République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la RechercheScientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques et l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

SENOUSSI HAOUARI

Titre:**Équation différentielle de Riccati à coefficients non constants – Existence de solutions**

Soutenu publiquement le 22 Mai 2017.

Devant le jury composé de,

Président : A/HALIM YOUNES HAMZA M.A.A U.Y.F.M
Examinateur : BENAICHOUCHE NOUREDINE M.A.A U.Y.F.M
Examinateur : TOUMACHE KAMEL M.A.A U.Y.F.M
Encadreur : OUKIL WALID M.C.B U.Y.F.M

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Dédicace

Je dédie ce travail á mes très chers parents, dontle sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience,le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret dema réussite.Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui. Je dédie ce travail égalementá mon frère HASSANE et mes sœurs pour leurs soutiens, leurs aides, leurs encouragements.

Átous mes enseignants, du primaire au niveau supérieur.

Et á tous mes amis

Remerciements

Mes remerciements pour mon encadreur OUKIL WALID pour son encouragement,son aide et son suivi pour terminer ce travail.

Je tiens á remercier également les membres dejury d'avoir accepté de jurer ce mémoire.

Mes remerciements les plus sincères sontadressés á mes enseignants, qui ontcontribué durant nos études ánotre formation et tous lesenseignants de l'UniversitéDR.YAHIA FARES de Médéa.

Enfin, merci áma famille, pour sonamour et son soutienconstant.

Équation différentielle de Riccati à coefficients non constants - Existence de solutions

Titre : Équation différentielle de Riccati à coefficients non constants - Existence de solutions

Résumé : On s'intéresse dans ce qui suit à une classe d'équations différentielles de Riccati dans le cas scalaire et à coefficients non constants. On montre que sous une hypothèse toute équation de cette classe admet une solution définie en tout temps positif. La forme générale de la solution d'une équation différentielle de Riccati n'est pas connue seulement si on connait une solution particulière. Dans le cas où on connait pas une solution particulière il existe seulement quelques cas où on peut intégrer ces équations. Dans ce qui suit l'étude de ces équations différentielles de Riccati de cette classe sera une étude qualitative.

Mots clés : Équation différentielle de Riccati, solution locale et maximale, principe de comparaison d'équations différentielles, solution périodique, nombre de rotation

Faculté des Sciences. Département de Mathématiques et Informatique.

Université Dr. Yahia Farès Médéa - Pôle urbain – 26000. Médéa. Algérie.

Table des matières

Résumé **6**

1 Introduction **10**

2 Motivation **12**

2.1 Quelques rappels d'équations différentielles 12

2.1.1 Existence locale et unicité 13

2.1.2 Solution maximale 14

2.2 Équations différentielles de Riccati á coefficients constants 15

2.2.1 Discriminant nul 16

2.2.2 Discriminant strictement positif 18

2.2.3 Discriminant strictement négatif 21

2.3 Conclusion 23

3 Équation différentielle de Riccati à coefficients non constants - Existence de solutions **24**

3.1 Introduction et théorème principal 25

3.2 Fonction de contrôle Δ_r 25

3.3 Preuve du théorème principal 3.1 30

3.4 Conclusion 32

4 Quelques résultats d'application **34**

4.1 Solution périodique 34

4.2 Nombre de rotation localement constant 37

4.2.1 Exemple d'application 41

Conclusion générale **44**

Bibliographie **46**

Chapitre 1

Introduction

On va étudier dans ce manuscrit une classe d'équations différentielles de Riccati (EDR) en étudiant l'existence de solutions. Les équations de cette classe vérifient une hypothèse qui permet d'avoir l'existence de solution pour tout temps positif. On va voir dans le Chapitre 2 un cas particulier d' EDR où les coefficients sont constants. L'étude montre que dans certains cas ces EDR admettent une solutions pour tout temps positif et dans d'autres cas la solution n'existe pas. Cela motive donc de voir le cas où les coefficients sont non constants. La difficulté de l'étude de ces équations est qu'a notre connaissance il n'existe pas une forme générale de la solution sauf dans le cas où on connait une solution particulière. Dans l'absence de cette solution particulière il y a certains cas particuliers où on peut intégrer l'équation. L'étude d'éxistence de solutions pour des EDR est un problème ouvert actuel et plusieurs travaux ont étés réalisés, on cite [1, 2, 3, 4, 6]. Dans le dernier Chapitre on va voir des exemples d'applications pour montrer l'existence de solution périodique d'une équation différentielle de Riccati à coefficients périodiques et on étudie dans un autre exemple l'application aux équations différentielles scalaires non linéaires en étudiant le comportement du nombre de rota-

tion.

Les EDR peuvent êtres matricielles [5] . Dans notre cas on considère uniquement le cas scalaire de ces équations. Plus précisément on considère des équations de la forme

$$y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2, \quad t \geq t_0 \tag{EDR}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

On rencontre les équations différentielles de de Riccati en physique quantique dans des problèmes portant sur l'équation de Schrödinger, dans l'équation des ondes, en filtrage optimal (filtre de Kalman), en commande optimale linéaire quadratique, en commande LQG, ou bien encore dans l'équation de la propagation de la chaleur en régime sinusoïdal.

On les rencontre également en mathématiques financières, notamment dans le cadre du modèle de Heston et dans des problèmes portant sur la modélisation des taux d'intérêt (par exemple le modèle Cox-Ingersoll-Ross). [Source Wikipédia].

Chapitre 2

Motivation

On va étudier dans ce Chapitre les équations différentielles de Riccati à coefficients constants. Dans ce cas on peut intégrer ces équations et par conséquent on trouve la forme explicite de la solution. La forme explicite des solutions montre qu'il y a des cas où la solution n'existe pas sur $[t_0 + \infty[$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$. Ces équations à coefficients constants sont le cas le plus simple d'une équation différentielle de Riccati. Cela donne une motivation d'étudier le cas de coefficients non constants. Avant d'entamer cet étude on rappelle quelques résultats d'existence de solutions d'équations différentielles dans le cadre la théorie qualitative.

2.1 Quelques rappels d'équations différentielles

Dans la théorie des équations différentielles il existe des théorèmes qui montrent l'existence de solution sur un intervalle donné. On cite le théorème de Cauchy-Lipshitz qui est une condition suffisante d'exietence de solution. Plus précisément si on considère

le problème de Cauchy suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} X' = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors lorsque la fonction f est uniformément lipshitzienne par rapport à la deuxième variable le problème admet une solution sur tout I. Dans notre cas d'équation différentielle de Riccati donnée par l'équation (EDR) la fonction

$$(t, x) \to a(t) + b(t)x + c(t)x^2,$$

n'est pas uniformément lipschitzienne par rapport à la variable x. Donc le théorème de Cauchy-Lipshitz n'est pas applicable. Par contre il existe des résultats partiels qui montrent l'existence locale de solution comme on va voir ci-dessous :

2.1.1 Existence locale et unicité

On note dans ce qui suit $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $I \times D$ dans $\mathbb{R}$ où I et D sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1. *[Solution locale] Soient I et D deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} X' = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times D$. Supposons que f es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur I. Alors pour tout $(t_0, X_0) \in I \times D$ il existe un intervalle $J \subset I$

contenant t_0 tel que le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur J.

Le théorème précédent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle J inclue dans I mais pas forcément égale à I c'est à dire il affirme l'existence d'une solution d'une manière locale.

Définition 2.1. *La solution $x(t)$ définie sur J du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent s'appelle "solution locale" et on note $(x(t), J)$.*

2.1.2 Solution maximale

Théorème 2.2. *[Solution maximale] Soient I et D deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} X' = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times D$. Supposons que f es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur I. Alors pour tout $(t_0, X_0) \in I \times D$ le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur un intervalle I_0 inclue dans I tel que toute solution locale (y, J) du problème (P.C) vérifie $J \subset I_0$.

Le théorème précédent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle ouvert maximal I_0 inclue dans I. Intuitivement l'intervalle I_0 est le plus grand intervalle dans I contenant t_0 où la solution du (P.C) est définie.

Définition 2.2. *La solution $X(t)$ définie sur I_0 du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent s'appelle "solution maximale" et I_0 s'appelle "intervalle maximale".*

Remarque 2.1. *Si f est définie de $I \times E$ dans E et si l'intervalle maximale I_0 d'une solution $X(t)$ est de la forme $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]a, b[$ et $a, b \in I$ alors*

$$\lim_{t \to a} |X(t)| = +\infty \text{ et } \lim_{t \to b} |X(t)| = +\infty$$

2.2 Équations différentielles de Riccati á coefficients constants

On va étudier dans cette section les équations différentielles de Riccati à coefficients constants. Soit donc l'équation différentielle de Riccati suivante

$$\begin{cases} y' = a + by + cy^2, \quad t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ des constantes, On supposera que $c \neq 0$ car sinon on revient à l'étude d'une équation différentielle affine ce qui n'est pas notre but. Pour l'étude dans le cas à coefficient constant on distingue trois cas et on va voir dans chaque cas une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solution sur $[t_0, +\infty[$.

On va étudier l'équation différentielle précédente selon le signe du discriminant du polynôme du deuxième degré en x suivant

$$a + bx + cx^2. \tag{2.2}$$

2.2.1 Discriminant nul

Dans le cas où le discriminant de l'équation (2.2) est nul c'est à dire $b^2 - 4ac = 0$, alors il existe une racine double x_0 de l'équation (2.2). On remarque que la solution constante

$$y(t) = x_0, \quad \forall t \geq t_0,$$

est solution de l'équation suivante

$$y' = a + by + cy^2$$

Donc dans le cas où $y_0 = x_0$ le problème (2.1) admet un solution sur $\mathbb{R}$ qui est

$$y(t) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc le cas où $y_0 \neq x_0$ on a le théorème suivant

Théorème 2.3. *On considère l'équation* (2.1). *Supposons que* $b^2 - 4ac = 0$ *et soit* x_0 *la racine double du polynôme de deuxième degré suivant*

$$a + bx + cx^2$$

Dans le cas où $y_0 = x_0$ *alors l'équation différentielle de Riccati* (2.1) *admet une solution constante et définie sur l'intervalle* $[t_0, +\infty[$
Dans le cas où $y_0 \neq x_0$ *alors l'équation différentielle de Riccati* (2.1) *admet une solution définie sur l'intervalle* $[t_0, +\infty[$ *si et seulement si*

$$c(y_0 - x_0) < 0.$$

Remarque 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.3 et dans le cas où* $y_0 \neq x_0$ *et* $c(y_0 - x_0) > 0$ *alors*

$$\lim_{t \to t_*} | \, y(t) \, | = +\infty, \qquad \textit{où} \qquad t_* = \frac{1}{c(y_0 - x_0)} + t_0.$$

Démonstration. Dans cette preuve on va intégrer l'équation différentielle (2.1). Comme

$$a + bx + cx^2 = c(x - x_0)^2$$

Donc de (2.1) on a

$$y'(t) = c(y(t) - x_0)^2$$

Alors

$$\frac{y'(t)}{(y(t) - x_0)^2} = c.$$

Par intégration on obtient

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{(y(s) - x_0)^2} ds = c \int_{t_0}^{t} ds.$$

Ce qui implique que

$$\left[\frac{-1}{y(s) - x_0} \right]_{t_0}^{t} = c(t - t_0).$$

Comme $y(t_0) = y_0$ on a alors

$$\frac{-1}{y(t) - x_0} + \frac{1}{y_0 - x_0} = c(t - t_0).$$

On déduit par conséquent que

$$y(t) = x_0 + \frac{x_0 - y_0}{c(y_0 - x_0)(t - t_0) - 1}.$$

On remarque que la fonction $y(t)$ n'est pas définie uniquement en $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$c(y_0 - x_0)(t - t_0) - 1 = 0$$

C'est à dire

$$t = \frac{1}{c(y_0 - x_0)} + t_0$$

Donc $y(t)$ est définie sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ si et seulement si

$$\frac{1}{c(y_0 - x_0)} < 0.$$

□

2.2.2 Discriminant strictement positif

Dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$ alors le polynôme de deuxième degré (2.2) admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. On remarque que si $y_0 = x_i$ avec $i = 1$ ou $i = 2$ alors l'équation (2.1) admet une solution constante $y(t) = x_i$ pour tout $t \geq t_0$, avec $i = 1$ ou $i = 2$ respectivement, qui sont définies sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$. Dans le cas où $y_0 \neq x_1$ et $y_0 \neq x_2$ on a la théorème suivant

Théorème 2.4. *On considère l'équation* (2.1). *Supposons que* $b^2 - 4ac > 0$ *et soient* x_1 *et* x_2 *les deux racines réelles et distinctes du polynôme de deuxième degré suivant*

$$a + bx + cx^2.$$

Dans le cas où $y_0 = x_1$ *ou* $y_0 = x_2$ *alors l'équation différentielle de Riccati* (2.1) *admet une solution constante définie sur l'intervalle* $[t_0, +\infty[$

Dans le cas $y_0 \neq x_1$ *et* $y_0 \neq x_2$ *l'équation différentielle de Riccati* (2.1) *admet une solution définie sur l'intervalle* $[t_0, +\infty[$ *si et seulement si*

$$\frac{1}{c(x_2 - x_1)} \ln \left[\frac{y_0 - x_2}{y_0 - x_1}\right] < 0.$$

Remarque 2.3. *Sous les hypothèse du théorème 2.4, si* $y_0 \neq x_i$ *avec* $1 \leq i \leq 2$ *et si de plus*

$$\frac{1}{c(x_2 - x_1)} \ln(\frac{y_0 - x_2}{y_0 - x_1}) > 0,$$

alors

$$\lim_{t \to t_*} \mid y(t) \mid = +\infty, \qquad \text{où} \qquad t_* = \frac{1}{c(x_2 - x_1)} \ln(\frac{y_0 - x_2}{y_0 - x_1}) + t_0 \in [t_0, +\infty[.$$

Démonstration. Supposons que $b^2 - 4ac > 0$ et soient x_1 et x_2 les deux racines réelles et distinctes du polynôme de deuxième degré suivant

$$a + bx + cx^2.$$

On intègre l'équation différentielle (2.1) comme suit. On a

$$a + bx + cx^2 = c(x - x_1)(x - x_2)$$

Donc de l'équation (2.1) on a

$$y'(t) = c(y(t) - x_1)(y(t) - x_2)$$

Ce qui implique

$$\frac{y'(t)}{(y(t) - x_1)(y(t) - x_2)} = c.$$

On factorise en éléments simple on obtient

$$\frac{y'(t)}{y(t) - x_1} - \frac{y'(t)}{y(t) - x_2} = c(x_1 - x_2).$$

On intègre

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)-x_1} ds - \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)-x_2} ds = \int_{t_0}^{t} c(x_1-x_2) ds.$$

Ce qui implique que

$$[\ln(y(s)-x_1)]_{t_0}^{t} - [\ln(y(s)-x_2)]_{t_0}^{t} = c(x_1-x_2)(t-t_0).$$

Comme $y(t) = y_0$ et $y_0 \neq x_i$ pour $1 \leq i \leq 2$ alors

$$\ln\left[\frac{y(t)-x_1}{y_0-x_1}\right] - \ln\left[\frac{y(t)-x_2}{y_0-x_2}\right] = c(x_1-x_2)(t-t_0).$$

Ce qui entraine que

$$\frac{(y(t)-x_1)(y_0-x_2)}{(y(t)-x_2)(y_0-x_1)} = e^{c(x_1-x_2)(t-t_0)}.$$

Équivalente à

$$\frac{y(t)-x_1}{y(t)-x_2} = \frac{y_0-x_1}{y_0-x_2} e^{c(x_1-x_2)(t-t_0)}.$$

Donc finalement $y(t)$ est donnée par la fonction suivante

$$y(t) = \frac{x_1(y_0-x_2) - x_2(y_0-x_1)e^{c(x_1-x_2)(t-t_0)}}{y_0-x_2-(y_0-x_1)e^{c(x_1-x_2)(t-t_0)}}.$$

On remarque que la fonction $y(t)$ n'est pas définie uniquement en $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$y_0 - x_2 - (y_0-x_1)e^{c(x_1-x_2)(t-t_0)} = 0.$$

C'est à dire

$$t = t_0 + \frac{1}{c(x_1-x_2)} \ln\left(\frac{y_0-x_2}{y_0-x_1}\right).$$

On remarque alors que $y(t)$ est définie sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ si et seulement si

$$\frac{1}{c(x_1-x_2)} \ln\left(\frac{y_0-x_2}{y_0-x_1}\right) < 0.$$

□

2.2.3 Discriminant strictement négatif

Dans le cas $b^2 - 4ac < 0$ l'équation (2.1) n'admet pas de solution sur $[t_0, +\infty[$ pour toute condition initiale y_0 et tout t_0 dans $\mathbb{R}$. Pour pouvoir montrer ce résultat on va utiliser la forme canonique suivante

$$a + bx + cx^2 = c\left[(x + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right]$$

Plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème 2.5. *On considère l'équation* (2.1). *Supposons que* $b^2 - 4ac < 0$ *alors pour tout* t_0 *et* x_0 *dans* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle de Riccati* (2.1) *n'admet pas de solution. Autrement dit il existe* $t_* > t_0$ *tel que* $\lim_{t \to t_*} \mid y(t) \mid = +\infty$

Démonstration. Soit l'équation (2.1) et supposons que $b^2 - 4ac < 0$. On alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$cx^2 + bx + a = c\left[(x + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right],$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$.

On va chercher la forme explicite de la solution $y(t)$ de l'équation (2.1) et on montre que $y(t)$ n'est pas définie sur $[t_0, +\infty[$. On a

$$y'(t) = c\left[(y(t) + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right].$$

Ce qui implique

$$\frac{y'(t)}{c\left[(y(t) + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right]} = 1$$

Par conséquent on obtient

$$\frac{y'(t)}{(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y(t)+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})^2+1}=\frac{-\Delta}{4c}. \tag{2.3}$$

Par changement de variable posant

$$z(t)=\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y(t)+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

On alors

$$z'(t)=\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y'(t)$$

L'équation (2.3) et donc équivalente à

$$\frac{z'(t)}{z^2(t)+1}=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Donc

$$\int_{t_0}^{t}\frac{z'(s)}{z^2(s)+1}ds=\int_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}ds \implies [\arctan z(t)]_{t_0}^{t}=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t-t_0),$$

sachant que

$$z(t_0)=\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y(t_0)+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}=\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Et donc

$$\arctan z(t)-\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t-t_0)$$

Comme :

$$z(t)=\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y(t)+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Donc

$$\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y(t)+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})=\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t-t_0),$$

équivalente à

$$\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y(t)+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}=\tan(\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t-t_0)).$$

Finalement la fonction $y(t)$ est donnée par

$$y(t)=-\frac{b}{2c}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2c}\tan(\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t-t_0)).$$

Comme :

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})<\frac{\pi}{2},$$

Alors lorsque $t\to t_*$ où t_* vérifie

$$\arctan(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}y_0+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}})+\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}(t_*-t_0)=\frac{\pi}{2},$$

on obtient $\mid y(t)\mid\to+\infty$. □

2.3 Conclusion

On a vu dans ce chapitre que les équations différentielles de Riccati à coefficients constant présentent des cas où la solution n'existe pas sur $[t_0,+\infty[$. On a utilisé le signe du discriminant et la factorisation en éléments simples pour pouvoir intégrer ces équations. Cette variété d'état d'existence de solution dans le cas constant nous motive de voir le cas non constant comme on va voir dans le prochain Chapitre.

Chapitre 3

Équation différentielle de Riccati à coefficients non constants - Existence de solutions

On a vu dans le Chapitre précédent que dans le cas où les coefficients de l'équation différentielle de Riccati sont constants alors il existe des cas ou la solution n'existe pas sur $[t_0, +\infty[$ où t_0 est le temps initial. On va voir maintenant le cas où les coefficients ne sont pas constants. La complexité de l'étude réside dans le fait que dans le cas de coefficients non constants il n'existe pas de forme générale explicite de la solution et qu'on peut pas intégrer ces équation contrairement à ce qu'on a procédé dans le Chapitre précédent.

3.1 Introduction et théorème principal

La classe d'équations différentielles de Riccati à coefficients non constants qu'on va étudier dans ce Chapitre est donnée par les équations de la forme

$$y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2, \quad t \geq t_0 \tag{EDR}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues bornées.

On considère l'hypothèse H suivante

$$\text{H} \iff b \text{ est une fonction 1-périodique telle que } \int_0^1 b(t)dt < 0.$$

Théorème Principal 3.1. *On considère l'équation différentielle de Riccati EDR. Supposons que la fonction b satisfait l'hypothèse H. Alors pour toute fonction c il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction a satisfaisant $||a||_\infty < r$ il existe une fonction Δ_r strictement positive, C^1 et 1-périodique tel que pour tout $y_0 \in]-\Delta_r(t_0), \Delta_r(t_0)[$ la solution de l'équation EDR de condition initiale y_0 est définie sur $[t_0, +\infty[$ de plus*

$$y(t) \in]-\Delta_r(t), \Delta_r(t)[, \quad \forall t \geq t_0.$$

3.2 Fonction de contrôle Δ_r

Notre stratégie pour montrer le théorème principal 3.1 précédent est d'utiliser le théorème de comparaison des équations différentielles, pour cela on introduit une "sur-solution" qui est périodique et qui vérifie quelques propriétés. On appelle cette sur-

solution périodique la *fonction de contrôle*. Plus précisément on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.1. *Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire C^1, 1-périodique et vérifiant*

$$\int_0^1 \Lambda(s)ds < 0.$$

Alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{ds}z(s) = \alpha + \omega\beta^2 + \Lambda(s)z(s), \tag{3.1}$$

admet une solution $z(s)$ positive, C^1 et 1-périodique qu'on note $\Delta_{\alpha,\beta}(s)$ et il existe $D_{\omega,\Delta} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $D \in]0, D_{\omega,\Delta}]$ il existe $r > 0$ tel que la solution $\Delta_r := \Delta_{r,D}$ vérifie

$$\max_{s\in[0,1]} \Delta_r(s) \leq D.$$

Démonstration. Remarquons que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (3.1) admet une solution $\Delta_{\alpha,\beta}(s)$ positive C^2 et 1-périodique de la forme

$$\Delta_{\alpha,\beta}(s) = (\alpha + \omega\beta^2)\frac{\int_s^{1+s} \exp\Big(\int_t^{1+s} \Lambda(v)dv\Big)dt}{1 - \exp\Big(\int_0^1 \Lambda(v)dv\Big)}$$

Posons

$$\lambda_1 = -\int_0^1 \Lambda(s)ds \quad \text{et soit} \quad \lambda_2 \geq \max_{0\leq s,t\leq 1} \int_t^{1+s} \Lambda(v)dv.$$

Donc on a

$$\max_{s\in[0,1]} \Delta_{\alpha,\beta}(s) \leq (\alpha + \omega\beta^2)\frac{\exp(\lambda_2)}{1 - \exp(-\lambda_1)}.$$

Pour montrer le lemme il suffit d'avoir pour $(\alpha, \beta) = (r, D) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'égalité suivante

$$(r + \omega D^2)\frac{\exp(\lambda_2)}{1 - \exp(-\lambda_1)} = D. \tag{3.2}$$

Qui est vérifiée pour tout $r > 0$ et $D > 0$ tels que

$$r \leq D\big[\exp(-\lambda_2)(1 - \exp(-\lambda_1)) - \omega D\big], \quad \text{et} \quad D \leq \frac{\exp(-\lambda_2)(1 - \exp(-\lambda_1))}{\omega}.$$

Donc pour tout $D \in]0, D_{\omega,\Lambda}]$ où

$$D_{\omega,\Lambda} = \frac{\exp(-\lambda_2)(1 - \exp(-\lambda_1))}{\omega},$$

il existe $r > 0$ donné par

$$r = D\big[\exp(-\lambda_2)(1 - \exp(-\lambda_1)) - \omega D\big].$$

tels que l'équation (3.2) est vraie. Autrement dit pour tout $D \in]0, D_{\omega,\Lambda}]$ il existe $r > 0$ tels que

$$\max_{s\in[0,1]} \Delta_{r,D}(s) \leq (r + \omega D^2)\frac{\exp(\lambda_2)}{1 - \exp(-\lambda_1)} = D,$$

ce qui prouve le lemme. □

Définition 3.1. *Sous les hypothèse du lemme 3.1, posons*

$$\lambda_1 = -\int_0^1 \Lambda(s)ds \quad \textit{et soit} \quad \lambda_2 \geq \max_{0\leq s,t\leq 1} \int_t^{1+s} \Lambda(v)dv.$$

Soit $D \in]0, D_{\omega,\Lambda}]$ *où*

$$D_{\omega,\Lambda} = \frac{\exp(-\lambda_2)(1-\exp(-\lambda_1))}{\omega},$$

On appelle la fonction de contrôle associée à D *la solution*

$$\Delta_r := \Delta_{r,D}(s),$$

de l'équation différentielle (3.1) *du lemme 3.1 où* r *est défini par la formule*

$$r = D\big[\exp(-\lambda_2)(1-\exp(-\lambda_1)) - \omega D\big]. \tag{3.3}$$

Définition 3.2. *Soit* $D \in]0, D_{\omega,\Lambda}]$. *On appelle ouvert de contrôle associé à* D *et on note* C_r *l"intervalle dans* $\mathbb{R}$ *défini par*

$$C_r :=]-\Delta_r(t_0), \Delta_r(t_0)[, \tag{3.4}$$

où Δ_r *est la fonction de contrôle associée à* D.

Exemple 3.1. *On va voir un exemple d'une fonction de contrôle. Soit pour cela l'équation différentielles suivante*

$$\frac{d}{ds}z(s) = \alpha + \beta^2 - (1+\cos(s))z(s), \tag{3.5}$$

Dans ce cas

$$\omega = 1 \quad \textit{et} \quad \Lambda(s) = -(1+\cos(s)), \quad \forall s \in [0, 2\pi].$$

On a bien

$$\int_0^{2\pi} \Lambda(s)ds = -\int_0^{2\pi} 1+\cos(s)ds = -2\pi < 0.$$

On a de plus

$$\lambda_1 = 2\pi \quad et \quad \lambda_2 = 0 \geq \max_{0\leq s,t\leq 1} \int_t^{1+s} \Lambda(v)dv.$$

Dans ce cas on

$$D_{\omega,\Lambda} = \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi},$$

Donc pour tout $D \in]0, \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi}]$ *la fonction de contrôle associée à* D *et solution de l'équation différentielle affine* (3.5) *est*

$$\Delta_r := \Delta_{r,D}(s),$$

où

$$r = D\big[\frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi} - D\big].$$

Cette fonction de contrôle vérifie donc

$$\max_{s\in[0,1]} \Delta_{r,D}(s) < D,$$

On voit par exemple dans la Figure 3.1 le graphe de la fonction de contrôle Δ_r *associée à* $D = 0.15 \in]0, \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi}]$ *et dans ce cas*

$$r = 0.15\big[(\frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi}) - 0.15\big]$$

C'est à dire Δ_r est la solution périodique de l'équation différentielle affine

$$\frac{d}{ds}z(s) = r + 0.15^2 - (1+\cos(s))z(s).$$

On remarque bien que la fonction 2π-périodique Δ_r ne dépasse pas l'axe $g(t) = 0.15$ pour tout $s \geq 0$.

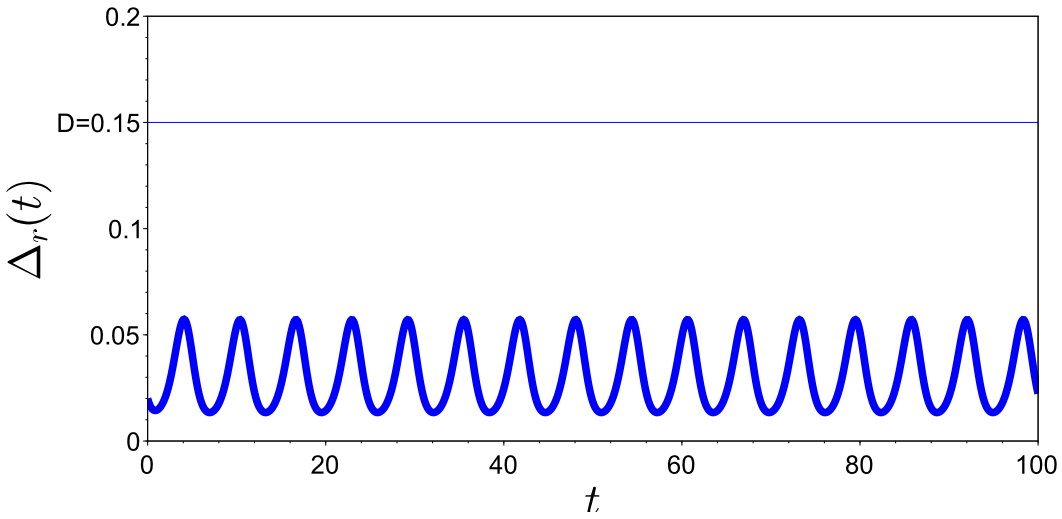


FIGURE 3.1 – On fixe dans l'équation différentielle (3.5) $D = 0.15$ et $r = 0.15\left[(\frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi}) - 0.15\right]$. On voit dans cette figure le graphe de la fonction de contrôle Δ_r associée à $D = 0.15$. On remarque que la fonction de contrôle est majorée par la constante $D = 0.15$.

3.3 Preuve du théorème principal 3.1

D'après la Section 2.1 du Chapitre précédent pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ l'équation (EDR) admet une solution locale sur un intervalle de la forme $[t_0, t_0+\epsilon[$, $\epsilon << 1$ car la fonction

suivante est localement lipschitzienne par rapport à x

$$x \to a(t) + b(t)x + c(t)x^2.$$

En effet cela vient du fait quelle est de classe C^1 par rapport à la variable x et les fonctions a, b et c sont continues.

On va montrer maintenant le théorème principale 3.1

Preuve du théorème principal 3.1. Soit $D_{\omega,\Lambda}$ la constante définie dans le lemme 3.1 telle que ω et Λ sont définies par

$$\omega = ||c||_\infty, \quad \text{et} \quad \Lambda(t) = b(t).$$

Posons $D_* := D_{\omega,\Lambda}$. Soit $D \in (0, D_*]$ et soit la fonction de contrôle Δ_r associée à D (voir définition 3.1). La fonction de contrôle vérifie l'équation différentielle scalaire affine et 1-périodique suivante

$$\frac{d}{dt}\Delta_r(t) = r + \omega D^2 + \Lambda(t)\Delta_r(t) = r + ||c||_\infty D^2 + b(t)\Delta_r(t),$$

et vérifie la majoration suivante

$$\max_{t\in[0,1]} \Delta_r(t) \leq D.$$

Soit C_r l'intervalle de contrôle associé à D, ainsi défini dans la définition 3.2.

Pour toute fonction a vérifiant $||a||_{+\infty} < r$, où r est donné par la formule (3.3), soit $y(t)$ solution du système (EDR) de condition initiale $y \in C_r$, par continuité il existe $\epsilon > 0$ tel

que

$$|y(t)| < \Delta_r(s), \quad \forall t \in [t_0, +\epsilon].$$

Posons

$$T^* := \sup\{t \in [t_0, +\infty[: \forall\ t_0 < s < t,\ |y(s)| < \Delta_r(s)\}.$$

La proposition est prouvée si on montre que $T^* = +\infty$. Supposons par contradiction que $T^* < +\infty$. On a

$$\frac{d}{dt}y(t) < ||a||_\infty + ||c||_\infty D^2 + b(t)y(t), \quad \forall t \in [t_0, T^*].$$

$$\frac{d}{dt}(-y(t)) < ||a||_\infty + ||c||_\infty D^2 + b(t)(-y(t)), \quad \forall t \in [t_0, T^*].$$

Par définition de T^* on a $|y(T^*)| = \Delta_r(T^*)$. Sans perte de généralités, supposons que $y(T^*) = \Delta_r(T^*)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(T^*) &< ||a||_\infty + ||c||_\infty D^2 + b(T^*)y(T^*) \\ &= ||a||_\infty + ||c||_\infty D^2 + b(T^*)\Delta_r(T^*) = \frac{d}{dt}\Delta_r(T^*).\end{aligned}$$

Alors il existe $t_0 < s < T^*$ tel que $y(s) > \Delta_r(s)$. On obtient donc une contradiction. Par conséquent pour tout $T^* = +\infty$. □

3.4 Conclusion

On a vu dans ce Chapitre une condition suffisante pour qu'une équation différentielle de Riccati admet une solution définie sur $[t_0, +\infty[$ avec t_0 est le temps initial. On a utilisé

le principe de comparaison d'équations différentielles en introduisant une "sur-solution" qu' on a appelé Fonction de Contrôle. La technique utilisée dans la preuve est le fait que sous certaines conditions la solution de l'équation de Riccati ne peut pas traverser la fonction de contrôle ce qui implique qu'elle ne tends pas vers l'infini en un temps $t_* > t_0$, d'un autre terme elle est définie sur $[t_0, +\infty[$ tout entier.

Chapitre 4

Quelques résultats d'application

Dans ce Chapitre on va voir des résultats d'application du théorème principal 3.1. On va étudier dans la première Section l'existence de solutions périodique pour une équation différentielle de Riccati à coefficients périodiques. Dans la deuxième Section on va voir une application aux équations différentielles non-linéaires en étudiant le comportement du nombre de rotation.

4.1 Solution périodique

On va voir dans cette Section une condition suffisante pour qu'une équation différentielle de Riccati de coefficients périodiques admet une solution périodique. Plus précisément on montre le théorème suivant

Théorème 4.1. *On considère l'équation différentielle de Riccati EDR suivante*

$$y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2, \quad t \geq t_0. \tag{EDR}$$

On considère l'équation différentielle de Riccati EDR. Supposons que la fonction b *est* 1*-périodique et que*

$$\int_0^1 b(s)ds < 0.$$

Alors pour toute fonction c 1*-périodique il existe* $r > 0$ *tel que pour toute fonction* a 1*-périodique et satisfaisant* $\max_{s\in[0,1]} |a(s)| < r$ *l'équation EDR admet une solution* 1*-périodique définie sur* $[t_0, +\infty[$.

Pour montrer le théorème précédent on a besoin du lemme et du corollaire suivants

Lemme 4.1. *On considère l'équation différentielle de Riccati EDR. Supposons que la fonction* b *est* 1*-périodique et que*

$$\int_0^1 b(s)ds < 0.$$

Alors pour toute fonction c 1*-périodique il existe* $r > 0$ *tel que pour toute fonction* a 1*-périodique satisfaisant* $\max_{s\in[0,1]} |a(s)| < r$ *il existe un intervalle* I *telle que la fonction* P *suivante (fonction de Poincaré)*

$$P(y) = y(t_0 + 1),$$

est de classe C^1 *et définie de* I *dans lui même où* $y(t)$ *est la solution de l'équation* (EDR) *de condition initiale* $y \in I$.

Démonstration. D'après le théorème 3.1 du Chapitre précédent pour toute fonction c 1-périodique il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction a 1-périodique satisfaisant $||a||_\infty = \max_{s\in[0,1]} |a(s)| < r$ il existe une fonction Δ_r strictement positive, C^1 et 1-

périodique telles que pour tout $y \in]-\Delta_r(t_0), \Delta_r(t_0)[$ on a

$$y(t) \in]-\Delta_r(t), \Delta_r(t)[, \quad \forall t \geq t_0.$$

où $y(t)$ est la solution de l'équation EDR de condition initiale y . Posons alors

$$I =]-\Delta_r(t_0), \Delta_r(t_0)[.$$

Soit $y(t)$ solution de l'équation (EDR) de condition initiale $y \in I$.

Posons $P(y) := y(t_0 + 1)$. Par le théorème 3.1 on a

$$|P(y)| = |y(t_0 + 1)| < \Delta_r(t_0 + 1) = \Delta_r(t_0).$$

Car Δ_r est 1-périodique. On a par conséquent montré que P est une fonction de I dans lui même. □

Corollaire 4.2. *La fonction de Poincaré P définie dans le lemme 4.1 admet un point fixe $X_* \in \bar{I}$ où $\bar{I}$ est l'adhérence de l'ensemble I.*

Démonstration. On a $\bar{I}$ est un intervalle fermé donc compact et convexe et par continuité par rapport au conditions initiales la fonction $P : \bar{I} \to \bar{I}$ est continue. Par le théorème du point fixe de Brouwer, la fonction P admet un point fixe dans $\bar{I}$ qu'on note y_*. □

Preuve du théorème 4.1. Le corollaire 4.2 montre l'existence d'un point fixe $y_* \in \bar{I}$. Soit $y_*(t)$ la solution de l'équation (EDR) de condition initiale y_*. Donc

$$y_*(t_0 + 1) = y_* = y_*(t_0).$$

Par la propriété d'unicité de solution d'équations différentielles, on a

$$y_*(t_0 + 1 + t) = y_*(t_0 + t), \quad \forall t \geq 0.$$

autrement dit

$$y_*(s + 1) = y_*(s), \quad \forall s \geq t_0.$$

Ce qui implique donc l'existence de solution 1-périodique de l'équation EDR. □

4.2 Nombre de rotation localement constant

Dans cette section on va voir une application du théorème 3.1 du Chapitre précédent aux équations différentielles scalaires non-linéaires. On va étudier le comportement du nombre de rotation qui est défini par la limite suivante

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x(t)}{t},$$

si elle existe et où $x(t)$ est l'état d'un système. Plus précisément on s'intéresse dans ce qui suit à des équations différentielles scalaires de la forme

$$\dot{x_\omega} = \omega + f(t, x_\omega), \quad t \geq t_0 \tag{4.1}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ est un paramètre et f une fonction de classe C^2 et 1-périodique par rapport à chaque variable. $x_\omega(t)$ est l'état du système (4.1). La proposition suivante montre que

s'il existe une solution du système (4.1) qui s'écrit sous la forme

$$\rho t + \delta(t), \quad t \geq t_0,$$

où δ est une fonction bornée alors le nombre de rotation ρ est indépendant de la condition initiale. Remarquons que l'écriture d'une solution $x(t)$ sous forme

$$\rho t + \delta(t), \quad t \geq t_0,$$

où δ est une fonction bornée implique que le nombre de rotation existe est égale à

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\rho t + \delta(t)}{t} = \rho.$$

Proposition 4.3. *Soit $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. On considère le système (4.1) et supposons qu'il admet une solution $x_*(t)$ de la forme de*

$$\rho t + \delta(t), \quad t \geq t_0,$$

où δ est une fonction bornée. Alors pour toute solution $x(t)$ du système (4.1) il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x_*(t) + n \leq x(t) \leq x_*(t) + (n+1), \quad \forall t \geq t_0.$$

autrement dit : $\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{t} = \rho$.

Démonstration. On considère le système (4.1) et supposons qu'il admet une solution $x_*(t)$ de la forme de

$$\rho t + \delta(t), \quad t \geq t_0,$$

où δ est une fonction bornée. Pour toute condition initiale $x(t_0) \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x(t_0) \in [x_*(t_0)+n, x_*(t_0)+(n+1)]$. Par périodicité de la fonction f les deux fonctions $x_*(t)+n$ et $x_*(t)+(n+1)$ sont solutions de l'équation (4.1). Par l'unicité de solution on a

$$x_*(t) + n \leq x(t) \leq x_*(t) + (n+1), \quad \forall t \geq t_0$$

On déduit donc la proposition. □

On montre dans le théorème suivant que sous certaines hypothèses et dans le cas ou il existe ω_0 telle que la solution $x_{\omega_0}(t)$ de l'équation (4.1) s'écrit sous la forme

$$\rho_{\omega_0} t + \delta_{\omega_0}(t), \quad t \geq t_0, \tag{4.2}$$

où $\rho_{\omega_0} \in \mathbb{R}$ est une constante et δ_{ω_0} une fonction bornée, alors il existe un voisinage V de ω_0 telle que pour tout $\omega \in V$ la solution $x_\omega(t)$ de l'équation (4.1) s'écrit sous la forme

$$\rho_{\omega_0} t + \delta_{\omega}(t), \quad t \geq t_0, \tag{4.3}$$

où δ_ω est une fonction bornée. D'un autre terme $\rho_\omega = \rho_{\omega_0}$ est localement indépendant du paramètre ω.

Notons $\partial_2 f(t,z) := \frac{\partial}{\partial z} f(t,z)$ et par $\partial_2^2 f(t,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(t,z)$. Comme f est une fonction scalaire et périodique par rapport à chaque variable alors $||\partial_2^2 f|| < +\infty$.

Théorème 4.2. *Soit ω_0 et ρ dans $\mathbb{R}$ et supposons que l'équation (4.1) admet une solution $x_{\omega_0}(t)$ de la forme*

$$x_{\omega_0}(t) = \rho t + \delta_{\omega_0}(t)$$

où δ_{ω_0} une fonction bornée. Supposons de plus que la fonction $s \to f(s, \rho s)$ est T-périodique et que

$$\int_0^T \partial_2 f(s, \rho s) ds < 0.$$

Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $\omega \in]-r+\omega_0, r+\omega_0[$ toute solution $x_\omega(t)$ de (4.1) est de la forme

$$x_{\omega_0}(t) = \rho t + \delta_\omega(t)$$

où δ_ω une fonction bornée.

Démonstration. Posons

$$x_\omega(t) = \rho t + \delta_\omega(t)$$

Le théorème est prouvé si on montre que δ_ω est une fonction bornée. Posons $Y_\omega(t) = \delta_\omega(t) - \delta_{\omega_0}(t)$. Par hypothèses du théorème δ_{ω_0} est une fonction bornée, donc il suffit qu'on montre que Y_ω est une fonction bornée. De l'équation (4.1) on a

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\omega(t) &= \dot{\delta}_\omega(t) - \dot{\delta}_{\omega_0}(t) = \dot{x}_\omega(t) - \dot{x}_{\omega_0}(t) \\ &= \omega - \omega_0 + f(t, x_\omega) - f(t, x_{\omega_0}) = \omega - \omega_0 + f(t, \rho t + \delta_\omega) - f(t, \rho t + \delta_{\omega_0}). \end{aligned}$$

Par le développement de Taylor on obtient

$$\dot{Y}_\omega(t) = \omega - \omega_0 + \partial_2 f(t, \rho t) Y_\omega(t) + g(t) Y_\omega^2(t). \tag{4.4}$$

où $g(t)$ est fonction qui satisfait $|g(t)| < ||\partial_2^2 f||_\infty$. Cette dernière équation est une équation de Riccati. Par hypothèse la fonction $s \to f(s, \rho s)$ est T-périodique et que

$$\int_0^T \partial_2 f(s, \rho s) ds < 0.$$

Donc d'après le théorème 3.1 du Chapitre précédent il existe $r > 0$ tel que pour toute ω satisfaisant $|\omega - \omega_0| < r$ il existe une fonction de contrôle Δ_r strictement positive, C^1 et 1-périodique tel que pour tout $Y \in]-\Delta_r(t_0), \Delta_r(t_0)[$ la solution Y_ω de l'équation (4.4) de condition initiale Y est définie sur $[t_0, +\infty[$ de plus

$$Y_\omega(t) \in]-\Delta_r(t), \Delta_r(t)[, \quad \forall t \geq t_0,$$

ce qui montre que pour tout ω satisfaisant $|\omega - \omega_0| < r$ l'équation (4.4) admet au moins une solution x^*_ω sous la forme

$$x^*_\omega(t) = \rho t + \delta^*_\omega(t)$$

où δ^*_ω une fonction bornée. D'après la proposition 4.3 toute solution l'équation (4.4) est de la forme

$$x_{\omega_0}(t) = \rho t + \delta_\omega(t)$$

où δ_ω une fonction bornée. □

4.2.1 Exemple d'application

On considère l'équation différentielle scalaire suivante

$$\dot{x} = \omega - (1 + \cos(t)) \sin(x) \tag{4.5}$$

Dans cet exemple $f(y,z) = -(1+\cos(y))\sin(z)$. Pour $\omega_0 = 0$ la fonction constante et nulle est une solution de l'équation (4.5) et qui admet donc un nombre de rotation nul $\rho = 0$. De plus la fonction $s \to \partial_2 f(s, \rho s)$ est 2π-périodique et satisfait

$$\int_0^{2\pi} \partial_2 f(s,\rho s)ds = \int_0^{2\pi} \partial_2 f(s,0)ds = -\int_0^{2\pi} (1+\cos(s))ds = -2\pi < 0.$$

Donc il existe un voisinage V de $\omega_0 = 0$ tel que pour tout $\omega \in V$ toute solution de l'équation (4.5) est bornée et admet comme nombre de rotation $\rho = 0$.

Conclusion générale

On a vu dans ce manuscrit une condition suffisante pour qu'une équation différentielle de Riccati à coefficients non constants admet une solution sur des intervalles du type $[t_0, +\infty[$ où t_0 est le temps initial. Dans le cas simple où les coefficients sont constants ces équations peuvent ne pas admettre de solutions sur ce type d'intervalles. La difficulté rencontrée réside dans le fait que la forme explicite de la solution d'une équation différentielle de Riccati à coefficients non constants n'est pas connue sauf dans le cas où on connait une solution particulière ou dans quelques cas où l'équation est intégrable. Donc contrairement au cas de coefficients constants où l'équation est intégrable et que la forme de la solution est explicite l'étude dans le cas à coefficients non constant était dans le cadre de la théorie qualitative en introduisant une sur-solution qu'on a appelé solution de contrôle. On a vu en dernier l'utilité mathématiques de ce résultat pour déduire quelques propriétés particulières des solutions d'équation différentielle de Riccati à coefficients périodiques et des solutions de quelques équations scalaires non linéaires.

Bibliographie

[1] Y. S. Bahk, N. E. Dyakevich, S. C. Johnson. Long term behavior of solutions for Riccati initial-value problems. Electronic Journal of Differential Equations. (2008) Vol.No. 142, pp. 1–8.

[2] G. Freiling, G. Jank, H. Abou-Kandil. Generalized Riccati difference and differential equations. Linear Algebra Appl. (1996) 241(242), pp. 291–303.

[3] B .Gbadamosi, O Adebimpe, EI Akinola, IA Olopade. Solving Riccati Equation using Adomian Decomposition Method. International Journal of Pure and Applied Mathematics . (2012) 78 (3), pp. 409-417.

[4] H. Ni. The existence, uniqueness and stability of almost periodic solutions for riccati differential equation. Inter. J. Non. Sci.(2008) 5(1) :5 pp. 8-64.

[5] M. Pavon, D. d'Alessandro. Families of solutions of matrix Riccati differential equations. (1997) SIAM J. Control, 35 , pp. 194-204.

[6] W. T. Reid. Riccati Differential Equations. (1972) London Academic Press.

[7] W. Yuan, A note on the Riccati differential equation. J. Math. Anal. Appl. (2003) 277 , pp. 367–374.