République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Ahlam Hamidi

Opérateurs multilinéaires entre les espaces asymétriques normés

---

Soutenu publiquement le .... devant le jury composé de

Examinateur 1 :	Benaichouche Noureddine	Université de Médéa
Examinateur 2 :	Bagua Haoues	Université de Médéa
Encadreur :	Bouadjila khaled	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail :

Ã mes chers parents qui n'ont jamais cessé
de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.
Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et
reconnaissance (Abd Elaziz et Fatiha).

Ã mon deuxième père, mon frères (Youcef),
mes frères (Adel, Hamid, Ayoub et Oussama Daoud),
ma sœur (Lalia) et les maries de mes frères,
mes nièces et mes neveux (Hiba, Nour Elyaquin).

Ã mon mari qui m'ont chaleureusement, supporté et encouragé,
ses parents (Youcef et Fatna) et sa famille (Boulares),
tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments
d'émotion lors de la réalisation de ce travail.
Ã tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et Ã qui je
souhaite plus de succé.

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens á remercier Mesieurs **khaled Bouadjila** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, de sérieux et de compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes.

les remerciements pour les membres de jury aussi.

Mes sincéres remerciements á mes parents dont ce travail n'aurait pu aboutir sans leur inépuisable soutien et encouragement.

De tous mon coeur je remercie ma famille, qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Enfin je tiens á remercier tous mes amis pour leurs compréhension et encouragement dans la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, nous introduisons et caractérisons la continuité des opérateurs multilinéaires entre espaces asymétriques normés. Nous étudions en particulier les propriétés de complétude de semi-espace vectoriel asymétrique normé de ces opérateurs.

Abstract

In this memory,we introduce and characterize the continuity of multilinear mappings between asymmetric normed spaces. In particular, we study the completeness properties of the asymmetric normed semi-vector space of these mappings.

Table des matières

Introduction **5**

1 Espaces asymétrique normés **7**

1.1 Espaces quasi-métriques 7

1.2 Espaces asymétrique normés 11

1.3 Complétude des espaces asymétriques normés 14

2 Opérateurs multilinéaires entre espaces vectoriels normés **17**

2.1 Opérateur multilinéaire 17

2.2 Continuité d'un opérateur multilinéaire 18

2.3 Adjoint d'un opérateur multilinéaire 20

3 Opérateur multilinéaire entre espaces asymétriques normés **22**

3.1 Caractérisation des opérateurs multilinéaires continus 22

3.2 Complétude des espaces des opérateurs multilinéaires continus . . 25

3.3 Opérateur adjoint d'un opérateur multilinéaire 27

Introduction

Le but de ce mémoire est d'étudier et caractériser les opérateurs multilinéaire continus entre les espace asymétrique normés, ainsi que donner les propriétés de complétude de ces espaces.
Notre travail se divise en trois chapitres. Le premier chapitre consacré à l'étude des espaces asymétrique normés, et de donner des résultats et quelques exemples des asymétrique normes.
Dans le deuxième chapitre, on étudie les opérateurs multilinéaires entre espaces vectoriels normés.
Le troisième chapitre représente les opérateurs multilinéaires entre les espaces asymétriques normés.

Chapitre 1

Espaces asymétrique normés

1.1 Espaces quasi-métriques

Définition 1.1 *Soit X un ensemble arbitraire non vide, une quasi-semi-métrique sur X est une application $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y, z \in X$ on a*

i) $\rho(x, x) = 0$,

ii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

De plus si ρ satisfait la propriété suivante

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \Rightarrow x = y, \tag{1.1}$$

alors ρ est appelé quasi-métrique. Un espace quasi-métrique est un ensemble arbitraire non vide X muni d'une quasi-métrique ρ. Il est clair que toute métrique est une quasi-métrique.

Définition 1.2 *Soit (X, ρ) un espace quasi-semi-métrique.*

1. *Le conjugue de ρ est la quasi-semi-métrique $\overline{\rho}$ définie par*

$$\overline{\rho}(x, y) = \rho(y, x) \text{ pour tout } x, y \in X. \tag{1.2}$$

2. *La quasi-semi-métrique associe de ρ est l'application $\rho^s : X \times X \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\rho^s(x, y) = max\{\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y)\}$$

Exemple 1.1 *L'application* $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\begin{cases} \rho(x,y) = y - x & si \quad x \leq y \\ \rho(x,y) = 1 & si \quad x > y \end{cases}$$

est une quasi-métrique sur $\mathbb{R}$. *En effet, pour tout* x, y *et* $z \in \mathbb{R}$ *on a*

i) $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$ *si et seulement si* $y - x = 0$, *c-à-d* $x = y$.

ii) Pour l'inégalité triangulaire, on a les cas suivants :

1) Si $x \leq y$ *et* $y \leq z$. *Alors on a :*

$$\rho(x,y) = y - x \leq z - x = \rho(x,z) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

2) Si $x \leq y$ *et* $x \leq z$ *et* $z < y$. *Alors*

$$\rho(x,y) = y - x = z - x + y - z = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

3) Si $x \leq y$ *et* $z < x$. *Alors*

$$\rho(x,y) = y - x \leq y - z = \rho(z,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

4) Si $y < x$ *et* $x \leq z$. *Alors*

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,z) + 1.$$

5) Si $y < x$ *et* $y \leq z$ *et* $z < x$. *Alors on a*

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 1 + \rho(z,y).$$

6) Si $y < x$ *et* $z < y$. *Alors*

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 1 + \rho(z,y).$$

Dans la suite on donne une condition pour que ρ^s *est une métrique.*

Proposition 1.1 *Soit* (X, ρ) *un espace quasi-semi-métrique. Alors, la quasi-semi-métrique* ρ^s *associe de* ρ *est une métrique si et seulement si* ρ *est une quasi-métrique.*

Preuve . Supposons que ρ est une quasi-métrique sur X. Soit x, y et $z \in X$.

i) $\rho^s(x,y) = 0$ si et seulement si

$$max\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} = max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\} = 0,$$

c-à-d

$$\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0,$$

et ceci équivalent à $x = y$.

ii) On a

$$\begin{aligned}\rho^s(x,y) &= max\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} \\ &= max\{\rho(y,x), \overline{\rho}(y,x)\} = \rho^s(y,x).\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}\rho^s(x,y) &= max\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} \\ &\leq max\{\rho(x,z) + \rho(z,y), \overline{\rho}(x,z) + \overline{\rho}(z,y)\} \\ &\leq max\{\rho(x,z), \overline{\rho}(x,z)\} + max\{\rho(z,y), \overline{\rho}(z,y)\},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\rho^s(x,y) \leq \rho^s(x,z) + \rho^s(z,y).$$

Donc, ρ est une métrique sur X.
Inversement, supposons que ρ est une métrique sur X. Soit $x, y \in X$ avec $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$. Alors

$$\rho^s(x,y) = max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\} = 0,$$

ce qui implique que $x = y$. Donc, ρ est une quasi-métrique sur X. ■

Définition 1.3 (Les boules dans (X,ρ)) *Soient (X,ρ) un espace quasi-métrique, $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

1. *La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,\rho}(x_0, r)$, et la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,\rho}[x_0, r]$, de (X,ρ) sont définit, respectivement par :*

$$B_{X,\rho}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\},$$

et

$$B_{X,\rho}[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

2. *La boule unité ouvert noté* $B'_{X,\rho}$ *et la boule unité fermé noté* $B_{X,\rho}$ *de* (X,ρ) *sont définit respectivement par :*

$$B'_{X,\rho} = B_{X,\rho}(0,1) \text{ et } B_{X,\rho} = B_{X,\rho}[0,1].$$

3. *La sphère de centre* x_0 *et de rayon* r *noté* $S_{X,\rho}(x_0,r)$ *et la sphère unité noté* $S_{X,\rho}$ *de* (X,ρ) *sont définit respectivement par :*

$$S_{X,\rho}(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) = r\} \text{ et } S_{X,\rho} = S_{X,\rho}(0,1).$$

Définition 1.4 (Convergence d'une suite dans un espace quasi-métrique) *Soit* (X,ρ) *un espace quasi-métrique et* $(x_n)_n$ *une suite dans* X*, on dit que* $(x_n)_n$ *est convergente vers* x *et on écrit* $x_n \to x$*, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x,x_n) = 0.$$

Dans ce cas on dit que $(x_n)_n$ *est* ρ*-convergente vers* x*.*

Proposition 1.2 *Soit* $(x_n)_n$ *une suite dans un espace quasi-métrique* (X,ρ)*. Alors on a :*

1. *Si* $(x_n)_n$ *est* ρ*-convergente vers* x *et* $\overline{\rho}$*-convergente vers* y*, alors* $\rho(x,y) = 0$*.*
2. *Si* $(x_n)_n$ *est* ρ*-convergente vers* x *et* $\rho(y,x) = 0$*, alors* $(x_n)_n$ *est aussi* ρ*-convergente vers* y*.*

Preuve

1) Par l'inégalité

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x,x_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n,y) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\rho}(y,x_n) = 0,$$

on obtient

$$\rho(x,y) = 0.$$

2) Par l'inégalité

$$\rho(y,x_n) \leq \rho(y,x) + \rho(x,x_n) \text{ , pour tout } n \in N,$$

on obtient

$$\rho(y,x_n) \leq \rho(x,x_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Et ceci implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y, x_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \rho(x, x_n) = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y, x_n) = 0.$$

Donc, $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers y.

■

1.2 Espaces asymétrique normés

Définition 1.5 *Soit X un espace vectoriel réel, une asymétrique semi norme sur X est une fonction $q : X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a*

i) $q(\lambda x) = \lambda q(x)$,

ii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

De plus si q satisfait la propriété suivante

$$q(x) = q(-x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

alors on dit que q est une asymétrique norme sur X. Un espace asymétrique normé est un espace vectoriel réel X muni d'une asymétrique norme q.

Définition 1.6 *Soit (X, q) un espace asymétrique normé.*

1) L'asymétrique semi-norme $\overline{q}$ conjugué de q est défini par

$$\overline{q}(x) = q(-x), \text{ pour tout } x \in X.$$

2) La semi-norme q^s associe de q est définie sur X par

$$q^s(x) = max\{q(x), \overline{q}(x)\}, \text{ pour tout } x \in X.$$

Remarque 1.1 *Il est claire que q^s est une norme sur X, si q est une asymétrique norme sur X. En effet, si q est une asymétrique norme sur X, alors pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in R$ on a :*

i)

$$\begin{aligned} q^s(x) = 0 &\Leftrightarrow max\{q(x), \overline{q}(x)\} = max\{q(x), q(-x)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow q(x) = q(-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

ii) On a deux cas.

1. *Si* $\lambda \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned} q^s(\lambda x) &= max\{q(\lambda x), \overline{q}(\lambda x)\} \\ &= \lambda max\{q(x), \overline{q}(x)\} \\ &= |\lambda| q^s(x). \end{aligned}$$

2. *Si* $\lambda < 0$, *on a*

$$\begin{aligned} q^s(\lambda x) &= max\{q(\lambda x), \overline{q}(\lambda x)\} \\ &= max\{q((-\lambda)(-x)), \overline{q}((-\lambda)(-x))\} \\ &= -\lambda max\{q(-x), \overline{q}(-x)\} \\ &= |\lambda| q^s(x). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} q^s(x+y) &= max\{q(x+y), \overline{q}(x+y)\} \\ &\leq max\{q(x)+q(y), \overline{q}(x)+\overline{q}(y)\} \\ &\leq max\{q(x), \overline{q}(x)\} + max\{q(y), \overline{q}(y)\} \\ &= q^s(x) + q^s(y). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 *On considère sur* $\mathbb{R}$ *l'asymétrique norme* u *définie par*

$$u(x) = x^+ = \max\{x, 0\}. \tag{1.3}$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\overline{u}(x) = x^- = \max\{-x, 0\}$$

et

$$u^s(x) = \max\{x^-, x^+\} = \mid x \mid .$$

En effet pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *on a*

i)

$$\begin{aligned} u(x) = u(-x) = 0 &\Leftrightarrow max\{x, 0\} = \max\{-x, 0\} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

ii)

$$u(\lambda x) = \max\{\lambda x, 0\} = \lambda \max\{x, 0\} = \lambda u(x).$$

iii)

$$\begin{aligned} u(x+y) &= \max\{x+y, 0\} \\ &\leq \max\{x, 0\} + \max\{y, 0\} \\ &= u(x) + u(y). \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Toute asymétrique norme q sur un espace vectoriel réel X induite une quasi-métrique ρ_q sur X donnée par la formule*

$$\rho_q(x, y) = q(y - x), \text{ pour tout } x, y \in X. \tag{1.4}$$

C'est-à-dire tout espace asymétrique normé est un espace quasi-métrique. En effet, soit (X, q) un espace asymétrique normé, donc pour x, y et $z \in X$ on a :

i)

$$\begin{aligned} \rho_q(x, y) = \rho_q(y, x) = 0 &\Leftrightarrow q(y - x) = q(-(y - x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \rho_q(x, y) &= q(y - z + z - x) \\ &\leq q(z - x) + q(y - z) \\ &= \rho_q(x, z) + \rho_q(z, y). \end{aligned}$$

Donc, ρ_q est une quasi métrique sur X.

Définition 1.7 *Soient (X, q) un espace asymétrique normé, $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

1. *La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,q}(x_0, r)$ et la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,q}[x_0, r]$ de X sont définit (respectivement) par :*

$$B_{X,q}(x_0, r) = \{x \in X : q(x - x_0) < r\},$$

et

$$B_{X,q}[x_0, r] = \{x \in X : q(x - x_0) \leq r\}.$$

2. *La boule unité ouverte noté* $B'_{X,q}$ *et la boule unité fermée noté* $B_{X,q}$ *de* X *sont définit (respectivement) par :*

$$B'_{X,q} = B_{X,q}(0,1) \text{ et } B_{X,q} = B_{X,q}[0,1].$$

3. *La sphère de centre* x_0 *et de rayon* r *noté* $S_{X,q}(x_0,r)$ *et la sphère unité noté* $S_{X,q}$ *de* X *sont définis (respectivement) par :*

$$S_{X,q}(x_0,r) = \{x \in X : q(x-x_0) = r\} \text{ et } S_{X,q} = S_{X,q}(0,1).$$

Définition 1.8 (Convergence d'une suite dans un espace asymétrique normé) *Soit* (X,q) *un espace asymétrique normé et soit* $(x_n)_n$ *une suite dans* X*. On dit que* $(x_n)_n$ *est convergente vers* x *si*

$$\lim_{n\to+\infty} q(x_n - x) = 0.$$

Dans ce cas, on dit que $(x_n)_n$ *est* q*-convergente vers* x*.*

1.3 Complétude des espaces asymétriques normés

Dans un espace métrique (X, d) si $(x_n)_n$ est de Cauchy on dit simplement : $(x_n)_n$ est d-Cauchy.

Définition 1.9 *Une suite* $(x_n)_n$ *dans un espace quasi-métrique* (X,ρ) *est dite*

1. ρ*-Cauchy à gauche (respectivement à droite) si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $x \in X$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\rho(x, x_n) < \varepsilon, \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0$$

(respectivement

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0).$$

2. ρ^s*-Cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\rho^s(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ pour tout } n, m \geq n_0.$$

3. K*-Cauchy à gauche (respectivement à droite) si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq n \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

(respectivement

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq n \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.)$$

4. *Faiblement K-Cauchy à gauche (respectivement à droite) si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\rho(x_{n_0}, x_n) < \varepsilon, \text{ pour tout } \quad n \geq n_0$$

(respectivement

$$\rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon, \text{ pour tout } \quad n \geq n_0).$$

Dans la proposition suivante on trouve la relation entre ces notions.

Proposition 1.3 *[2] Soient* (X, ρ) *un espace quasi-semi-métrique et* $(x_n)_n$ *une suite dans* X*. On a*

$$\begin{array}{c} (x_n)_n \text{ est } \rho^s - Cauchy \\ \Downarrow \\ (x_n)_n \text{ est K-Cauchy à gauche} \\ \Downarrow \\ (x_n)_n \text{ est faiblement K-Cauchy à gauche} \\ \Downarrow \\ (x_n)_n \text{ est } \rho\text{-Cauchy à gauche,} \end{array}$$

avec mêmes implications si on remplace "gauche" par "droite".

Proposition 1.4 *[6] Soit* (X, ρ) *un espace quasi-semi-métrique. Une suite* $(x_n)_n$ *dans* X *est de Cauchy à gauche (dans certains sens) par rapport à* ρ *si et seulement si elle est de Cauchy à droite (dans le même sens) par rapport à* $\overline{\rho}$*.*

Dans la proposition suivante on trouve une caractérisation des suites de Cauchy dans l'espace métrique (X, ρ^s).

Proposition 1.5 *[6] Soit* (X, ρ) *un espace quasi-semi-métrique. La suite* $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans* (X, ρ^s) *si et seulement si elle est à la fois K-Cauchy à gauche et à droite.*

Dans la suite on donne la relation entre les suite de Cauchy dans (X, ρ) et la convergence de ces suites.

Proposition 1.6 *[2] Toute suite ρ-convergente est ρ-Cauchy à gauche et toute suite $\overline{\rho}$-convergente est ρ-cauchy à droite.*

Proposition 1.7 *[2] Dans un espace quasi-métrique régulier (X, ρ), si chaque suite convergente $(x_n)_n$ admet une sous-suite K-Cauchy à droite, alors X est métrisable.*

Chapitre 2

Opérateurs multilinéaires entre espaces vectoriels normés

2.1 Opérateur multilinéaire

Définition 2.1 *Soient $X_1, \cdots, X_m$ et Y des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une application*

$$T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$$

est dite opérateur (ou application) multilinéaire (ou m-linéaire) si

$$T(x_1, x_2, \cdots, \alpha x_k + \beta y_k, \cdots, x_m) = \alpha T(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_m) + \beta T(x_1, x_2, \cdots, y_k, \cdots, x_m)$$

pour tout $x_k, y_k \in X_k, 1 \leq k \leq m$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (c-à-d T est linéaire pour chaque composante).

- *Si $Y = \mathbb{K}$, T est dit forme multilinéaire.*
- *Si $m = 2$, T est dit bilinéaire (ou 2-linéaire).*

On note par $L(X_1, ..., X_m, Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y.

Exemple 2.1 *1) L'application*

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to xy$$

est une application bilinéaire.

2) L'application

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to xy + 1$$

n'est pas une application bilinéaire. En effet, pour $x, x', y \in \mathbb{R}$, on a :

$$T(x + x', y) = xy + x'y + 1 \neq T(x, y) + T(x', y).$$

Remarque 2.1 *L'ensemble S de tout les vecteurs de Y de la forme $T(x_1, \cdots, x_m)$ n'est pas, en général, un sous espace vectoriel de Y.*
En effet, on considère $X_1 = X_2$ et Y des espaces vectoriels tels que $\dim X_1 = \dim X_2 = 2$ et $\dim Y = 4$. Soient $\{a_1, a_2\}$ une base de X_1 et $(e_i)_{i=1}^4$ une base de Y. On considère l'application bilinéaire T définie par :

$$T(x_1, x_2) = \zeta_1\eta_1 e_1 + \zeta_1\eta_2 e_2 + \zeta_2\eta_1 e_3 + \zeta_2\eta_2 e_4,$$

où $x_1 = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2$ et $x_2 = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$. On a

$$S = \left\{ z = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i;\ \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 = 0 \right\}.$$

Soient $z_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ et $z_2 = e_1 + e_3$. C'est claire que $z_1, z_2 \in S$, mais $z_1 - z_2 \notin S$, d'où S n'est pas un sous espace vectoriel de Y (voir [3]).

2.2 Continuité d'un opérateur multilinéaire

Définition 2.2 *Un m-linéaire opérateur $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ est continu, s'il est continu comme une fonction entre deux espace vectoriel normé.*

Théorème 2.1 *Pour $T \in L(X_1, \cdots, X_m; Y)$, les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. *L'opérateur T est continu.*
2. *L'opérateur T est continu en $(0, \cdots, 0)$.*
3. *Il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :*

$$\|T(x_1, \cdots, x_m)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_m\|, \forall (x_1, \cdots, x_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m. \quad (2.1)$$

Dans ce cas, on dit que T est borné et on pose

$$\|T\| = \sup_{\|x_k\|\leq 1, k=1,\cdots,m} \|T(x,\cdots,x_m)\|.$$

Il est facile de voir que

$$\|T\| = \inf\{C : C \textit{ vérifiant l'inégalité } (2.1)\}.$$

On note $\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)$ l'ensemble des opérateurs continus de $X_1\times\cdots\times X_m$ dans Y.

Remarque 2.2 *Les applications multilinéaires continues ne sont pas, a priori uniformément continues. En effet, l'application*

$$\begin{aligned} A :&\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ &(x,y)\mapsto xy, \end{aligned}$$

est bilinéaire continue, mais n'est pas uniformément continue.

Théorème 2.2 *Soit $T : X_1\times\cdots\times X_m \to Y$ une application m-linéaire. Supposons que $X_1\times\cdots\times X_m$ est de dimension finie. Alors T est continue.*

Preuve Il est préférable de la faire dans le cas où $m = 2$, dans le but d'alléger au maximum les notations, ce qui permet d'étendre ensuite cette démonstration au cas m quelconque. Supposons que Y est menu de la norme $\|.\|$. Supposons que $\dim X_1 = r$ et $\dim X_2 = s$, et que X_1 est menu de la norme N_1 définie par $N_1(x_1,\cdots,x_r) = \sup_{1\leq i\leq r}|x_i|$ et X_2 est menu de la norme N_2 définie par $N_2(y_1,\cdots,y_s) = \sup_{1\leq j\leq s}|y_j|$. On appelle alors $(e_1,...,e_r)$, une base de X_1 et $(f_1,\cdots,f_s)$ une base de X_2 .
Soit $x\in X_1\times X_2$. Alors x s'écrit sous la forme

$$x = \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{s}\mu_j f_j\right).$$

Il s'ensuit que

$$T(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\lambda_i\mu_j T(e_i,f_j).$$

On a alors

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} |\lambda_i \mu_j| \|T(e_i, f_j)\| \leq N_1(x_1)N_2(x_2) \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \|T(e_i, f_j)\|.$$

En posant $\ell = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \|T(e_i, f_j)\|$, on obtient :

$$\forall x \in X_1 \times X_2, \|T(x)\| \leq \ell N_1(x_1)N_2(x_2).$$

On retrouve la caractérisation de la continuité d'une application linéaire. T est donc continue. ■

Théorème 2.3 *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces vectoriels normés et Y est un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}(X_1, \cdots, X_m; Y)$ est un espace de Banach.*

2.3 Adjoint d'un opérateur multilinéaire

Définition 2.3 *Soient $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X_1, \cdots, X_m; Y)$, on définit l'adjoint de T par :*

$$T^* : Y^* \to \mathcal{L}(X_1, \cdots, X_m; \mathbb{K}),\ y^* \mapsto T^*(y^*) : X_1 \times \cdots \times X_m \to \mathbb{K},$$

avec

$$T^*(y^*)(x_1, \cdots, x_m) = y^*(T(x_1, \cdots, x_m)).$$

Proposition 2.1 *Pour $T \in \mathcal{L}(X_1, \cdots, X_m; Y)$, on a :*

1. *T^* est linéaire, continu et $\|T^*\| = \|T\|$.*
2. *Si $u \in \mathcal{L}(Y; Z)$, alors $(u \circ T)^* = T^* \circ u^*$.*

Preuve

1. C'est claire que T^* est linéaire et continu. Par les conséquences de Théorème de Hahn-Banach (Brezis [1]), on a :

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &= \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|T^*(y^*)\| \\
&= \sup_{\|y^*\| \leq 1} \sup_{\|x_k\| \leq 1, 1 \leq k \leq m} \|y^*(T(x_1, \cdots, x_m))\| \\
&= \sup_{\|x_k\| \leq 1, 1 \leq k \leq m} \|T(x_1, \cdots, x_m)\| \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

2. Pour tout $z^* \in Z^*$ et $x_k \in X_k, k = 1, \cdots, m$, on a

$$\begin{aligned}(u \circ T)^*(z^*)(T(x_1, \cdots, x_m)) &= z^*(u(T(x_1, \cdots, x_m))) \\ &= u^*(z^*)(T(x_1, \cdots, x_m) \\ &= T^*(u^*(z^*))(x_1, \cdots, x_m) \\ &= (T^* \circ u^*)(z^*)(x_1, \cdots, x_m).\end{aligned}$$

Donc $(u \circ T)^* = T^* \circ u^*$.

■

Chapitre 3

Opérateurs multilinéaires entre espaces asymétriques normés

3.1 Caractérisation des opérateurs multilinéaires continus

Définition 3.1 *Une N-asymétrique norme est une asymétrique norme p sur l'espace vectoriel réel X, telle que : si $p(x) = 0$, alors $x = 0$. Nous disons que la paire (X, p) est un espace N-asymétrique normé.*

Exemple 3.1 *L'application $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$p(x) = |x| + \max\{x, 0\} \tag{3.1}$$

est une N-asymétrique (appelle N-asymétrique norme).

Définition 3.2 *Une application m-linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ est continue, si elle est continue comme une application entre deux espaces asymétriques normés.*

Théorème 3.1 *Soient $(X_1, p_1), \cdots, (X_m, p_m)$ et (Y, q) des espaces asymétriques normés et $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ un opérateur multilinéaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *T est continu.*
2. *T est continu en $(0, \cdots, 0)$.*

3. Il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que :

$$q(T(x_1, \cdots, x_m)) \leq M p_1(x_1) \cdots p_m(x_m), \tag{3.2}$$

pour tout $x_j \in X_j, j = 1, \cdots, m$.

4.

$$\|T\|_{(p_1,\cdots,p_m;q)} := \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,\cdots,m} q(T(x_1, \cdots, x_m)) < \infty \tag{3.3}$$

Exemple 3.2 *Soit l'application bilinéaire $T : (\mathbb{R}, p) \times (\mathbb{R}, p) \longrightarrow (\mathbb{R}, u)$, définie par*

$$T(x, y) = xy,$$

où u est l'asymétrique norme usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par (1.3) *et p la N-asymétrique norme définie par* (3.1)*. On a*

$$u(T(x, y)) = \max(xy, 0) \leq |x||y| \leq p(x)p(y),$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}_{(p_1,\cdots,p_m;q)}(X_1, \cdots, X_m; Y)$, on a*

$$q(T(x_1, \cdots, x_m)) \leq \|T\|_{(p_1,\cdots,p_m,q)}\, p_1(x_1) \cdots p_m(x_m), \tag{3.4}$$

pour tout $x_j \in X_j, j = 1, \cdots, m$. De plus $\|T\|_{(p_1,\cdots,p_m,q)}$ peut être calculer également par la formule :

$$\|T\|_{(p_1,\cdots,p_m;q)} = \inf\{M \geqslant 0 : M \textit{ vérifiant l'inégalité } (3.2)\} \tag{3.5}$$

Corollaire 3.2 *Soit $m \in \mathbb{N}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes pour l'opérateur m-linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_{2m+1} \longrightarrow Y$*

1. T est continu de $(X_1, p_1) \times \cdots \times (X_{2m+1}, p_{2m+1})$ dans (Y, q)

2. T est continu de $(X_1, \overline{p}_1) \times \cdots \times (X_{2m+1}, \overline{p}_{2m+1})$ dans $(Y, \overline{q})$

Donc

$$\mathcal{L}_{(p_1,\cdots,p_{2m+1};q)}(X_1, \cdots, X_{2m+1}; Y) \subset \mathcal{L}^s_{(p_1^s,\cdots,p_{2m+1}^s;q^s)}(X_1, \cdots, X_{2m+1}; Y),$$

et

$$\|T\| := \|T\|_{(p_1^s,\cdots,p_{2m+1}^s;q^s)} \leq \|T\|_{(p_1,\cdots,p_{2m+1};q)},$$

pour tout $T \in \mathcal{L}_{(p_1,\cdots,p_{2m+1};q)}(X_1, \cdots, X_{2m+1}; Y)$.

Preuve L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) découle de

$$\sup_{\overline{p}_j(x_j)\leq 1, j=1,...,2m+1} \overline{q}(T(x_1,...,x_{2m+1})) = \sup_{p_j(-x_j)\leq 1, j=1,...,2m+1} q(T(-x_1,...,-x_{2m+1}))$$
$$= \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,...,2m+1} q(T(x_1,...,x_{2m+1}))$$

Avec cela, on a $\|T\|_{(p_1,...,p_{2m+1};q)} = \|T\|_{(\overline{p}_1,...,\overline{p}_{2m+1};\overline{q})}$.
Soit $T \in \mathcal{L}_{(p_1,...,p_{2m+1};q)}(X_1,...,X_{2m+1};Y)$. Pour tout $x_j \in X_j$ telle que $p_j^s(x_j) \leq 1, j = 1,...,2m+1$, on a

$$q(T(x_1,...,x_{2m+1})) \leq \|T\|_{(p_1,...,p_{2m+1};q)}$$

et

$$\overline{q}(T(x_1,...,x_{2m+1})) \leq \|T\|_{(\overline{q}_1,...,\overline{q}_{2m+1};\overline{q})} .$$

Cela implique que

$$\|T\| = \sup_{p_j^s(x_j)\leq 1, j=1,...,2m+1} q^s(T(x_1,...,x_{2m+1})) \leq \|T\|_{(p_1,...,p_{2m+1};q)} < \infty$$

et la preuve suit. ■

Proposition 3.3 *Le nombre* $\|.\|_{(p_1,...,p_m;q)}$ *est une asymétrique semi-norme sur le cône de tout les opérateurs multilinéaires continus entre les espaces* N*-asymétriques normés* $X_1 \times \cdots \times X_m$ *et* Y.
Comme dans le cas linéaire, on considère une norme asymétrique expansée sur l'espace $\mathcal{L}^s_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$, *par la même formule*

$$\|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} = \sup_{p_j(x^j)\leq 1} q(T(x_1,...,x_m))$$

avec la possibilité que $\|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} = +\infty$.
Avec l'asymétrique norme $\|.\|_{(p_1,...,p_m;q)}$ *on associons une norme expansée sur* $\mathcal{L}^s_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$ *définie par :*

$$\|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} = max\{\|T\|_{(p_1,...,p_m;q)}, \|-T\|_{(p_1,...,p_m;q)}\}.$$

Corollaire 3.4 *Pour tout* $T \in \mathcal{L}^s_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$, *on a :*

$$\|T\| \leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} . \tag{3.6}$$

Preuve Afin d'établir (3.6), on peut supposer $\|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} < \infty$. Alors on obtient, $\|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} < \infty$ et $\|-T\|_{(p_1,...,p_m;q)} < \infty$. Pour tout $x_j \in X_j, j = 1, ..., m$, on a

$$\begin{aligned} q(T(x_1, ..., x_m)) &\leq \|T\|_{(p_1,...,p_m;q)}\, p_1(x_1)...p_m(x_m) \\ &\leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}\, p^s_1(x_1)...p^s_m(x_m), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{q}(T(x_1, ..., x_m)) &\leq \|-T\|_{(p_1,...,p_m;q)}\, p_1(x_1)...p_m(x_m) \\ &\leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}\, p^s_1(x_1)...p^s_m(x_m). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$q^s(T(x_1, ..., x_m)) \leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}\, p^s_1(x_1)...p^s_m(x_m)$$

et $\|T\| \leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}$. ■

3.2 Complétude des espaces des opérateurs multilinéaires continus

Lemme 3.5 *Pour tout* $T \in \mathcal{L}^s_{(p^s_1,...,p^s_m;q^s)}(X_1, ..., X_m; Y)$ *on a*

$$\|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} = \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,...,m} q^s(T(x_1, ..., x_m)). \tag{3.7}$$

Preuve Soit α le membre de droite de l'égalité (3.7). Alors

$$\begin{aligned} \|-T\|_{(p_1,...,p_m;q)} &= \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,...,m} q(-T(x_1, ..., x_m)), \\ &\leq \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,...,m} q^s(T(x_1..., x_m)) = \lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} &= \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,...,m} q(T(x_1, ..., x_m)), \\ &\leq \sup_{p_j(x_j)\leq 1, j=1,...,m} q^s(T(x_1..., x_m)) = \alpha. \end{aligned}$$

Cela implique $\|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} \leq \alpha$. Aussi, pour tout $x_j \in X_j$ telle que

$$p_j(x_j) \leq 1, j = 1, ..., m,$$

on a

$$q(T(x_1,...,x_m)) \leq \|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} \leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)},$$

et

$$q(-T(x_1,...,x_m)) \leq \|-T\|_{(p_1,...,p_m;q)} \leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}$$

Donc $\alpha \leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}$. ■

Proposition 3.6 *Soit m un nombre naturel impair. L'ensemble $\mathcal{L}_{(p_1,...,p_m;q)}(X_1,...,X_m;Y)$ est fermé dans l'espace*

$$(\mathcal{L}^s_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y), \|.\|^s_{(p_1,...,p_m;q)})$$

Preuve Soit $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{L}_{(p_1,...,p_m;q)}(X_1,...,X_m;Y)$ qui converge vers $T \in \mathcal{L}^s_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$ par rapport à la norme $\|.\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}$. On montre que $T \in \mathcal{L}^s_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$. En effet, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\begin{aligned}\|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} &\leq \|T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} \\ &\leq \|T_{n_0} - T\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} + \|T_{n_0}\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} \\ &\leq 1 + \|T_{n_0}\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} < \infty.\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2 *Pour $(X_1,p_1),...,(X_m,p_m)$ des espaces N-asymétriques normés et (Y,q) un espace asymétrique normé, on suppose que (Y,q) est bi-Banach. Donc $\mathcal{L}^s_{((p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$ est un espace bi-Banach par rapport à la norme $\|.\|_{(p_1,...,p_m;q)}$. Par conséquent, si m est impair, alors $(\mathcal{L}_{((p_1,...,p_m;q)}(X_1,...,X_m;Y), \|.\|_{(p_1,...,p_m;q)})$ est un cône bi-Banach.*

Preuve Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{L}^s_{((p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$ par rapport à la norme $\|.\|^s_{(p_1,...,p_m;q)}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\|T_n - T_k\| \leq \|T_n - T_k\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} < \varepsilon,$$

pour tout $n,k \geqslant n_0$, alors $(T_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach

$$(\mathcal{L}^s_{((p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y), \|\ .\ \|_{(p_1^s,...,p_m^s;q^s)}).$$

Donc, il existe $T \in \mathcal{L}^s_{((p_1^s,...,p_m^s;q^s)}(X_1,...,X_m;Y)$ telle que $\|T_n - T\| \to 0$. Comme $T_n - T$ est continue on obtient

$$q^s(T_n(x_1,...,x_m) - T(x_1,...,x_m)) \leq \|T_n - T\| p_1^s(x_1),...,p_m^s(x_m),$$

et $(T_n(x_1,\cdots,x_m))_n$ est convergent vers $T(x_1,...,x_m)$ dans l'espace de Banach (Y,q^s) pour tout $x_j \in X_j, j=1,..,m$. Alors il existe $k \geqslant n_0$ telle que $q^s((T-T_k)(x_1,...,x_m)) < \varepsilon$. En utilisant la formule (3.7), pour tout $n \geqslant n_0$ et $x_j \in X_j$ avec $p_j(x_j) \leq 1, j=1,...,m$, on a

$$\begin{aligned} q^s((T-T_k)(x_1,...,x_m)) &= q^s((T(x_1,...,x_m)-T_n(x_1,...,x_m))) \\ &\leq q^s((T(x_1,...,x_m)-T_k(x_1,...,x_m))) \\ &+ q^s((T_k(x_1,...,x_m)-T_n(x_1,...,x_m))) \\ &< \varepsilon + \|T_n - T_k\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant le sup sur tout $x_j \in X_j$ avec $p_j(x_j) \leq 1, j=1,...,m$. On obtient

$$\|T-T_n\|^s_{(p_1,...,p_m;q)} < 2\varepsilon, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

La deuxième affirmation est une conséquence de la première et de la proposition ci-dessus. ■

3.3 Opérateur adjoint d'un opérateur multilinéaire

Définition 3.3 *Soient $(X_1,p_1),\cdots,(X_m,p_m)$ et (Y,q) sont des espaces N-asymétriques normés. Si $T \in LC_{p_1,\cdots,p_m,q}(X_1,\cdots,X_m,Y)$, on définit l'adjoint de T par*

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow LC_{p_1,\cdots,p_m,u}(X_1,\cdots,X_m,\mathbb{R}) \\ f &\mapsto T^*(f) : X_1 \times \cdots X_m \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

avec

$$T^*(f)(x_1,\cdots,x_m) = f(T(x_1,\cdots,x_m)).$$

Proposition 3.7 *Soit (X,p) un espace à asymétrique semi-norme. Si $x_0 \in X$ avec $p(x_0) > 0$, alors il existe une fonction linéaire continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\|\varphi\| = 1 \quad et \quad \varphi(x_0) = p(x_0). \tag{3.8}$$

Théorème 3.3 *L'application T^* est bornée et $\|T^*\| = \|T\|_{(p_1,...,p_m;q),}$ où $\|T^*\|$ est la plus petite constante bornée pour T^*.*

Preuve Pour tout $f \in Y^*$ on écrit

$$\begin{aligned}\|T^*(f)\|_{(p_1,...,p_m;u),} &= \sup_{p_j(x_j)\leq 1 j=1,...,m} u(f(T(x_1,...,x_m))) \\ &\leq q^*(f) \sup_{p_j(x_j)\leq 1 j=1,...,m} q(T(x_1,...,x_m)) \\ &= q^*(f)\|T\|_{(p_1,...,p_m;q)},\end{aligned}$$

ce qui signifie que T^* est bornée et $\|T^*\| \leq \|T\|_{(p_1,...,p_m;q)}$.
Pour établir l'inverse inégalité, supposons que $x_j \in X_j$ telle que $p_j(x_j) \leq 1$ pour tout $j = 1, ..., m$ et $T(x_1, ..., x_m) \neq 0$.
Par la proposition ci-dessus, il existe $f \in Y^*$ telle que $q^*(f) = 1$ et

$$f(T(x_1, ..., x_m)) = q(T(x_1, ..., x_m)).$$

D'où

$$\|T^*(f)\|_{(p_1,...,p_m)} \geq u(f(T(x_1, ..., x_m))) = u(q(T(x_1, ..., x_m))) = q(T(x_1, ..., x_m)),$$

à partir de lequel il s'ensuit que

$$\|T^*\| \geq \|T^*(f)\|_{(p_1,...,p_m;u)} \geq \sup_{p_j(x_j)\leq 1 j=1,...,m} q(T(x_1, ..., x_m)) = \|T\|_{(p_1,...,p_m;q)} .$$

■

Bibliographie

[1] H. Brézis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer Science and Business Media, (2010).

[2] Ş. Cobzaş, Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Springer Basel Heidelberg New York Dordrecht London, (2013).

[3] W.H. Greub, Multilinear algebra, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1967).

[4] F. Latreche, Etude de quelques propriétés classiques dans le cas non-linéaire, thèse unv. M'sila (2020).

[5] M. S. Ramanujan and E. Schock, Operator ideals and spaces of bilinear operators, Lin. Multilin. Alg. 18 (1985), 307–318.

[6] I.L. Reilly, P.V. Subrahmanyam, M.K. Vamanamurthy, Cauchy sequences in quasi- pseudo-metric spaces,Monatsh. Math. 93 (1982), 127–140.