République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

LABIOD Aya - BAYOU Ahlem

Théorème des nombres premiers

Soutenu publiquement le ....., devant le jury composé de

KRIMI Mohamed	*M AA.* **Univ. Médéa**	**Président**
BAGUA Haoues	*M C A.* **Univ. Médéa**	**Encadreur**
BOUADJILA Khaled	*M C A.* **Univ. Médéa**	**Examinateur**

Année universitaire 2023/2024

Table des matières

Dédicace **1**

Remerciements **1**

Notation **3**

Introduction **5**

1 Résultat préliminaires **1**

1.1 Les nombres premiers 1

1.2 Fonctions holomorphes 4

2 Fonction théta de Tchebychev et TNP **7**

2.1 Introduction 7

2.2 Fonction théta de Tchebychev : 8

3 Fonction zêta de Riemann **14**

3.1 Introduction 14

3.2 Prolongement analytique de la fonction Zêta 15

3.3 Produit eulérien 16

3.4 Le logarithme de $\zeta(z)$ 17

3.5 Non annulation de $\zeta(z)$ sur la droite $\mathrm{Re}\, z = 1$ 19

4 Preuve du théorème des nombres premiers **22**

4.1 La fonction Φ et dérivée logarithmique de ζ 22

4.2 Lien entre la fonction Φ et θ 24
4.3 Théorème taubérien auxiliaire(Newman) 25
4.4 Achèvement de la preuve du TNP 26
4.5 Quelques compléments 28

Dédicace

C’est avec une joie immense et le cœur ému que je dédie cette mémoire à ma famille pour leurs affections inépuisables et leurs précieux conseils. Ils n’ont cessé de prier pour moi durant mon cursus scolaire et m’ont encouragé régulièrement .

À ma mère

Source inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifices. Ta prière et ta bénédiction m’ont été d’un grand secours tout au long de ma vie. Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaissance. J’espère ne jamais te décevoir, ni trahi ta confiance et tes sacrifices. Puisse Dieu, tout-puissant, te préserver et t’accorder santé, longue vie et bonheur.

"L.AYA"

Je dédie ce travail À celui qui m’a mis au premier plan, m’a élevé et m’a appris la bonne chose.

À mon cher père, que Dieu prolonge sa vie. Merci mon père "BAYOU Mohamed"

À la fontaine de tendresse qui m’a appris la fermeté et l’espérance, la personne la plus grande et la plus compatissante qui existe. À ma mère bien-aimée, que Dieu prolonge sa vie. Merci ma mère "ASSELMI Aicha".

À mes frères "Fares,Sif eddine,Yousra,Abd ebasset,Maissaa"

"B.Ahlem"

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier Allah, tout-puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.

Je remercie tout particulièrement monsieur BAGUA Haoues, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'ont conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à monsieur M.KRIMI, président du jury, qui a accepté de relire ce travail. Je remercie vivement monsieur R.SUILEH qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail. Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents, qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je tiens énormément à remercier mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de ce mémoire.

Résumé

Résumé

Combien y a-t-il de nombres premiers plus petits qu'un nombre x donné?

Désignons par $\pi(x)$ la fonction de comptage de nombres premiers inférieurs a x,

$\pi(20)=8$.

Existe-t-il une fonction simple $f(x)$ qui constitue une (meilleure approximation) de $\pi(x)$?

Le célébre théoréme des nombres premiers répond à cette question $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$, lorsque $x\to\infty$).

Abstract

How many prime numbers are there smaller than a given number x?

Let us denote by $\pi(x)$ the function for counting prime numbers less than x, $\pi(20)=8$.

Is there a simple function $f(x)$ that is a (best approximation) of $\pi(x)$?

The famous prime number theorem answers this question($\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$, When $x\to\infty$).

ملخص

كم عدد الأعداد الأولية الأصغر من عدد معين x ؟

لنرمز ب $\pi(x)$ دالة عد الاعداد الأولية الأصغر من x، $\pi(20)=8$.

هل توجد دالة بسيطة $f(x)$ تشكل تقريباًا أفضل لـ$\pi(x)$ ؟

النظرية الشهيرة للأعداد الأولية تجيب على هذا السؤال بالشكل التالي: ($\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$، عندما $x\to\infty$).

Notations

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:	dénotent les ensembles des nombres naturels,entiers, rationnels, réels, complexes, respectivement.
$\pi(x) = \text{card}(\mathbb{P} \cap [0, x])$:	le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x.
$\mathbb{P}$:	ensemble des nombres premiers.
$\log x$:	dénote le logarithme naturel de x.
$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$:	le plus grand entier inférieur ou égal à x.
p :	dénote toujours un nombre premier.
$\lvert x \rvert$:	la valeure absolue d'un nombre x.
$f = \underset{x \to a}{\mathcal{O}}(g)$:	si f/g est bornée au voisinage de a.
$f = \underset{x \to a}{o}(g)$:	si $\lim \frac{f}{g} = 0$ au voisinage de a.
$n! = n(n-1)(n-2).....21$:	n factorielle
$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$:	formule de Stirling.

Re f :	partie réel de f.
im f :	partie imaginaire de f.
Li(x) :	le logarithme intégral.
$\theta(x)$:	Fonction théta de Tchebychev.
$\zeta(z)$:	Fonction zêta de Riemmen.
i.e :	c'est-à-dire.

$f \sim g$ $(x \to \infty)$: f est équivalente à g ou voisinage l'infini.

Introduction

La distribution des nombres premiers est un sujet fascinant et complexe dans les mathématiques. Bien qu'il n'existe pas de formule simple pour prédire exactement où se trouvent tous les nombres premiers, il existe des modèles et des résultats mathématiques qui nous donnent une idée générale de leur distribution.

Un résultat important est la célèbre conjecture des nombres premiers jumeaux : il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, mais n'est pas encore prouvée (deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2 **tels que** 3 **et** 5**, et** $7, 11$ *et* 13**....**

D'un autre côté, il existe des écarts arbitrairement grands entre les nombres premiers, par exemple : n!+2, n!+3,...,n!+n est une chaîne de n-1 nombres composés (pas premiers) puisque $n! + k$ **divisible par** k **pour** $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Depuis Euclide, on sait qu'il existe une quantité infinie de nombres premiers. À la fin du XVIIIe siècle, Gauss et Legendre ont conjecturé que cette quantité était proche de $x/\log(x)$**, où ln est la fonction logarithme népérien. Plus précisément,** $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$ **lorsque** $x \to \infty$**.**

C'est la théorie des nombres premiers (l'un des résultats les plus célèbres de la théorie analytique des nombres), qui a été prouvée indépendamment par Hadamard et La Vallée-Poussin, en 1896, grâce à la fonction zêta de Riemann.

Plan de travaill

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous introduisons le matériel de base nécessaire : un bref rappel sur certains concepts de théorie des nombres et quelques propriétés des fonctions holomorphes.

Le deuxième chapitre est consacré à la preuve des résultats de Tchebychev, il a notamment prouvé que si $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ admet une limite lorsque $x \to \infty$, alors cette limite vaut 1.

Dans le troisième chapitre, après avoir introduit la fonction zêta de Riemann, c'est l'outil essentiel de la démonstration d'Hadamard (définition, propriétés, l'holomorphie..), et on donné le lien entre la fonction zêta de Riemann et les nombres premiers (produit eulérien).

Le dernier chapitre est sur la démonstration du théorème des nombres premiers.

CHAPITRE 1

Résultat préliminaires

1.1 Les nombres premiers

1.1.1 Divisibilité des nombres entiers

- Les nombres $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ sont appelés nombres entiers.
- Les nombres $\{0,1,2,3,...\}$ sont les entiers positifs.
- Nous disons qu'un nombre entier a est divisible par un entier non nul b, s'il existe un troisième entier c tel que $a = b\,c$.

Définition 1.1.1 *Un nombre p est dit premier si :*

1. $p > 1$.
2. *p n'admet aucun autre diviseur positif que 1 et p.*

Remarque 1.1.1 .

- *Un nombre strictement plus grand que 1 est dit composé s'il n'est pas premier.*
- *Les nombres premiers :* $2,3,5,7,11,13,...$.
- *Les nombres composés :* $4,6,8,9,10,12,14...$.
- 1 *n'est pas considéré comme premier, au composé.*

Théorème 1.1.1 *Voir[1]* ***(Second théorème d'Euclide)***

Il existe une infinité de nombres premiers.

Preuve. Supposons que $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers est fini, soit $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, ..., p_N\}$ posons

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_N + 1. \tag{1.1}$$

Alors $p_j \nmid m$ pour tout $j \in \{1, ..., N\}$.Donc soit m est premier, soit il est divisible par un nombre premier compris entre p_N et m .dans les deux cas,il existe un nombre premier plus grand que p_N .Ce qui démontre le théoréme. ■

Remarque 1.1.2 *Il y a des cas où m est composé, m admet au moins un diviseur premier. i.e :*

$m = p \cdot .... \cdot P_N + 1$

$m_1 = 2 + 1$ *premier*

$m_2 = 2 \cdot 3 + 1$ *premier*

.

.

.

$m_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509 = 30031 \longrightarrow$ *nombre composé*

Théorème 1.1.2 *Voir[1]* ***(théorème fondamental de l'arithmétique)***

Tout entier supérieur ou égal à 2 possède une décomposition en produit de facteurs premiers unique.

Exemple 1.1.1 *:*

- $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$
- $2100 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

Crible d'ératosthène

Il est facile de construire une table des nombres premiers inférieurs à un nombre entier fixe N, par une procédure appelée "crible d'Ératosthène" nous avons remarqué que si $n \leq N$ et si n n'est pas premier, alors n est divisible par un nombre premier inférieur où égal à $\sqrt{N}$.

∗ Nous écrivons les nombres $2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., N$ et nous barrons successivement :

1. $4,6,8,10$, i.e : 2^2 et tous les nombres pairs qui le suivant.
2. $9,15,21,27,....$, i.e : 3^2 et tous les multiples de 3 non encore barrés qui le suivant.
3. $25,35,55,65,....$, i.e :5^2 le carré du premier nombre non barré restant après 3, puis tous les multiples de 5 non encore barrés ....

La procédure se poursuit jusqu'à ce que le nombre restant, après avoir barré les derniers multiples soit plus grand de $\sqrt{N}$, Les nombres qui n'ont pas été barrés sont premiers.

Remarque 1.1.3 *Toutes les tables de nombres premiers dont nous disposons à l'heure actuelle ont été obtenues en utilisant des versions améliorées de cette procédure.*

(1)	2	3	(4)	5	(6)	7	(8)	(9)	(10)
11	(12)	13	(14)	(15)	(16)	17	(18)	19	(20)
(21)	(22)	23	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	29	(30)
31	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	37	(38)	(39)	(40)
41	(42)	43	(44)	(45)	(46)	47	(48)	(49)	(50)
(51)	(52)	53	(54)	(55)	(56)	(57)	(58)	59	(60)
61	(62)	(63)	(64)	(65)	(66)	67	(68)	(69)	(70)
71	(72)	73	(74)	(75)	(76)	(77)	(78)	79	(80)
(81)	(82)	83	(84)	(85)	(86)	(87)	(88)	89	(90)
(91)	(92)	(93)	(94)	(95)	(96)	97	(98)	(99)	(100)

Le crible d'Erathosthène pour N=100

1.2 Fonctions holomorphes

Définition 1.2.1 ***(Dérivation)***

Soit $f:(D\longmapsto\mathbb{C})$ *une fonction complexe pour* $z_0\in D$ *si* $\lim\limits_{z\longrightarrow z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ *existe, alors on note* $f'(z_0)$ *cette limite.(le nombre dérivée de* f *en* z_0*)*

Définition 1.2.2 ***(Fonction holomorphe)***

Si $f'(z_0)$ *existe pour tout* $z_0\in D$*, alors la fonction* f *est dite holomorphe dans* D*.*

Théorème 1.2.1 *Voir[5]* ***(Condition de Cauchy-Riemann)***

Soit f *une fonction complexe définie sur un ouvert* D *de* $\mathbb{C}$ *telle que* $P=\mathrm{Re}\,f$ *et* $Q=\mathrm{Im}\,f$*. Pour que* f *soit dérivable en* z_0 *sur* D*, si et seulement si que* f *soit différentiable en* z_0 *et que sa différentielle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en ce point :*

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.2}$$

Théorème 1.2.2 *Voir[5]* ***(Théorème de Cauchy)*** *Soit* f *une fonction holomorphe dans un ouvert* D *et* Γ *une courbe fermée simple orientée incluse dans* D *ainsi que son intérieur, alors* $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz=0.$

Théorème 1.2.3 *Voir[5]* ***(Formule de Cauchy)*** *Soit* f *une fonction holomorphe dans un domaine* D *contenant une courbe simple fermée* Γ *dont l'intérieur* Δ *est inclus dans* D *alors . pour tout point a de* Δ *, On a*

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-a}dz. \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.4 *Voir[5]* ***(Formule intégrale de Cauchy)***

Si f *est holomorphe dans un domaine* D *contenant une courbe fermé simple* Γ *dont l'intérieur* Δ *est inclus dans* D*, ses dérivées successive en un point* a *de* Δ *sont données par*

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \tag{1.4}$$

Définition 1.2.3 ***(Fonction entière)*** *Une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est dite une fonction entière .*

Propriété 1.2.1 *L'ensemble des fonctions entières est identique à celui des séries entières dont le rayon de convergence est infini.*

Théorème 1.2.5 *Voir[5]* ***(Théorème de Cauchy-Hadamard)*** *Le rayon de convergence R d'une série entière à coefficients complexes* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est donné par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}. \tag{1.5}$$

Théorème 1.2.6 *Voir[6]* ***(Théorème de Liouville)*** *Si f est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe, alors f constante dès lors qu'elle est bornée.*

Points singuliers isolés Étudions les points en lesquels est violée l'holomorphie des fonctions. Commençons par les plus élémentaires de ces points.

Définition 1.2.4 *On dit qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier isolé d'une fonction f s'il existe un voisinage pointé de z_0 (i.e. un ensemble $\{0 < |z - z_0| < r\}$ si z_0 est fini ou un ensemble $\{R < |z| < \infty\}$ si $z_0 = \infty$) dans lequel f est holomorphe .*

On distingue trois types de points singuliers selon le comportement de f lorsque z tend vers un tel point .

Définition 1.2.5 *On dit qu'un point singulier z_0 d'une fonction f est :*

1. *artificiel ou éliminable si* $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = A < +\infty$;
2. *un pôle si* $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$;
3. *essentiel si f ne possède ni une limite finie , ni une limite infinie lorsque* $z \longrightarrow z_0$.

Exemple 1.2.1 *Le point $z = 0$ est un point singulier éliminable pour la fonction* $\frac{\sin z}{z}$ *ceci découle du fait que pour $z \neq 0$ on a le développement suivant :*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...,$$

d'où il s'ensuit que $\lim_{z\longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

Exemple 1.2.2 *Les fonctions* $f(z)=\dfrac{1}{z^n}$, *où* $n>0$ *est un entier, présentent un pôle au point* $z=0$.

Exemple 1.2.3 *Le point* $z=0$ *est un pont singulier essentiel de la fonction* $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, *car lorsque, par exemple,* $z=x$ *tend vers 0 suivant l'axe réel, les limites à droite et à gauche sont distinctes (la limite à droite est égale à l'infini, la limite à gauche à 0) ; la fonction* $e^{\frac{1}{z}}=\cos\frac{1}{y}-i\sin\frac{1}{y}$, *n'admet pas de limite lorsque* $z=iy$ *tend vers 0 suivant l'axe imaginaire*

Théorème 1.2.7 *Voir[6] Un point singulier isolé* $a\in\mathbb{C}$ *d'une fonction* f *est un pôle si et seulement si la partie principale de la série de* f *dans un voisinage pointé de* z_0 *ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls :*

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad m>0 \tag{1.6}$$

Théorème 1.2.8 *Voir[7] Un point singulier isolé* z_0 *d'une fonction* f *est essentiel si et seulement si la partie principale de la série de Laurent de* f *dans un voisinage pointé de* z_0 *contient une infinité de termes non nuls.*

Lemme 1.2.1 *Supposons que* $\{a_n\}$ *est une série. Si* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$ *alors le produit* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge. De plus, le produit converge vers* 0 *si et seulement si l'un de ses facteurs est nulle.*

Théorème 1.2.9 *Voir[7] Soit* D *un domaine dans* C, *et soient* (f_j) *une suite des fonctions holomorphes dans* D. *Supposons que* $\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|$ *converge uniformément dans* D, *Alors* $f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\big(1+f_j(z)\big)$ *converge uniformément sur* D.

Théorème 1.2.10 ***(Critère de Weierstrass)*** *Voir[7] (Convergence uniforme) Soient* (f_j) *une suite des fonctions holomorphes dans* $D\subset C$ *et si* $|f_j(z)|<M_j$ *où* M_j *est indépendant de* z *dans* D *et* $\sum_{j=1}^{\infty}M_j$ *converge, Alors* $\sum_{j=1}^{\infty}f_j(z)$ *est unifomément converge dans* D.

CHAPITRE

2 Fonction théta de Tchebychev et TNP

2.1 Introduction

Soit $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, ...\}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $x > 0$ nous posons

$$\pi(x) = \text{card}(\mathbb{P} \cap [0, x]) \tag{2.1}$$

Ainsi, $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Nous nous intéresserons au comportement de $\pi(x)$ lorsque $x \to \infty$. Le résultat principal est le suivant

Théorème 2.1 *Voir[8][2][3]* ***(théorème des nombres premiers)***. *pour* $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{2.2}$$

Ce résultat a été déjà conjecturé par Gauss et Legendre vers 1800.Il a été prouvé pour la première fois en 1896 indépendamment par Hadamard et de la Vallée-Poussin, en utilisant des méthodes d'analyse complexe. Nous prouverons ce résultat dans le chapitre (3.5) après avoir introduit les outils nécessaires à l'analyse complexe dans le chapitre (2.2) Bien que certaines idées clés des preuves originales soient toujours présentes, nous pouvons nous appuyer sur un certain nombre de simplifications et de modifications qui ont été obtenues depuis lors .

Dans la présente section, nous discutons de certaines propriétés élémentaires des nombres

premiers qui sont en partie des préparatifs pour à la preuve du théorème (2.1)
Nous supposons que nous sommes familiers avec certains faits fondamentaux de la théorie élémentaire des nombres, tels que la factorisation unique des nombres naturels en nombres premiers.

2.2 Fonction théta de Tchebychev :

Il s'avère qu'au lieu de considérer $\pi(x)$, il est souvent plus facile de considérer

$$\theta(x)=\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq x}}\log p \tag{2.3}$$

Sommes de tous les $p\in\mathbb{P}$ satisfaisant $p\leq x$ ou une autre restriction se produiront fréquemment. Nous omettrons la condition $p\in\mathbb{P}$ dans ce qui suit, mais nous n'utiliserons que la variable p si l'on additionne les nombres premiers. Ainsi, nous écrivons simplement

$$\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log p \tag{2.4}$$

et on a le résultat suivant :

Lemme 2.2.1 *Voir[8][2][3] Il existe une constante positive b telle que*

$$\theta(x)\leq b\,x \tag{2.5}$$

Preuve.

Si $n<p<2n$ alors p *divise* $C_{2n}^{n}=\dfrac{2n!}{n!n!}$ puisque p divise le numérateur mais pas le dénominateur.

Le théorème du binôme implique :

$$\begin{aligned} 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} 1^k \cdot 1^{2n-k} &\geq C_{2n}^k \\ &\geq \prod_{n\leq p\leq 2n} p = \prod_{n\leq p\leq 2n} e^{\log p} \\ &= \exp\left(\sum_{n<p\leq 2n} \log p\right) = \exp(\theta(2n)-\theta(n)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donc $\theta(2n)-\theta(n)\leq 2n\log 2$,

posons $n=2^{k-1}$ et en déduire $\theta(2^k)-\theta(2^{k-1})\leq 2^k\log 2$.

Puisque $\theta(1)=0$, un argument de série télescopique et la formule de sommation pour une série géométrique finie donnent

$$\begin{aligned} \theta(2^k)=\theta(2^k)-\theta(2^0) &= \sum_{i=1}^{k}\left(\theta(2^i)-\theta(2^{i-1})\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} 2^i\log 2 < (1+2+2^2+\ldots+2^k)\log 2 \\ &< 2^{k+1}\log 2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si $x\geq 1$, alors on pose $2^k\leq x\leq 2^{k+1}$ $\left(i.e\ \ k=\left\lfloor\frac{\log x}{\log 2}\right\rfloor\right)$ alors

$$\begin{aligned} \theta(x)\leq\theta(2^{k+1})\leq 2^{k+2}\log 2 &= 4\cdot 2^k\log 2 \\ &\leq x\ (4\ \log 2) < 3x \\ &\quad (b=3) \end{aligned} \tag{2.8}$$

■

Nous introduisons ici une somme importante qui nous utilisons dans les résultats suivants :

Lemme 2.2.2 *Voir[8][2][3]pour $x \geq 2$, on a*

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = \log x + \mathcal{O}(1)$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$n! = \prod_{p\leq n} p^{e(p)} \tag{2.9}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $e(p) = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$ est l'exposent de la puissance la plus élevée de p que divise $n!$,
(exemple : $12! = 12\cdot 11\cdot 10\cdots 2 = 2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$, alors : $e(2) = \lfloor \frac{12}{2}\rfloor + \lfloor \frac{12}{2^2}\rfloor + \lfloor \frac{12}{2^3}\rfloor + \lfloor \frac{12}{2^4}\rfloor + 0 = 10$)

donc

$$\begin{aligned}
\log n! &= \log\left(\prod_{p\leq n} p^{e(p)}\right) \\
&= \sum_{p\leq n} e(p)\log p \\
&= \sum_{p\leq n}\sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \log p \\
&= \sum_{p\leq n}\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor \log p + \sum_{p\leq n}\sum_{k\geq 2}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \log p.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

On a

$$\sum_{k\geq 2}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \leq \sum_{k\geq 2}\frac{n}{p^k} = \frac{1}{p^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^j} = \frac{n}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{p(p-1)}. \tag{2.11}$$

et donc

$$\sum_{p\leq n}\sum_{k\geq 2}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \log p \leq n\sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p(p-1)} \leq n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\log j}{j(j-1)} \tag{2.12}$$

Pour j grand la dernière série converge car $\log j \leq \sqrt{j}$, donc $\dfrac{\log j}{j(j-1)} \leq \dfrac{\sqrt{j}}{j(j-1)} \leq \dfrac{2}{j^{3/2}}$.

Alors

$$\sum_{p\leq n}\sum_{k\geq 2}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \log p = \mathcal{O}(n) \tag{2.13}$$

La formule de Stirling donne que

$$\begin{aligned}\log n! &= \log\left((1+o(1))\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)\\ &= n\log\left(\frac{n}{e}\right)+\frac{1}{2}\log(2\pi n)+o(1)\\ &= n\log n-n+\frac{1}{2}\log n+\mathcal{O}(1)\\ &= n\log n+\mathcal{O}(n)\end{aligned} \tag{2.14}$$

Nous concluons d'après (2.10), (2.13) et (2.14) que $\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\log p = n\log n+\mathcal{O}(n)$.

Puisque

$$0\le n\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}-\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\log p\le\sum_{p\le n}\log p=\theta(n)=\mathcal{O}(n) \tag{2.15}$$

Cela donne

$$\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}=\frac{1}{n}\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\log p+\mathcal{O}(1)=\log n+\mathcal{O}(1) \tag{2.16}$$

et donc le résultat, après en remplaçant n par $x\in\mathbb{R}$. ■

Lemme 2.2.3 *Voir[8][2][3] Il existe une constante positive a telle que*

$$a\,x\le\theta(x) \tag{2.17}$$

Preuve. Pour ce faire, soit $0<\alpha<1$. Puis, parce que nous venons de prouver,

$$\sum_{\alpha x<p<x}\frac{\log p}{p}=\log x-\log(\alpha x)+\mathcal{O}(1)=\log\frac{1}{\alpha}+\mathcal{O}(1) \tag{2.18}$$

Ici, le terme $\mathcal{O}(1)$ ne dépend ni de x ni de α , tant que $\alpha x\ge 2$. Choisir α suffisamment petit, nous obtenons

$$\sum_{\alpha x<p<x}\frac{\log p}{p}\ge 1 \tag{2.19}$$

pour $x\ge 2/\alpha$.

D'un autre côté,

$$\sum_{\alpha x<p<x} \frac{\log p}{p} \leq \frac{1}{\alpha x} \sum_{\alpha x<p<x} \log p \leq \frac{\theta(x)}{\alpha x} \tag{2.20}$$

D'où $\theta(x) \geq \alpha x$. ■

Le lien entre $\pi(x)$ et $\theta(x)$ est donné par le résultat suivant

Lemme 2.2.4 *Voir[8][2][3] Lorsque* $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\log x} \tag{2.21}$$

Remarque 2.2.1 *Le théorème des nombres premiers est donc équivalent à l'énoncé que* $\theta(x) \sim x$ *lorsque* $x \to \infty$.

Preuve du lemme (2.2.4)

Notons tout d'abord que

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x \tag{2.22}$$

Pour obtenir une estimation dans la direction opposée, soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \theta(x) &\geq \sum_{x^{1-\epsilon}<p\leq x} \log p \\ &\geq \sum_{x^{1-\epsilon}<p\leq x} \log\left(x^{1-\epsilon}\right) \\ &= \sum_{p\leq x} \log\left(x^{1-\epsilon}\right) - \sum_{p\leq x^{1-\epsilon}} \log\left(x^{1-\epsilon}\right) \\ &= (1-\epsilon)\log x\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\epsilon}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Le lemme(2.2.1) donne que

$$\pi\left(x^{1-\epsilon}\right) \leq x^{1-\epsilon} = \frac{x}{x^{\epsilon}} \leq \frac{\theta(x)}{a\, x^{\epsilon}} \tag{2.24}$$

En combinant les deux dernières estimations, nous trouvons que

$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{(1-\epsilon)\log x} + \pi\left(x^{1-\epsilon}\right) \leq \left(\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{\log x}{a\, x^{\epsilon}}\right)\frac{\theta(x)}{\log x} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{\theta(x)}{\log x} \tag{2.25}$$

Pour un grand x.

Comme c'est le cas pour tout $\epsilon > 0$, nous voyons que

$$\frac{\theta(x)}{\log x} \leq \pi(x) \leq (1+o(1))\frac{\theta(x)}{\log x} \tag{2.26}$$

lorsque $x \to \infty$. ■

La combinaison de les lemmes (2.2.1) (2.2.3) et (2.2.4) donne le résultat suivant obtenu par Tchebychev Vers 1850. Il est plus faible que le théorème des nombres premiers, mais elle montre que la fonction $x/\log x$ donne le bon ordre de grandeur pour $\pi(x)$.

Théorème 2.2.1 *Voir[8][2][3] Il existe des constantes positives c et d telles que*

$$c \cdot \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq d \cdot \frac{x}{\log x} \tag{2.27}$$

Pour $x \geq 2$.

CHAPITRE

3 Fonction zêta de Riemann

3.1 Introduction

L'outil principal pour prouver le théorème des nombres premiers est une fonction holomorphe introduite par Riemann. Pour le définir, on rappelle que pour $a > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, la puissance complexe a^z est définie par :

$$a^z = \exp(z \log a) \tag{3.1}$$

Pour a fixé, la fonction $z \mapsto a^z$ est entière, c'est-à-dire qu'elle est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

On note que

$$|a^z| = \exp((\operatorname{Re} z) \cdot \log a) = a^{\operatorname{Re} z} \tag{3.2}$$

Cela implique que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{3.3}$$

Converge pour $\operatorname{Re} z > 1$.

Définition 3.1.1 *La fonction*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \textit{pour} \quad \operatorname{Re} z > 1$$

est appelée la fonction zêta de Riemann.

La série définissant ζ converge en effet localement uniformément pour $\operatorname{Re} z > 1$ et donc,

par théorème de Weierstrass (1.2.10), la fonction zêta est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, z > 1$.

3.2 Prolongement analytique de la fonction Zêta

Nous prouvons maintenant que la fonction zêta de Riemann peut être prolongée analytiquement pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, sauf a $z = 1$, où $\zeta(z)$ a un pôle simple.

Théorème 3.2.1 *Voir[2] La fonction*

$$z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

a une prolongement holomorphe pour $\mathrm{Re}\, z > 0$

Preuve. Pour $\mathrm{Re}\, z > 1$, On a

$$\begin{aligned}
\zeta(z) - \frac{1}{z-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z} dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^z} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^z} dx \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} dx \right)
\end{aligned}$$

Soit $x \in [n, n+1]$. Alors

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right| &= \left| \int_n^x \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^z} \right) \right| \\
&= \left| \int_n^x \frac{-z}{t^{z+1}} dt \right| \\
&\leq (x-n) \max_{t \in [n,x]} \left| \frac{-z}{t^{z+1}} \right| \\
&= (x-n)|z| \max_{t \in [n,x]} \frac{1}{t^{\mathrm{Re}\, z+1}} \\
&\leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}\, z+1}}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{x^z}\right)\right| \leq \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re} z+1}}$$

Ainsi, la série pour $z \mapsto \zeta(z)-\dfrac{1}{z-1}$ donnée ci-dessus converge localement uniformément pour $\operatorname{Re} z > 0$ et donc, par le théorème de Weierstrass (1.2.10), il représente une fonction holomorphe pour $\operatorname{Re} z > 0$. ■

Remarque 3.2.1 *Voir[8] Le théorème* (3.2.1) *donne que* ζ *a une prolongement méromorphe pour* $\operatorname{Re} z > 0$ *avec seulement un pôle à 1. Ce pôle est simple et le résidu de* ζ *à ce pôle est* 1.

Le résultat suivant indique déjà un lien entre la fonction de Riemann et les nombres premiers.

3.3 Produit eulérien

Théorème 3.3.1 *Voir[5] Si* $\operatorname{Re} z > 1$ *Alors*

$$\zeta(z) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^z}} \tag{3.4}$$

le produit infini converge localement uniformément pour $\operatorname{Re} z > 1$ et $\zeta(z) \neq 0$.

Preuve. Puisque $\left|\dfrac{1}{p^z}\right| = \dfrac{1}{p^{\operatorname{Re} z}} < 1$ pour $\operatorname{Re} z > 1$.

La formule des séries géométrique implique :

$$\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{nz}} \tag{3.5}$$

dans lequel la convergence est absolue.

Puisqu'un nombre fini de séries absolument convergentes peut être multiplié terme par terme, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2^z}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3^z}\right)^{-1} &= \left(1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{3^{2z}}+\ldots\right)\\ &= 1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{8^z}+\frac{1}{9^z}+\frac{1}{12^z}+\ldots\end{aligned} \tag{3.6}$$

dans lequel seuls les nombres naturels divisibles par les nombres 2 ou 3 apparaissent.

De la même manière,

$$\begin{aligned}\prod_{p\leq 5}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1} &= \left(1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{8^z}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{5^{2z}}+\ldots\right)\\ &= 1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{8^z}+\frac{1}{9^z}+\frac{1}{+}\frac{1}{10^z}+\frac{1}{12^z}+\ldots\end{aligned} \tag{3.7}$$

dans lequel seuls les nombres naturels divisibles par les nombres premiers 2,3 et 5 apparaissent.

Puisque les facteurs premiers de chaque $n \leq N$ sont au plus N, il s'ensuit que pour $\operatorname{Re} z > 1$

$$\left|\zeta(z)-\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1}\right| \leq \sum_{n>N}\left|\frac{1}{p^z}\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \to 0 \tag{3.8}$$

Lorsque $N \to \infty$. Ceci établit (3.4) et preuve que la convergence est uniforme pour $\operatorname{Re} z > 1$.

Puisque chaque produit partiel ne s'annule pas pour $\operatorname{Re} z > 1$, on a $\zeta(z) \neq 0$ pour $\operatorname{Re} z > 1$.

ce qui conclut la preuve. ■

3.4 Le logarithme de $\zeta(z)$

Dans cette section, nous établissons une représentation en série du logarithme de la fonction zêta.

Nous utilisons ce résultat dans la section (3.5) pour établir la non annulation de $\zeta(z)$ pour $\operatorname{Re} z = 1$ et dans le chapitre (3.5) pour obtenir un prolongement analytique d'une fonction étroitement liée.

Lemme 3.4.1 *Voir[6] Si* $\operatorname{Re} z > 1$, *alors*

$$\log\zeta(z) = \sum_{p,m}\frac{p^{-mz}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-z} \tag{3.9}$$

Pour certains $c_n \geq 0$.

Preuve.

Tout d'abord, nous allons considérer le cas où $\mathrm{Im}(z)=0$. Nous observons d'abord que, par un développement de Taylor,

$$f=\log\left(\frac{1}{1-x}\right)=\log 1-\log(1-x)\Rightarrow f'=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Rightarrow f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}$$

Pour $0\leq x<1$.

En combinant ce fait avec le lemme(2.2.2) et une propriété du logarithme, nous voyons que

$$\log\zeta(z)=\log\prod_p\frac{1}{1-p^{-z}}=\sum_p\log\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right)=\sum_{p,m}\frac{p^{-mz}}{m}.$$

Nous allons maintenant montrer que la somme double ci-dessus converge absolument.

Il suffit de montrer que $\sum_p\frac{p^{-mz}}{m}$ et $\sum_m\frac{p^{-mz}}{m}$ convergent absolument quand $m,p\geq 1$.

Pour montrer que $\sum_p\frac{p^{-mz}}{m}$ converge absolument, nous appliquons le test du ratio

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{p^{-(m+1)z}}{m+1}\frac{m}{p^{-mz}} &= \lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}p^{-z}\\ &= p^{-z}\leq 1 \text{ comme } p\geq 1 \text{ et } z\geq 1.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Pour montrer que $\sum_p\frac{p^{-mz}}{m}$ converge absolument, on observe que la quantité mz est supérieure à 1 puisque m est au moins égal à 1 et que z est plus grand de 1.

Puisque la double somme converge absolument, l'ordre de la sommation n'a pas d'importance.

La double somme converge absolument, donc il converge chaque fois que $\mathrm{Re}(z)>1$, ce qui nous donne une autre fonction analytique.

Par prolongement analytique, nous avons maintenant $\log\zeta(z)=\sum_{p,m}\frac{p^{-mz}}{m}$ chaque fois que $\mathrm{Re}(z)>1$.

Maintenant si nous laissons $c_n=\frac{1}{m}$ si $n=p^m$ et $c_n=0$ sinon, nous avons complété la preuve. ■

3.5 Non annulation de $\zeta(z)$ sur la droite $\mathrm{Re}\, z = 1$

Le théorème (3.2.1) fournit la prolongement analytique de $\zeta(z)$ pour $\mathrm{Re}\, z > 0$. Le résultat important suivant nous indice que la fonction zêta prolongée ne s'annule pas sue la droite verticale $\mathrm{Re}\, z = 1$.(Cet énoncé est équivalent au théorème des nombres premiers),bien que nous nous concentrons uniquement sur la dérivation du théorème des nombres premiers à partir de ce résultat.

Théorème 3.5.1 *Voir[8] La fonction zêta n'a pas de zéros sur la ligne* $\mathrm{Re}(z) = 1$.

Pour preuver ce théoreme on a besien le lemme suivant :

Lemme 3.5.1 *Si* $x > 1$ *et* $y \neq 0$ *alors*

$$\log|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| \geq 0. \tag{3.11}$$

Preuve. On peut laisser $z = x + iy$ et observer

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(n^{-z}) &= \mathrm{Re}(n^{-x-iy}) = \mathrm{Re}(e^{(-x-iy)\log n}) \\ &= \mathrm{Re}(e^{-x\log n}e^{-iy\log n}) \\ &= \mathrm{Re}(e^{-x\log n}(\cos(y\log n) + i\sin(-y\log n))) \\ &= e^{-x\log n}\cos(y\log n) = n^{-x}\cos(y\log n). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Il s'ensuite que $\log|f(x)| \geq 0$ pour $x > 1$, ce qui contredit la relation $|f(x)| \to -\infty$ Comme $x \to 1$ obtenu ci-dessus..

$$\begin{aligned} \log|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| &= 3\log|\zeta(x)| + 4\log|\zeta(x+iy)| + \log|\zeta(x+2iy)| \\ &= 3\,\mathrm{Re}(\log\zeta(x)) + 4\,\mathrm{Re}(\log\zeta(x+iy)) + \mathrm{Re}(\log\zeta(x+2iy)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-x}(3 + 4\cos(y\log n) + \cos 2y\log n) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La positivité découle d'après le lemme (3.4.1) et la relation $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ Pour $t \in \mathbb{R}$ et donc :

$$3 + 4\cos t + \cos(2t) = 2 + 4\cos t + 2cos^2 t = 2(1 + cost)^2 \geq 0$$

■

Preuve du theorème (3.5.1)

D'après la relation (3.13), Il résulte que $|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| \geq 1$, donc pour $x > 1$ on obtient

$$|(x-1)\zeta(x)|^3 \left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 \left|\zeta(x+2iy)\right| \geq \frac{1}{x-1} \tag{3.14}$$

Supposons que $z = 1 + iy$ est un zéro de $\zeta(z)$,c'est-à-dire : supposons $\zeta(1+iy) = 0$.
Puisque $\zeta(z)$ n'est pas définie à $z = 1$, il est clair que $y \neq 0$.

- Comme $\zeta(z)$ est analytique sur le demi plan $x > 0$, $\zeta(z)$ est analytique aux point $z = 1 + iy$ et $z = 1 + 2iy$.
  Ainsi, comme l'analyticité en un point implique la continuité,

$$\lim_{x \to 1^+} \zeta(x + 2iy) = \zeta(1 + 2iy) \tag{3.15}$$

- Aussi, par l'analycité de $\zeta(z)$ en $1 + iy$, $\lim_{h \to 0} \dfrac{\zeta(1+iy+h) - \zeta(1+iy)}{h}$ existe.
  Puisque $\zeta(1+iy) = 0$, il en résulte que $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{\zeta(1+iy+h)}{h}$ existe.
  En d'autre termes,

$$\lim_{h \to 1^+} \frac{\zeta(x+iy)}{x-1} \tag{3.16}$$

  Existe.

- De plus, $\zeta(z)$ a un pôle simple en $z = 1$ avec la résidu 1. Par conséquent

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1 \tag{3.17}$$

D'après (3.15),(3.16) et (3.17), le côté gauche (3.14) doit converge vers une limite finie lorsque $x \longrightarrow 1^+$, ce qui n'est pas le cas.

Par conséquence $z = 1 + i\,y$ ne peut pas être un zéro de $\zeta(z)$.

Mais cela contredit le lemme (3.5.1) car le logarithme d'un nombre inférieur à un est négatif et en concluant la preuve ∎

Remarque 3.5.1 *Puisque le théorème* (3.3.1) *garanti déjà que* $\zeta(z) \neq 0$ *pour* $\mathrm{Re} > 1$ *le théorème* (3.5.1) *implique que* $\zeta(z)$ *ne s'annule pas dans le demi-plan fermé* $\mathrm{Re}\, z \geq 1$.

CHAPITRE

4 Preuve du théorème des nombres premiers

4.1 La fonction Φ et dérivée logarithmique de ζ

Tout d'abord, nous utilisons la représentation en série de $\log\zeta$ obtenue dans le lemme (3.4.1) pour trouver une telle représentation pour ζ'/ζ. Notez que $(\log\zeta)' = \zeta'/\zeta$. Ainsi, ζ'/ζ est également appelée la dérivée logarithmique de ζ.

Théorème 4.1.1 *Voir[8] Pour* $\operatorname{Re} z > 1$ *nous avons*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^z} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{kz}} \tag{4.1}$$

Preuve. *L'équation* $(\log\zeta)'(z) = \zeta'(z)/\zeta(z)$ *déjà mentionné suit pour* $z \in \mathbb{R}$, $z > 1$, *par la règle de chaîne standard de l'analyse (réelle). Mais aussi il vaut pour* $\operatorname{Re} z > 1$ *par le théorème d'identité. Puisque*

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n^z}\right) = \frac{d}{dz}\exp(-z\log n) = -\log n \cdot \exp(-z\log n) = -\frac{\log n}{n^z} \tag{4.2}$$

La première équation découle du lemme (3.4.1) *et du théorème de Weierstrass* (1.2.10). *Si* $n = p^k$ *avec* $p \in \mathbb{P}$ *avec* $k \in \mathbb{N}$, *alors*

$$a_n \log n = \frac{1}{k}\log(p^k) = \log p \tag{4.3}$$

Puisque $a_n = 0$, *sinon la deuxième équation suit également.* ■

Pour nous, il sera commode de ne considérer que ces termes de la série pour $\zeta'(z)/\zeta(z)$ qui correspondent à $k=1$. On considère donc la fonction Φ pour $\operatorname{Re} z>1$:

$$\Phi(z)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^z} \tag{4.4}$$

Nous avons donc

$$\Phi(z)+\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log p}{p^{kz}} \tag{4.5}$$

Lemme 4.1.1 *La fonction* $\Phi+\zeta'(z)/\zeta(z)$ *a une prolongement holomorphe pour* $\operatorname{Re} z>1/2$.

Preuve. Pour $\operatorname{Re} z>0$, On a

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{p^{kz}}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{p^z}\right)^k=\left(\frac{1}{p^z}\right)^2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^z}\right)^j=\left(\frac{1}{p^z}\right)^2\frac{1}{1-\frac{1}{p^z}}=\frac{1}{p^z(p^z-1)} \tag{4.6}$$

Ainsi la série ci-dessus pour $\Phi+\zeta'(z)/\zeta(z)$ peut être réécrit sous la forme

$$\Phi(z)+\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^z(p^z-1)} \tag{4.7}$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour un grand p, on a $\log p<p^{\varepsilon/2}$ et $p^{1/2+\varepsilon}>2p^{1/2+\varepsilon/2}>p^{1/2+\varepsilon/2}+1$ Pour $\operatorname{Re} z>\frac{1}{2}+\varepsilon$ donc

$$\left|\frac{\log p}{p^z(p^z-1)}\right|\leq\frac{\log p}{p^{\operatorname{Re} z}(p^{\operatorname{Re} z}-1)}\leq\frac{p^{\varepsilon/2}}{2p^{1/2+\varepsilon}p^{1/2+\varepsilon/2}}=\frac{1}{2p^{1+\varepsilon}} \tag{4.8}$$

Ainsi la série pour $\Phi+\zeta'/\zeta$ converge localement uniformément en $\operatorname{Re} z>1/2$. Il est donc holomorphe par le théorème de Weierstrass(1.2.10). ■

D'après le théorème (3.2.1), ζ a un pôle simple en 1. Cela implique que la fonction h donnée par $h(z)=(z-1)\zeta(z)$ se prolonge holomorphiquement jusque'à un voisinage de 1 avec $h(1)\neq 0$. puisque

$$\frac{h'(z)}{h(z)}=\frac{1}{z-1}+\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \tag{4.9}$$

et puisque $\zeta(z)\neq 0$ si $\operatorname{Re} z=1$ on voit que la fonction donnée par

$$z\mapsto \frac{1}{z-1}+\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \tag{4.10}$$

Peut être continuée analytiquement sur certains domaines contenant la fermeture $\operatorname{Re} z\geq 1$ de $\operatorname{Re} z>1$. Par Lemme (4.1.1) il en va de même pour la fonction

$$z\mapsto \Phi(z)-\frac{1}{z-1} \tag{4.11}$$

Nous résumons cela comme suit.

Lemme 4.1.2 *Soit* $\Phi(z)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^z}$ *pour* $\operatorname{Re} z>1$,

Alors, la fonction définie par :

$$z\mapsto \Phi(z)-\frac{1}{z-1} \tag{4.12}$$

a une prolongement holomorphe à un domaine contenant $\operatorname{Re} z\geq 1$.

4.2 Lien entre la fonction Φ et θ

Le lemme suivant relie la fonction Φ de ce lemme à la fonction θ définie par

$$\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log p \tag{4.13}$$

Examinés à la section (2.2) .

Lemme 4.2.1 *pour* $\operatorname{Re} z>1$

$$\Phi(z)=z\int_1^{+\infty}\frac{\theta(t)}{t^{z+1}}dt \tag{4.14}$$

Preuve.

- On va commencer par montrer que l'intégrale est bien définie on a :

  $\forall\, t\geq 1, \forall \operatorname{Re} z>1.$

$$\left|\frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\right|\leq\frac{b}{t^{\operatorname{Re} z}} \qquad \text{par le lemme (2.2.1)} \tag{4.15}$$

Comme $\frac{b}{t^{\operatorname{Re} z}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour $\operatorname{Re} z > 1$, l'intégrable est bien définie.

- Comme $\theta(t) = 0$ sur $[1,2[$, on a $\forall \operatorname{Re} z > 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\theta(t)}{t^{z+1}} dt &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{p_j}^{p_{j+1}} z \frac{\theta(t)}{t^{z+1}} dt \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \theta(p_j) \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{z}{t^{z+1}} dt \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \theta(p_j) \left(\frac{1}{p_j^z} - \frac{1}{p_{j+1}^z} \right) \\
&= \frac{\theta(z)}{2^z} + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\theta(p_j) - \theta(p_{j-1})}{p_j^z} \\
&= \frac{\log z}{2^z} + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\log p_j}{p_j^z} \\
&= \Phi(z)
\end{aligned}$$

■

4.3 Théorème taubérien auxiliaire(Newman)

Pour prouver le théorème des nombres premiers, nous avons également besoin du résultat suivant.Cette théorème est un tour de force d'analyse complexe. dans ce qui suit, notons que g est la transformé de Laplace de f. Les hypothèses sur f garantissent que nous pourrons appliquer le théorème à la fonction théta de tchybyshev.

Théorème 4.3.1 *Voir[8] Soit $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ bornée et mesurable. Soit g la transformation de Laplace de f, $g(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$ pour $\operatorname{Re} z > 0$.*

Supposons que g ait une prolongement analytique au domaine contenant le demi plan $\operatorname{Re} z \geq 0$. Alors l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^{T} f(t) dt$$

existe et

$$\int_0^\infty f(t)dt = g(0) = \lim_{z\to 0} g(z).$$

Remarque 4.3.1 *Depuis* $|e^{-zt}| = e^{-t\,\mathrm{Re}\,z}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $z \in \mathbb{C}$ *et puisque* f *est borné, il s'ensuit d'après le test de comparaison, il existe un intégrale définissant* g *pour* $\mathrm{Re}\,z > 0$. *C'est aussi Il n'est pas difficile de voir que* g *est holomorphe . L'hypothèse essentielle est que* g *peut être se prolonge holomorphiquement.*

Remarque 4.3.2 *Un "théoreme taubérien"est un résultant dans lequel un résultant de convergence plus faible et d'une hypothése supplémentaire. L'expression trouve son origine dans les travaux de G.H Hardy et J.E.L Littlewood,qui ont inventé le terme en l'honneur de A.Tauber.*

4.4 Achèvement de la preuve du TNP

D'après Lemme (2.2.4) la conclusion est équivalent à

$$\theta(x) \sim x \tag{4.16}$$

lorsque $x \to \infty$.

Il découle du lemme (4.2.1) avec une substitution qui

$t = e^s$ changement de variable .

$$\Phi(z) = z\int_0^\infty \theta(e^s)e^{-sz}ds \tag{4.17}$$

Pour $\mathrm{Re}\,z > 1$.

Ainsi

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} = \int_0^\infty \theta(e^s)e^{-s}e^{-sz}ds \tag{4.18}$$

Pour $\mathrm{Re}\,z > 0$.

Puisque

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-sz}ds \tag{4.19}$$

Pour $\mathrm{Re}\, z > 0$,

On obtient

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty (\theta(e^s)e^{-s} - 1)e^{-sz}\, ds \tag{4.20}$$

D'autre part

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1}\left(\Phi(z+1) - \frac{1}{z} - 1\right). \tag{4.21}$$

On déduit du lemme (4.1.2) que la fonction définie par le membre de gauche a un prolongement holomorphe pour $\mathrm{Re}\, z > 0$. Le théorème (4.3.1) implique maintenant que l'intégrale

$$\int_0^\infty (\theta(e^s)e^{-s} - 1)ds = \int_1^\infty \left(\frac{\theta(t)}{t} - 1\right)\frac{dt}{t}. \tag{4.22}$$

Converge. Ici, nous avons utilisé que l'intégrande est borné puisque $\theta(x) = \mathcal{O}(x)$ d'après Lemme (2.2.1).

La convergence de cette intégrale implique maintenant que $\theta(x) \sim x$ lorsque $x \to \infty$. En fait Si $\theta(x) > (1+2\varepsilon)x$ pour $\varepsilon > 0$, alors

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \left(\frac{\theta(t)}{t} - 1\right)\frac{dt}{t} \geq \left(\frac{(1+2\varepsilon)x}{(1+\varepsilon)x} - 1\right)\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{dt}{t} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\log(1+\varepsilon) > 0. \tag{4.23}$$

Puisque l'intégrale converge, cela ne peut pas se produire pour un x arbitrairement grand. De même, si $\theta(x) < (1-2\varepsilon)x$, alors

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^x \left(\frac{\theta(t)}{t} - 1\right)\frac{dt}{t} \leq \left(\frac{(1-2\varepsilon)x}{(1-\varepsilon)x} - 1\right)\int_{(1-\varepsilon)x}^x \frac{dt}{t} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\log(1-\varepsilon) < 0. \tag{4.24}$$

D'où $(1-2\varepsilon)x \leq \theta(x) \leq (1+2\varepsilon)x$ pour tout x assez grand et $\theta(x) \sim x$ pour $x \to \infty$.

4.5 Quelques compléments

Nous avons prouvé le théorème des nombres premiers qui dit que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

lorsque $x \to \infty$.

On peut se demander quelle est la qualité de l'approximation de $\pi(x)$ par $x/\log x$ en réalité est réellement bonne. Il s'avère préférable de considérer le logarithme intégral

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \tag{4.25}$$

Au lieu de $x/\log x$.

Notez que

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{4.26}$$

lorsque $x \to \infty$,Ceci découle directement de la règle de l'Hospital.

Alternativement, l'intégration par parties donne que

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \tag{4.27}$$

Et puisque

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\log t)^2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{\sqrt{x}-2}{(\log 2)^2} + \frac{x-\sqrt{x}}{(\log\sqrt{x})^2} \leq 4\sqrt{x} + \frac{4x}{(\log x)^2} \tag{4.28}$$

On obtient donc

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) = \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\frac{x}{\log x}\right) \tag{4.29}$$

lorsque $x \to \infty$.

En utilisant à nouveau l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}(x) &= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \\ &= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \frac{x}{(\log x)^2} - \frac{2}{(\log 2)^2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^3} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Conduisant à

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right) \tag{4.31}$$

lorsque $x \to \infty$.

Le théorème des nombres premiers est donc équivalent à

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \tag{4.32}$$

lorsque $x \to \infty$.

Cette méthode a été améliorée en estimant la différence entre $\pi(x)$ et $\mathrm{Li}(x)$.

Par exemple, on sait que

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right) \tag{4.33}$$

Pour une constante positive. Cela avait déjà été démontré par la Vallée Poussin en 1899.

Quelques (légères) améliorations ont été obtenues depuis lors.

. Au lieu de $\mathrm{Li}(x)$, on considère également la valeur principale

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} := \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t}\right). \tag{4.34}$$

Ainsi

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2) = \mathrm{li}(x) - 1.0451.... \tag{4.35}$$

Les données numériques suggèrent que $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$ pour tout x. Cependant, Littlewood a montré en 1914 que $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ change de signe infiniment souvent. Il n'a pas donné d'estimation où se produit le premier changement de signe, mais son élève Skewes a montré en 1955 que cela se produit pour certains x inférieurs à

$$e^{e^{e^{7.705}}} < 10^{10^{10^{10^3}}} \tag{4.36}$$

Depuis lors, ce nombre a été amélioré pour atteindre environ 1.39810^{316}, et l'on suppose que le premier changement de signe se produit à peu près à ce moment-là.

Conclusion

Les preuves présentées par J.Hadamad et C. de la vallée Poussin s'appuient sur la stratégie de Riemann, qui relie la distribution des nombres premiers.

L'élément clé de ces preuves est l'absence de zéros de la fonction zêta sur la droite $\mathrm{Re}(z) = 1$**, où s'arrête la convergence du produit eulérien.**

Le théorème des nombres premiers est en effet équivalent à la non-annulation de la fonction zêta sur la droite $\mathrm{Re}(z) = 1$**.**

Pendant longtemps, On a cru qu'une preuve du théorème des nombres premiers sans utiliser de variables complexes était impossible, mais en 1948, P. Erdôs et A.Selberg ont réussi à fournir une telle preuve.

Cette prouesse a Valu à A. Selberg la médaille Fields en 1950.

Bibliographie

[1] G.H. Hardy , E.M.Wright ; *Introduction à la théorie des nombres* . Vuibert.Springer -2007

[2] Walter Bergweiler, Analytic Number Theory https://analysis.math.uni-kiel.de/vorlesungen/ant.18/Analytic_Number_Theory.pdf

[3] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombre*s. Société Mathématique de France-2004.

[4] Pierre Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Édition de l'École polytechnique -2011.

[5] Joseph Bak and Donald J. Newman, *Complex, Analysis, third ed.*,New York,2010.

[6] Serge Lang,. *Complex,Analysis, third ed.*,New York-Verlag,1993.

[7] Elias M. *Stein and Rami Shakarchi,Complex,Analysis, Princeton Uni-versity Press, Princeton*,NJ,2003.

[8] D.Zagier, *"Newman's short proof of the prime numbre theorem,"Amer-ican Mathematical Monthly, Volume 104 Numbre 8(1997)* , pages 705-708