\beta_s' \Delta S'}{\beta_T' \Delta T'} \qquad L_e = \frac{\alpha_m}{D_m} \qquad \text{(III.22)}$$

$$\varepsilon = \frac{\phi}{\sigma}$$

Les paramètres apparaissant dans les équations sont définis dans la nomenclature conditions aux limites adimensionnelles :

Pour : $Y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ $U = V = 0$ et

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \; , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(III.23)}$$

Pour $Y = 1$ et $0 \leq x \leq 1$ $U = V = 0$ et

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \ , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0$$

Pour : $X = 0$ et $0 \leq Y \leq 1$ $U = V = 0$

$\theta = 1/2$ $S = 1/2$ (III.24)

Pour : $X = 1$ et $0 \leq Y \leq 1$ $U = V = 0$

$\theta = -1/2$ $S = -1/2$

III.6.Transfert de chaleur et de masse :

L'étude du transfert de chaleur et de masse dans la cavité soumise à des flux constants, nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur et de masse, donnés par le biais des nombres de Nusselt et Sherwood, respectivement. Les valeurs de ces derniers sur les parois horizontales, évalués à $x = 0$, sont définies comme suit :

$$Nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{T(0,-1/2)-T(1,+1/2)} \ , \quad Sh = \frac{1}{\Delta S} = \frac{1}{S(0,-1/2)-S(0,-1/2)} \qquad \text{(III.25)}$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood le long de ces parois sont calculées par les intégrales suivantes :

$$Nu_m = \int_{-1/2}^{1/2} Nu dx \quad Sh_m = \int_{-1/2}^{1/2} Sh dx \qquad \text{(III.26)}$$

Ayant déterminé les équations gouvernantes le problème, ainsi que les conditions aux frontières, la prochaine étape consiste à les résoudre. Deux types d'approches seront utilisés à cette fin, à savoir :

• Une méthode analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, sera traitée dans le prochain chapitre.

• Une méthode numérique basée sur un schéma aux différences finies, complètement implicite, décrite dans le quatrième chapitre. Des trachées qui constituent un système très perfectionné les trachées ce sont des invaginations du tégument.

III.7.Conclusion :

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplification ainsi que les conditions aux limites appropriées.

Le travail qui fait l'objet de cette étude concerne justement la convection thermosolutal dans une cavité carrée incliné par un milieu poreux soit horizontalement ou

verticalement. Par une modélisation numérique, les résultats des calculs sont présent et commentes en termes de lignes de courant, des isothermes, des iso-concentrations et des transferts thermique moyens.

Chapitre IV : Méthode numérique

METHODE NUMERIQUE

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous utilisons une méthode numérique pour la résolution du système d'équations différentielles non-linéaires telles que présentées dans la solution analytique. La méthode proposée est basée sur la technique des différences finies. Cette méthode est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18^{eme} siècle par Euler, elle s'avère la plus adaptée et la plus facile à utiliser pour les problèmes à géométrie simple. Cette méthode consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini (voir Fig.IV.1)

Dans un repère cartésien, chaque nœud est désigné par le couple d'indices (i, j) désignant les lignes d'intersection du maillage. Les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire.

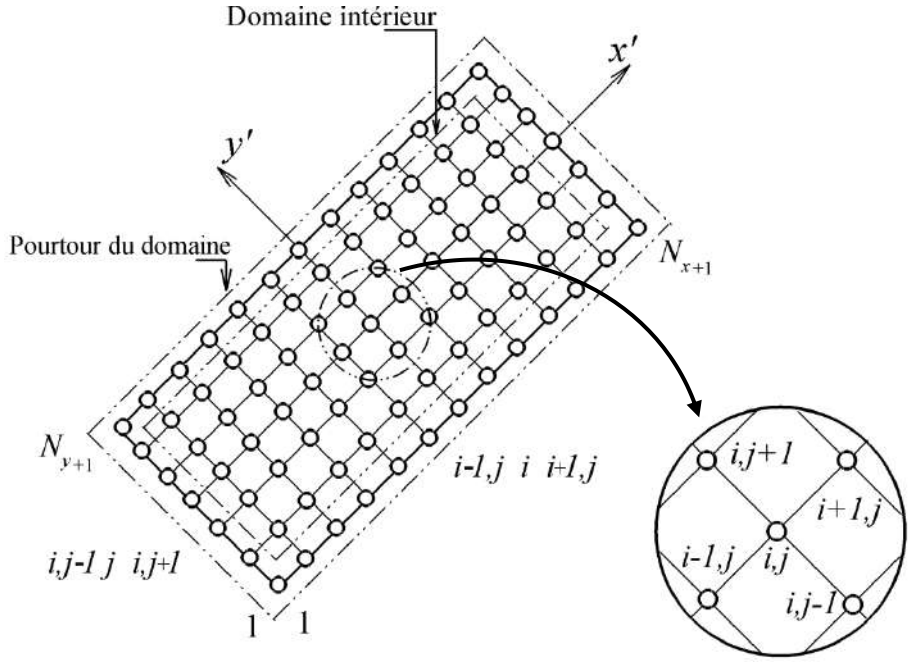


Figure IV.1 : Maillage du domaine de calcul en (*i, j*).

Les équations de l'énergie (III.11) et de la concentration (III.14) sont discrétisées avec un schéma centré de deuxième ordre et en utilisant la forme conservatrice pour les termes convectifs. Pour chaque pas de temps la méthode implicite aux directions alternées (ADI) donne lieu à deux systèmes matriciels tri-diagonaux à résoudre, l'un résultant de la discrétisation implicite en *x* et l'autre de la discrétisation implicite en *y*.

La méthode (ADI) divise le pas de temps en deux parties égales, dans le premier demi-pas de temps, le système est implicitement en *x* mais explicitement en *y* et dans le deuxième demi-pas de temps, le système est implicitement en *y* et explicitement en *x*. Pour chaque étape de temps, la solution est obtenue en balayant le domaine de calcul dans la direction des *x* puis dans celle des *y*. Connaissant les champs de la température et de la concentration à l'instant $(n+1)\Delta t$, l'étape suivante consiste à déterminer le champ de la fonction de courant à partir de l'équation (III.10), une fois discrétisée avec un schéma centré classique et résolue avec la méthode de sur-relaxation successive (SOR) par points proposée par Frankel (1950), qui est une méthode explicite donnant directement la valeur de Ψ à l'instant $(n+1)\Delta t$, au nœud considéré, moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait. La plupart des résultats numériques présentés ici ont été obtenus avec un maillage 200×200.

IV.2. Discrétisation des conditions aux frontières thermiques :

Les conditions aux frontières (III.15) et (III.16) sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche du deuxième ordre selon la paroi considérée :

IV.2.1.Selon les parois adiabatiques et imperméables : $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0$

$$T_{1,j} = \frac{4T_{2,j} - T_{3,j}}{3}, \qquad S_{1,j} = \frac{4S_{2,j} - S_{3,j}}{3} \qquad \text{à} \qquad x = \cdot \frac{1}{2} \tag{IV.1}$$

$$T_{Nx+1,j} = \frac{4T_{Nx,j} - T_{Nx-1,j}}{3}, \qquad S_{Nx+1,j} = \frac{4S_{Nx,j} - S_{Nx-1,j}}{3} \qquad \text{à} \qquad x = \frac{1}{2} \tag{IV.2}$$

IV.2.2.Selon les parois actives : $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = -1$

$$T_{i,1} = \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} + 2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y = -\frac{1}{2} \tag{IV.3}$$

$$T_{i,Ny+1} = \frac{4T_{i,Ny} - T_{i,Ny-1} - 2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y = \frac{1}{2} \tag{IV.4}$$

$$S_{i,1} = \frac{4S_{i,2} - S_{i,3} + 2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y = -\frac{1}{2} \tag{IV.5}$$

$$S_{i,Ny+1} = \frac{4S_{i,Ny} - S_{i,Ny-1} - 2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y = \frac{1}{2} \tag{IV.7}$$

IV.3. Discrétisation de l'équation d'énergie :

L'équation d'énergie étant parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions alternées ADI est choisie comme outil de résolution. Compte tenu de l'équation de l'énergie (III.11) cette dernière se réécrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{IV.8}$$

IV.3.1.Schéma implicite en *x* et explicite en *y* :

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps n pour les dérivées en y, chaque terme de l'équation (IV.4)-(IV.7) est discrétisé comme suit :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{IV.9}$$

$$\left.\frac{\partial (uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n} T_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^{n} T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial (vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n} T_{i,j+1}^{n} - v_{i,j-1}^{n} T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{IV.10}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial T}\right|_{i,j} = 2\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{IV.11}$$

En substituant les équations (IV.9)-(IV.10) dans l'équation (IV.11), on obtient un système matriciel tridiagonal de la forme:

$$A_i T_{i+1,j}^{n+1/2} + B_i T_{i,j}^{n+1/2} + C_i T_{i-1,j}^{n+1/2} = D_i \tag{IV.12}$$

Avec :

$$A_i = \left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right], \qquad B_i = 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right], \qquad C_i = -\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right]$$

$$D_i = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right] T_{i,j+1}^{n} + 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right] T_{i,j}^{n} + \left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right] T_{i,j-1}^{n}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.22)-(III.23) dans l'équation (IV.12) on obtient la forme discrète implicite en x sous la forme suivant :

Pour : $i = 2$ $$\left[A_2 - \frac{1}{3}C_2\right]T_{3.j}^{n+1/2} + \left[B_2 + \frac{1}{3}C_2\right]T_{2.j}^{n+1/2} = D_2 \quad \text{(IV.13)}$$

Pour : $i = N_x$ $$\left[\frac{4}{3}A_{Nx} - B_{Nx}\right]T_{Nx.j}^{n+1/2} + \left[C_{Nx} - \frac{1}{3}A_{Nx}\right]T_{Nx-1.j}^{n+1/2} = D_{Nx} \quad \text{(IV.14)}$$

IV.3.2.Schéma implicite en *y* et explicite en *x* :

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps (n+1) pour les dérivées en y. La discrétisation des dérivées partielles est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad \text{(IV.15)}$$

$$\left.\frac{\partial (uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial (vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n} T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n} T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad \text{(IV.16)}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad \text{(IV.17)}$$

En substituant les équations (IV.15)-(IV.17) dans l'équation (III.11), on obtient un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$A_i' T_{i,j+1}^{n+1} + B_i' T_{i,j}^{n+1} + C_i' T_{i,j-1}^{n+1} = D_i' \quad \text{(IV.18)}$$

$$A_i' = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right], \qquad B_i' = 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right], \qquad C_i = -\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right]$$

$$D_i' = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right] T_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right] T_{i,j}^{n+1/2} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right] T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.22)-(III.23) dans l'équation (IV.18) on obtient la forme discrète implicite en y sous la forme suivant :

Pour : $j = 2$ $$\left[A_2' - \frac{1}{3}C_2'\right]T_{i.3}^{n+1} + \left[B_2' + \frac{4}{3}C_2'\right]T_{i.2}^{n+1} = D_2' - \frac{2}{3}C_2'\Delta y \quad \text{(IV.19)}$$

Pour: $j = N_y$ $$\left[\frac{4}{3}A_{Ny}' - B_{Ny}'\right]T_{i.Ny}^{n+1} + \left[C_{Ny}' - \frac{1}{3}A_{Ny}'\right]T_{i.Ny-1}^{n+1} = D_{Ny}' + \frac{2}{3}A_{Ny}'\Delta y \quad \text{(IV.20)}$$

IV.4. Discrétisation de l'équation de concentration :

De même pour l'équation de concentration (III.14), nous exposons dans ce qui suit sa discrétisation en suivant exactement les mêmes démarches que le paragraphe précédent.

L'équation de concentration (III.14) se réécrit de la façon suivante:

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (uS)}{\partial x} + \frac{\partial (vS)}{\partial y} = Le^{-1}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \qquad \text{(IV.21)}$$

IV.4.1.Schéma implicite en *x* et explicite en *y* :

Similairement aux démarches précédentes, l'équation algébrique correspondant à la discrétisation de l'équation de concentration donne :

$$A_i S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + B_i S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_i \qquad \text{(IV.22)}$$

Avec :

$$A_i = \left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right], \qquad B_i = 2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right], \qquad C_i = -\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right]$$

$$D_i = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right] S_{i,j+1}^{n} + 2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right] S_{i,j}^{n} + \left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right] S_{i,j-1}^{n}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.22)-(III.23) dans l'équation (IV.21) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivant :

Pour : $i = 2$ $$\left[A_2 - \frac{1}{3}C_2\right] S_{3.J}^{n+1/2} + \left[B_2 + \frac{4}{3}C_2\right] S_{2.j}^{n+1/2} = D_2 \qquad \text{(IV.23)}$$

Pour : $i = N_x$ $$\left[\frac{4}{3}A_{Nx} - B_{Nx}\right] S_{Nx.j}^{n+1/2} + \left[C_{Nx} - \frac{1}{3}A_{Nx}\right] S_{Nx.j}^{n+1/2} = D_{Nx} \qquad \text{(IV.24)}$$

IV.4.2.Schéma implicite en *y* et explicite en *x* :

$$A_i' S_{i,j+1}^{n+1} + B_i' S_{i,j}^{n+1} + C_i' S_{i,j-1}^{n+1} = D_i' \qquad \text{(IV.25)}$$

$$A_i' = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right], \qquad B_i' = 2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right], \qquad C_i = -\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right]$$

$$D_i' = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right] S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right] S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right] S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.22)-(III.23) dans l'équation (III.14) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivant :

Pour : $j = 2$ $\left[A'_2 - \frac{1}{3}C'_2\right]S^{n+1}_{i.3} + \left[B'_2 + \frac{4}{3}C'_2\right]S^{n+1}_{i.2} = D'_2 - \frac{2}{3}C'_2\Delta y$ (IV.26)

Pour: $j = N_y$ $\left[\frac{4}{3}A'_{Ny} - B'_{Ny}\right]S^{n+1}_{i.Ny} + \left[C'_{Ny} - \frac{1}{3}A'_{Ny}\right]S^{n+1}_{i.Ny-1} = D'_{Ny} + \frac{2}{3}A'_{Ny}\Delta Ny$ (IV.27)

IV.5. Discrétisation de l'équation du mouvement :

IV.5.1. Milieu poreux Darcy : $\left(|u| / P_r^*\right) << 1$

L'équation de mouvement du milieu poreux basée sur le modèle de Darcy peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\nabla^2\Psi = R_T\left[\frac{\partial}{\partial x}(T + NS)\cos\Phi - \frac{\partial}{\partial y}(T + NS)\sin\Phi\right] \quad \text{(IV.28)}$$

Chaque terme de l'équation de mouvement (III.6) est discrétisé selon un schéma centré classique.

$$\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{\Psi^{n+1}_{i+1,j} - 2\Psi^{n+1}_{i,j} + \Psi^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{\Psi^{n+1}_{i,j+1} - 2\Psi^{n+1}_{i,j} + \Psi^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad \text{(IV.29)}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \text{(IV.30)}$$

En remplaçant les expressions (IV.29) et (IV.30) dans l'équation (III.6) on obtient l'expression générale de la fonction suivante

$$\Psi^{(n+1),(k+1)}_{i,j} = (1-\omega)\Psi^{(n+1),k}_{i,j} + \omega\left\{a_1\left(\Psi^{(n+1),k}_{i+1,j} + \Psi^{(n+1),(k+1)}_{i-1,j}\right) + a_2\left(\Psi^{(n+1),k}_{i,j+1} + \Psi^{(n+1),(k+1)}_{i,j-1}\right) + a_3\left[\left(T^{(n+1)}_{i+1,j} - T^{(n+1)}_{i-1,j}\right) + N\left(S^{(n+1)}_{i+1,j} - S^{(n+1)}_{i-1,j}\right)\right] + a_4\left[\left(T^{(n+1)}_{i,j+1} - T^{(n+1)}_{i,j-1}\right) + N\left(S^{(n+1)}_{i,j+1} - S^{(n+1)}_{i,j-1}\right)\right]\right\} \quad \text{(IV.31)}$$

Où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des constantes définies par :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta y^2}{2\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)}, & a_3 &= R_T\cos\Phi\,\frac{\Delta x\,\Delta y^2}{4\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)} \\ a_2 &= \frac{\Delta x^2}{2\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)}, & a_4 &= -R_T\sin\Phi\,\frac{\Delta x^2\Delta y}{4\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV.32)}$$

Le paramètre ω est le facteur de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, pour accélérer la convergence. Sa valeur optimale, ω_{opt} dépend de la forme du domaine, du maillage et du type des conditions aux limites.

Pour un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, ω_{opt} est donnée par :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\zeta^2}\left[1 - \sqrt{1-\zeta^2}\right] \qquad \text{(IV.33)}$$

Où :

$$\zeta = \left[\frac{\cos(\pi / N_{x+1}) + (\Delta x^2 / \Delta y^2)\cos(\pi / N_{y+1})}{1 + (\Delta x^2 / \Delta y^2)}\right]$$

Où N_{x+1} et N_{y+1} désignent les nombres des nœuds suivant les directions horizontales et verticales, respectivement.

IV.6. Discrétisation des champs de vitesse :

Les composantes du champ de vitesse sont obtenues à partir de la fonction de courant selon les relations $u = \partial\Psi/\partial y$ et $v = -\partial\Psi/\partial x$. La discrétisation de ces équations par un schéma de différence finies centré du premier ordre donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \qquad \text{(IV.34)}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \qquad \text{(IV.35)}$$

IV.7. Discrétisation des conditions aux frontières des vitesses :

Les conditions aux frontières des vitesses sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche du troisième ordre:

$$\left.\begin{array}{lll} u_{1,j} = 0, \quad , & v_{i,1} = -\dfrac{18\Psi_{2,j} - 9\Psi_{3,j} + 2\Psi_{4,j}}{6\Delta x} & \text{à} \quad x = -\dfrac{1}{2} \\ u_{Nx+1,j} = 0, & v_{i,Ny+1} = \dfrac{18\Psi_{Nx,j} - 9\Psi_{Nx-1,j} + 2\Psi_{Nx-2,j}}{6\Delta x} & \text{à} \quad x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \qquad \text{(IV.36)}$$

$$\left.\begin{array}{llll} v_{i,1} = 0, & u_{1,j} = \dfrac{18\Psi_{i,2} - 9\Psi_{i,3} + 2\Psi_{i,4}}{6\Delta y} & \text{à} & y = -\dfrac{1}{2} \\ v_{i,Ny+1} = 0, & u_{Ny+1,j} = -\dfrac{18\Psi_{i,Ny} - 9\Psi_{i,Ny-1} + 2\Psi_{i,Ny-2}}{6\Delta y} & \text{à} & y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{(IV.37)}$$

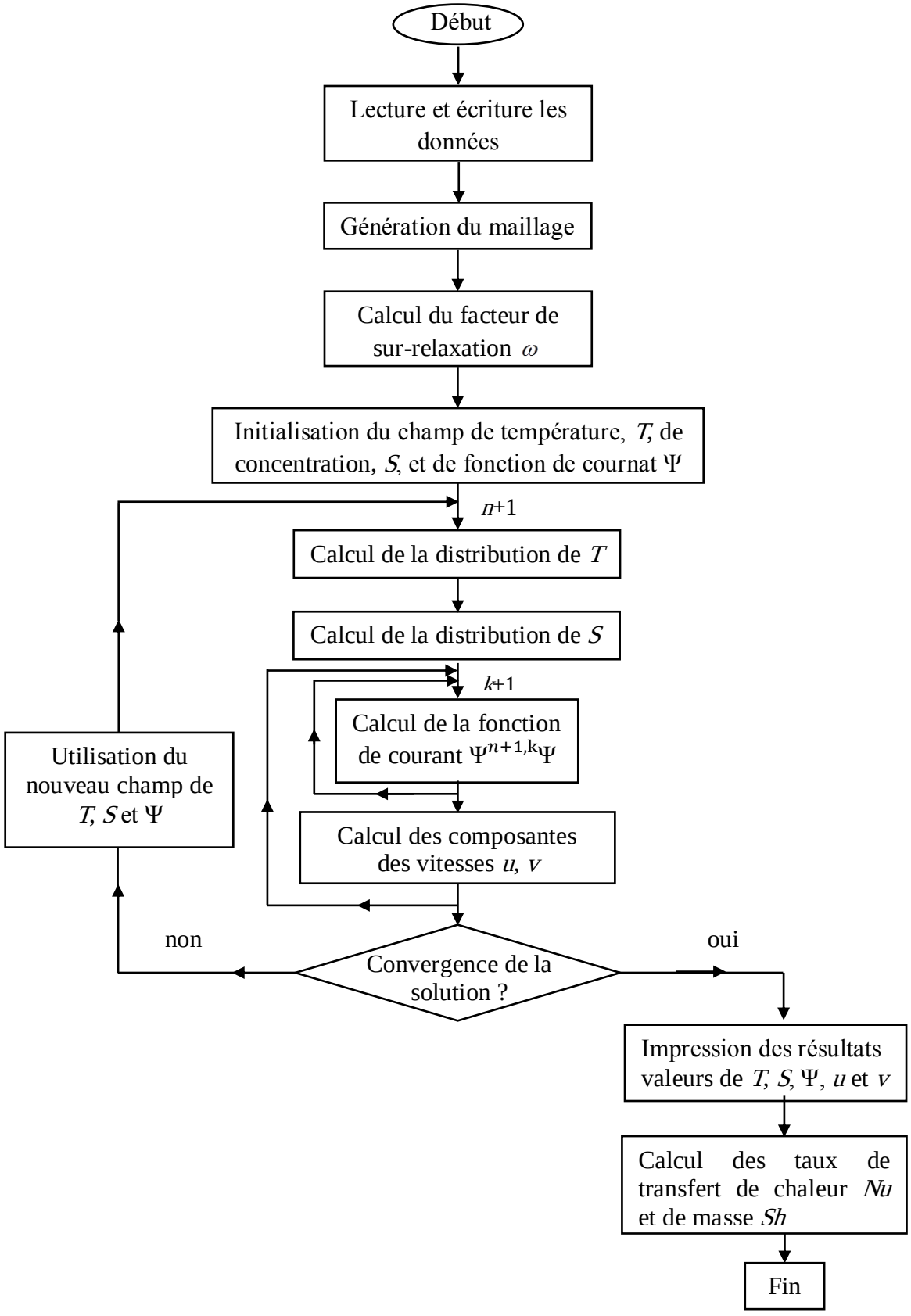
IV.8. Algorithme de calcul :

Les principales étapes de notre algorithme de calcul sont :

1. Génération du maillage.
2. Initialisation et lecture des données.
3. Calcul du facteur de sur-relaxation.
4. Introduction des conditions initiales sur la température, *T*, sur la concentration, *S*, et sur la fonction de courant, Ψ.
5. Evaluation du champ de vitesse initiale $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
6. Début de la boucle dans le temps.
   - 6.1. Résolution de l'équation de l'énergie (III.11) et (IV.8) par la méthode ADI et calcul du champ de température $T_{i,j}$.
   - 6.2. Résolution de l'équation de concentration (III.14) et (IV.21) par la méthode ADI et calcul le champ de concentration $S_{i,j}$.
   - 6.3. Résolution de l'équation de mouvement (III.6) et (IV.28) par la méthode SOR et calcul du champ de la fonction du courant $\Psi_{i,j}$.
   - 6.4. Détermination du champ de vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
   - 6.5. Refaire l'étape (6.1) jusqu'à l'obtention de la convergence de la solution vers une solution permanent ou oscillante.
7. Impression des résultats.
8. Fin du programme.

Le critère de convergence lors de la résolution des équations (IV.28) est donné par :

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^{k}\right|}{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k}\right|} \leq 10^{-6} \quad \text{(IV.29)}$$


Début
Lecture et écriture les données
Génération du maillage
Calcul du facteur de sur-relaxation ω
Initialisation du champ de température, T, de concentration, S, et de fonction de cournat Ψ
n+1
Calcul de la distribution de T
Calcul de la distribution de S
k+1
Calcul de la fonction de courant $\Psi^{n+1,k}\Psi$
Utilisation du nouveau champ de T, S et Ψ
Calcul des composantes des vitesses u, v
non
Convergence de la solution ?
oui
Impression des résultats valeurs de T, S, Ψ, u et v
Calcul des taux de transfert de chaleur Nu et de masse Sh
Fin

Chapitre IV : résultat et discussion

RÉSULTATS ET DISCUSSION

V.1. Introduction :

Ce chapitre s'intéresse à la présentation des résultats numériques dans le cas d'une cavité inclinée par rapport à l'horizontale. La géométrie considérée est une cavité rectangulaire inclinée contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont gouverné par des conditions aux frontières thermiques et solutale de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse). Ce problème est gouverné par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh thermique,R_T, le rapport de force de volume, N, le nombre de Lewis, Le et l'angle d'inclinaison, Φ. Selon la valeur du rapport des forces de volume, N, on constate qu'il existe deux types de bifurcations. Le premier type est une bifurcation supercritique dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle $\Psi_0 = 0$ est donnée par le nombre de Rayleigh supercritique, R_{TC}^{sup}. Le second type est une bifurcation sous critique à amplitude finie, c'est-à-dire$\Psi_0 \neq 0$. Dans le cas où les forces de volume sont coopérants, $N > 0$, nous avons uniquement la convection supercritique. Ceci est dû au fait que les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent à déstabiliser les forces de convection. Dans le cas contraire, $N < 0$, les forces de convection sont opposées et le seuil de la convection est sous critique.

V.2. Validation de code numérique :

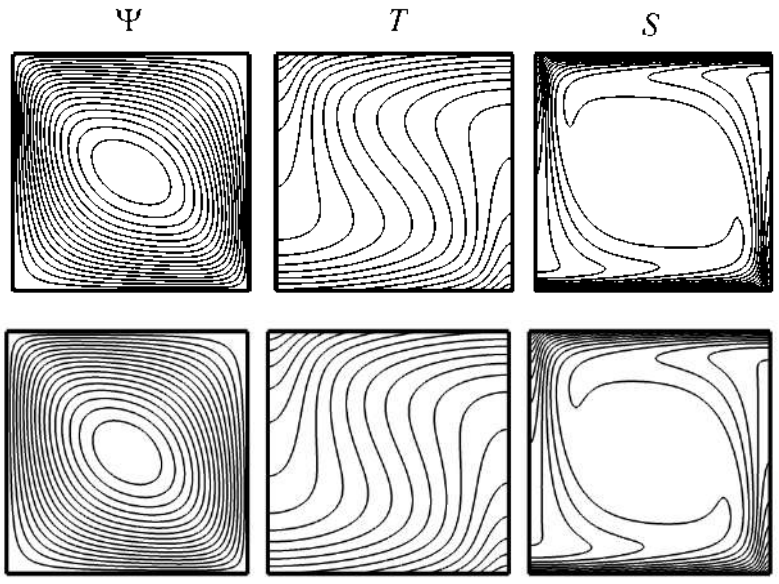
Le code de calcul est validé par rapport à plusieurs cas de la littérature, Mamou et al. [42], Kalla. [43] et Benhadji [44]. Une très bonne concordance est à noter. Les résultats comparatifs sont résumés dans le tableau 5.1 pour le cas d'une cavité chauffée et salée par le bas. Notre simulation a été réalisée pour$A = 8$,$R_T = 100$, $N = -0.8$ et $Le = 10$. La comparaison des champs de la fonction de courant, ainsi que les taux de transfert de chaleur et de masse sont en excellente concordance. Des erreurs variant entre 0.0% et 3.05% ont été observées.

Tableau V.1 : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max}, des nombres moyens de Nusselt, Nu_m, et de Sherwood, Sh_m, pour $A = 8$, $R_T = 100$, $N = -8$ et $Le = 10$.

	Mamou et al [1].	Kalla [2]	Benhadji [3]	Présent étude
Ψ_{max}	3.689(0.10%)	3.675(0.27%)	3.695(0.27%)	3.681
Nu_m	3.635(0.38%)	3.649(0.77%)	3.653(0.88%)	3.621
Sh_m	6.739(0.64%)	6.742(0.40%)	6.747(0.47%)	6.715

V.2.3. Résultats et discussion :

Les figures V.1-V.4 illustrent les effets du nombre de Rayleigh, R_T, du nombre de Lewis, Le, du rapport des forces de volume, N, et de l'angle d'inclinaison, Φ, sur les lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), iso concentrations (droit), tel que prédit par la solution numérique. par la suite, nous allons présenter des résultats numériques obtenus pour $A = 1$ et ε=1 pour différentes valeurs deR_T,Le, N et Φ. La structure d'écoulement est monocellulaire, elle remplit toute la cavité avec un renversement de la circulation de l'écoulement dans le sens antihoraire à horaire et vice versa est observé.



(a)

(b)



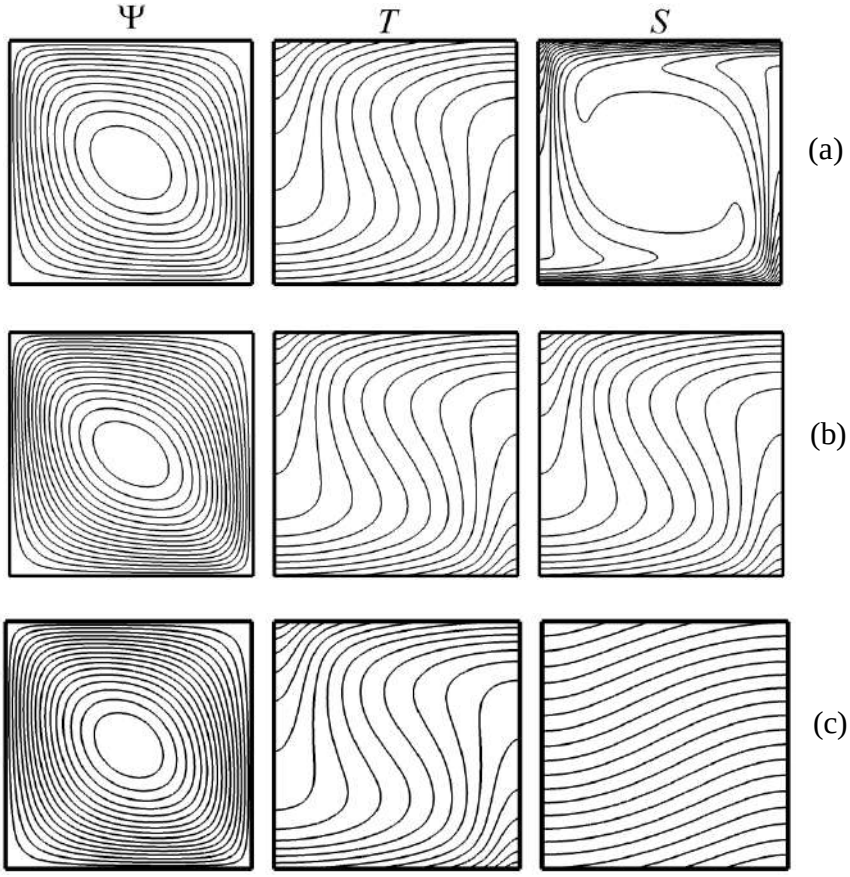
(c)

Figure V.1 : Influence du nombre de Rayleigh,R_T, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $A = 1$, $N = 0.1$, $Le = 0.1$ et Φ=0 :

a) $R_T = 15$, $\Psi_0 = 0.165$, $Nu = 1.008$, $Nu_m = 1.006$, $Sh = 1.694$, $Sh_m = 1.554$.

b) $R_T = 200$, $\Psi_0 = 4.695$, $Nu = 4.022$, $Nu_m = 3.478$, $Sh = 12.286$, $Sh_m = 11.382$.

c) $R_T = 400$, $\Psi_0 = 6.581$, $Nu = 4.916$, $Nu_m = 4.408$, $Sh = 14.381$, $Sh_m = 13.657$.



(a)

(b)

(c)

Figure V.2 : Influence du nombre de Lewis, Le, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), iso concentrations (droit) pour $A = 1$, $N = 0.5$ et Φ=0 :

a) $Le = 10$, $\Psi_0 = 4.731$, $Nu = 4.115$, $Nu_m = 3.593$, $Sh = 12.486$, $Sh_m = 11.714$.

b) $Le = 1$, $\Psi_0 = 5.735$, $Nu = 4.527$, $Nu_m = 3.983$, $Sh = 4.527$, $Sh_m = 3.983$.

c) $Le = 0.1$, $\Psi_0 = 6.109$, $Nu = 4.807$, $Nu_m = 4.125$, $Sh = 1.120$, $Sh_m = 1.097$.

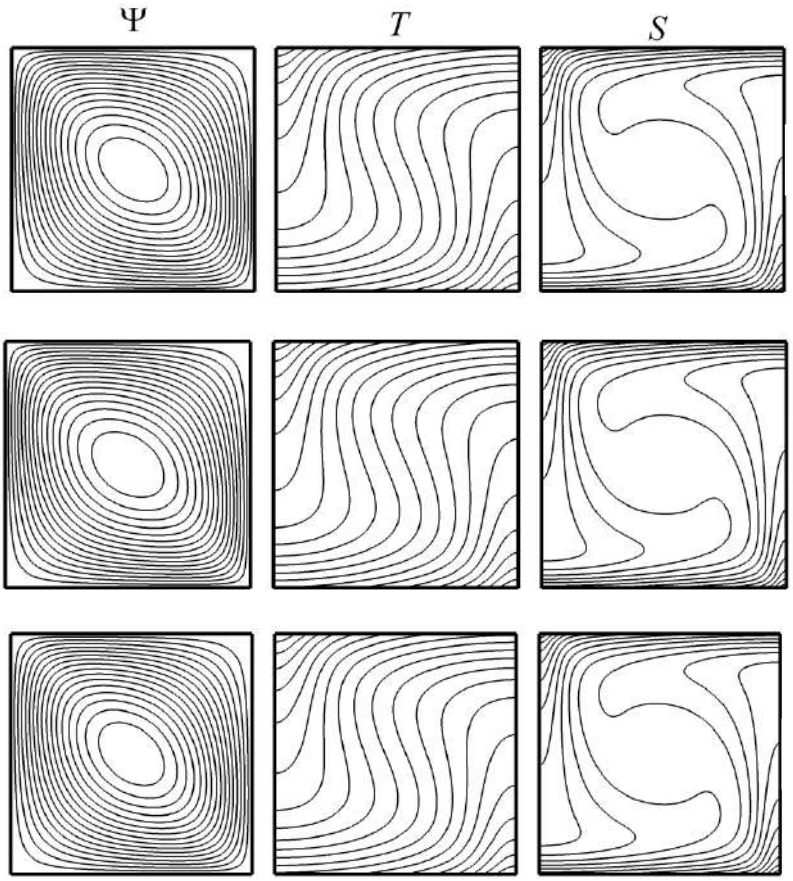
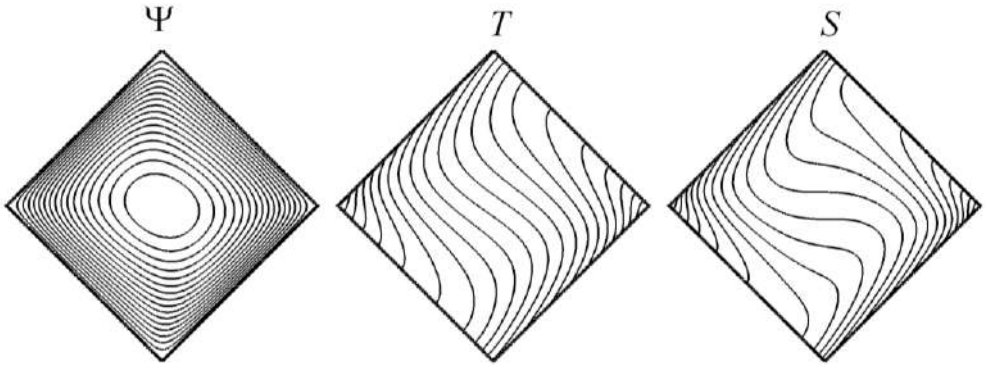


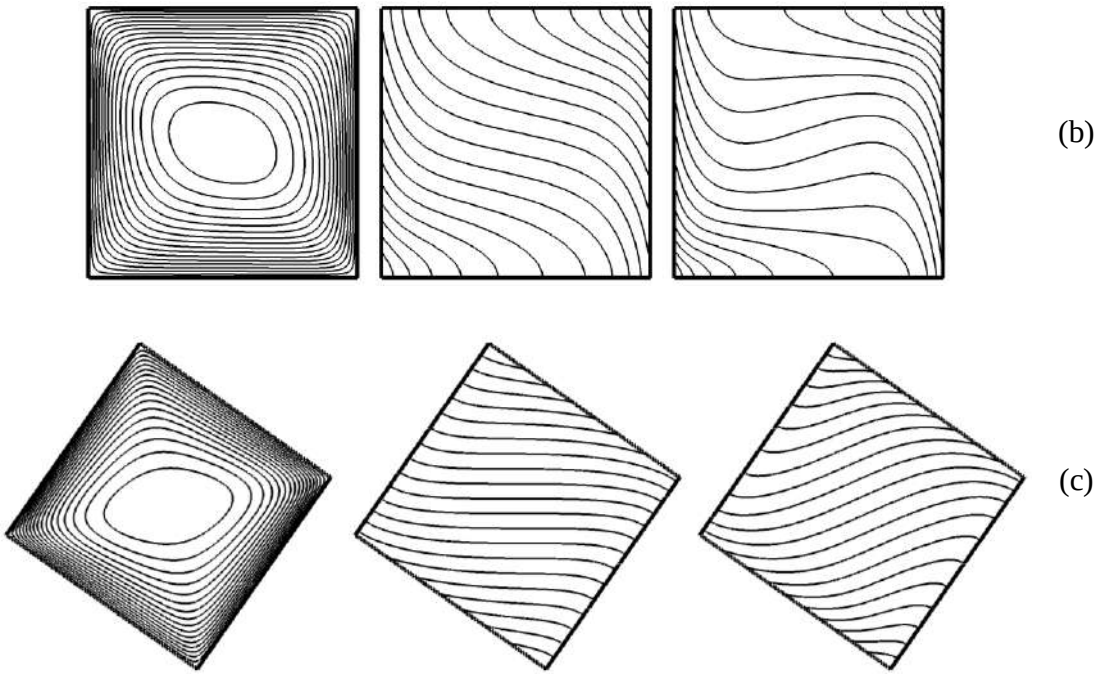
Figure V.3 : Influence du rapport des forces de volume, *N*, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), iso concentrations (droit) pour $A = 1$, $Le = 5$ et Φ=0 :

a) $N = 0$, $\Psi_0 = 4.685$, $Nu = 3.996$, $Nu_m = 3.447$, $Sh = 8.729$, $Sh_m = 7.981$.

b) $N = 0.2$, $\Psi_0 = 4.731$, $Nu = 3.913$, $Nu_m = 3.347$, $Sh = 8.610$, $Sh_m = 7.787$.

c) $N = -0.2$, $\Psi_0 = 4.731$, $Nu = 4.072$, $Nu_m = 3.537$, $Sh = 8.836$, $Sh_m = 8.150$.





(b)

(c)

Figure V.4 : Influence de l'angle d'inclinaison,Φ, sur lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $A = 1$, $Le = 2$ et $N = -0.1$:

a) $\Phi = 45°$, $\Psi_0 = 4.160$, $Nu = 4.695$, $Nu_m = 4.012$, $Sh = 7.490$, $Sh_m = 6.600$.

b) $\Phi = 90°$, $\Psi_0 = 2.740$, $Nu = 3.493$, $Nu_m = 3.034$, $Sh = 6.811$, $Sh_m = 5.790$.

c) $\Phi = 145°$, $\Psi_0 = 0.852$, $Nu = 1.311$, $Nu_m = 1.295$, $Sh = 2.160$, $Sh_m = 2.052$.

Dans les figures V.5 nous avons présenté des profils de la fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médian de la cavité (x=0) pour $A = 1$, $R_T = 200$, $N = 1$, $\Phi = 45°$ pour différentes valeurs de Lewis, Le, Pour $Le = 1$, nous constatons que, dans la partie centrale de la cavité, les gradients horizontaux de la température et de la concentration sont nuls. Cependant, pour $Le \neq 1$ (i.e, $Le = 0.1, 2$ ou 10), les profils de T et S montrent une stratification linéaire dans la direction horizontale. Cela indique qu'au centre de la cavité, il y a des transferts de chaleur et de masse purement conductifs dans la direction horizontale. De façon à expliquer physiquement ce phénomène, prenons le cas de $N = 1$ et $Le = 0.1$. Dans cette situation, la diffusivité massique est dix fois plus grande que la diffusivité thermique, et il en résulte que le gradient massique dans la direction horizontale est beaucoup plus important que le gradient thermique. Puisque la poussée, résultant des forces de volume, est contrôlée par les gradients horizontaux de température et de concentration, le mouvement convectif est alors dominé principalement par les effets solutaux. En passant de $Le = 1$ à $Le = 0.1$ et sans altérer le flux de chaleur

imposé ($R_T = cst = 200$), l'intensité de la vitesse s'accentue, ce qui provoque une augmentation du transfert de chaleur dans les parois horizontales.

Puisque le flux de chaleur imposé reste constant, alors on a un déficit de la chaleur au voisinage de la couche limite formée sur la paroi verticale gauche et un surplus au voisinage de la paroi verticale droite. Pour compenser le déficit et ajuster le surplus, une quantité de chaleur est transférée par conduction de la couche basse vers la couche haute. C'est la raison pour laquelle le gradient de température dans la direction horizontale est négatif (voir figure V.5(c)). Pour $Le > 1$ (par exemple$Le = 10$), la diffusivité thermique est plus grande que la diffusivité massique et le gradient horizontal dominant est celui de la température. Donc, l'écoulement convectif est dominé par les effets thermiques et l'existence d'un gradient solutal horizontal négatif, au centre de la cavité, est provoquée par le déficit et le surplus de la masse au voisinage des parois verticales droite et gauche de la cavité, respectivement.

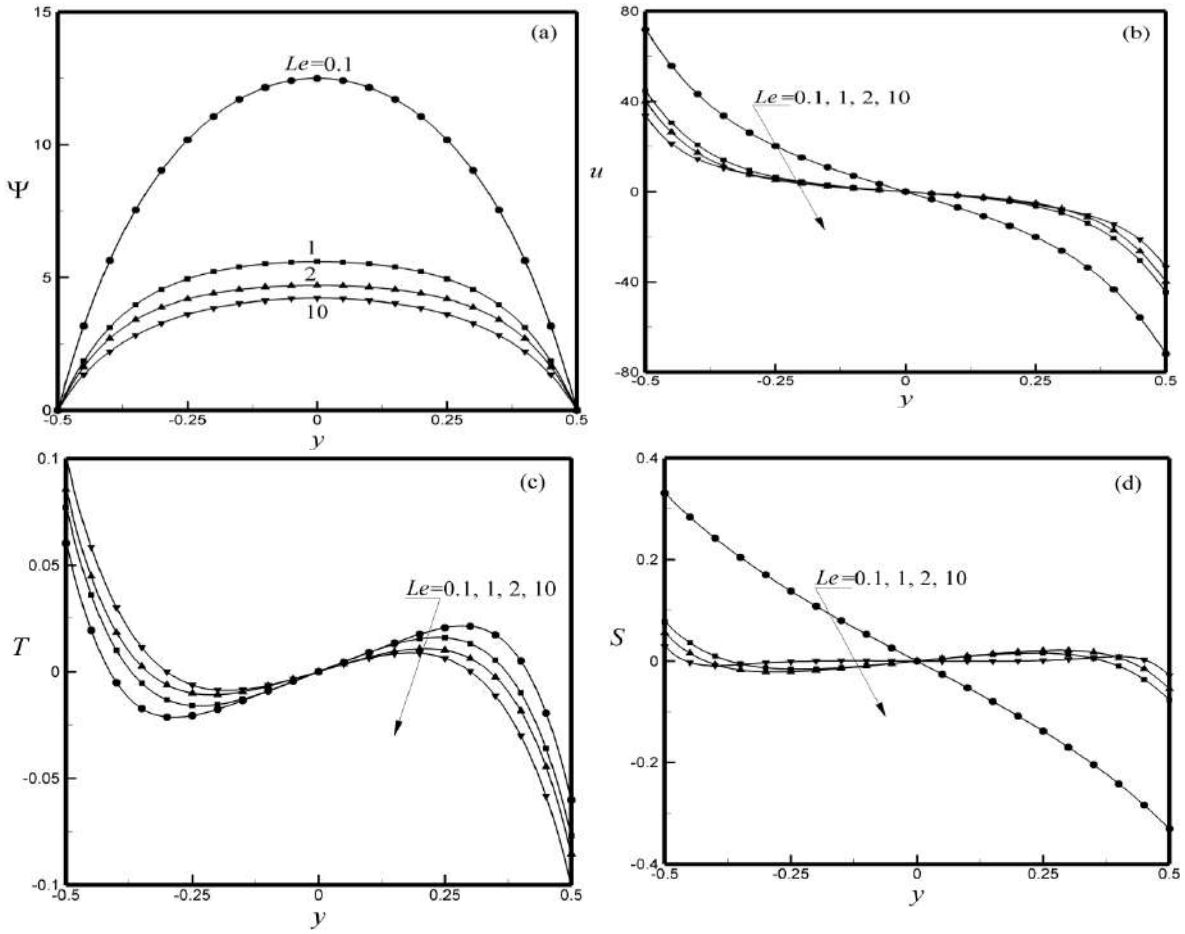


Figure V.5 : Profils de fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $A = 1$, $R_T = 200$, $N = 1$ et Φ=45°.

Les effets du rapport des forces de volume, N, sur les profils de la fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, sont illustrés sur les figure V.6 pour $A = 1$, $R_T = 200$, $Le = 10$ et Φ=0°. Lorsque$N = 0$, l'écoulement convectif résultant circule dans le sens trigonométrique, car il est entrainé uniquement par la force de volume thermique. Les figs. V.6 montrent que les résultats pour $N = 2$ sont pratiquement similaires à ceux obtenus avec $N = 0$ et une légère amélioration du transfert de chaleur et de masse a été observée. On aurait pu s'attendre à ce que les forces thermique et solutale coopèrent afin d'intensifier le transfert de chaleur et de masse. Nous constatons aussi que, lorsque N augmente de -1.5 à 2, Ψ augmente considérablement, alors u, T et S presque constant.

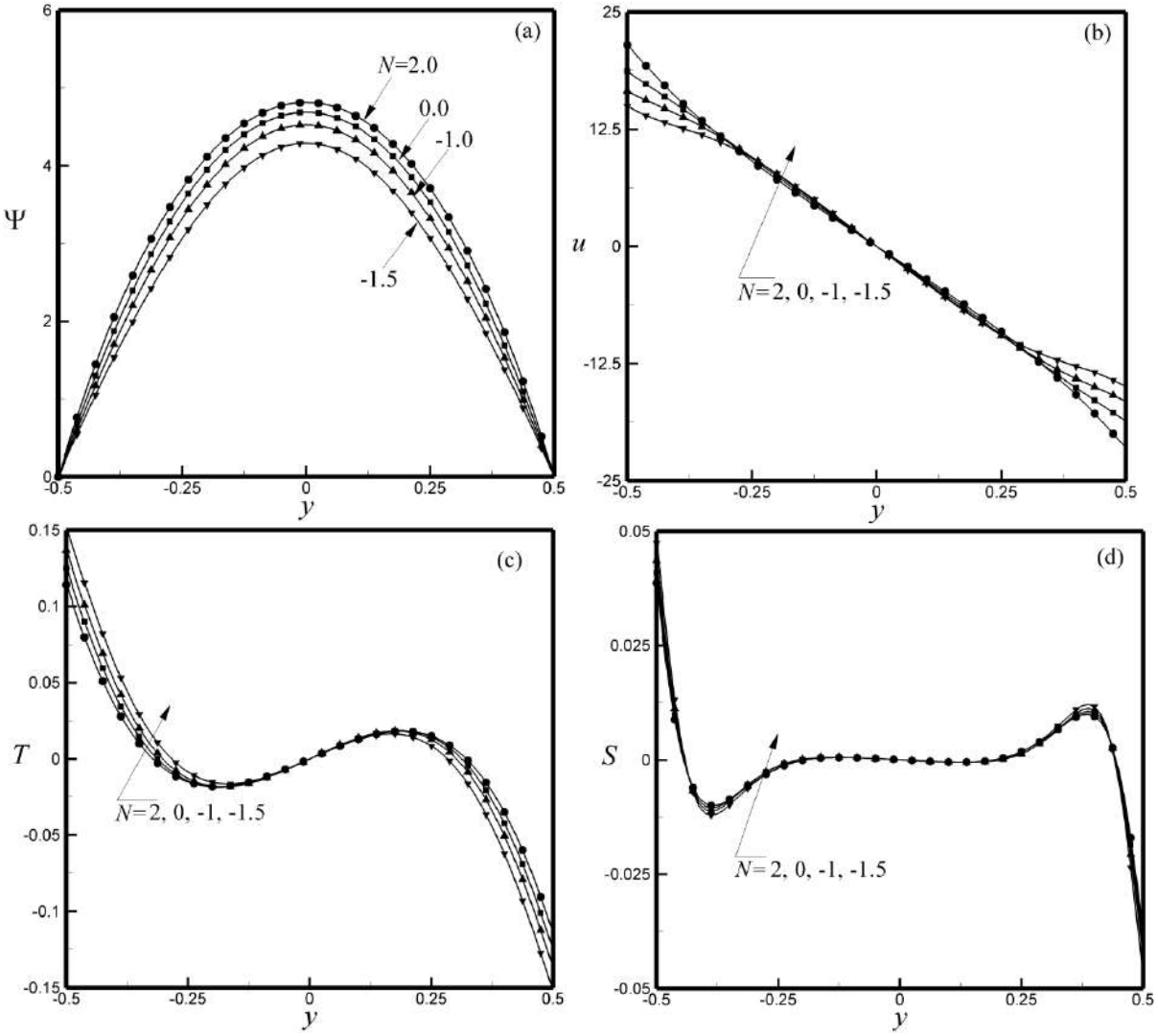
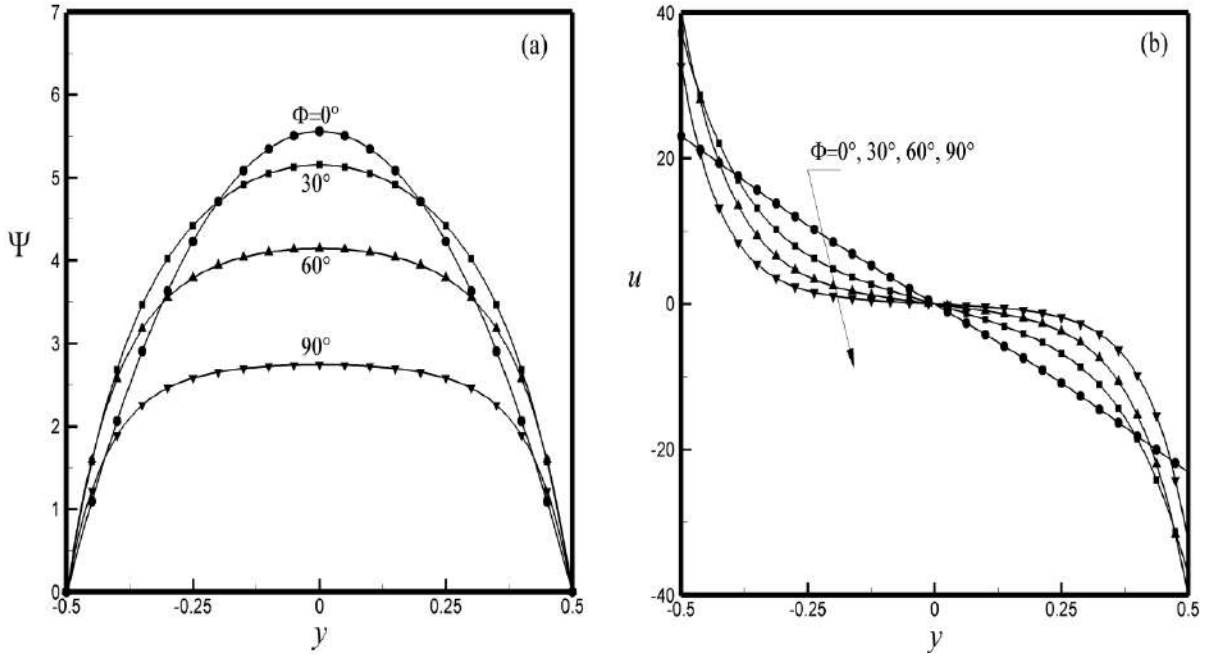


Figure V.6 : Profils de fonction de courant, Ψ de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $A = 1$, $R_T = 200$, $Le = 10$ et Φ=0°.

Les Figures V.7 montrent l'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, sur les profils de la fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, à la mi-hauteur de la couche poreuse, pour $A = 1$, $R_T = 200$, $Le = 2$ et $N = 1$, respectivement. Ces profils sont antisymétriques par rapport à y et les résultats sont représentés uniquement dans la partie gauche de la couche$0 \leq y \leq 0.5$. Puisque le milieu poreux est modélisé selon la loi de Darcy, il est observé à partir des Figs. V.5(b)- V.7(b) que la vitesse est maximale sur les parois où le : est annulé car les forces de flottabilité sont égales et opposées. De plus, ceci résulte du fait que, selon ce modèle le fluide est autorisé à glisser sur les frontières de la cavité. Lors de l'augmentation de la valeur de l'angle d'inclinaison, on voit que la vitesse est considérablement réduite. L'effet de, Φ, sur les profils de température est illustré sur la Fig. V.7(c). Une augmentation de, Φ, réduit l'intensité de la convection résultante. Concernant les profils de concentration, on peut voir dans la Fig. V.7(d) que, dans le cas de convection induite par double diffusion, similaire aux profils de température, la concentration près des parois solides est promue avec une augmentation de l'angle d'inclinaison.



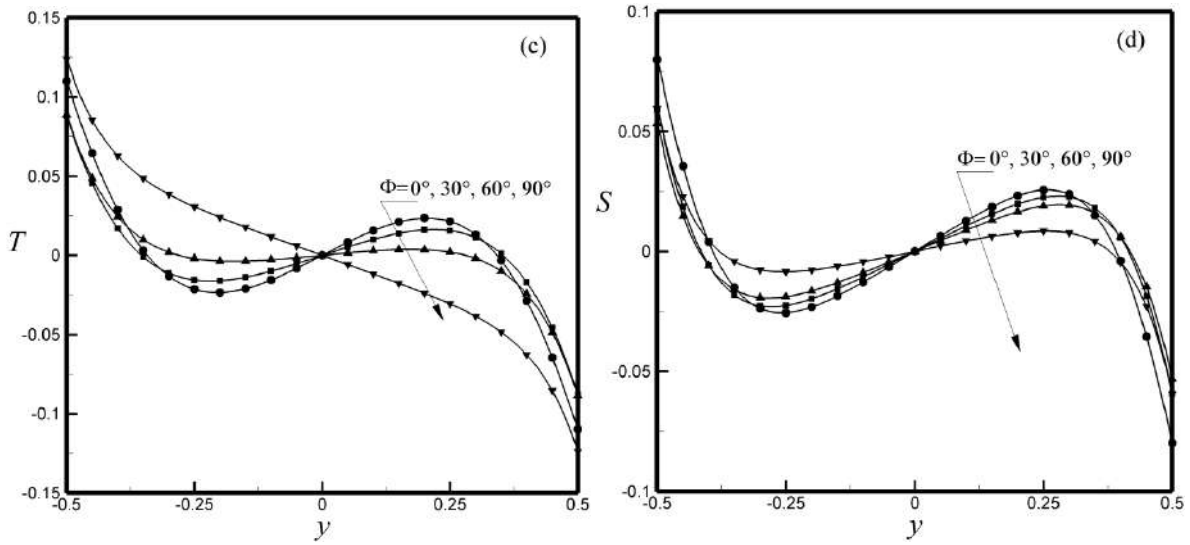
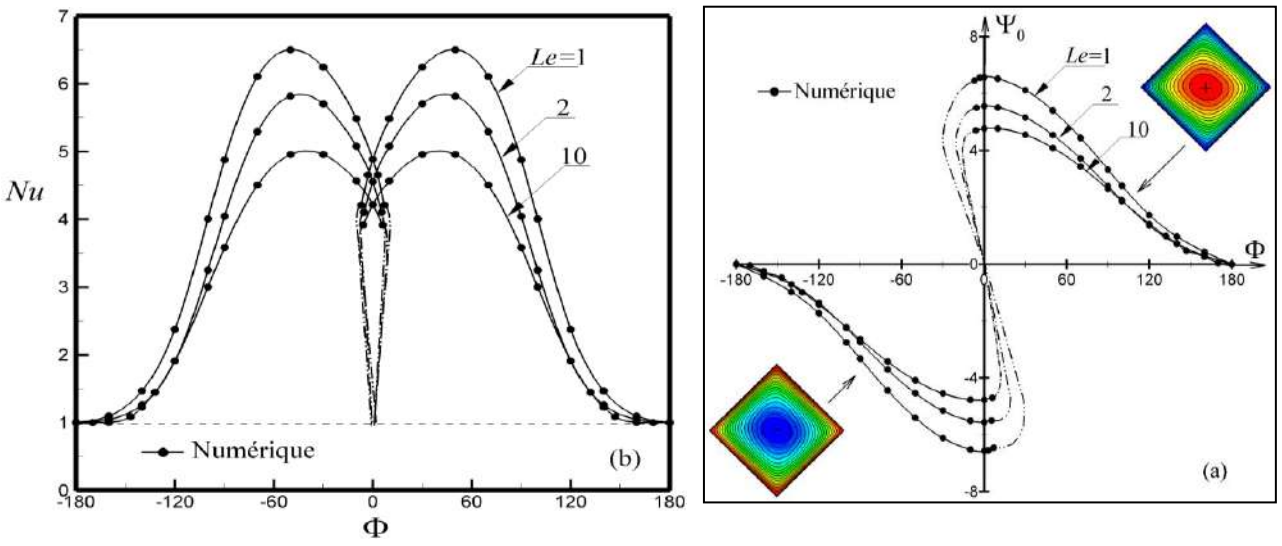


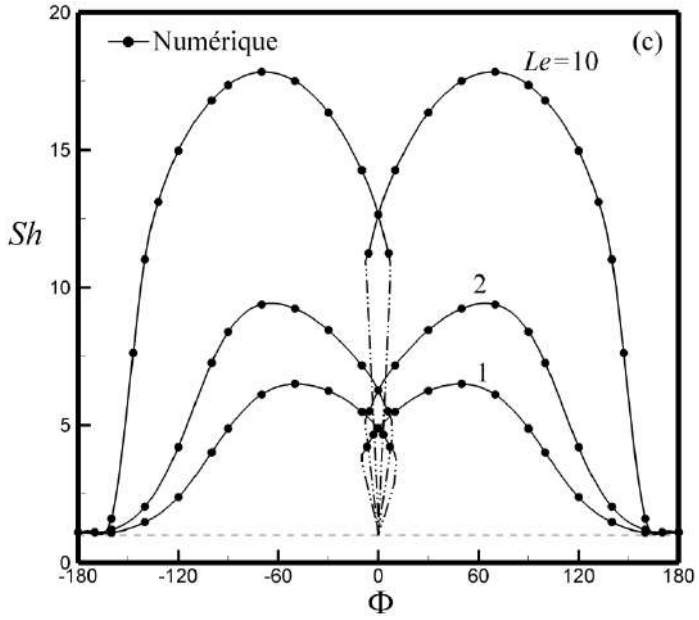
Figure V.7 : Profils de fonction de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $A = 1$, $R_T = 200$, $Le = 2$ et $N = 1$.

L'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, de la cavité par rapport au plan horizontal est discuté. Les figures V.8 (a)-(c) montrent la variation de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, du nombre de Nusselt, Nu, et du nombre de Sherwood, Sh, respectivement en fonction de l'angle d'inclinaison de l'enceinte Φ (variant de Φ=180° à -180°) pour $A = 1$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de Le. Les traits pleins avec des cercles pleins sur le graphe sont obtenus par un ajustement de courbe des données numériques, tandis que les lignes en pointillées sont des prédictions basées sur les résultats obtenus pour la couche infinie. Le transfert de chaleur et de masse se fait par conduction pure ($\Psi_0 = 0, Nu = Sh = 1$) lorsque Φ s'approche de ±180°. Dans cette situation, le fluide avoisinant la paroi supérieure est plus chaud, tandis que le fluide qui se trouve au voisinage de la paroi inférieure est moins chaud. Dans ce dernier cas, le gradient de densité est stable. Pour cette situation, l'effet de Le sur Ψ_0, Nu et Sh, comme prévu, est petit.

Les figures illustrent clairement l'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, sur la force de la convection et les taux de transfert de chaleur et de masse résultants. Comme exemple pour $Le = 1$, on observe que, lorsque l'angle d'inclinaison diminue de Φ=180° à -3.0°, le taux de transfert de chaleur Nu et de masse Sh augmente au début, il atteint son maximum puis diminue. Pour de petit angle d'inclinaison Φ (au voisinage de Φ=0°), des solutions multiples existent, parmi lesquelles certaines sont instables; elles sont indiquées sur les figures par des lignes discontinues. Dans le graphique, les lignes pleines positives (négatives) correspondent à la solution naturelle (antinaturelle).

Dans le cas de la convection naturelle, l'écoulement résultant circule dans le sens antihoraire en accord avec les conditions aux limites thermiques imposées sur l'enceinte. D'autre part, dans le cas de la convection antinaturelle l'écoulement circule dans le sens horaire. En général, les résultats montrent que les évolutions de Nu et Sh sont pratiquement semblable, mais leurs valeurs dépondent énormément de Le. Pour$Le < 1$, le transfert de chaleur et beaucoup plus important que le transfert de la masse et inversement lorsque$Le > 1$. Nous observons également que, pour une valeur donnée deLe, l'intensité de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse maximums se produisent à des angles d'inclinaison différents. Ainsi, pour$Le = 1$, Ψ_0 est maximum à $\Phi \simeq 0°$, Nu est maximum à $\Phi \simeq 50°$, alors Sh est maximum à $\Phi \simeq 50°$. Pour $Le = 2$, Ψ_0 est maximum à $\Phi \simeq 0°$, Nu est maximum à $\Phi \simeq 50°$, alors Sh est maximum à $\Phi \simeq 70°$ et pour $Le = 10$, l'intensité de l'écoulement est maximum à $\Phi \simeq 10°$, le maximum du transfert de chaleur est obtenu à $\Phi \simeq 50°$ et celui du transfert de masse à $\Phi \simeq 70°$





FigureV.8 : Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et du nombre de Lewis, Le pour $A = 1$, $R_T = 200$, $N = -0.1$ sur : a) l'intensité de l'écoulement Ψ_0, b) le nombre de Nusselt Nu et c) le nombre de Sherwood Sh.

L'influence du nombre R_T et l'angle d'inclinaison, Φ, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et sur les taux de transfert de chaleur, Nu, et de masse sont illustrés sur les figure V.9(a)-(c) pour $A = 1$, $Le = 10$ et $N = -0.5$. Les figures montrent que pour Φ=30°, 60° et 90° la solution convective bifurque (bifurcation supercritique), dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle $\Psi_0 = 0$ est donnée par le nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{sup} = 1.0$ où$\Psi_0 = 0$, $Nu = Sh = 1$. En augmentant R_T au-dessus de cette valeur, Ψ_0, Nu et Sh augmentent d'une façon monotone. Les résultats obtenus pour $\Phi = 0°$ montrent que le début du mouvement est caractérisé par une transition du l'état de repos ($\Psi_0 = 0$, $Nu = Sh = 1$) vers la convection d'amplitude finie, $\Psi_0 \neq 0$, c'est-à-dire instabilités non linéaires. Cette transition se produit à un nombre de Rayleigh souscritique $R_{TC}^{sous} = 40.0$ où $\Psi_0 = 1.188$, $Nu = 1.340$ et $Sh = 6.836$. Ce type de seuil, appelé bifurcation sous critique, ne se produit que lorsque les forces de flottabilité induites par les contributions thermiques et solutale sont opposées et lorsque $Le > 1$.

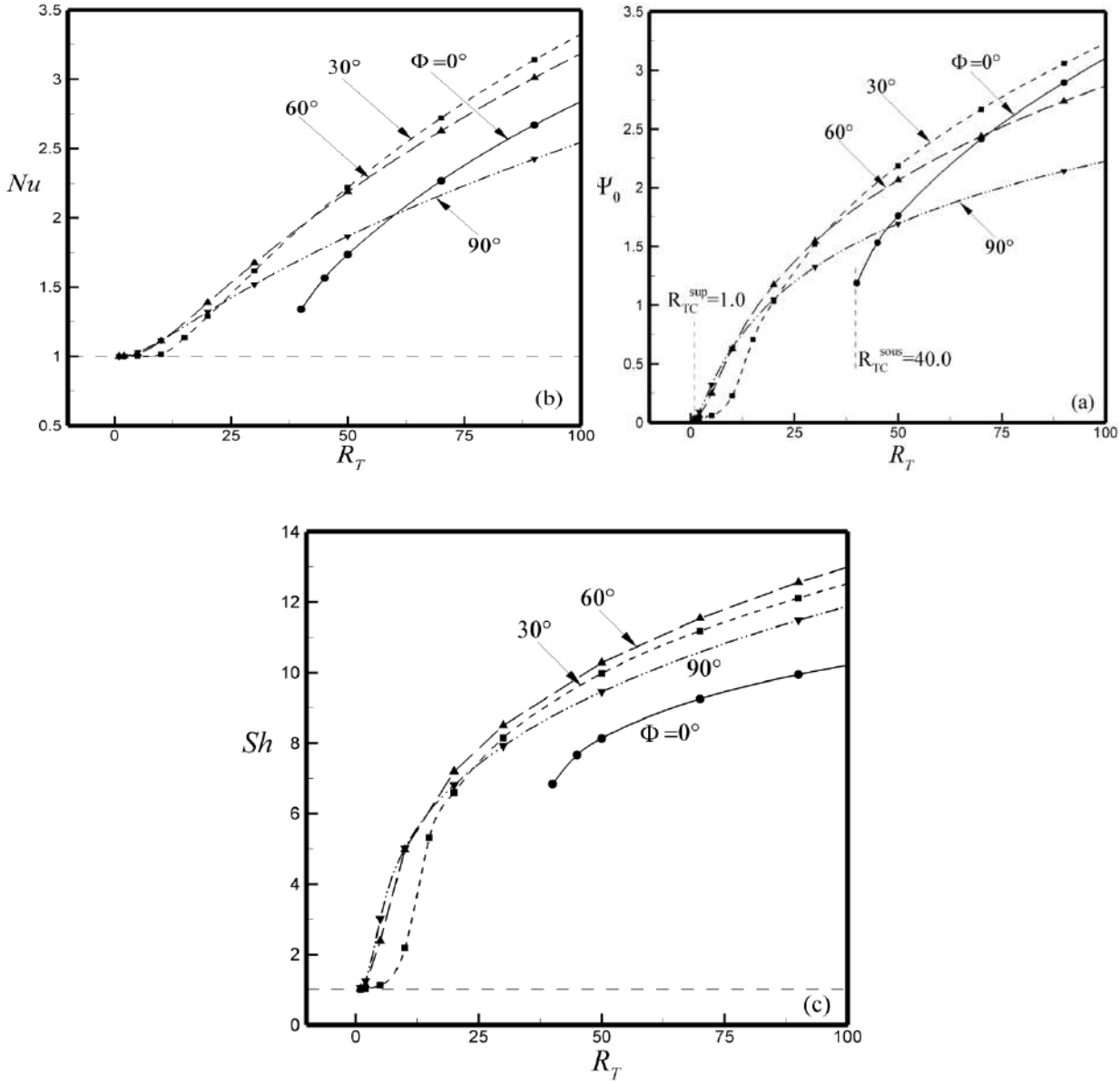
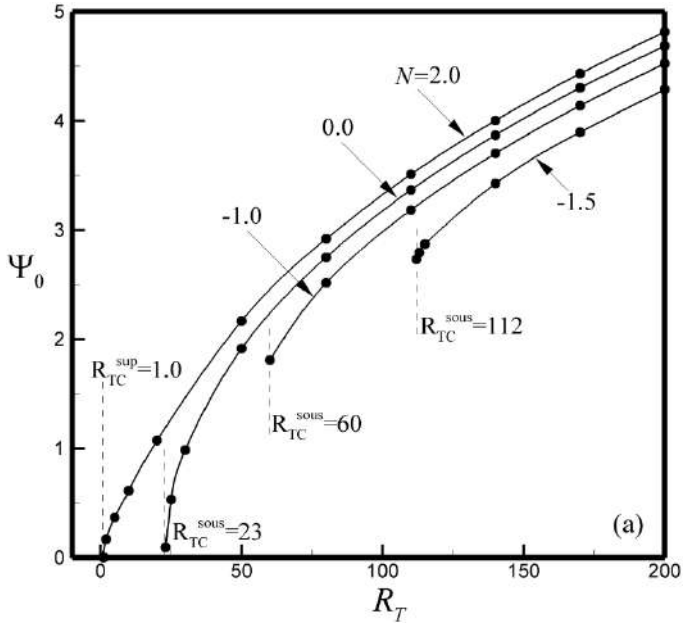


Figure V.9 : Effet du nombre de Rayleigh, R_T, et l'angle d'inclinaison, Φ, sur a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) taux de transfert de chaleur, Nu, et c) taux de transfert de masse, Sh pour $A = 1$, $Le = 10$ et $N = -0.5$.

Les figures V.10(a)-(c) montrent les variations de Ψ_0, Nu et Sh en fonction du nombre de Rayleigh, R_T, et du rapport des forces de volume, N, pour $A = 1$, $Le = 10$ et $\Phi = 0°$. Les résultats sont obtenus pour des valeurs du rapport des forces de volume,N, variant entre $N = 2$ et $N = -1.5$. En général, les figures V.10(a)-(c) illustrent clairement le fait que la diminution du rapport des forces de volume, N, pour un nombre de Rayleigh donné, permet de réduire considérablement la force de mouvement de convection et les transferts de chaleur et de masse dans la couche. La courbe obtenue pour $N = 0$ correspond à la convection induite

par les effets thermiques seulement. Elle donne lieu à une bifurcation de type fourche se produisant à un nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{sup} = 23$ où $\Psi_0 = 0$, $Nu = Sh = 1$. La courbe de bifurcation supercritique est affectée suivant la diminution de la valeur du rapport de la flottabilité. Comme on le sait dans la littérature Mamou [45], dans le cas où les forces de volume sont coopérants, $N > 0$, nous avons uniquement de la convection supercritique. Ceci est dû au fait que les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent à déstabiliser les forces de convection. Dans le cas contraire$N < 0$, les forces de convection sont opposées et le seuil de la convection est sou critique, R_{TC}^{sous}. Quand on diminue la valeur du rapport des forces de volume, N, il est clair que le seuil, R_{TC}^{sous}, augmente puisque l'effet du rapport des forces de volume devient de plus en plus stabilisant. Ainsi, pour $N = 2$, $R_{TC}^{sup} = 1.0$ où $\Psi_0 = 0$, $Nu = Sh = 1$, pour $N = -1$, $R_{TC}^{sous} = 60$ où $\Psi_0 = 1.807$, $Nu = 1.665$, $Sh = 8.219$ et pour $N = -1.5$, $R_{TC}^{sous} = 112$ où $\Psi_0 = 2.730$, $Nu = 2.117$, $Sh = 9.494$.



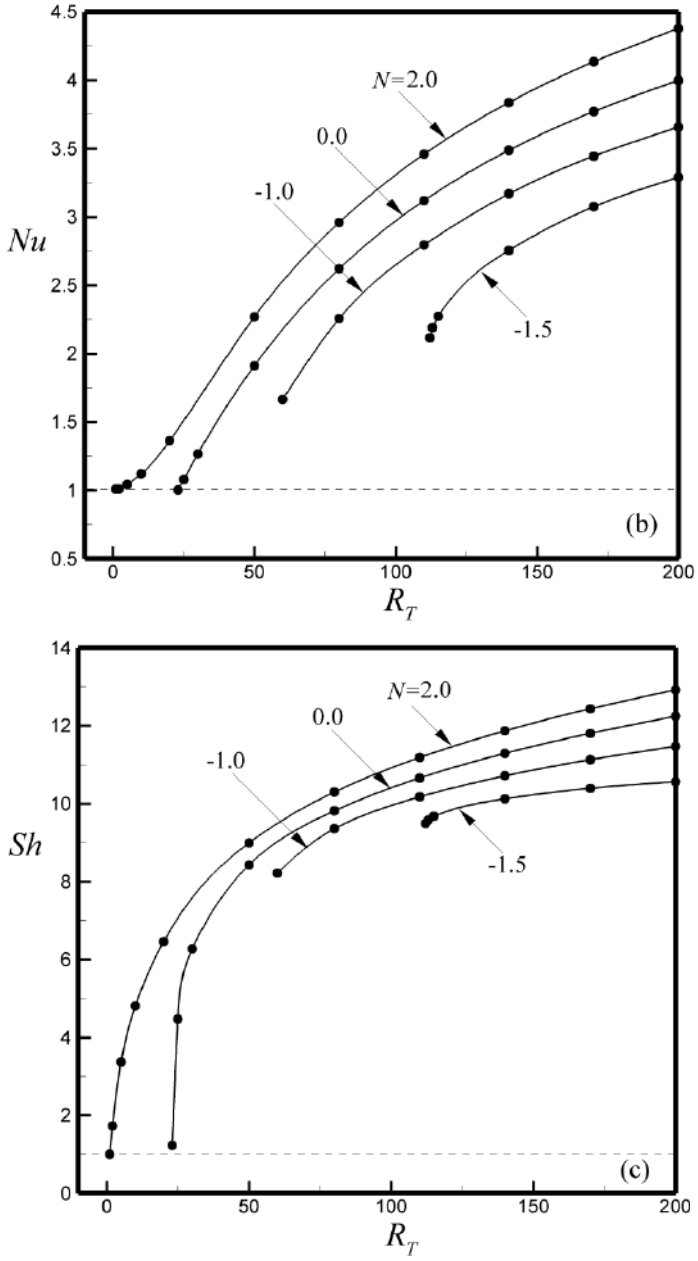
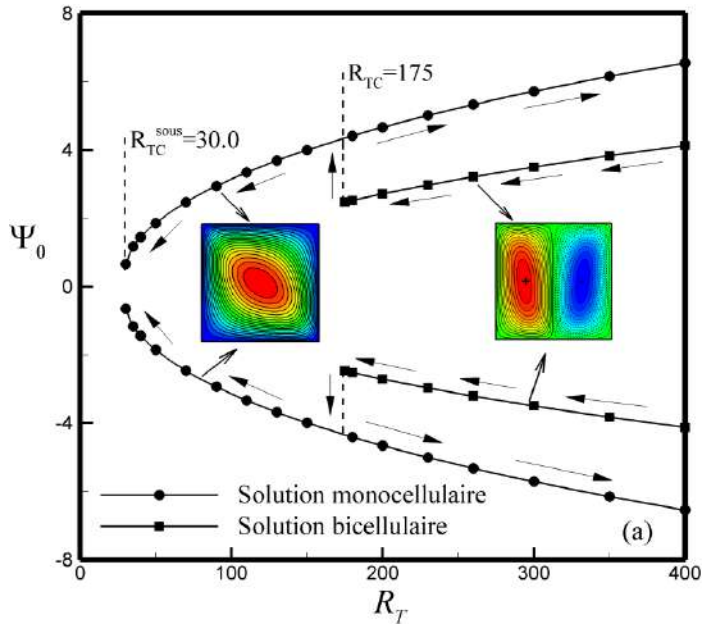
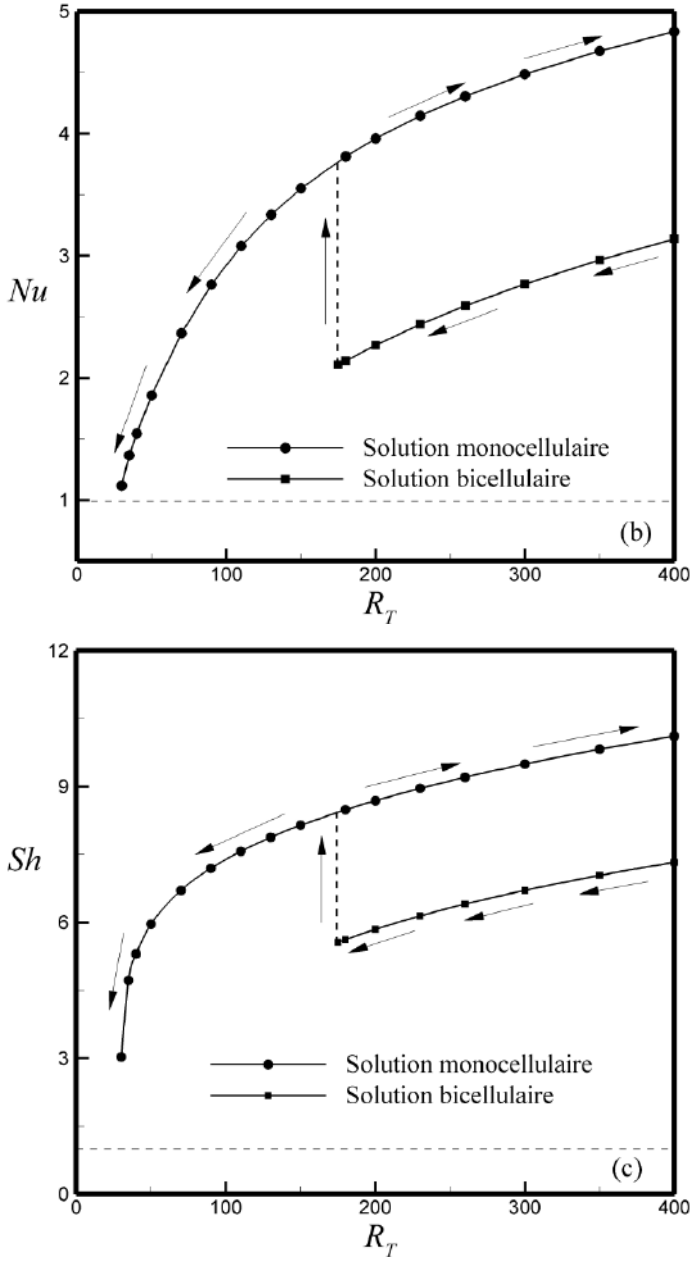


Figure V.10 : L'effets du nombre de Rayleigh R_T et le rapport des forces de volume N sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt, Nu, et c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 1$, $Le = 10$ et $\Phi = 0°$.

Un exemple de la configuration d'écoulement est illustré dans les figures V.11(a)-(c). Dans cette dernière, l'écoulement avec deux cellules ne peut être maintenu à un nombre très faible de Rayleigh. Les figures illustrent l'effet du nombre de Rayleigh, R_T, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et les taux de transfert de chaleur, Nu, et de masse, Sh, pour l'écoulement de 1 et 2 cellules, respectivement, avec $Le = 5$, $N = -0.5$ et Φ=0°. Les solutions numériques des équations gouvernantes complètes, sont obtenues pour $A = 1$ et sont représentées par des symboles pleins.

Il est bien connu que la circulation de l'écoulement dans la couche peut être indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. Comme les résultats sont symétriques, les solutions antihoraire ($\Psi_0 > 0$) et horaire ($\Psi_0 < 0$) sont présentées dans la courbe de bifurcation présentées dans ce cas. Lors de la diminution du nombre de Rayleigh à partir de $R_T = 400$ étape par étape avec le mode de convection 2-cellules stationnaire et en utilisant les résultats précédents comme conditions initiales, la branche de l'écoulement avec deux cellules peut être maintenue jusqu'à $R_{TC} = 175$ où : $\Psi_0 = 2.469$, $\Psi_0 = 2.469$, $Nu = 2.107$ et $Sh = 5.560$. En dessous de cette valeur la solution numérique bifurque vers un régime de convection d'amplitude finie monocellulaire comme l'illustrent les lignes de courant incluses dans le graphique. Ainsi lors de la diminution du nombre de Rayleigh en dessous de $R_T = 175$ et en utilisant la solution monocellulaire comme conditions initiales, la branche d'écoulement monocellulaire peut être étendue jusqu'à $R_T = R_{TC}^{sous} = 30$ où : $\Psi_0 = 0.652$, $Nu = 0.652$, 1.117 et $Sh = 3.025$, de telle sorte qu'au-dessous de cette valeur, le système reste à l'état de repos : $\Psi_0 = 0$, $Nu = Sh = 1$. Cependant, dans le cas en utilisant la solution de convection d'amplitude finie monocellulaire comme conditions initiales et diminue le nombre de Rayleigh à partir de$R_T = 400$, on constate on constate que cette branche peut être maintenue jusqu'à$R_T = R_{TC}^{sous}$, i.e n'existe pas la solution bicellulaire. La boucle d'hystérésis est indiquée sur le graphe par des flèches. Ces derniers indiquent le comportement de la solution du problème quand R_T augmente de 30 à 400 et diminue de 400 à 30.





FigureV.11 : L'effet du nombre de Rayleigh sur a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) du nombre de Nusselt, Nu, et c) du nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 1$, $Le = 5$ et $N = -0.5$ avec un écoulement monocellulaire et bicellulaire.

Les figures V.12(a)-(c) montrent des résultats typiques obtenus pour le flux de convection 1 et 3 cellules, respectivement. Les paramètres régissant considérés ici sont les mêmes que ceux de fig. V.11. Les résultats obtenus sont similaires à ceux représentés dans la fig. V.11. A partir de mode de convection de trois cellules comme conditions initiales, la branche de trois cellules peut être maintenu jusqu'au nombre de Rayleigh critique$R_{TC} = 367$. En dessous de cette valeur du nombre de Rayleigh critique la solution de trois cellules bifurque directement vers le la solution de l'écoulement monocellulaire.

Un exemple de la configuration d'écoulement est illustré dans la figure V.12(a).

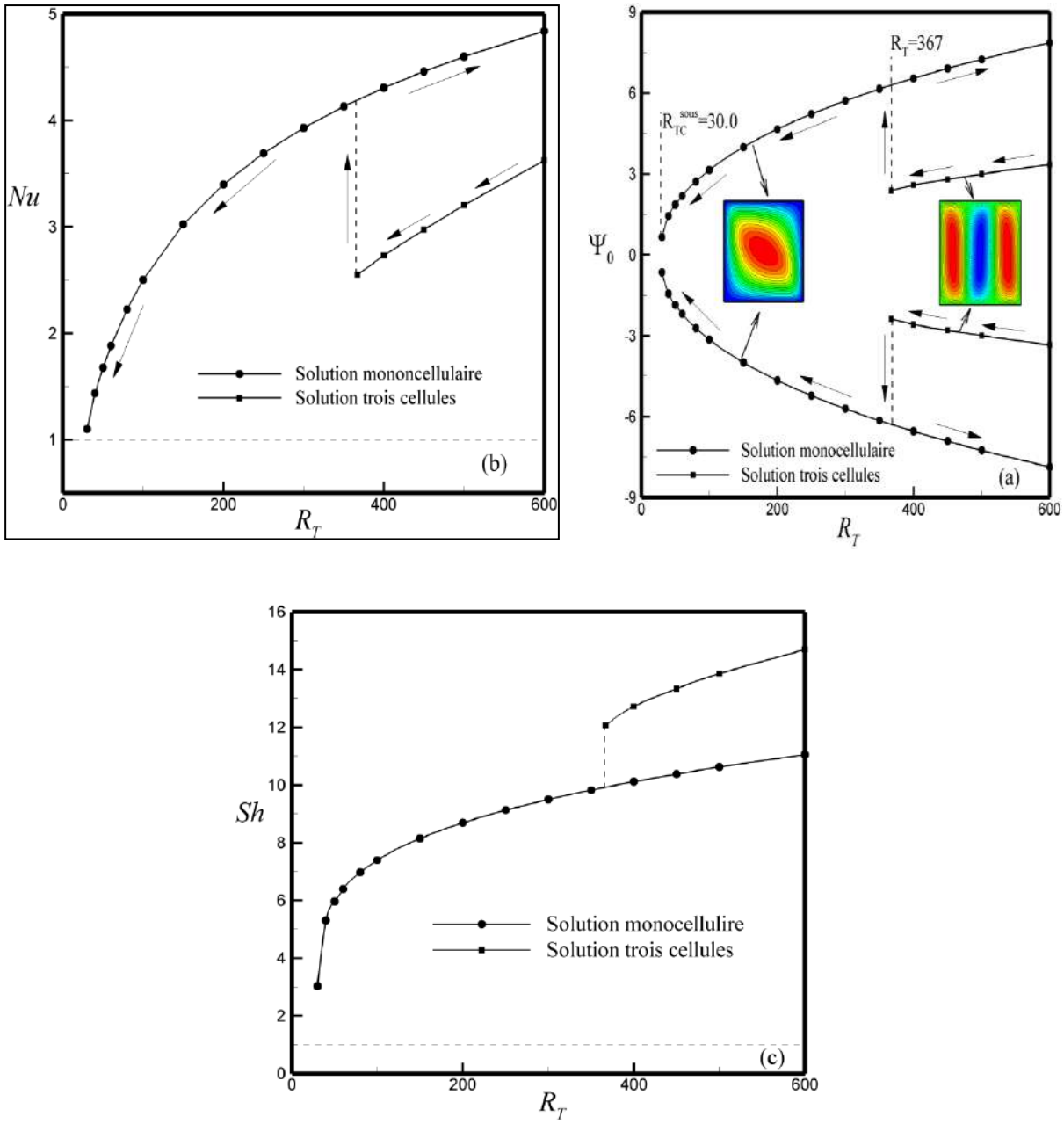
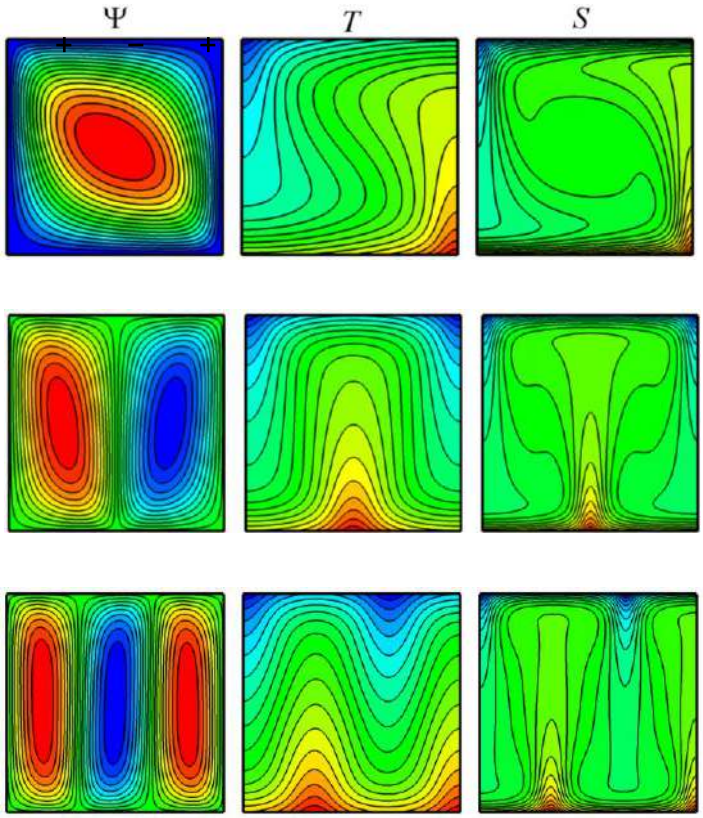


Figure V.12 : L'effet du nombre de Rayleigh sur a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) du nombre de Nusselt, Nu, et c) du nombre de Sherwood, Sh, $A = 1$, $Le = 5$ et $N = -0.5$ avec un écoulement monocellulaire et trois cellules.

En complément des résultats présents ci-dessus, au-dessous du seuil de bifurcation sous critique (supercritique), l'existence des solutions multiples est démontrée.

Comme indiqué par Kimura et al. [46], l'écoulement de convection unicellulaire est le mode préféré dans une couche poreuse de Darcy avec les parois horizontales chauffées par le bas par un flux de chaleur constant. Cela est vrai à proximité du début de la convection; toutefois, pour un grand nombre de Rayleigh, divers modes de convection à différents nombres de cellules de convection sont possibles, ce qui est indépendant du rapport d'aspect de l'enceinte. Dans la présente étude, pour la convection Darcy, la multiplicité de solutions convectives est démontrée pour une couche poreuse ayant un rapport d'aspect de $A = 1$. Pour $R_T = 400$, $N = -0.5$ et $Le = 5$, au moins trois modes de convection stables sont constatés, comme indiqué dans la figure 5.13. Une cellule, deux cellules et trois cellules sont calculées en utilisant la même distribution du maillage 300×200. Quel que soit le rapport d'aspect de l'enceinte, comme démontré par Mamou [47], lorsque le nombre de Rayleigh augment juste au-dessus du seuil de la convection supercritique R_{TC}^{sup}, le mode de convection monocellulaire reste dominant avec une augmentation du taux de croissance de la perturbation.

Comme le nombre de Rayleigh augmente encore, deux autres cellules, trois cellules, etc..., de convection émergent et deviennent instables, mais avec différentes valeurs du taux de croissance. Ainsi, dans une enceinte confinée, comme illustré dans les figs V.11 et V.12 pour une grande valeur du nombre de Rayleigh, plusieurs modes convectifs avec le nombre de cellules différentes coexistent. Naturellement, pour obtenir les différentes solutions possibles, les simulations numériques sont effectuées en utilisant la convection monocellulaire, avec deux cellules, etc…, comme conditions initia



(a)

(b)

(c)

FigureV.13 : Solutions multiples stables pour $A = 1$, $R_T = 400$, $N = -0.5$ et $Le = 10$:

a) une cellule $\Psi_{min} = 0.000$, $\Psi_{max} = 0.547$, $Nu = 4.835$, , $Sh = 10.113$.

b) deux cellules $\Psi_{min} = -4.124$, $\Psi_{max} = 4.124$, $Nu = 3.135$, $Sh = 7.327$.

c) trois cellules $\Psi_{min} = -2.650$, $\Psi_{max} = 2.650$, $Nu = 2.943$, $Sh = 12.722$.

Conclusion générale et perspective

Conclusions générales :

Dans ce travail nous avons réalisé une étude numérique les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans une cavité carrée inclinée, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide. Les parois actives de la cavité sont soumises à des flux de chaleur et masse constants. Tandis que, les autres parois sont considérées adiabatiques et imperméables. Le système d'équations gouvernantes le problème est résolu numériquement en utilisant la méthode des différences finies et un code numérique a été développé. On a utilisé deux méthodes pour la discrétisation des équations: on a appliqué la méthode implicite aux directions alternées (ADI) pour la discrétisation des équations de l'énergie et de la masse et la méthode de sûr/sous-relaxation successive (SOR) pour la discrétisation de l'équation de mouvement. Ce problème est gouverné par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh thermique, R_T, l'angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal, Φ, le rapport de force de volume, N, le nombre de Lewis, Le, la porosité normalisée, ε, de la matrice poreuse. Les codes de calculs ont été validés en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature.

Selon le signe du rapport des forces de volume, deux types d'écoulement convectifs ont été considérés, à savoir la convection coopérant et la convection opposée. Ainsi, lorsque les forces de volume sont opposées, deux types de bifurcation ont été observés : une bifurcation supercritique, R_{TC}^{sup} et une bifurcation sou critique, R_{TC}^{sous} . Pour cette dernière, la solution convective bifurque de l'état de repos avec une amplitude finie. Le nombre de Rayleigh souscritique caractérisant le seuil de la convection sous critique a été déterminé en fonction de nombre de Lewis,Le, et l'angle d'inclinaison, Φ. L'existence de solutions multiples a été démontrée.

L'orientation de l'enceinte comporte, pour des valeurs données de R_T et Le, un grand effet sur les transferts de chaleur et de masse. En faisant varier Φ de 0° à 180°, pour le cas de la convection coopérant, nous avons constaté que Nu et Sh augmentent au début, passent par un maximum, puis diminuent ensuite vers l'état de conduction pure. Les valeurs maximales de Nu et Sh sont observées à des angles différents selon la valeur du nombre de Lewis.

Dans la présente étude, on a considéré un cas convection naturelle induite par double diffusion. Ainsi, pour approfondir les connaissances dans ce domaine très intéressant, de nombreux points nécessitent encore une étude plus approfondie. En l'occurrence, il est intéressant de reprendre la même étude pour un milieu poreux anisotrope, en perméabilité et en conductivité thermique.

Il est recommandé de réaliser une analyse de stabilité pour déterminer le seuil marquant la transition vers le régime des écoulements convectifs oscillants, en fonction différents paramètres de contrôle. Il est aussi possible de généraliser le modèle utilisé par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes et d'autres conditions aux frontières.

Références bibliographique :

[1]: Maxime Nicolas. Ecoulements dans les milieux poreux iusti. maxime.nicolas@polytech.univ-mrs.fr 2003.

[2]: J.Bear, Y.Bachmat**,** introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media, Springer, p. 553,1990.

[3]: Bories S. Mojtabi A. Prat M. Quintard M. (2010) Transfert de chaleur dans les Milieux poreux- conduction, convection, rayonnement, technique de l'ingénieur, Réf.

42214210.

[4]: Bories S., Mojtabi A., Prat M., Quintard M., Transferts de chaleur dans les milieux poreux, Techniques de l'Ingénieur, 249 (2008)

[5]: YEN, Y. C. (1974). Effects of Density Inversion on Free Convection Heat Transfer in a Porous Layer Heated from Below, International Journal of Heat and Mass Transfer 17, 1349-1356.

[6]: Sun Z. S., Tien C. and YEN Y. C. (1972). Onset of Convection in a Porous Medium Containing Liquid with a Density Maximum, Proceeding of the Fourth International Heat Transfer Conference, Paris, Versailles, Paper NC 2.11.

[7]: Blake K. R. Poulikakos D. and Bejan A. (1984). Natural Convection Near 4^0C in a Water Saturated Porous Layer Heated from Below, International Journal of Heat and Mass Transfer, 27, 2355-2363.

[8]: SUN Z. S., TIEN C. and YEN. C .(1969). Thermal Instability of a Horizontal Layer of Liquid with Maximum Density, AICh E Journal, 15, No 6, 910-915.

[9]: Tyvand, P. A. and Storesletten, L. (1991). Onset of Convection in an Anisotropic Porous Medium with Oblique Principal Axes. Journal of Fluid Mechanics, 226, 371-382.

[10]: Straughan B. and Walker D. W. (1996). Anisotropic Porous Pénétratives Convection, Proc. R. Soc. Lond. A452, 97-115.

[11]: Mahidjiba A., Robillard L. and Vasseurp. (2000). Onset of Convection in a Horizontal Anisotropic Porous Layer Saturated with Water Near C 40 , International Communication of Mass and Transfer, 27, No 6, 765-774.

[12]: J.Bear, Y.Bachmat, Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media, Springer, p, 553, 1990.

[13]: Bear.Y.Nonlinear. Parameter estination. Academic Press. New york.1972.

[14]: A.E.Scheidrggerthe. Physics of flow through porous media, 3rd .University of Toronto Press. 3ed edition 19745.

[15]: Kozessy. Flow in porous media.S.B.Akad.Wiss.2a, 126.1927.

[16]: O.Reynolds.Papers on Mechanical and PhysicalSubjects.Canbridge.University Press (1900).

A.L.Dullien, Porous media, fluid transport and pore structure, Academic Press, 2nd edition (1992).

[17]: Beji H . Modelisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynamique, these de Doctorat, Université Paris 6.1989

[18]: J.C.Maxwell.Atreatseon electrical and magnetizing .clarendon press.Oxford.England.3rd Edition.vol.l.pp.440-445.1904.

[19]: Beji.H.Etude Numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé. Modelisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynamique.thése de Doctorate .Université de Paris 6.1989.

[20]: Maxime Nicolas.Ecoulements dans les milieux poreux. Université de provence .Marseille.2003.

[21]: Alloui Z., Dufaua L., Beji H., Vasseur P., Multiple steady states in a Porous enclosure partially heated and full salted frome below Int. J. of Therm. Sci. vol. 48, pp. 521–534, 2009.

[22] : Sophie Mergui.Transfert thermiques. Licence de mécanique 2emme Année Module 2A101.Sorbonne Universités.

[23] : Yves Jannot & Christian Moyne. Transfert thermique. Cours et 55 exercices corrigé .Ecole des Mines Nancy 2012.

[24] : J. Brau. INSA de Lyon. 2006.

[25] : JR.Seigne.Nature de transfert thermique

[26] : F. Kreith. Kodja Badr-El-Dine « Transmission de la chaleur et Thermodynamique » Traduction Et Adaptation. ÉDITEURS. PARIS. 1967

[27] : DeGroot S.R., and Mazur P., (1969) Non équilibrium thermodynamics, Amsterdam,

North Holland Pub.

[28] : S. Ostrach, Natural convection withe combined driving forces, Phys. Chem. Hydrodyn. (1980) 233–247.

[29] : R. Viskanta, T.L. Bergman, F.P. Incropera, Double diffusive Natural convection, in: Natural Convection Fundamentals and Applications, Hémisphère, 1985, pp. 1075–1099.

[30] : A. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, second édition, Springer,

1999.

[31] : D.A. Nield, Onset of thermo haline convection in a Porous medium, Water Ressources Res. 4 (1968) 553–560.

[32] : O. Sovran, M. Charrier-Mojtabi, A. Motjabi, Naissance de la convection thermosolutale en couche poreuse infinie avec effet Soret, Mécanique des fluides 329 (2001) 287–293.

[33] : Du Xuan Wang and Jian Hua Dit, « Forced Convective Heat Transfer in Vertical Annulus Filled withe Porous Media », Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, N°l7, pp. 4207-4213, 1993.

[34] : K. Muralidhar, « A Review of Free, Forced and Mixed Convection in Satured Porous Annulus », Sädhanã, Vol. 15, Part. I, pp. 1-41, June 1990.

[35] : A. Bejan and O.V. Trevisan, « Natural Convection withe Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effect in Porous Media », Int. J. Heat, Mass Transfer, Vol.28, N°8, pp. 1597-1611, 1985.

[36] : S.R. De Farias Neto, P. Le gentilhomme et J. Legrand, « Influence de la Diffusion Longitudinale sur le Transfert de la Matière Fluide- Paroi en Ecoulement Non-Etabli dans un Espace Annulaire », Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, N°16, pp. 3927-3935, 1997.

[37] : S. Ostrach, Natural convection withe combined driving forces, Phys. Chem. Hydrodyn. 1 (1980) 233–247.

[38] : R. Viskanta, T.L. Bergman, F.P. Incropera, Double diffusive Natural convection, in: Natural Convection Fundamentals and Applications, Hémisphère, 1985, pp. 1075–1099.

[39] : A. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, second édition, Springer, 1999.

[40] : D.A. Nield, Onset of thermo haline convection in a Porous medium, Water Ressources Res. 4 (1968) 553–560.

[41] : Gray, D. D. and Giorgini, A., (1976) The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 19, pp. 545-551.

[42]: Mamou M and Vasseur P. Thermosolutal Bifurcation Phenomena in a Porous Enclosure Subject to Vertical Temperature and Concentration Gradients. J. Fluid Mechanics, 395, 61-87, (1999).

[43]: Kalla L., Mamou M., Vasseur P and Robillard L. Multiple solutions for double diffusive convection in a shallow porous cavity with vertical fluxes of heat and mass. Int. J. Heat and Mass Transfer, 44, 4493-4504, (2001).

[44] : Benhadji K. Convection thermo-solutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide non newtonien binaire, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada, (2001).

[45] : Mamou M. Convection thermosolutale dans des milieux fluides et poreux confinés. PHD Université de Montréal Canada, (1998d).

[46]: Kimura S., Vynnycky M and Alavyoon F. Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux. J. Fluid Mech, 294, 231-248, (1995).

[47]: Mamou M. Stability analysis of the perturbed rest state and of the finite amplitude steady double-diffusive convection in a shallow porous enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer, 46, 12, 2263-2277, (2003).