RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

GUEDAHI Mustafa

RELATIONS LINÉAIRES SUR LES ESPACES ASYMÉTRIQUES NORMÉS

Soutenu publiquement le 2022/06/23 devant le jury composé de

Président :	Benaichouche Noureddine	Université de Médéa
Examinateur :	Mekdache Noureddine	Université de Médéa
Encadreur :	khaled Bouadjila	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022

Table des matières

Introduction **VI**

Notations **VII**

1 Relations linéaires **1**

1.1 Relations sur les ensembles 1

1.2 Relations linéaires 3

1.3 Algèbre des relations linéaires 5

1.4 Relations linéaires normés 6

1.4.1 Norme d'une relation linéaire 6

1.5 Relations linéaires continues 7

2 Espaces asymétrique normés **9**

2.1 Espaces quasi-métriques 9

2.2 Espaces asymétrique normés 13

2.3 Complétude des espaces asymétriques normés 16

2.4 Opérateurs linéaires continus entre espaces asymétriques normés 18

2.5 Asymétrique norme sur $\mathcal{L}C(X,Y)$ 19

3 Relations linéaires sur les espaces asymétriques normés **21**

3.1 Relations linéaires continues 21

Conclusion générale **26**

Remerciement

La plus belle louange est due à Allah Dieu tout-puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

Le mérite d'un mémoire appartient certes à l'auteur, mais également à qui l'encadre donc j'offre premièrement de sincères et chaleureux remerciements à mon encadreur M.khaled Bouadjila. Dans mon cas, mon encadreur a été d'un soutien et d'une attention exceptionnels. La confiance qu'il m'a accordée ainsi que le soutien moral qu'il a manifesté à mon égard m'ont permis d'accumuler des expériences professionnelles et personnelles marquantes qui font de moi une personne grandie.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à mes parents, mes frères, ma soeur et tous mes amis. leur confiance en soi et leur soutien constant me donnent une base solide me permettant de persévérer et de me dépasser.

Et bien sûr, je ne peux ignorer ma gratitude envers les membres du jury pour avoir bien voulu participer à l'évaluation de mon mémoire et tous ceux qui m'ont appris pendant toutes ces années. Enfin, je remercie tous ceux qui m'aident de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail. Merci beaucoup.

Résumé

Nous étudions la continuité de relations linéaires définies sur des espaces asymétriques normés à valeurs dans des espaces vectoriels normés. Nous donnons quelques caractérisations géométriques de ces applications.

Abstract

We study the continuity of linear relations defined on asymmetric normed spaces with values in normed spaces. We give some geometric charactirization of this mappings.

Introduction

La théorie des opérateurs multivaleurs linéaires (ou relations linéaires) entre espaces vectoriels normés est une extension naturelle de l'analyse fonctionnelle linéaire. Elle a été introduite en 1932 par J.V. Neumann [10], et a été développé dans différentes directions. Un traitement systématique a été donné par Arens [4] et par Coddington [5]. Cette approche s'est avérée très fructueuse et un certain nombre de concepts ont été fructueusement généralisée au cadre multivaleurs par plusieurs auteurs (voir [1],[2],[3]). L'objectif de notre mémoire est d'étudier et de caractériser les relations linéaires sur les espaces asymétriques normés.

Ce mémoire se divise en trois chapitres :

Le 1^{er} **chapitre :** présente une étude générale de relations linéaires sur les espaces vectoriels normés.

Le 2^{me} **chapitre :** présente une étude de quelques propriétés topologiques des espaces asymétriques normés.

Le 3^{me} **chapitre :** nous étudions les relations linéaires sur les espaces asymétriques normés.

Notations

2^V : L'ensemble des parties.

$(Y, \|.\|)$: Espace vectoriel norme.

$R(U, V)$: La classe de toutes les relation de U dans V.

$\mathcal{L}R(U, V)$:La classe des relation linéaire de $R(U, V)$.

$B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$: La boule unité fermé de l'espace vectoriel norme.

$B_{D(T)} = \{x \in D(T), \|x\| \leq 1\}$: La boule unité fermé.

(X, ρ) : Espace quasi-métriques.

ρ : quasi-métrique.

$\bar{\rho}$: Le conjugue de ρ.

ρ^s : La quasi-semi-métrique associe de ρ.

$B_{X,\rho}(x_0, r)$:La boule ouverte de l'espace quasi-métrique .

$\bar{B}_{X,\rho}(x_0, r)$: La boule fermé de l'espace quasi-métrique .

$B_{X,\rho}$: La boule unité ouverte de l'espace quasi-métrique .

$\bar{B}_{X,\rho}$: La boule unité fermé de l'espace quasi-métrique .

(X, q) : Espace Asymétriques normé .

$q(x)$: Asymétriques norme.

$\bar{q}(x)$: Le conjugue de $q(x)$.

$q^s(x)$: Norme associe de $q(x)$.

ρ_q : quasi-métrique associe de $q(x)$.

$B_{X,q}(x_0, r)$:La boule ouverte de l'espace asymétrique norme .

$\bar{B}_{X,q}(x_0, r)$: La boule fermé de l'espace asymétrique norme.

B_X : La boule unité fermé de l'espace asymétrique norme.

U_X : La boule unité ouverte de l'espace asymétrique norme.

$\mathcal{L}C(X,Y)$: Ensemble de touts les opérateurs linéaires continues de (X,q) à (Y,p).

$\mathcal{L}C^s(X,Y)$: Ensemble de touts les opérateurs linéaires continues de (X,q^s) à (Y,p^s).

$\|T\|_q = \sup_{q(x)\leq 1} \|Tx\|$

Chapitre 1

Relations linéaires

1.1 Relations sur les ensembles

Définition 1.1 (Relation sur un ensemble) *Soient U, V deux ensembles arbitraires non vides. Une relation T de U dans V est toute application ayant domaine $D(T)$, un sous-ensemble non vide de U, et en prenant des valeurs dans $2^V \backslash \emptyset$ (la collection de sous-ensembles non vides de V). Une telle application T est également connue comme une application multi-valeur. Si T associée les points de son domaine en singletons, alors T est dite une relation à valeur unique ou une fonction.*

Définition 1.2 (Domaine d'une relation) *Pour $u \in U$, $u \notin D(T)$ nous définissons $Tu = \emptyset$, avec cette convention, on a :*

$$D(T) := \{u \in U : Tu \neq \emptyset\}.$$

Notation :

- *La classe de toutes les relations de U dans V sera notée $R(U, V)$.*
- *On note par fois Tu seulement au lieu de $T(\{u\})$ ou $T(u)$.*

Définition 1.3 (Graphe d'une relation) *Soit $T \in R(U, V)$, le graphe de T est le sous-ensemble $G(T)$ de $U \times V$ défini par :*

$$G(T) := \{(u, v) \in U \times V : u \in D(T); v \in T(u)\}.$$

Remarque 1.1 *Une relation dans $R(U,V)$ est déterminée de façon unique par son graphe, et inversement, tout sous-ensemble non vide de $U \times V$ détermine de façon unique une relation.*

Définition 1.4 (Relation inverse) *Soit $T \in R(U,V)$ l'inverse de T est la relation T^{-1} donnée par :*

$$G(T^{-1}) := \{(v,u) \in U \times V : (u,v) \in G(T)\}.$$

Définition 1.5 (Image d'un sous-ensemble) *Soit M un sous-ensemble de U, l'image de M par T est donnée par :*

$$T(M) := \cup\{T(m) : m \in M \cap D(T)\}. \tag{1.1}$$

L'image de la relation T est donnée, donc par :

$$R(T) := T(U) \quad (= T(D(T)) \quad par(1.1).$$

Définition 1.6 (Relation identité) *La relation identité définie sur un sous ensemble E non vide de U est notée par $\mathbf{I}_E$ ou simplement $\mathbf{I}$, c'est la relation dans $R(U,U)$ dont le graphe est :*

$$G(\mathbf{I}_E) = \{(e,e) : e \in E\}.$$

Définition 1.7 (Surjectivité et Injectivité) *Soit $T \in R(U,V)$.*

1) *T est dite surjective,si $R(T) = V$.*
2) *T est dite injective, si T^{-1} est à valeur unique.*

Proposition 1.1 *Si T est injective, alors on a l'implication suivante :*

$$T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2, \quad (\forall u_1, u_2 \in D(T)).$$

Définition 1.8 ((Image réciproque) *Soit $\emptyset \neq N \subset V$, l'image réciproque de N est donnée par :*

$$T^{-1}(N) = \{u \in D(T) : N \cap Tu \neq \emptyset\}.$$

En particulier, pour $v \in R(T)$,

$$T^{-1}v = \{u \in D(T) : v \in Tu\}.$$

De plus, on a : $D(T^{-1}) = R(T)$, et $R(T^{-1}) = D(T)$.

Définition 1.9 (Compositions des relations) *Soit $T \in R(U,V)$ et $S \in R(V,W)$, où $R(T) \cap D(S) \neq \emptyset$, la composition ou le produit $S \circ T$ dans $R(U,W)$ est définie comme suit :*

$$(S \circ T)(u) := S(Tu), (u \in U).$$

Définition 1.10 (Restriction) *Soit M un sous-ensemble de U tel que $M \cap D(T) \neq \emptyset$, La restriction de T à M, notée $T\mid_M$, est définie par :*

$$T\mid_M \in R(U,V),$$

$$D(T\mid_M) = D(T) \cap M,$$

$$(T\mid_M)_m = Tm, \ \textit{pour} \ m \in M.$$

Définition 1.11 (Extension) *Soient S et T deux relations de $R(U,V)$, on dit que S est une extension de T si :*

$$S\mid_{D(T)} = T.$$

1.2 Relations linéaires

Définition 1.12 *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le corps $K = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, une relation $T \in R(X,Y)$ est dite relation linéaire si pour tous $x, z \in D(T)$ et pour tout scalaire non nul $\alpha \in K$, on a :*

$$Tx + Tz = T(x+z),$$

$$\alpha Tx = T(\alpha x).$$

Proposition 1.2 ([9])
Si T est une relation linéaire, alors $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de X.

Notation : La classe des relations linéaires de $R(X,Y)$ sera notée $\mathcal{L}R(X,Y)$, et on écrit $\mathcal{L}R(X,X) = \mathcal{L}R(X)$.

Proposition 1.3 ([9])
Soit $T \in R(X,Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) T relation linéaire.

ii) $G(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* $X \times Y$.

iii) T^{-1} *relation linéaire.*

iv) $G(T^{-1})$ *est un sous-espace vectoriel de* $Y \times X$.

Corollaire 1.1 ([9]) *Soit T une relation linéaire, alors* $T(0)$ *et* $T^{-1}(0)$ *sont des sous espaces vectoriels.*

Définition 1.13 *Le sous-espace* $T^{-1}(0)$ *est appelé l'espace nul ou le noyau de* T*, et est dénoté par* $N(T)$*. Nous allons utiliser à la fois* $N(T)$ *et* $T^{-1}(0)$ *tout au long de la suite,*

$$N(T) := T^{-1}(0) = \{x \in D(T) : (x, 0) \in G(T)\}.$$

Proposition 1.4 ([9]) *Pour* $x \in D(T)$ *on a l'équivalence suivante*

$$y \in Tx \Longleftrightarrow Tx = y + T(0). \tag{1.2}$$

En particulier

$$0 \in Tx \Longleftrightarrow Tx = T(0).$$

Corollaire 1.2 ([9]) *On a*

$$TT^{-1}y = y + T(0) \quad (y \in R(T)),$$

et

$$T^{-1}Tx = x + T^{-1}(0) \quad (x \in D(T)).$$

En particulier

$$T(T^{-1}(B)) = B \cap R(T) + T(0), \tag{1.3}$$

et

$$T^{-1}(T(A)) = A \cap D(T) + T^{-1}(0). \tag{1.4}$$

Corollaire 1.3 ([9])

1) T *est à valeur unique si et seulement si* $T(0) = \{0\}$.

2) T *est injective si et seulement si* $N(T) = \{0\}$.

Corollaire 1.4 ([9])

$$T(T^{-1}(0)) = T(0),$$

et

$$T^{-1}(T(0)) = T^{-1}(0).$$

Corollaire 1.5 ([9]) *Si $G(S) \subset G(T)$, alors T est une extension de S si et seulement si $S(0) = T(0)$.*

Proposition 1.5 ([9]) *Soit T une relation de X à Y. Alors T est une relation linéaire si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in D(T)$, et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

$$\alpha T x_1 + \beta T x_2 \subset T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

1.3 Algèbre des relations linéaires

Définition 1.14 *Soient S et T deux relations linéaires dans $\mathcal{L}R(X, Y)$, et soit α un scalaire. Les relations $S + T$ et αT sont définies comme suit :*

$$(S + T)x = Sx + Tx, (x \in X),$$

$$(\alpha T)x = \alpha(Tx), (x \in X, \alpha \in \mathbb{K}).$$

Proposition 1.6 ([9]) *Soient $S, T, R \in \mathcal{L}R(X, Y)$, on a :*

1) $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$.
2) $D(\alpha T) = D(T)$.
3) $G(S + T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = s + t,$ *tel que* $(x, s) \in G(S)$ *et* $(x, t) \in G(T)\}$.
4) $G(\alpha T) = \{(x, \alpha y) \in X \times Y : (x, y) \in G(T)\}$.
5) $\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})$.
6) $S + T = T + S$.
7) $R + (S + T) = (R + S) + T$.

1.4 Relations linéaires normés

1.4.1 Norme d'une relation linéaire

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et T une relation linéaire de X dans Y. On rappelle que si U et V deux ensembles non vides de l'espace vectoriel normé X, alors

- $d(U,V) = inf\{\|u-v\|; u \in U, v \in V\}$.
- $d(u,V) = \inf\limits_{v\in V} \|u-v\|$, pour $u \in X$.

Définition 1.15 (L'application quotient naturelle)

Soit E un sous espace vectoriel fermé de X, et soit Q une application définie comme suit :

$$\begin{aligned} Q : X &\longrightarrow X \mid E \\ x &\longrightarrow \overline{x} = \{y \in X, y - x \in E\} \end{aligned}$$

tel que $D(Q) = X$ et $ker(Q) = E$.

Notation :

$$\begin{aligned} Q : Y &\longrightarrow Y \mid \overline{T(0)} \\ y &\longrightarrow \dot{y} = \{z \in X, z - y \in \overline{T(0)}\} \end{aligned}$$

$\forall y \in Y; Qy = y + \overline{T(0)}$, et $\|Qy\| = \|\overline{y}\| = d(y, \overline{T(0)})$.

Proposition 1.7 ([9]) *QT est à valeur unique.*

preuve. Soient $z_1, z_2 \in QTx$ et $x \in D(T)$, donc on a :

$$z_1 - z_2 \in QTx - QTx = QT(0) \subset Q\overline{T(0)} = \overline{0} \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

■

Définition 1.16 *On définit :*

$$\|Tx\| = \|QTx\|,$$

$$\|T\| = \|QT\|.$$

Définition 1.17 (Relation bornée)

Si $\|T\| < \infty$ et $D(T) = X$, alors on dit que T est bornée.

Proposition 1.8 ([9]) *Soient $S, T \in \mathcal{L}R(X, Y)$ on a :*

1) $\|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\|; (x \in D(T + S))$ *:*

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$ on a :

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha|\|Tx\|.$$

Proposition 1.9 ([9])

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|.$$

Proposition 1.10 ([9]) *Soient $S, T \in \mathcal{L}R(X, Y)$. On a*

1) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

2) $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$, $(\alpha \in \mathbb{K})$.

Proposition 1.11 ([9])

$\|T\| < \infty$ *si et seulement si il existe un nombre $\lambda > 0$ pour lequel :*

$$TB_{(D(T))} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0). \tag{1.5}$$

1.5 Relations linéaires continues

Définition 1.18 *Soit T une relation arbitraire d'un espace topologique à un autre. Alors T est dite continue si pour chaque voisinage V dans $R(T)$, l'image inverse $T^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(T)$. La relation T est dite ouverte, si pour chaque voisinage U dans $D(T)$, l'image $T(U)$ est un voisinage dans $R(T)$.*

Remarque 1.2 *On remarque que*

1) T est continue si et seulement si T^{-1} est ouverte.

2) T est continu si et seulement si $T\overline{\Omega} \subset \overline{T\Omega}$ pour tout sous ensemble Ω de $D(T)$.

Proposition 1.12 ([9]) *Soit $T \in \mathcal{L}R(X, Y)$, alors*

1) T est continue si et seulement si $\|T\| < \infty$.

2) Si $\dim D(T) < \infty$, alors T est continue.

3) Si $\dim R(T) < \infty$*, alors* T *est ouverte.*

Proposition 1.13 ([9]) $N(T) \subset N(QT)$ *avec égalité si* $T(0)$ *est relativement fermé dans* $R(T)$.

Remarque 1.3 *De la proposition (1.12) et (1.13), on vois que*

$$T \text{ est ouverte} \Rightarrow QT \text{ est ouverte}.$$

L'inverse est faux.

Chapitre 2

Espaces asymétrique normés

2.1 Espaces quasi-métriques

Définition 2.1 *Soit X un ensemble arbitraire non vide, une quasi-semi-métrique sur X est une application $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y, z \in X$ on a*

i) $\rho(x, x) = 0$.

ii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

De plus si ρ satisfait la propriété suivante

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \Longrightarrow x = y, \tag{2.1}$$

alors ρ est appelé quasi-métrique. Un espace quasi-métrique est un ensemble arbitraire non vide X muni d'une quasi-métrique ρ. Il est clair que toute métrique est une quasi-métrique.

Définition 2.2 *Soit (X, ρ) un espace quasi-semi-métrique.*

1) Le conjugue de ρ est la quasi-semi-métrique $\overline{\rho}$ définie par

$$\overline{\rho}(x, y) = \rho(y, x) \ \ pour \ \ tout \ \ x, y \in X, \tag{2.2}$$

2) La quasi-semi-métrique associe de ρ est l'application $\rho^s : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\rho^s(x, y) = max\{\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y)\}.$$

Exemple 2.1 *L'application* $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\begin{cases} \rho(x,y) = y - x \ \ si \ \ x \leq y, \\ \rho(x;y) = 1 \qquad si \ \ x > y, \end{cases}$$

est une quasi-métrique sur $\mathbb{R}$. *En effet, pour tout* x, y *et* $z \in \mathbb{R}$ *on a :*

i) $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$ *si et seulement si* $y - x = 0$, *c-à -d* $x = y$.

ii) Pour l'inégalité triangulaire, on a les cas suivants :

1) Si $x \leq y$ *et* $y \leq z$. *Alors on a :*

$$\rho(x,y) = y - x \leq z - x = \rho(x,z) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

2) si $x \leq y$ *et* $x \leq z$ *et* $z < y$. *Alors*

$$\rho(x,y) = y - x = z - x + y - z = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

3) Si $x \leq y$ *et* $z < x$. *Alors*

$$\rho(x,y) = y - x \leq y - z = \rho(z,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

4) Si $y < x$ *et* $x \leq z$. *Alors*

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,z) + 1$$

5) Si $y < x$ *et* $y \leq z$ *et* $z < x$. *Alors on a*

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 1 + \rho(z,y).$$

6) Si $y < x$ *et* $z < y$. *Alors*

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 1 + \rho(z,y).$$

Dans la suite on donne une condition pour que ρ^s *est une métrique.*

Proposition 2.1 *Soit* (X, ρ) *un espace quasi-semi-métrique. Alors, la quasi-semi-métrique* ρ^s *associe de* ρ *est une métrique si et seulement si* ρ *est une quasi-métrique.*

preuve. Supposons que ρ est une quasi-métrique sur X. Soient $x, y \, et \, z \in X$.

i) $\rho^s(x,y) = 0$ si et seulement si

$$max\{\rho(x,y), \rho(x,y)\} = max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\} = 0,$$

c-à -d

$$\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0,$$

et ceci équivalent à $x = y$.

ii) On a

$$\begin{aligned}\rho^s(x,y) =& max\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} \\ =& max\{(y,x), \rho(y,x)\} = \rho^s(y,x).\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}\rho^s(x,y) =& max\{\rho(x,y), \rho(x,y)\} \\ \leq& max\{\rho(x,z) + \rho(z,y), \overline{\rho}(x,z) + \overline{\rho}(z,y)\} \\ \leq& max\{\rho(x,z) + \rho(z,y)\} + max\{\overline{\rho}(x,z) + \overline{\rho}(z,y)\},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\rho^s(x,y) \leq \rho^s(x,z) + \rho^s(z,y).$$

Donc ρ est une métrique sur X. Inversement, supposons que ρ est une métrique sur X. Soit $x, y \in X$ avec $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$. Alors

$$\rho^s(x,y) = max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\} = 0,$$

ce qui implique que $x = y$. Donc, ρ est une quasi-métrique sur X.

■

Définition 2.3 (Les boules dans (X,ρ)) *Soient (X,ρ) un espace quasi-métrique, $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

1) La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,\rho}(x_0,r)$, et la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, noté $\overline{B}_{X,\rho}(x_0,r)$, de (X,ρ) sont définit, respectivement par :

$$B_{X,\rho}(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) < r\},$$

et

$$\overline{B}_{X,\rho}(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) \leq r\}$$

2) La boule unité ouvert noté $B_{X,\rho}$ et la boule unité fermé noté $\overline{B}_{X,\rho}$ de (X,ρ) sont définit respectivement par :

$$B_{X,\rho} = B_{X,\rho}(0,1) \ \ et \ \ \overline{B}_{X,\rho} = \overline{B}_{X,\rho}(0,1).$$

3) La sphère de centre x_0 et de rayon r noté $S_{X,\rho}(x_0,r)$ et la sphère unité noté $S_{X,\rho}$ de (X,ρ) sont définit respectivement par :

$$S_{X,\rho}(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) = r\} \ \ et \ \ S_{X,\rho} = S_{X,\rho}(0,1).$$

Définition 2.4 (Convergence d'une suite dans un espace quasi-métrique)
Soit (X,ρ) un espace quasi-métrique et $(x_n)_n$ une suite dans X, on dit que $(x_n)_n$ est convergente vers x et on écrit $x_n \to x$, si

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x,x_n) = 0$$

Dans ce cas on dit que $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers x.

Proposition 2.2 *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace quasi-métrique (X,ρ). Alors on a :*

1) Si $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers x et $\overline{\rho}$-convergente vers y, alors $\rho(x,y) = 0$.

2) Si $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers x et $\rho(y,x) = 0$, alors $(x_n)_n$ est aussi ρ-convergente vers y.

preuve.

1) Par l'inégalité

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y), \text{pour tout} \ \ n \in \mathbb{N},$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x,x_n) = 0 \ \ \text{et} \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n,y) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\rho}(y,x_n) = 0,$$

on obtient

$$\rho(x,y) = 0.$$

2) Par l'inégalité

$$\rho(y,x_n) \leq \rho(y,x) + \rho(x,x_n), \quad \text{pour tout} \ \ n \in \mathbb{N},$$

on obtient

$$\rho(y, x_n) \leq \rho(x, x_n), \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Et ceci implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y, x_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \rho(x, x_n) = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y, x_n) = 0.$$

Donc, $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers y.

■

2.2 Espaces asymétrique normés

Définition 2.5 *Soit X un espace vectoriel réel, une asymétrique semi norme sur X est une fonction $q : X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a*

i) $q(\lambda x) = \lambda q(x)$

ii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

De plus si q satisfait la propriété suivante

$$q(x) = q(-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

alors on dit que q est une asymétrique norme sur X. Un espace asymétrique normé est un espace vectoriel réel X muni d'une asymétrique norme q.

Définition 2.6 *Soit (X, q) un espace asymétrique normé.*

1. *L'asymétrique semi-norme $\overline{q}$ conjugué de q est défini par*

$$\overline{q}(x) = q(-x), \textit{pour tout} \quad x \in X$$

2. *La semi-norme q^s associe de q est définie sur X par*

$$q^s(x) = max\{q(x), \overline{q}(x)\}, \textit{pour tout} \quad x \in X$$

Remarque 2.1 *Il est claire que q^s est une norme sur X, si q est une asymétrique norme sur X. En effet, si q est une asymétrique norme sur X, alors pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

i)

$$\begin{aligned} q^s(x) = 0 &\Leftrightarrow max\{q(x), \overline{q}(x)\} = max\{q(x), q(-x)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow q(x) = q(-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

ii) On a deux cas

(a) Si $\lambda \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} q^s(\lambda x) &= max\{q(\lambda x), \overline{q}(\lambda x)\} \\ &= \lambda max\{q(x), \overline{q}(x)\} \\ &= \lambda q^s(x) \end{aligned}$$

(b) Si $\lambda < 0$, on a

$$\begin{aligned} q^s(\lambda x) &= max\{q(\lambda x), \overline{q}(\lambda x)\} \\ &= -\lambda max\{q(-x), \overline{q}(-x)\} \\ &= |\lambda| q^s(x) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} q^s(x+y) &= max\{q(x+y), \overline{q}(x+y)\} \\ &\leq max\{q(x) + q(y), \overline{q}(x) + \overline{q}(y)\} \\ &\leq max\{q(x), \overline{q}(x)\} + max\{q(y) + \overline{q}(y)\} \\ &= q^s(x) + q^s(y) \end{aligned}$$

Exemple 2.2 *On considère sur $\mathbb{R}$ l'asymétrique norme u définie par*

$$u(x) = x^+ = max\{x, 0\}$$

Alors,pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\bar{u}(x) = u(-x) = x^- = max\{-x, 0\},$$

et

$$u^s(x) = max\{x^-, x^+\} = |x|.$$

En effet pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on a

i)

$$u(x) = u(-x) = 0 \Leftrightarrow max\{x, 0\} = max\{-x, 0\} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0.$$

ii)

$$u(\lambda x) = max\{\lambda x, 0\} = \lambda max\{x, 0\} = \lambda u(x)$$

iii)

$$\begin{aligned} u(x+y) &= max\{x+y, 0\} \\ &\leq max\{x, 0\} + max\{y, 0\} \\ &= u(x) + u(y) : \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Toute asymétrique norme q sur un espace vectoriel réel X induite une quasi-métrique ρ_q sur X donnée par la formule*

$$\rho_q(x, y) = q(y - x), \textit{pour tout} \quad x, y \in X$$

C'est-à -dire tout espace asymétrique normé est un espace quasi-métrique. En effet, soit (X, q) un espace asymétrique normé, donc pour x, y et $z \in X$ on a :

i)

$$\rho_q(x, y) = \rho_q(y, x) = 0 \Leftrightarrow q(y - x) = q(-(y - x)) = 0$$
$$\Leftrightarrow y - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y.$$

ii)

$$\begin{aligned} \rho_q(x, y) &= q(y - z + z - x) \\ &\leq q(z - x) + q(y - z) \\ &\leq \rho_q(x, z) + \rho_q(z, y). \end{aligned}$$

Donc, ρ_q est une quasi métrique sur X.

Définition 2.7 *Soient(X, q) un espace asymétrique normé, $x_0 \in X$ et $r > 0$*

1. *La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{x,q}(x_0, r)$ et la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, noté $\overline{B}_{X,q}(x_0, r)$ de X sont définit (respectivement)par :*

$$B_{X,q}(x_0, r) = \{x \in X : q(x - x_0) < r\}$$

et

$$\overline{B}_{X,q}(x_0, r) = \{x \in X : q(x - x_0) \leq r\}$$

2. *La boule unité ouverte noté U_X et la boule unité fermée noté B_X de X sont définit (respectivement) par :*

$$U_X = B_{X,q}(0, 1) \quad et \quad B_X = \overline{B}_{X,q}(0, 1)$$

3. *La sphère de centre x_0 et de rayon r noté $S_{X,q}(x_0, r)$ et la sphère unité noté $S_{X,q}$ de X sont définis (respectivement) par :*

$$S_{X,q}(x_0, r) = \{x \in X : q(x - x_0) = r\} \quad et \quad S_{X,q} = S_{X,q}(0, 1)$$

Définition 2.8 (Convergence d'une suite dans un espace asymétrique normé) *Soit (X, q) un espace asymétrique normé et soit $(x_n)_n$ une suite dans X. On dit que $(x_n)_n$ est convergente vers x si*

$$\lim_{n \to +\infty} q(x_n - x) = 0$$

Dans ce cas, on dit que $(x_n)_n$ est q-convergente vers x.

2.3 Complétude des espaces asymétriques normés

Dans un espace métrique (X, d) si $(x_n)_n$ est de Cauchy on dit simplement : $(x_n)_n$ est d-Cauchy.

Définition 2.9 *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace quasi-métrique (X, ρ) est dite*

1. *ρ-Cauchy à gauche (respectivement à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ et $n_0 \in$ N tel que*

$$\rho(x, x_n) < \varepsilon \quad pour\ tout \quad n \geq n_0$$

$$(respectivement \quad \rho(x_n, x) < \varepsilon)$$

2. *ρ^s-Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que*

$$\rho^s(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad n, m \geq n_0$$

3. *K-Cauchy à gauche (respectivement à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$$(respectivement \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

4. *Faiblement K-Cauchy à gauche (respectivement à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\rho(x_{n_0}, x_n) < \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad n \geq n_0$$

$$(respectivement \quad \rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon)$$

Dans la proposition suivante on trouve la relation entre ces notions.

Proposition 2.3 ([8]) *Soient (X, ρ) un espace quasi-semi-métrique et $(x_n)_n$ une suite dans X. On a*

$$(x_n)_n \quad est \quad \rho^s - Cauchy$$

$$\Downarrow$$

$$(x_n)_n \quad est \quad \textit{K-Cauchy à gauche}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_n)_n \quad est faiblement \quad \textit{K-Cauchy à gauche}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_n)_n \quad est \quad \textit{ρ-Cauchy à gauche}$$

avec mêmes implications si on remplace "gauche" par "droite".

Proposition 2.4 ([11]) *Soit (X, ρ) un espace quasi-semi-métrique. Une suite $(x_n)_n$ dans X est de Cauchy à gauche (dans certains sens) par rapport à ρ si et seulement si elle est de Cauchy à droite (dans le même sens) par rapport à $\overline{\rho}$.*

Dans la proposition suivante on trouve une caractérisation des suites de Cauchy dans l'espace métrique (X, ρ^s).

Proposition 2.5 ([8]) *Soit (X, ρ) un espace quasi-semi-métrique. La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (x, ρ^s) si et seulement si elle est à la fois K-Cauchy à gauche et à droite.*

Dans la suite on donne la relation entre les suite de Cauchy dans (X, ρ) et la convergence de ces suites.

Proposition 2.6 ([8]) *Toute suite ρ-convergente est ρ-Cauchy à gauche et toute suite ρ-convergente est ρ-Cauchy à droite*

Proposition 2.7 ([8]) *Dans un espace quasi-métrique régulier (X, ρ), si chaque suite convergente $(x_n)_n$ admet une sous-suite K-Cauchy à droite, alors X est métrisable.*

Définition 2.10 *Un espace vectoriel asymétrique semi-normé (X, q) est dit biBanach s'il est q-complet, c-à-d (X, q^s) est un espace semi-normé complet.*

Exemple 2.3 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un espace biBanch avec la symétrique norme u définie par*

$$u(x) = \max\{x, 0\} = x^+ \text{ pour tout } \quad x \in \mathbb{R},$$

car u^s est une norme. (voir l'Exemple (2.2))

2.4 Opérateurs linéaires continus entre espaces asymétriques normés

On note par $L_a(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaire de l'espace asymétrique normé (X, q) dans l'espace asymétrique normé (Y, p).

Définition 2.11 *L'opérateur linéaire $T : (X, q) \longrightarrow (Y, p)$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que*

$$p(T(x)) \leq Mq(x). \tag{2.3}$$

pour tout $x \in X$.

Dans le théorème suivant on a un critère très simple, et très utile, de continuité comme le cas des espaces normés.

Théorème 2.1 [8] *Soient (X,q) et (Y,p) deux espaces asymétriques normés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors T est continu si et seulement s'il est borné.*

2.5 Asymétrique norme sur $\mathcal{L}C(X,Y)$

Soient (X,q) et (Y,p) deux espaces asymétriques normés. On pose

$$\mathcal{L}C(X,Y) = \{f : (x,q) \longrightarrow (Y,p), f \text{ est linéaire et continue}\},$$

et

$$\mathcal{L}C^s(X,Y) = \{f : (x,q^s) \longrightarrow (Y,p^s), f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Pour tout $T \in \mathcal{L}C(X,Y)$ on pose $\|T\|_{q,p}$ la plus petite constante M apparaissant dans la définition (2.11), c-à-d

$$\|T\|_{q,p} = \inf\{M \geq 0 : p(T(x)) \leq Mq(x), \forall x \in X\}. \tag{2.4}$$

Dans ce cas on a

$$p(T(x)) \leq \|T\|_{q,p} q(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in X. \tag{2.5}$$

On a donc $\|T\|_{q,p} < \infty$.
La proposition suivante est alors évidente.

Proposition 2.8 *Soit $T \in \mathcal{L}C(X,Y)$ un opérateur linéaire continue entre deux espaces asymétriques normés (X,q) et (Y,p). Alors*

$$\|T\|_{q,p} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{p(T(x))}{q(x)}. \tag{2.6}$$

On a aussi

$$\|T\|_{q,p} = \sup\{p(T(x)); x \in X, q(x) \leq 1\}. \tag{2.7}$$

Proposition 2.9 *L'application $T \longrightarrow \|T\|_{q,p}$ est une asymétrique norme sur $\mathcal{L}C(X,Y)$.*

Exemple 2.4

1) Soit $(C_0[0,1],q)$ l'espace asymétrique semi-normé défini par

$$C_0[0,1] = \{f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\} \text{ et } q(x) = \max f([0,1]).$$

Soient $(\mathbb{R},u)$ l'espace biBanach défini dans l'exemple (2.3) et l'application linéaire

$$\varphi : (C_0[0,1],q) \longrightarrow (\mathbb{R},u), \varphi(f) = f(1).$$

Alors φ est continue mais $-\varphi$ n'est pas continue. En effet, pour tout $f \in C_0[0,1]$

$$\varphi(f) = f(1) \leq \max f([0,1]) = q(f),$$

d'où φ est borné. Maintenant on prend la suite $(f_n)_n \subset C[0,1]$ défini par $f_n(t) = 1 - nt$. Il s'ensuit que

$$q(f_n) = 1 \text{ et } -\varphi(f_n) = -f_n = n-1,$$

alors, $-\varphi$ est n'est pas borné sur la boule unité de $(C_0[0,1],q)$, donc il n'est pas continue.

2) L'application identique $\mathbf{I}_{\mathbb{R}}$ de $(\mathbb{R},u)$ dans lui même est continue mais $-\mathbf{I}_{\mathbb{R}}$ n'est pas continue. En effet pour tout $x<0$ on a $u(-\mathbf{I}_{\mathbb{R}})(x) = -x$ et alors

$$\begin{aligned} \|-\mathbf{I}_{\mathbb{R}}\|_{u,u} &= \sup\{u(-x) : x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 1\} \\ &= \sup\{-x : x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} = \infty. \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{L}C^s(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de (X,q^s) dans (Y,p^s).

Proposition 2.10 *Soient (X,q) et (Y,p) deux espaces asymétriques normés. Alors tout application linéaire continue de (X,q) dans (Y,p) est aussi continue de $(X,\overline{q})$ dans $(Y,\overline{p})$. Par conséquent $\mathcal{L}C(X,Y) \subseteq \mathcal{L}C^s(X,Y)$.*

preuve. Soit $T \in \mathcal{L}C(X,Y)$, alors il existe $M>0$ tel que :

$$p(T(x)) \leq Mq(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Ainsi

$$\overline{p}(T(x)) = p(-T(x)) = p(T(-x)) \leq Mq(-x) = M\overline{q}(x).$$

Donc T est continue de $(X,\overline{q})$ dans $(Y,\overline{p})$.
D'autre part pour tout $x \in X$,

$$p^s(T(x)) = \max\{p(T(x)),\overline{p}(T(x))\} \leq M\overline{q}(x),$$

par conséquent T est continue de (X,q^s) dans (Y,p^s) et on conclure que $\mathcal{L}C(X,Y) \subseteq \mathcal{L}C^s(X,Y)$. ∎

Chapitre 3

Relations linéaires sur les espaces asymétriques normés

Soit $T : (X, q) \longrightarrow (Y, p)$ une relation linéaire, pour définir la norme de T, on a besoin de l'espace quotient $Y/\overline{T(0)}$, mais dans les espaces asymétrique normés, $\overline{T(0)}$ peut ne pas être un sous-espace vectoriel de Y. Pour cette raison, on considère des relations linéaires entre un espace asymétrique normé et un espace vectoriel normé.

3.1 Relations linéaires continues

Définition 3.1 *Une relation linéaire $T \in \mathcal{L}R(X, Y)$, entre un espace asymétrique normé (X, q) et un espace vectoriel normé $(Y, \|.\|)$, est dite continue si pour chaque voisinage V dans $R(T)$, l'image inverse $T^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(T)$. On dit aussi que T est ouverte si pour chaque voisinage U dans $D(T)$, l'image $T(U)$ est un voisinage dans $R(T)$.*

Soit $T \in \mathcal{L}R(X, Y)$ et on considère l'espace quotient $Y/\overline{T(0)}$ muni de la norme

$$\|\overline{y}\| = \inf_{k \in \overline{T(0)}} \|y + k\|.$$

Définir

$$\|Tx\| := \|QTx\| = \inf_{k \in \overline{T(0)}} \|y + k\|,$$

pour tout $x \in D(T)$ et $y \in Tx$, de plus on pose $\|T|_q := \|QT|$ par conséquent

$$\|T|_q = \sup_{q(x) \leq 1} \|QTx\|.$$

Si M est un sous espace de X(ou Y) et α est une asymétrique norme sur X, ou une norme sur Y nous considérons que

$$B_M = \{x \in M, \alpha(x) \leq 1\},$$

et

$$U_M = \{x \in M, \alpha(x) < 1\}.$$

Ces notations ouvrent la porte pour caractériser la continuité d'une relation linéaire $T \in \mathcal{L}R(X,Y)$ en utilisant le nombre $\|T|_q$, pour la preuve, nous avons besoin de la caractérisation géométrique suivante de $\|T|_q$.

Proposition 3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}R(X,Y)$ une relation entre un espace asymétrique normé (X,q) et un espace vectoriel normé $(Y,\|.\|)$, Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) $\|T|_q < \infty$.

ii) $\exists \lambda > 0$ *tel que :*

$$T(B_{D(T)}) \subset \lambda B_{R(T)} + T(0). \tag{3.1}$$

preuve.

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Prenons $y \in T(B_{D(T)})$ alors il existe $x \in B_{D(t)}$ tel que $y \in Tx$ il résulte de $\|T|_q < \infty$ que

$$\|Tx\| = \inf_{k \in \overline{T(0)}} \|y + k\| = \inf_{k \in T(0)} \|y + k\| < \infty,$$

on remarque que la deuxième égalité est une conséquence directe de la continuité de la norme. Fixe $\varepsilon > 0$, on choisir $k \in T(0)$ tel que $\|y + k\| < \|T|_q + \varepsilon$, ce qui signifie que $y + k \in \lambda B_{R(T)}$ avec $\lambda = \|T|_q + \varepsilon$ alors $y \in \lambda B_{R(T)} + T(0)$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$

$\exists \lambda > 0$ supposons que $T(B_{D(T)}) \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)$. soit $x \in B_{D(T)}$ et $y \in Tx$ par hypothèse il existe $y_1 \in B_{R(T)}$ et $k_1 \in T(0)$ tel que $y = \lambda y_1 + k_1$. Ainsi pare (1.2) on obtient

$$\begin{aligned} \|Tx\| =& \|QTx\| = \|QT\| = \inf_{k \in \overline{T(0)}} \|y + k\| \\ \leq& \|y - k_1\| = \lambda \|y_1\| \leq \lambda, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|T|_q = \sup_{q(x) \leq 1} \|Tx\| \leq \lambda < \infty.$$

■

Théorème 3.1 *Soit (X, q) un espace asymétrique normé et $(Y, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la relation linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si $\|T|_q < \infty$.*

preuve.

$(\Longleftarrow)$

Supposons que $\|T|_q < \infty$, soit V un boule ouverte dans $R(T)$ avec le centre y. Alors pour un certain $\alpha > 0$ nous pouvons écrire $V - \{y\} = \alpha U_{R(T)}$. Par (3.1) il existe $\lambda > 0$ tel que $T(U_{D(T)}) \subset \lambda U_{R(T)} + T(0)$ un application de l'égalité (1.4) révèle que

$$U_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset \lambda T^{-1}(U_{R(T)}) = \frac{\lambda}{\alpha} T^{-1}(V - \{y\}).$$

Ainsi

$$\frac{\alpha}{\lambda} U_{D(T)} + T^{-1}(y) \subset T^{-1}(V)$$

ce qui signifie que $T^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(T)$, Donc T est continue.

$(\Longrightarrow)$

Supposons que T est continue.

En utilisant la proposition précédent il suffit de montrer l'inclusion (3.1) pour un certain $\lambda > 0$ il existe un voisinage ouvert O dans $D(T)$ tel que $O \subset T^{-1}(U_{R(T)})$.

Donc

$$O - O \subset T^{-1}(U_{R(T)}) - T^{-1}(U_{R(T)}).$$

D'autre part nous avons

$$T^{-1}(U_{R(T)}) - T^{-1}(U_{R(T)}) = T^{-1}(U_{R(T)} - (U_{(R(T)}) = 2T^{-1}(U_{R(T)}),$$

ci qui signifie que $2T^{-1}(U_{R(T)})$ est un voisinage ouvert de $\{0\}$ dans $D(T)$ par conséquent il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\frac{4}{\lambda} U_{D(T)} \subset 2T^{-1}(U_{R(T)}),$$

il découle de $B_{D(T)} \subset 2U_{D(T)}$ et $U_{R(T)} \subset B_{R(T)}$ que

$$\frac{2}{\lambda} B_{D(T)} \subset 2T^{-1}(B_{R(T)}),$$

par (1.3) nous obtenons

$$\frac{2}{\lambda} T(B_{D(T)}) \subset 2T(T^{-1}(B_{R(T)})) = 2B_{R(T)} + T(0),$$

et nous obtenons

$$T(B_{D(T)}) \subset \lambda B_{R(T)} + T(0).$$

■

On note par $CR(X,Y)$ l'espace des relations linéaires continues de l'espace asymétrique normé(X,q) dans l'espace vectoriel normé $(Y,\|.\|)$, et par $CR^s(X,Y)$ l'espace des relations linéaires continues de l'espace normé (X,q^s) dans l'espace vectoriel normé $(Y,\|.\|)$.

Proposition 3.2

Soit $T \in CR(X,Y)$

$$\|Tx\| \leq \|T|_q q(x) \tag{3.2}$$

pour tout $x \in X$*.de plus* $\|T|_q$ *se calcule aussi par la formule*

$$\|T|_q = \inf\{M : \|Tx\| \leq Mq(x) \text{ pour tout } x \in X\}. \tag{3.3}$$

preuve.

Pour tout $x \in X$ tel que $q(x) \neq 0$, on obtient, à partir de $\|T|_q = \sup_{q(x)\leq 1} \|Tx\|$, que

$$\|T\frac{x}{q(x)}\| \leq \|T|_q,$$

et on obtient l'inégalité (3.2). si $q(x) = 0$, l'inégalité est évidente. De l'autre main, si λ est le membre de droite de l'égalité (3.3) alors il est clair que $\lambda \leq \|T|_q$. Pour l'inégalité inverse, si $M > 0$ satisfait $\|Tx\| \leq Mq(x)$ pour tout $x \in X$, il s'en suit que $\|T|_q = \sup_{q(x)\leq 1} \|Tx\| \leq M$ et donc $\|T|_q \leq \lambda$. ■

Corollaire 3.2 *Une relation linéaire* $T : X \longrightarrow Y$ *est continue de* (X,q) *à* $(Y,\|.\|)$ *si et seulement si, elle est continue de* $(X,\overline{q})$ *à* $(Y,\|.\|)$*. Ainsi* $CR(X,Y) \subset CR^s(X,Y)$.

preuve. Pour la preuve du corollaire on utilise le théorème (3.1).

L'équivalence requise découle de

$$\sup_{\overline{q}(x)\leq 1} \|QTx\| = \sup_{q(x)\leq 1} \|QT(-x)\| = \sup_{q(x)\leq 1} \|QTx\|.$$

Avec ceci nous avons $\|T|_q = \|T|_{\overline{q}}$. Soit maintenant $T \in CR(X,Y)$. pour tout $x \in X$ tel que $q^s(x) = \max\{q(x), \overline{q}(x)\} \leq 1$, on a $\|T\| = \sup_{q^s(x)\leq 1} \|T(x)\| \leq \|T|_q < \infty$ et le preuve suit.

■

Donnons maintenant un exemple de relation linéaire continue .

Exemple 3.1 *Nous pouvons définir une relation linéaire* $T : (\mathbb{R}, u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|.\|)$ *par*

$$T(x) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = x\},$$

où u *est asymétrique normé sur* $\mathbb{R}$ *défini par* $u(x) = \max\{x, 0\}$ *et* $\|.\|$*est la normé sur* $\mathbb{R}^2$ *défini par* $\|(a, b)\| = |a| + |b|$.
Montrons que T *est continue. Tout d'abord, on va montrer* $T(0)$ *est un sous espace fermé de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $T(0) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b = 0\} = \{(a, -a) \in \mathbb{R}^2\}$,

soit $(x_n)_n$ *un suite converge vire* x *dans* $\mathbb{R}$ *i,e.*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Leftrightarrow -\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} -x_n = -x$$

donc $(-x_n)_n$ *un suite converge vire* $-x$ *dans* $\mathbb{R}$ *i,e.* $(x_n, -x_n)$ *converge vire* $(x, -x)$, *et comme* $(x_n, -x_n) \in T(0)$ *et* $(x, -x) \in T(0)$. *Donc* $T(0)$*est sous espace fermé de* $\mathbb{R}^2$.

Et par un simple calcul nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \inf_{(k_1,k_2)\in\overline{T(0)}} \|(a + k_1, b + k_2)\| \\ &= \inf_{k\in\mathbb{R}} \{|a + k| + |b - k|\},\end{aligned}$$

on a

$$|a + b| = |a + k + b - k| \leq \inf_{k\in\mathbb{R}} \{|a + k| + |b - k|\}, \tag{3.4}$$

et

$$\inf_{k\in\mathbb{R}} \{|a + k| + |b - k|\} \leq |a + k_3| + |b - k_3| \text{ tel que } k_3 \in \mathbb{R},$$

on choisissons $b = k_3$, *et ainsi par* (3.4)

$$|a + b| \leq \inf_{k\in\mathbb{R}} \{|a + k| + |b - k|\} \leq |a + b| + |b - b| = |a + b|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$,$(a, b) \in T(x)$. *Il suit ça* $\|T|_u = \sup_{(a+b)^+\leq 1} |a + b| \leq 1$.

Conclusion générale

Le sujet de "Relations linéaires sur les espaces asymétriques normés" a une importance capitale.

Afin d'enrichir les connaissances mathématiques, nous avons essayé dans ce mémoire de connaitre certains des preuves, des théorèmes et des caractéristiques des espaces asymétriques normés, et surtout, l'étude de la continuité et certaines propriétés des relations linéaires sur les espaces asymétriques normés.

Enfin, nous espérons avoir réussi à donner un aperçu des propriétés des Relations linéaires sur les espaces asymétriques normés, certains problèmes restent non résolus tels que Relations linéaires entre deux espaces asymétriques normés.

Nous tenons à dire que nous sommes très favorables à toute critique constructive concernant ce travail car il reste qu'une goutte dans une vaste mer, et nous souhaitons aller plus loin dans l'avenir

Bibliographie

[1] T. Alvarez, R.W. Cross and D. Wilcox, Multivalued Fredholm type operators with abstract generalised inverses, J. Math. Anal. Appl. 261(1) (2001), 403 ?417.

[2] A. Ammar, A characterization of some subsets of essential spectra of a multivalued linear operator, Complex Anal. Oper. Theory 11(1) (2017), 175-196

[3] A. Ammar and A. Jeribi, Spectral theory of multivalued linear operators,

[4] R. Arens, Operational calculus of linear relations. Pac. J. Math. 11 (1961), 9 ?23.

[5] E.A. Coddington, Extension Theory of Formally Normal and Symmetric Subspaces. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 134. American Mathematical Society, Providence (1973)

[6] C. Alegre, I. Ferrando, Quotient subspaces of asymmetric normed linear spaces, Bol. Soc.Mat. Mexicana. 13 (161) (2007), 357-365.

[7] C. Alegre, S. Romaguera and P. Veeramani, The Uniform Boundedness Theorem in Asymmetric Normed Spaces, Abstr. App. Anal. (2012), Article ID809626, 8pp.

[8] S. Cobzas, Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Frontiers in Mathematics,Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[9] R.W. Cross, Multivalued Linear Operators, Marcel-Dekker, New York (1998).

[10] J.V. Neumann, Über adjungierte Funktional-operatoren, Ann. Math., 33 (1932), 294-310.

[11] I.L. Reilly, P.V. Subrahmanyam, M.K. Vamanamurthy, Cauchy sequences in quasipseudo-metric spaces, Monatsh. Math. 93(1982), 127-140.