République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

SEBBOUH NABIL

Thème :

Structures des algèbres de Lie semi-simples

Soutenu le :10 Septembre 2018 devant le jury composé de

Président :	Ait-Amrane N.Rosa.	M.A.A	Université de Médéa
Directeur de Mémoire :	Boutebba Mohamed Nassim.	M.A.A	Université de Médéa
Examinateur :	Azrou Nadia.	M.A.A	Université de Médéa
Examinateur :	Krimi Mohamed.	M.A.A	Université de Médéa

Remerciements

Au terme de cette étude, nous remercions avant tout ALLAH qui nous a aidé à réaliser ce présent travail.

On tient à remercier vivement notre encadreur Monsieur Boutebba Mohamed Nassim de son aide précieuse destinée à améliorer le contenu de ce travail.

Recevez ; Monsieur nos vifs remerciements et l'expression de notre profonde gratitude pour votre compréhension et votre disponibilité constante.

Pour nous, c'est un devoir et un plaisir de remercier nos enseignants du département de mathématique et informatique de l'université de Médéa pour leurs séminaire .

Nos remerciements vont également à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin.

Résume

Dans cette mémoire, nous avons mentionné premièrement les groupes de Lie ainsi que les algèbres de Lie. On a relié ces deux notions l'une avec l'autre en utilisant l'application exponentielle qui permet le passage d'une algèbre de Lie vers son groupe de Lie. Deuxièmement on a introduit qu'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est celui qui n'a pas d'idéaux abéliens non-zéro. Cela équivaut à l'absence d'idéaux résolubles. En effet, si $\mathfrak{g}$ avait un idéal résoluble $\mathfrak{h}$, on pourrait considérer la suites dérivées de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $\mathfrak{h}^{(1)} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \quad \mathfrak{h}^{(n)} = [\mathfrak{h}^{(n-1)}, \mathfrak{h}^{(n-1)}]$. Ce sont des idéaux car, selon l'identité de Jacobi, le produit de Lie de deux idéaux est un idéal. Ces $\mathfrak{h}^{(n)}$ finalement réduit à $\{0\}$ par l'hypothèse de la résolubilité, et le dernier non nul est abélien. Soit un unique idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ qui contient tout idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Cet idéal est le radical de $\mathfrak{g}$ noté par $rad(\mathfrak{g})$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dit semi-simple si $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$ (ou, ce qui revient au même, si elle ne contient pas d'idéal commutatif non réduit à $\{0\}$. On définit d'autre part sur toute algèbre de Lie réelle (resp. complexe) $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique réelle (resp. complexe) dite forme de Killing qui est noté : κ par la formule : $\kappa(X, Y) = tr(ad(X) \circ ad(Y))$; cette forme est étroitement liée à la structure de $\mathfrak{g}$ par les trois critères de Cartan ce qui est bien défini dans cette mémoire.

مـــــلـــــخـــــص

في هذه المذكرة، ذكرنا أولا زمر لي الخطية وكذلك جبر لي. و ربطنا هذان المفهومان ببعضهما البعض باستخدام التطبيق الأسي و الذي يسمح بالمرور من جبر لي إلى زمرة لي الخاصة به. ثانيا ، قد افدنا بأن جبر لي شبه البسيط $\mathfrak{g}$ هو الذي لا يملك آبيليات مثالية غير معدومة. و هذا يكافئ الغياب في المثاليات القابلة للحل. إذن، إذا كان $\mathfrak{g}$ يملك مثالية قابلة للحل $\mathfrak{h}$ يمكننا النظر في المتتاليات المشتقة لـ $\mathfrak{h}$ بمعني , $\mathfrak{h}^{(1)} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ $\mathfrak{h}^{(n)} = \left[\mathfrak{h}^{(n-1)}, \mathfrak{h}^{(n-1)}\right]$. و هم مثاليات وهذا حسب علاقة جاكوبي، جداء لي لمثاليتين هو مثالي وبتالي هذه المتتاليات المشتقة باستخدام فرضيات القابليّة للحل تختصر إل ي $\{0\}$ وهذا الأخير غير المعدوم يكون آبيلي. ليكن مثالي قابل للحل و وحيد لـ $\mathfrak{g}$ و الذي يحوي كل مثالي قابل للحل لـ $\mathfrak{g}$ هذه المثاليات هي راديكال $\mathfrak{g}$ نرمز لها بـ $rad(\mathfrak{g})$.

نقول عن جبر لي $\mathfrak{g}$ بأنه شبه بسيط إذا كان $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$ (أو ما يعبر عن نفس الشيء، أنه إذا لم تكن تحوي أي مثالية تبديلية غير مختصرة إلي $\{0\}$). نعرّف بشكل آخر على كل جبر لي حقيقي (أو مركب) $\mathfrak{g}$ شكل ثنائي خطي متناظر حقيقي (أو مركب) يدعى بشكل كيلينغ يرمز له بـ κ المعرف بالعلاقة التاليـــــــــــــــــــة : $\kappa(X,Y) = tr\ (ad(X) \circ (Y))$، هذه العلاقة مرتبطة ارتباطا وثيقا بمعايير كارتن و التي قد تمّ تبيينها في هذه المذكرة.

Table des matières

Remerciements **2**

Introduction **7**

1 Groupe de Lie **8**
1.1 Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ . . . 8
1.2 Variété différentiable . . . 9
1.3 Groupes topologiques et Groupe de Lie . . . 10
1.4 Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ . . . 10
1.5 Exemples de sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$ . . . 12
1.6 L'application Exponentielle . . . 14
1.7 Logarithme d'une matrice . . . 18
1.8 Groupe de Lie linéaire . . . 22
1.9 Sous-groupes à un paramètre . . . 22
1.10 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire . . . 23

2 Définitions et exemples **25**
2.1 Algèbre de Lie . . . 25
2.2 Constantes de structure . . . 26
2.3 Centre d'une algèbre de Lie . . . 26
2.4 Centralisateurs et normalisateurs . . . 27
2.5 Idéaux dans les algèbres de Lie . . . 27
2.6 Sous-algèbre de Lie . . . 27
2.7 Morphismes d'algèbre de Lie et représentation adjointe . . . 28
2.8 Forme de Killing . . . 28
2.9 Dérivations, sommes directes et sommes semi-directes d'algèbres de Lie . . . 30
2.10 Extensions du corps de base, complexification et formes réelles . . . 31

3 Algèbres de Lie semi-simples **33**
3.1 Algèbres de Lie nilpotententes . . . 33
3.1.1 Définitions et exemple . . . 33
3.1.2 Structure des algèbres de Lie nilpotententes . . . 33
3.2 Algèbres des Lie résolubles . . . 34
3.2.1 Définitions et exemple . . . 34
3.2.2 Structure des algèbres de Lie résolubles . . . 34
3.2.3 Corps algébriquement clos et Caractéristique d'un corps . . . 35
3.2.4 Critère de résolubilité de Cartan . . . 36
3.2.5 Radical d'une algèbre de Lie . . . 36
3.3 Algèbres de Lie semi-simples . . . 37
3.3.1 Définitions et exemples . . . 37
3.3.2 Structure des algèbres de semi-simples . . . 37

3.3.3 Critère de semi-simplicité de Cartan 38

Bibliographie **39**

Introduction

Les algèbres de Lie ont été introduites pour étudier le concept de transformations infinitésimales par Marius Sophus Lie dans les années 1870, et découverte indépendante par Wilhelm Killing dans les années 1880. 8 ans plus tard ;les algèbres de Lie semi-simples ont été d'abord classées sur les nombres complexes (1888-90), bien que sa preuve manque de rigueur. Cette preuve a été par Élie Cartan (1894) dans sa thèse de doctorat, qui a également classé les algèbres de Lie réelles semi-simples. Cela a été ensuite affiné.

Les algèbres de Lie interviennent dans de nombreux domaines, largement en physique, notamment en mécanique quantique et en physique des particules.

Cependant pour bien illustrer notre travail, on a élaboré un plan de travail composé d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré d'étudier l'application exponentielle et le groupe linéaire $GL(n, \mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}$) qui nécessite une connaissance des variétés différentiables. Celle-ci permet d'associer à un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{K})$ son algèbre de Lie. Nous nous limitons aux groupes de Lie linéaires, c'est à dire aux groupes de matrices.Dans Le deuxième chapitre on a présenté l'algèbre de Lie qui est étroitement liée aux groupes de Lie, Cette correspondance entre eux permet d'étudier les groupes de Lie en termes d'algèbres de Lie. Tout groupe de Lie donne lieu à une algèbre de Lie. Inversement, à toute Algèbre de Lie à dimension finie sur des nombres réels ou complexes.

Une algèbre de Lie est "simple" si elle n'a pas d'idéaux non triviaux et n'est pas abélienne. (C'est-à-dire qu'une algèbre de Lie à une dimension, nécessairement abélienne, n'est pas simple par définition, même si elle ne possède pas d'idéaux non triviaux.) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est appelé semi-simple s'il est isomorphe à une somme directe d'algèbres simples. Il existe plusieurs caractérisations équivalentes des algèbres semi-simples, telles que l'absence d'idéaux résolubles non nuls. Donc le concept de semi-simplicité pour les algèbres de Lie est étroitement lié à la réductibilité complète (semi-simplicité) de leurs représentations. Lorsque le champ fondamental F a le zéro caractéristique, toute représentation en dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple (c'est-à-dire somme directe des représentations irréductibles). En général, une algèbre de Lie ainsi, une algèbre de Lie semi-simple est réductrice. C'est ce que nous avons discuté dans le troisième chapitre, et on a utilisé le théorème de Lie - démontré en 1876 par Sophus Lie - qui porte sur la structure des algèbres de Lie résolubles. On ajoute ainsi, toute algèbre de Lie nilpotente est un algèbre de Lie résoluble, mais l'inverse n'est pas vrai. Les algèbres de Lie résolubles et les algèbres de Lie semi-simples forment deux grandes classes généralement complémentaires.

Chapitre 1

Groupe de Lie

1.1 Sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq d \leq n$.

Définition 1.1.1. ***Difféomorphisme***
Soit W et U sont deux ouverts de de $\mathbb{R}^n$,on dit que l'application f de U dans W est $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$. On emploie souvent le terme difféomorphisme pour parler de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Définition 1.1.2. *On dit que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d si chaque point de V admet un voisinage $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel est défini un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ envoyant $V \cap \mathcal{U}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 1.1.3. *[3] Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) ***Définition***. *V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*

(ii) ***Graphe***. *Tout point de V admet un voisinage $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel sont définies des coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ et une application $f = (f_{d+1}, ..., f_n)$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-d}$, tels que $V \cap \mathcal{U}$ est le graphe de $f : m \in \mathcal{U}$, de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, appartient à $V \cap \mathcal{U}$ ssi $x_{d+1} = f_{d+1}(x_1, ..., x_d), ..., x_n = f_n(x_1, ..., x_d)$.*

(iii) ***Paramétrage***. *Tout point a de V admet un voisinage $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$ auquel on peut associer un homéomorphisme $\psi : \Omega \to V \cap \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage ouvert connexe Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ sur $V \cap \mathcal{U}$, tel que $\psi(0) = a$ et $D_0\psi$ est injective.*

(iv) ***Description implicite***. *Tout point a de V admet un voisinage $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel est défini une fonction $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $V \cap \mathcal{U} = g^{-1}(\{0\})$ et $D_a g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ est surjective.*

Noter que dans la caractérisation à l'aide d'un paramétrage local, on demande à ce paramétrage d'être un homéomorphisme : deux points de V voisins dans $\mathbb{R}^n$ doivent donc avoir des paramètres voisins. La démonstration de ce théorème repose entièrement sur le théorème d'inversion locale .

Exemple 1.1.1. *Le graphe d'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une sous-variété. Étant donné la description d'une sous-variété donnée par l'assertion (ii), posons $\varphi(m) = (x_1, ..., x_d, x_{d+1} - f_{d+1}(m), ..., x_n - f_n(m))$ pour $m \in \mathcal{U}$. On vérifie directement sans mal que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme envoyant $V \cap \mathcal{U}$ sur Ω. Cela prouve l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).*

Exemple 1.1.2. ***Sous-variétés de*** $GL(\mathbb{R}^n)$. *L'ensemble $SL(\mathbb{R}^n)$ des matrices de déterminant 1 est une sous-variété de $GL(\mathbb{R}^n)$. Posons $g : GL(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A - 1$; l'ensemble $SL(\mathbb{R}^n) = g^{-1}(\{0\})$. Calculons sa différentielle en un point A quelconque A de $SL(\mathbb{R}^n)$. On a $\det(A + M) = (\det A)\det(Id + A^{-1}M)$. Pour obtenir un développement limité de $\det(Id + A^{-1}M)$ au premier ordre en M, notez que*

l'ensemble des applications linéaires M telles que $A^{-1}M$ est diagonalisable est dense dans $L(\mathbb{R}^n)$; voyez-vous pourquoi ? Pour de telles applications le calcul de $\det(Id + A^{-1}M)$ *se fait trivialement dans une base où la matrice de $A^{-1}M$ est diagonale, d'où l'on tire :* $\det(Id + A^{-1}M) = tr(A^{-1}M) + o(|M|)$*, ce qui donne* $(D_Ag)(M) = (\det A)tr(A^{-1}M) = tr(co(A)^*M)$*, où $co(A)^*$ désigne la transposée de la comatrice de A. La continuité de l'application déterminant permet d'étendre cette relation à toute $M \in L(\mathbb{R}^n)$. On lit sur cette formule la surjectivité de l'application $D_Ag : L(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Le groupe spécial linéaire $SL(\mathbb{R}^n)$ est donc une sous-variété de $GL(\mathbb{R}^n)$ de dimension $n^2 - 1$.*

Exemple 1.1.3. *Le groupe orthogonal $O(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n); A^*A = Id\}$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et définissons $g : L(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}$ par la formule $g(A) = A^*A - Id$. On voit sans mal sur l'expression $(D_Ag)(M) = A^{-1}M + (A^{-1}M)^*$ de D_Ag qu'elle est surjective, comme $(D_Ag)(\frac{1}{2}AS) = S$ pour toute matrice symétrique S. Le groupe orthogonal est donc une sous-variété de $GL(\mathbb{R}^n)$ de dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.*

1.2 Variété différentiable

Définition 1.2.1. ***Homéomorphisme***

Soient X et Y deux ensembles muni d'une topologie. Une application f de X dans Y est un homéomorphisme si f est bijective, et que les applications f et f^{-1} sont continues.

Définition 1.2.2. ***Variétés topologiques***

On dite que M est une Variété topologique si :

1 *M est un espace topologique séparé ;*

2 *Pour tout $p \in M$, il existe U un voisinage ouvert de p , et un homéomorphisme*

$$\phi : U \to W \subset \mathbb{R}^n, \text{ (où } W \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n).$$

Définition 1.2.3. ***Carte***

Une carte de M est un couple (U, ϕ) constitué d'une partie U de M appelé domaine de la carte, et un homéomorphisme ϕ de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les coordonnées X_i de $\phi(x)$ sont appelées coordonnées locales de x associées à la carte (U, ϕ).

Définition 1.2.4. ***Atlas***

Un atlas de dimension n et de classe $\mathcal{C}^p$ sur M est un ensemble A de cartes (U_i, ϕ_i) de dimension n de M tel que :

1 *Les domaines U_i recouvrement M.*

2 *Pour chaque couple $(i, j) \in I^2$, $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ est un isomorphisme de classe $\mathcal{C}^p$ de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_j(U_i \cap U_j)$*

Définition 1.2.5. ***Variété différentiable***

Une variété différentiable M de classe $\mathcal{C}^p (p \geq 1)$ de dimension n si :

1 *M est une variété topologique ;*

2 *Il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de M tel que pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,*

$$\phi_j \circ \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe $\mathcal{C}^p$.

Exemple 1.2.1. ***L'espace*** $\mathbb{R}^n$ *Muni de l'application $Id_{\mathbb{R}^n} : x \to x$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de $\mathcal{C}^\infty$.*

1.3 Groupes topologiques et Groupe de Lie

Définition 1.3.1. *Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie telle que les applications*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

soient continues, ce qui est équivalent à dire que l'application

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh^{-1}, \end{aligned}$$

est continue.

Définition 1.3.2. ***(Groupe de Lie)*** *Un groupe de Lie G est une variété différentiable munie d'une structure de groupe (ou un groupe muni d'une structure de variété différentiable) telle que*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

soient des applications différentiables.

Donnons quelques exemples de groupes de Lie (donc de groupes topologiques) :

Exemple 1.3.1. *$S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{R}\}$, C'est le* ***groupe du cercle*** *est une groupe de Lie.*

Exemple 1.3.2. *Les groupes matriciels réels :*

Groupe linéaire réel *:*

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{M \in M(n,\mathbb{R}) \quad | \quad \det M \neq 0\},\ \textit{dimension } n^2.$$

Groupe linéaire complexe *:*

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{M \in M(n,\mathbb{C}) \quad | \quad \det M \neq 0\},\ \textit{dimension } 2n^2.$$

où $M(n,\mathbb{K})$ est l'algèbre complexe des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

1.4 Le groupe $GL(n,\mathbb{R})$

On note $M(n.\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $GL(n,\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M(n,\mathbb{R})$ i.e

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \quad | \quad \det X \neq 0\}.$$

C'est l'exemple de base d'un groupe de Lie. On va le considérer du point de vue de sa structure topologique et de sa structure différentiable.

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne et sur $M(n,\mathbb{R})$ la norme

$$||A|| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||\leq 1} ||Ax||.$$

Rappelons que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Notons que la norme que nous considérons possède la propriété d'être une norme d'algèbre,

$$||AB|| \leq ||A||\ \ ||B||.$$

On vérifie que la multiplication dans $M(n,\mathbb{R})$ est une application continue.

Proposition 1.4.1. *[4] Le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ est un ouvert de $M(n,\mathbb{R})$. L'application $g \mapsto g^{-1}$, de $GL(n,\mathbb{R})$ dans lui-même, est continue.*

Démonstration. On peut démontrer cette proposition en utilisant les formules de Cramer. Nous allons en donner une démonstration différente qui a l'avantage d'être valable en dimension infinie.

(a) Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$. Si $||A|| < 1$, alors $I + A$ est inversible et

$$||(I+A)^{-1}|| \leq \tfrac{1}{1-||A||}.$$

En effet

$$(I+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k.$$

De plus

$$||(I+A)||^{-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||A^k|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||A||^k = \frac{1}{1-||A||}.$$

(b) Soit A une matrice inversible. Si B est une matrice telle que

$$||B-A|| < ||A^{-1}||^{-1},$$

alors B est inversible et, si $||B-A|| \leq \epsilon < ||A^{-1}||^{-1}$,

$$||B^{-1} - A^{-1}|| \leq \tfrac{||A^{-1}||^2\epsilon}{1-||A^{-1}||\epsilon}.$$

On peut écrire

$$B = A(I + A^{-1}(B-A)),$$

et on applique (a) à $U = A^{-1}(B-A)$. Notons que $||U|| \leq ||A^{-1}||\epsilon$. Ainsi, si $\epsilon < ||A^{-1}||^{-1}$, alors $I+U$ est inversible et

$$B^{-1} = (I+U)^{-1}A^{-1}, ||B^{-1}|| \leq \tfrac{||A^{-1}||}{1-||A^{-1}||\epsilon}.$$

De plus

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1},$$

donc

$$||B^{-1} - A^{-1}|| \leq \tfrac{||A^{-1}||^2\epsilon}{1-||A^{-1}||\epsilon}.$$

□

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 1.4.2. *[4] Le groupe $GL(n,\mathbb{R})$, muni de la topologie induite par celle de $M(n,\mathbb{R})$, est un groupe topologique. Pour cette topologie les ensembles*

$$E = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad ||g^{-1}|| \leq C, \quad ||g|| \leq C\}$$

(C est une constante) sont compacts, et tout compact de $GL(n,R)$ est contenu dans un ensemble de cette forme.

1.5 Exemples de sous-groupes de $GL(n,\mathbb{R})$

a) On note $SL(n,\mathbb{R})$ le groupe spécial linéaire défini par

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad \det g = 1\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$ qui est distingué car c'est le noyau de l'homomorphisme

$$\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*.$$

b) On note $O(n)$ le groupe orthogonal défini par

$$O(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad ||gx|| = ||x||\}.$$

Par polarisation on montre que g in $O(n)$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (gx|gy) = (x|y),$$

ce qui se traduit matriciellement par

$$g^T g = I,\ g^{-1} = g^T$$

où g^T désigne la matrice transposée de g.
Les vecteurs colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonaux, de même pour les vecteurs lignes.
Le sous-groupe $O(n)$ est un sous-groupe compact de $GL(n,\mathbb{R})$. En effet, pour tout g de $O(n)$,

$$||g|| = 1, ||g^{-1}|| = 1.$$

Le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ est le groupe des matrices orthogonales de déterminant un :

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R}).$$

c) Plus généralement considérons une forme bilinéaire b non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, et le groupe $O(b)$ défini par

$$O(b) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad b(gx, gy) = b(x,y)\}.$$

Soit B la matrice de la forme bilinéaire b,

$$b(x,y) = y^T B x.$$

La condition $g \in O(b)$ s'écrit

$$g^T B g = B.$$

Le groupe $O(b)$ est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$, et, pour $g \in O(b)$,

$$g^{-1} = B^{-1} g^T B.$$

Si b est la forme bilinéaire symétrique définie par

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=1}^{q} x_{p+i} y_{p+i}, \qquad p+q=n,$$

on note $O(b) = O(p,q)$,

$$O(p,q) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad g^T I_{p,q} g = I_{p,q}\},$$

où

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Le groupe $O(p,q)$ est appelé groupe pseudo-orthogonal.

d) Un autre exemple important est le cas d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée. Une telle forme n'existe que si n est pair, $n = 2m$, et il existe une base par rapport à laquelle

$$b(x,y) = -\sum_{i=1}^{m} x_i y_{m+i} + \sum_{i=1}^{m} x_{m+i} y_i.$$

La matrice de cette forme est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le groupe $O(b)$ est le groupe symplectique défini par

$$Sp(m,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad g^T J g = J\},$$

e) Mentionnons le groupe des matrices triangulaires supérieures,

$$T(n,R) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad g_{ij} = 0 \ \ si \ \ i > j\}.$$

aussi appelé groupe triangulaire supérieur, et le groupe triangulaire supérieur strict,

$$T_0(n,R) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad g_{ij} = 0 \ \ si \ \ i > j, \ \ et \ \ g_{ii} = 1\}.$$

f) Considérons sur $\mathbb{C}^n$ le produit scalaire hermitien

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

Le groupe unitaire $U(n)$ est le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$ qui conserve ce produit scalaire, ce qui peut s'écrire

$$U(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \quad | \quad g^* g = I\}.$$

Le groupe spécial unitaire $SU(n)$ est le groupe des matrices unitaires de déterminant un. Le groupe pseudo-unitaire $U(p,q)$ est défini par

$$O(p,q) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad g^* I_{p,q} g = I_{p,q}\},$$

1.6 L'application Exponentielle

Définition 1.6.1. *(**Exponentielle d'une matrice**)*
L'exponentielle d'une matrice $X \in M(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est définie par la série

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Puisque $||X^k|| \leq ||X||^k$, la série converge normalement pour toute matrice X, et uniformément sur tout compact de $M(n, \mathbb{K})$. Si X et Y commutent, $XY = YX$, alors $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$. Ainsi $\exp(X)$ est inversible, et $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$. De plus $\det(\exp X) = \exp(tr(X))$. En effet posons

$$f(t) = \det(\exp tX).$$

Alors

$$f(t + s) = f(t)f(s),\ f(0) = 1,\ f'(0) = trX,$$

donc $f'(t) = e^{t.trX}$. Pour $g \in GL(n, \mathbb{K})$,

$$g \exp X g^{-1} = \exp(gXg^{-1}).$$

Si X est diagonalisable

$$X = g \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} g^{-1},$$

alors

$$\exp X = g \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} g^{-1},$$

Théorème 1.6.2. *[4] L'application exponentielle est un homéomorphisme de $Sym(n, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{P}_n$.*

Démonstration. **(a) Surjectivité**. Soit $p \in \mathcal{P}_n$ et $\lambda_1 > 0, ..., \lambda_n > 0$ ses valeurs propres. Il existe $k \in O(n)$ telle que

$$p = k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} k^{-1},$$

Posons

$$X = k \begin{pmatrix} \log \lambda_1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & & \log \lambda_n \end{pmatrix} k^{-1},$$

Alors $\exp X = p$.

(b) Injectivité. Soient X et $Y \in Sym(n, \mathbb{R})$ telles que $\exp X = \exp Y$. Diagonalisons X et Y,

$$X = k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} k^{-1},\ k \in O(n),$$

$$\exp X = k \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} k^{-1},$$

.

$$Y = h \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} h^{-1},\ h \in O(n)$$

$$\exp Y = h \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & e^{\mu_n} \end{pmatrix} h^{-1},$$

Montrons que X et Y commutent. Soit f un polynôme en une variable tel que

$$f(e^{\mu_i}) = \mu_i, i = l, ..., n,$$

alors $f(\exp Y) = Y$, donc
$YX = f(\exp Y)X = f(\exp X)X = Xf(\exp X) = Xf(\exp Y) = XY$. Il en résulte que X et Y sont diagonalisables dans une même base : on peut prendre $h = k$, et alors $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$, donc $\lambda_i = \mu_i$.

(c) Continuité. L'application exponentielle est continue. Pour $\alpha \geq 0$ soit E la boule fermée

$$E = \{X \in Sym(n, \mathbb{R}) \quad | \quad ||X|| \leq \alpha\}.$$

L'image de E par l'application exponentielle est l'ensemble F défini par

$$F = \{p \in \mathcal{P}_n \quad | \quad ||p|| \leq e^{\alpha} \quad , \quad ||p^{-1}|| \leq e^{\alpha}\}.$$

L'application exponentielle est une bijection continue du compact E sur le compact F, donc est un homéomorphisme de E sur F. Il en résulte que c'est un homéomorphisme de $Sym(n, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{P}_n$.

□

Corollaire 1.6.3. *[4] Toute matrice $g \in GL(n, R)$ s'écrit $g = k \exp X$, $k \in O(n)$, $X \in Sym(n, \mathbb{R})$, et l'application*

$$(k, X) \mapsto k \exp X,\ O(n) \times Sym(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

est un homéomorphisme. L'application exponentielle est analytique réelle, donc de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

Théorème 1.6.4. *[4] La différentielle de l'application exponentielle en 0 est l'application identique, i.e*

$$(D\exp)_0 = I.$$

Démonstration. On peut écrire

$$\exp X = I + X + R(X),$$

avec

$$R(X) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

et

$$||R(X)|| = ||X||\varepsilon(X),$$

$$\lim_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0.$$

□

Théorème 1.6.5. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $M(n,\mathbb{R})$ tel que la restriction de l'application exponentielle à $\mathcal{U}$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\exp\mathcal{U}$.*

Cette théorème est conséauence du théorème d'inversion locale.

Nous allons calculer la différentielle de l'application exponentielle en tout point X. Introduisons les notations suivantes, pour $A, X \in M(n,\mathbb{R})$,

$$L_A X = AX,\ R_A X = XA \text{ et } adAX = [A,X] = AX - XA.$$

Les applications L_A, R_A, adA sont des endomorphismes de l'espace vectoriel $M(n,\mathbb{R})$. Notons que

$$L_A R_A = R_A L_A, adA = L_A - R_A.$$

Théorème 1.6.6. *[4] La différentielle de l'application exponentielle en A est égale à*

$$(D\exp)_A X = \exp A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(adA)^k X.$$

En notant, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} z^k = \frac{1-e^{-z}}{z},$$

le résultat peut s'écrire

$$(D\exp)_A = L_{\exp A} \circ \Phi(adA) = L_{\exp A} \circ \tfrac{I - Exp(-adA)}{adA},$$

où ExpT désigne l'exponentielle d'un endomorphisme T de l'espace $M(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. **(a)** Considérons les applications

$$F_k : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}), X \mapsto X^k.$$

Calculons la différentielle de F_k en A,

$$(DF_k)_A X = \frac{d}{dt}(A+tX)^k|_{t=0}$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} X A^j$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} L_A^{k-j-1} R_A^j X.$$

On peut écrire

$$R_A^j = (L_A - adA)^j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} L_A^{j-i} (adA)^i,$$

car L_A et adA commutent, d'où

$$(DF_k)_A X = \sum_{j=0}^{k-1} L_A^{k-j-1} (\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} L_A^{j-i} (adA)^i) X$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (\sum_{j=i}^{k-1} \binom{j}{i}) L_A^{k-j-1} (adA)^i X.$$

Nous démontrerons plus loin l'identité

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{j}{i} = \binom{k}{i+1}$$

Ainsi

$$(DF_k)_A X = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i+1} L_A^{k-j-1} (adA)^i X.$$

(b) Puisque

$$||(DF_k)_A|| \leq k||A||^{k-1},$$

la série des différentielles

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (DF_k)_A,$$

converge uniformément sur toute boule de $M(n, \mathbb{R})$. Par suite la différentielle de l'application exponentielle est donnée par

$$(D\exp)_A X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(DF_k)_A X$$

$$= (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} L_A^j)(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(adA)^k)X$$

$$= \exp A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(adA)^k X.$$

(c) Démontrons maintenant l'identité

$$\sum_{j=i}^{k-1} \binom{j}{i} = \binom{k}{i+1}$$

Pour k fixé posons

$$a_i = \sum_{j=i}^{k-1} \binom{j}{i}$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1} \binom{j}{i} z^i = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} z^i = \sum_{j=0}^{k-1}(z+1)^j$$

$$= \frac{(z+1)^k - 1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} z^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} z^i.$$

Donc

$$a_i = \binom{k}{i+1}$$

□

1.7 Logarithme d'une matrice

On veut définir une application inverse de l'application exponentielle dans un voisinage de I. On sait que la boule

$$B(I,1) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \ \mid \ ||X - I|| < 1\}$$

est contenue dans $GL(n,\mathbb{R})$. Si $||g - I|| < 1$, on pose

$$\log(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(g-I)^k$$

Proposition 1.7.1. *[4]*

(1) *Pour* $g \in B(I,1)$, *alors* $\exp(\log g) = g$.

(2) *Pour* $X \in B(0, log2)$,*alors* $\log(\exp X) = X$.

Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $X \in M(n,\mathbb{R})$. Si $||X|| < R$ on peut définir

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

L'application qui à f associe $f(X) \in M(n,\mathbb{R})$ est un homomorphisme d'algèbre. Soit

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m$$

une autre série entière, avec $g(0) = b_0 = 0$. La fonction $f \circ g$ est développable en série entière au voisinage de 0,

$$f \circ g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_b z^b$$

Lemme 1.7.2. *[4] Si*

$$(*) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \;\; ||X||^m < R,$$

alors $g(X)$, $f(g(X))$ *et* $(f \circ g)(X)$ *sont bien définis, et*

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)),$$

c'est à dire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p X^p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\sum_{m=1}^{\infty} b_m X^m)^k$$

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$g(z)^k = \sum_{m=k}^{\infty} b_{m,k} z^m,$$

et

$$\sum_{m=k}^{\infty} |b_{m,k}| r^m \leq (\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| r^m)^k.$$

Nous avons

$$f \circ g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m,$$

avec

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m,k},$$

et

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m| r^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{m} |a_k||b_{m,k}|) r^m = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (\sum_{m=k}^{\infty} |b_{m,k}|) r^m$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|) r^m)^k.$$

Supposons que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \quad ||X||^m < R,$$

alors la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \quad ||X||^m$$

est convergente et

$$(f \circ g)(X) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m,k}) X^m.$$

Puisque

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}|a_k|\ \ |b_{m,k}|\ \ ||X^m|| < \infty,$$

on peut intervertir les sommations et

$$(f\circ g)(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\sum_{m=k}^{\infty} b_{m,k}X^m)$$

□

Démonstration. du proposition 1.7.1. Pour démontrer (1) on pose

$$f(z) = \exp(z), \quad g(z) = \log(1+z).$$

'La condition $(*)$ est alors équivalente à $||X|| < 1$.
Pour démontrer (2) on pose

$$f(z) = \log(1+z), g(z) = \exp(z) - 1,$$

Puisque $R = 1$, la condition $(*)$ s'écrit

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{||X||^m}{m!} < 1,$$

i.e $\exp(||X||) - 1 < 1$, ou $||X|| < \log 2$. □

Proposition 1.7.3. *[4] Pour $X, Y \in M(n,\mathbb{R})$*

(i) $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3))$,

(ii) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = \exp(t^2[X,Y] + O(t^3))$.

Démonstration. Posons $F(t) = \exp(tX)\exp(tY)$,

$$\begin{aligned} F(t) &= (I + tX + \tfrac{t^2}{2}X^2 + O(t^3))(I + tY + \tfrac{t^2}{2}Y^2 + O(t^3)) \\ &= I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2 + O(t^3). \end{aligned}$$

Pour t assez petit $||F(t) - I|| < 1$, et

$$\begin{aligned} \log F(t) &= t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - t^2(X+Y)^2 + O(t^3) \\ &= t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3). \end{aligned}$$

Ceci démontre (i), et pour montrer (ii) posons

$$\begin{aligned} G(t) &= \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) \\ &= (I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2 + O(t^3)).(I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2 + O(t^3))) \\ &= I + t^2[X,Y] + O(t^3), \end{aligned}$$

et (ii) s'en déduit en considérant $\log G(t)$. □

Corollaire 1.7.4. *[4] Pour $X, Y \in M(n,\mathbb{R})$,*

$$\textit{(i)} \quad \lim_{k\to\infty}(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k})^k = \exp(X+Y),$$

$$\textit{(ii)} \quad \lim_{k\to\infty}(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k}\exp-\frac{X}{k}\exp-\frac{Y}{k})^{k^2} = \exp([X,Y]),$$

Démonstration. De la proposition précédente on déduit

$$\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k} = \exp(\tfrac{1}{k}(X+Y)+O(\tfrac{1}{k^2})),$$
$$(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k})^k = \exp((X+Y)+O(\tfrac{1}{k}))$$

ce qui démontre (i). De même

$$(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k}\exp-\frac{X}{k}\exp-\frac{Y}{k})^{k^2} = \exp([X,Y]+O(\tfrac{1}{k}),$$

ce qui démontre (ii). □

1.8 Groupe de Lie linéaire

Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$.Nous en avons vu plusieurs exemples au chapitre 1, section 5. Observons que $GL(n,\mathbb{C})$ est groupe de Lie linéaire car il peut être considéré comme un sous-groupe fermé de $GL(2n,\mathbb{R})$. En effet à une matrice $Z = X + iY$ de $M(n,\mathbb{C})$ on associe la matrice

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix},$$

de $M(2n,\mathbb{R})$, et l'application $Z \to \tilde{Z}$ est un homomorphisme d'algèbre.

1.9 Sous-groupes à un paramètre

Soit G un groupe topologique. Un sous-groupe à un paramètre de G est un homomorphisme continu de groupes,

$$\gamma : \mathbb{R} \to G,$$

$\mathbb{R}$ étant muni de la structure additive.

Théorème 1.9.1. *[4] Soit $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{R})$ un sous-groupe à un paramètre de $GL(n,\mathbb{R})$, Alors γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, même analytique réel, et*

$$\gamma(t) = \exp(tA),$$

avec $A = \gamma'(0)$.

Démonstration. Supposons que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s}\\ &= \gamma(t)\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(s)-\gamma(0)}{s}\\ &= \gamma(t)\gamma'(0) = \gamma'(0)\gamma(t).\end{aligned}$$

Posons $A = \gamma'(0)$. Alors

$$\gamma'(t) = A\gamma(t).$$

Il nous reste à montrer que γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit α une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact, et considérons la convolution

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t-s)\gamma(s)ds$$

La fonction $f : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t-s)\gamma(s)ds \\ &= (\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s)\gamma(-s)ds).\gamma(t). \end{aligned}$$

Nous allons choisir la fonction α de telle sorte que la matrice

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s)\gamma(-s)ds,$$

soit inversible. Il en résultera que γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela il suffit que $||B - I|| \leq 1$. Soit $\alpha \leq 0$, d'intégrale égale à un. Alors

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s)||\gamma(-s) - I||ds,$$

Puisque γ est continu en 0, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $|s| \leq \eta, ||\gamma(s) - I|| \leq \epsilon$. Si le support de α est contenu dans $[-\eta, \eta]$, alors $||B - I|| \leq \epsilon$. □

1.10 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire

Soit G un groupe de Lie linéaire, c'est à dire un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$. On lui associe l'ensemble

$$\mathfrak{g} = Lie(G) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \exp(tX) \in G\}.$$

Proposition 1.10.1. *[4]*

On a les résultats suivants

(1) $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M(n, \mathbb{R})$.

(2) Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. (1) Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors

$$(\exp \tfrac{t}{k} X \exp \tfrac{t}{k} Y) \in G,$$

et, puisque G est fermé, à la limite quand $k \to \infty$

$$\exp(t(X + Y)) \in G,$$

d'après le corollaire 1.7.4, donc $X + Y \in \mathfrak{g}$.
(2) De la même façon, pour $t > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} (\exp \frac{\sqrt{t}}{k} X \exp \frac{\sqrt{t}}{k} Y \exp -\frac{\sqrt{t}}{k} X \exp -\frac{\sqrt{t}}{k} Y)^{k^2} = \exp(t[X, Y]) \in G,$$

donc $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. □

Une algèbre de Lie réelle (resp. complexe) est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$ ($resp.\mathbb{C}$) muni d'une application bilinéaire

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (X, Y) \mapsto [X, Y].$$

telle que

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

La relation (2) s'appelle identité de Jacobi.
L'espace $M(n, \mathbb{R})$ muni du produit

$$[X, Y] = XY - YX,$$

est une algèbre de Lie. Si $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie linéaire, alors $\mathfrak{g} = Lie(G)$ est une sous-algèbre de Lie de $M(n, \mathbb{R})$, c'est l'algèbre de Lie de G.

Exemple 1.10.1. $Lie(GL(n, \mathbb{R})) = M(n, \mathbb{R})$,
$Lie(GL(n, \mathbb{R})) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \quad | \quad trX = 0\}$,
$Lie(SO(n)) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \quad | \quad X^T = -X\}$,

Soient G un groupe de Lie linéaire, et $\mathfrak{g} = Lie(G)$ son algèbre de Lie. Par définition de l'algèbre de Lie de G, l'application exponentielle applique $\mathfrak{g}$ dans G,

$$\exp : \mathfrak{g} \to G.$$

Pour $\mathfrak{g} \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{g} \exp(tX)\mathfrak{g}^{-1} = \exp(t\mathfrak{g}X\mathfrak{g}^{-1})$$

Ainsi $\mathfrak{g}X\mathfrak{g}^{-1} \in \mathfrak{g}$. L'application $Ad(\mathfrak{g}) : X \mapsto Ad(\mathfrak{g})X = \mathfrak{g}X\mathfrak{g}^{-1}$ est automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$,

$$Ad(\mathfrak{g})[X, Y] = [Ad(\mathfrak{g})X, Ad(\mathfrak{g})Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

De plus

$$Ad(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2) = Ad(\mathfrak{g}_1) \circ Ad(\mathfrak{g}_2).$$

Proposition 1.10.2. *[4] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie*

(i) *Pour $X \in \mathfrak{g}$, alors*

$$\frac{d}{dt} Ad(\exp tX)|_{t=0} = adX$$

(ii) *Notons Exp l'application exponentielle de $End(\mathfrak{g})$ dans $GL(\mathfrak{g})$.*

$$Exp(adX) = Ad(\exp X), X \in \mathfrak{g}.$$

Démonstration. (i) $\frac{d}{dt} Ad(\exp tX)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(tX)Y \exp(-tX)|_{t=0} = [X, Y]$. (ii)Posons

$$\gamma_1'(t) = Exp(tadX),$$

$$\gamma_2'(t) = Ad(\exp tX),$$

Ce sont deux sous-groupes à un paramètre du groupe $GL(\mathfrak{g})$. De plus

$$\gamma_1'(0) = adX,$$

$$\gamma_2'(0) = (DAd)_I \circ (D \exp)_0 X = adX,$$

donc $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. □

Chapitre 2

Définitions et exemples

2.1 Algèbre de Lie

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \quad \text{OU } \mathbb{C})$

Définition 2.1.1. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, appelée crochet de Lie , qui possédé les propriétés :*

(1) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $[X, X] = 0$ *(antisymétrique).*

(2) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *("identité de Jacobi").*

Exemple 2.1.1. *Tout espace vectorielle E peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie en posant $\forall X, Y \in E$,$[X, Y] = 0$ une telle algèbre de Lie.*

Exemple 2.1.2. *à partir d'une algèbre associative sur un corps $(\mathbf{A}, *)$ on peut construire une algèbre de Lie de façon suivante on pose*
$\forall X, Y \in \mathbf{A}$, $[X, Y] = X * Y - Y * X$ (c'est le commutateur des deux élément X et Y) il facile vérifier que l'on défini ainsi sur $\mathbf{A}$ une structure d'algèbre de Lie.

Exemple 2.1.3. *Considérons $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ l'espace de matrice $n \times n$ a coefficients dans $\mathbb{K}$ c'est une algèbre associative pour la produit matriciel usuel, On peut donc également lui donner une structure d'algèbre de Lie avec croche*

$$[A, B] = AB - BA \quad \forall A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$$

On note $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$ Cette algèbre lorsque l'on considéré sa structure d'algèbre de Lie.

Exemple 2.1.4. *Soient $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}_z$ les "rotations infinitésimales" de $\mathbb{R}^3$ autour des axes x, y et z respectivement, i.e*

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.En utilisant le crochet défini par le produit matriciel , on vérifie que $[\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y] = \mathbf{R}_z$, $[\mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z] = \mathbf{R}_x$ et $[\mathbf{R}_z, \mathbf{R}_x] = \mathbf{R}_y$. Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension 3 engendre par les trois matrices $\mathbf{R}_x$,$\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}_z$ est une algèbre de lie réelle de dimension 3 , appelée l'algèbre de Lie des "rotations infinitésimales" de l'espace, et notée $\mathbf{o}(3)$.

Exemple 2.1.5. *L'algèbre de Lie $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ des transformations affines de la droite réelle est l'espace vectoriel réel de dimension 2 engendre par les matrices $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ muni du crochet $[X, Y] = Y$.*

Exemple 2.1.6. *l'espace vectoriel $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ de matrice $n \times n$ a coefficients dans $\mathbb{R}$ et de trace nulle est muni du crochet $[X, Y] = XY - YX$, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension $n^2 - 1$.*

Définition 2.1.2. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est abélienne si* $[X,Y]=0$ *Pour tout* X *et* Y *dans* $\mathfrak{g}$.

Exemple 2.1.7. *Tout espace vectoriel* V *sur* $\mathbb{K}$ *est muni d'une structure d'algèbre de Lie, en posant* $\forall X,Y\in E$,$[X,Y]=0$ *est une algèbre de lie abélienne sur* $\mathbb{K}$.

Exemple 2.1.8. *Tout algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimension* 1 *sur* $\mathbb{K}$ *est abélienne.*

2.2 Constantes de structure

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbb{K}$ .Soit $\{X_j\}_{1\leq j\leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$,en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Nous avons donc

$$[X_j,X_k]=\sum_{i=1}^{n}c_i^{jk}X_i,\quad avec\quad c_i^{jk}\in\mathbb{K}.$$

Par bilinéarité, la structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est complètement déterminée par la valeur des c_i^{jk},$1\leq i,j,k\leq n$. Notons que $c_i^{jj}=0$ et $c_i^{jk}=-c_i^{kj}$.

Définition 2.2.1. *Les scalaires* c_i^{jk} , $1\leq i,j,k\leq n$, *sont appelés les constantes de structure de* $\mathfrak{g}$ *relativement à la base* $\{X_j\}_{1\leq j\leq n}$.

Exemple 2.2.1. *Si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie abélienne ,alors ses coefficients de structure sont tous nuls relativement à la base de* $\mathfrak{g}$.

Exemple 2.2.2. *Pour l'algèbre de Lie* $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})$, *notons* $X_1=X$ *et* $X_2=Y$. *Alors les constantes de structure cette algèbre, relativement à la base* $\{X_1,X_2\}$, *sont données par :*
$c_1^{12}=0$ *et* $c_2^{12}=1$.

Exemple 2.2.3. *Reprenons l'algèbre de Lie* $\mathbf{o}(3)$ *considérée dans l'exemple* 2.1.4 *et posons* $X_1=\mathbf{R}_x$,$X_2=\mathbf{R}_y$ *et* $X_3=\mathbf{R}_z$. *Les constantes de structure de* $\mathbf{o}(3)$ *relativement à la base* $\{X_1,X_2,X_3\}$ *sont données par :*$c_3^{12}=c_1^{23}=c_2^{31}=1$.

Exemple 2.2.4. *Soit* E_{ij} *la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situe à la i ème ligne et j ème colonne,lequel vaut 1. L'ensemble* $\{\mathrm{E}_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ *forme évidemment une base de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$, *des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels : Un calcul direct montre que* $[\mathrm{E}_{ij},\mathrm{E}_{kl}]=\delta_{jk}\mathrm{E}_{il}-\delta_{il}\mathrm{E}_{kj}$, *désigne de Kronecker,i.e* $\delta_{rs}=1$ *si* $r=s$ *et* $\delta_{rs}=0$ *sinon. En notant* $[\mathrm{E}_{ij},\mathrm{E}_{kl}]=\sum c_{rs}^{ijkl}\mathrm{E}_{rs}$, *nous obtenons que* $c_{rs}^{ijkl}=\delta_{jk}$ *et* $c_{kj}^{ijkl}=-\delta_{il}$.

2.3 Centre d'une algèbre de Lie

Définition 2.3.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$. *Le centre de* $\mathfrak{g}$ *est*
$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}|[X,Y]=0,\forall Y\in\mathfrak{g}\}$.

Exemple 2.3.1. *Si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie abélienne,alors* $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

Exemple 2.3.2. *Le centre de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *est l'ensemble des matrices scalaires,i.e*
$\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}))\simeq\mathbb{K}$

2.4 Centralisateurs et normalisateurs

Définition 2.4.1. *Soit E un sous-ensemble d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.Le normalisateur (resp centralisateur) $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)$ (resp $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E)$) de E dans $\mathfrak{g}$ est défini par $\{X \in \mathfrak{g} | [X, E] \subset E\}$ (resp $\{X \in \mathfrak{g} | [X, E] = 0\}$).*
En particulier si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)$.

Exemple 2.4.1. *Si $E = \{0\}$ ou si $E = \mathfrak{g}$ alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E) = \mathfrak{g}$.Quant au centralisateur, il est égal à $\mathfrak{g}$ si $E = \{0\}$ et au centre de $\mathfrak{g}$ si $E = \mathfrak{g}$.*

Exemple 2.4.2. *Si E est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K})$ engendre par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{K} \right\} \neq \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$.*

Exemple 2.4.3. *Si E est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ engendrée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E) = \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{K} \right\}$.*

2.5 Idéaux dans les algèbres de Lie

Définition 2.5.1. *Une sous-espace vectoriel $\mathfrak{s}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$.*

Exemple 2.5.1. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.*

Exemple 2.5.2. *L'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont tous les termes diagonaux sont nuls est un idéal de l'algèbre de Lie matrice triangulaires supérieures (resp. inférieures).*

Exemple 2.5.3. *Le sous-espace vectoriel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ engendre par les crochets $[X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, est une idéal de $\mathfrak{g}$,appelé commutant de $\mathfrak{g}$ ou idéal dérive de $\mathfrak{g}$. En particulier l'algèbre de Lie quotient$\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélienne.*

Exemple 2.5.4. *Le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$.*

2.6 Sous-algèbre de Lie

Définition 2.6.1. *Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ est stable par la crochet de Lie de $\mathfrak{g}$, i.e $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$.*

Exemple 2.6.1. *Tout idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre $\mathfrak{g}$.En particulier l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, appelée l'algèbre de Lie dérivée.*

Exemple 2.6.2. *Le centralisateur d'un sous-ensemble de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Exemple 2.6.3. *Le normalisateur d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{s}$ comme idéal.*

Exemple 2.6.4. *L'algèbre de Lie $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.*

Exemple 2.6.5. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ des "rotations infinitésimales" de l'espace est en fait une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.*

Exemple 2.6.6. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.*

Exemple 2.6.7. *L'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (ou inférieures) est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.*

2.7 Morphismes d'algèbre de Lie et représentation adjointe

Définition 2.7.1. *Un morphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire T qui respecte les crochets de Lie,i.e $T([.,.]) = [T(.), T(.)]$.*

Il est clair que le noyau (resp. l'image) d'un morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ d'algèbre de Lie est un idéal (resp. une sous algèbre de Lie) de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$).

Exemple 2.7.1. *Soient M et N deux variétés différentiables de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $f : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme. Soit $\Xi(M)$ (resp. $\Xi(N)$) l'algèbre de Lie de champs vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M (resp. N). Alors l'application $f_* : \Xi(M) \longrightarrow \Xi(N)$, définie par $(f_*X)(f(x)) = T_x f(X(x))$, est une isomorphisme d'algèbre de Lie.*

Définition 2.7.2. *La somme directe de deux représentations (ϕ_1, V_1) et (ϕ_2, V_2) de $\mathfrak{g}$ est la représentation $(\phi_1 \oplus \phi_2, V_1 \oplus V_2)$ de $\mathfrak{g}$ définie par $(\phi_1 \oplus \phi_2)(X)(v_1 + v_2) = \phi_1(X)v_1 + \phi_2(X)v_2$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$.*

Définition 2.7.3. *La produit tensoriel de deux représentations (ϕ_1, V_1) et (ϕ_2, V_2) de $\mathfrak{g}$ est la représentation $(\phi_1 \otimes \phi_2, V_1 \otimes V_2)$ de $\mathfrak{g}$ définie par $(\phi_1 \otimes \phi_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = (\phi_1(X)v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (\phi_2(X)v_2)$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$.*

Exemple 2.7.2. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ agit naturellement sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$: $X.(v_1 \otimes v_2) = X.v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes X.v_2$ où $X.v_i$ désigne l'action naturelle d'une matrice réelle carrée d'ordre n sur un vecteur de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.7.4. *Le morphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ defini par $X \mapsto [X, .]$ est appelé la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et est note ad.*

Exemple 2.7.3. *Pour l'algèbre de Lie* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ *nous avons* $ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 2.7.4. *Considérons l'algèbre de Lie $\mathbf{o}(3)$ des "rotations infinitésimales" de l'espace. Nous avons , dans les notations de l'exemple* 2.1.4, *$ad(R_x) = R_x$, $ad(R_y) = R_y$ et $ad(R_z) = R_z$.*

2.8 Forme de Killing

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. nous désignons par V^* le dual vectoriel de V, i.e l'espace vectoriel des formes linéaires sur V soient $b : V \times V \to \mathbb{K}$ une application bilinéaire et U un sous-espace vectoriel de V.

Définition 2.8.1. *Le radical de b est le sous-espace vectoriel de V :*

$$rad(b) = \{v \in V \ \mid \ b(v.v') = 0, \quad \forall v' \in V\}.$$

Nous dirons que b est non-dégénérée (resp. dégénérée) si le radical de b est trivial (resp non trivial).

Définition 2.8.2. *L'orthogonale de dans V est le sous-espace vectoriel de V :*

$$U^\perp = \{v \in V \ \mid \ b(v.v') = 0, \quad \forall v' \in V\}.$$

Nous noterons $b|_{U \times U}$ la restriction de b à $U \times U$.

Proposition 2.8.3. *[6]*

On a les résultats suivants

(i) $rad(b|_{U \times U}) = U \cap U^\perp$. Si, de plus, b est non-dégénérée alors

(ii) $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

(iii) $U \oplus U^\perp = V \Leftrightarrow b|_{U\times U}$ est non-dégénérée.

Démonstration. L'assertion (i) est une simple reformulation des définitions. La preuve de (ii) est standard, nous rappelons pour le plaisir. Considérons les applications linéaires $\phi : V \to V^*$ et $\psi : U \to U^*$ définies par $v \mapsto b(v, .)$. En particulier, $\ker(\psi) = U^\perp$, et ϕ est un isomorphisme si, seulement si, b est non-dégénérée, soit U' un sous-espace vectoriel de V tel que $V = U \oplus U'$. Tout élément u^* de U^* définit un élément v^* de V^* tel que $v^*|_U = u^*$ et $v^*|_{U'} = 0$. Puisque ϕ est un isomorphisme, alors il existe v dans V tel que $\phi(v) = v^*$, de sorte que $\psi(v) = u^*$, i.e ψ est surjective, et donc $\dim(im(\psi))+\dim(\ker(\psi)) = \dim(U)+\dim(U^\perp) = \dim(V)$. L'assertion (iii) est maintenant une conséquence directe de (i) et (ii). □

Remarque 2.8.4. *Il se peut que b soit non-dégénérée mais que sa restriction à $U \times U$ soit dégénérée. L'exemple classique d'une telle situation est le suivant : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, $b((x, y), (x', y')) = xx' - yy'$ et $U^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xt - yt = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} = U$.*

Considérons le cas où V est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$. Alors il est facile de montrer que l'application κ définie par $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, $(X, Y) \mapsto Tr(ad(X) \circ ad(Y))$ est :

(1) bilinéaire,

(2) symétrique,

(3) ad-invariante, i.e $\kappa(ad(X)(Y), Z) + \kappa(Y, ad(X)(Z)) = 0$ pour tous X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$, avec

(4) $\kappa(X, Y) = \frac{1}{2}(\kappa(X + Y, X + Y) - \kappa(X, X) - \kappa(Y, Y))$ pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$.

Définition 2.8.5. *L'application bilinéaire κ est appelée la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.*

Proposition 2.8.6. *[6] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est κ sa forme de Killing. Si $\mathfrak{s}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors :*

(i) *l'orthogonal $\mathfrak{s}^\perp$ de $\mathfrak{s}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$,*

(ii) *la forme de Killing $\kappa_\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{s}$ est la restriction à $\mathfrak{s}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, i.e $\kappa_\mathfrak{s} = \kappa_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}$,*

(iii) *si de plus κ est non-dégénérée, alors $\kappa_\mathfrak{s}$ est non-dégénérée.*

Démonstration. (i)découle de ad-invariance de κ qui implique que :
$\kappa([A, B], C) = \kappa(A, [B, C]) \in \kappa(\mathfrak{s}^\perp, \mathfrak{s}) = \{0\}$ pour tous $A \in \mathfrak{s}^\perp$, $B \in \mathfrak{g}$ et $C \in \mathfrak{s}$, alors $[A, B] \in \mathfrak{s}^\perp$ pour tous $A \in \mathfrak{s}^\perp$ et $B \in \mathfrak{g}$. Pour (ii), soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + V$. Alors pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons : $(ad(X) \circ ad(Y))(\mathfrak{s}) \subset (\mathfrak{s})$ et $(ad(X) \circ ad(Y))(V) \subset (\mathfrak{s})$, de sort que $Tr((ad(X) \circ ad(Y)|_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}) = Tr(ad(X) \circ ad(Y))$. Finalement, soit $X \in \mathfrak{s}$ tel que $\kappa_\mathfrak{s}(X, Y) = \kappa(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{s}$. Rappelons que, d'après (ii), $\kappa_\mathfrak{s} = \kappa_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}$ par ad-invariance de la forme de Killing, cela implique que $\kappa(X, [Y, W]) = \kappa([X, Y], W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$. Ainsi, puisque κ est non-dégénérée, nous obtenons que $[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{s}$. L'endomorphisme $(ad(X) \circ ad(W))^2$ de $\mathfrak{g}$ est trivial pour tout $W \in \mathfrak{g}$. En effet, nous avons : $(ad(X) \circ ad(W))(A) = 0$ si $A \in \mathfrak{g}$ et $(ad(X) \circ ad(W))(A) \in \mathfrak{s}$ si $A \in V$. Autrement dit, $(ad(X) \circ ad(Y))$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ et donc $Tr(ad(X) \circ ad(W)) = 0$. Cela entraine que $\kappa(X, W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$, soit $X = 0$ puisque κ est non-dégénérée. □

Exemple 2.8.1. *Pour tout A et M dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, nous avons $ad(A)^2(M) = A^2M - 2AMA - MA^2$ de sorte que $\kappa(A, A) = 2nTr(A^2) - 2Tr(A)^2$.*

Exemple 2.8.2. *En utilisant l'exemple précédent, nous trouvons que $\kappa(A, A) = 2nTr(A^2)$ pour tout A dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.*

Exemple 2.8.3. *Pour l'algèbre de Lie* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$*, nous avons, dans les notations de l'exemple* 2.1.5*, $\kappa(X, X) = 1$, $\kappa(X, Y) = 0$ et $\kappa(Y, Y) = 0$.*

Exemple 2.8.4. *Le radical de la forme de Killing de* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ *est trivial, donc κ est non-dégénérée.*

Exemple 2.8.5. *Le radical de la forme de Killing de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ n'est pas trivial, donc κ est dégénérée. En effet, $rad(\kappa)$ contient les matrices scalaires.*

2.9 Dérivations, sommes directes et sommes semi-directes d'algèbres de Lie

Définition 2.9.1. *Une dérivation de $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme D de $\mathfrak{g}$ tel que $D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)]$ pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$. On notera $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$.*

Exemple 2.9.1. *Si $\mathfrak{g} = V$ est un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne, alors $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est l'espace vectoriel de tous les endomorphisme de V.*

Exemple 2.9.2. *D'après l'identité de Jacobi, l'endomorphisme $ad(W)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$.*

Définition 2.9.2. *Une dérivation D de $\mathfrak{g}$ est dite intérieure si $D = ad(X)$ pour un élément X de $\mathfrak{g}$.*

Remarque 2.9.3. *Réciproquement, si V est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire antisymétrique β telle que $A \mapsto \beta(W,A)$ soit une dérivation de V, pour tout $W \in V$, alors V est une algèbre de Lie et β est un crochet de Lie.*

Proposition 2.9.4. *[6] L'espace vectoriel $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ muni du crochet : $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ est un algèbre de Lie, de plus l'application $ad : \mathfrak{g} \to Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, $X \mapsto ad(X)$ est un morphisme d'algèbre de Lie.*

Démonstration. En effet il est facile de vérifier que, pour tout élément X, Y dans $\mathfrak{g}$, et D_1,D_2 dans $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$: $[D_1, D_2]([x,Y]) = [[D_1, D_2](X), Y] + [X, [D_1, D_2](Y)]$ et $ad([X,Y]) = [ad(X), ad(Y)]$. □

Définition 2.9.5. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$. La somme directe de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ définie par la somme directe des espaces vectoriels $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ muni de crochet de Lie $[a+b, a'+b'] = [a,a'] + [b,b']$, pour tous $a, a' \in \mathfrak{g}etb, b' \in \mathfrak{h}$.*

Définition 2.9.6. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$ telle qu'il existe un morphisme $\phi : \mathfrak{g} \to Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$ La somme semi-directe de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, relativement à ϕ, est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus_\phi \mathfrak{h}$ définie comme la somme directe des espace vectoriels $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ muni de crochet de Lie $[a+b, a'+b']_\phi = [a,a'] + [b,b'] + \phi(a)b' - \phi(a')b$, pour tous $a, a' \in \mathfrak{g}$ et $b, b' \in \mathfrak{h}$.*

Exemple 2.9.3. *Soit $\mathbf{o}(3)$ l'algèbre de Lie des "rotations infinitésimales" de l'espace et soit $\mathbf{o}(2)$ l'algèbre de Lie des "rotations infinitésimales" du plan, i.e l'algèbre de Lie réelle abélienne engendrée par la matrice $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La somme directe $\mathbf{o}(3) \oplus \mathbf{o}(2)$ est sous-algèbre de Lie de dimension 4 de $\mathfrak{gl}(5,\mathbb{R})$ engendrée par les matrices*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.9.4. *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et D une dérivation de $\mathfrak{h}$, L'espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathbb{K}D \oplus \mathfrak{h}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie. En effet, soit $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie abélienne engendrée par D, i.e $\mathfrak{s} = \mathbb{K}D$. Il existe donc un homomorphisme d'algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{s} \to Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$ défini par $\phi(D)(Y) = D(Y)$, pour tout $Y \in \mathfrak{h}$. Ainsi, $\mathfrak{h}$ est la somme semi-directe $\mathfrak{s} \oplus_\phi \mathfrak{h}$ des algèbres de Lie $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{h}$.*

Exemple 2.9.5. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni de sa structure d'algèbre de Lie abélienne. D'après l'exemple 2.9.1, nous avons que l'algèbre $Der_{\mathbb{K}}(V)$ des dérivations de V est exactement l'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V. Fixons une application bilinéaire β sur V et désignons par $\mathfrak{s}$ l'algèbre des dérivations de β , i.e :*

$$\{D \in \mathfrak{gl}(V) \quad | \quad \beta(DX,Y) + \beta(X,DY) = 0 \quad \forall X, Y \in V\}$$

de sorte que $\mathfrak{s} \subseteq Der_{\mathbb{K}}(V)$. *En particulier, l'inclusion* $i : \mathfrak{s} \hookrightarrow Der_{\mathbb{K}}(V)$ *est un morphisme d'algèbre de Lie, ce qui définit la somme semi-directe* $\mathfrak{s} \oplus_i V$.

Exemple 2.9.6. *Reprenons l'exemple précédent avec* $V = \mathbb{R}^n$ *et :*

$$\beta((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

le produit scalaire usuel. Alors $\mathfrak{s}$ *est l'algèbre de Lie* $\mathbf{o}(n)$ *des "rotations infinitésimales" de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^n$ *peut être identité à l'algèbre des translations dans* $\mathbb{R}^n$. *Ainsi la somme semi-directe* $\mathbf{o}(n) \oplus_i \mathbb{R}^n$ *est l'algèbre de Lie des déplacements dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.9.7. *Reprenons l'exemple 2.9.5 avec* $V = \mathbb{R}^n$ *et :*

$$\beta((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j - x_n y_n$$

le produit scalaire lorentzien. Alors $\mathfrak{s}$ *est l'algèbre de Lie* $\mathbf{o}(n-1, 1)$ *des "pseudo-rotations" de* $\mathbb{R}^n$. *De plus, comme précédemment,* $\mathbb{R}^n$ *peut être identifiée à l'algèbre des translations dans* $\mathbb{R}^n$. *Ainsi le produit semi-directe* $\mathbf{o}(n-1, 1) \oplus_i \mathbb{R}^n$ *est l'algèbre de Lie des déplacements dans l'espace pseudo-euclidien* $\mathbb{R}^n$. *Lorsque* $n = 2$ *ou* $n = 3$, *cette algèbre de Lie est plus connue sous le nom d'algèbre de Poincaré. Par exemple, si* $n = 2$ *:*
$\mathbf{o}(1, 1)$ *est engendrée par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *et l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$ *s'identifie à l'algèbre de Lie abélienne engendrée par les deux matrices* $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Le morphisme d'algèbre de Lie* $\phi : \mathbf{o}(1, 1) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2)$ *défini par*
$\phi(A)X = AX = Y$ *et* $\phi(A)Y = AY = X$ *est tel que* $\phi(A)$ *est une dérivation de* $\mathbb{R}^2$. *La somme semi-directe* $\mathbf{o}(1, 1) \oplus_\phi \mathbb{R}^2$ *est l'algèbre de Poincaré, notée* $\mathcal{P}^{1,1}$.

2.10 Extensions du corps de base, complexification et formes réelles

Soit $\mathbb{K} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ une extension de $\mathbb{K}$. Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, nous noterons $V^{\tilde{\mathbb{K}}}$ l'espace vectoriel sur $\tilde{\mathbb{K}}$ défini comme le produit tensoriel $V \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\mathbb{K}}$ avec $k_1.(v \otimes k_2) = v \otimes k_1 k_2$ et $k.(v \otimes k_i) = (kv) \otimes k_i = v \otimes (kk_i)$ pour tous $k \in \mathbb{K}$, $k_1, k_2 \in \tilde{\mathbb{K}}$ et $v \in V$. Si $\{v_i\}$ est une base de V sur $\mathbb{K}$ alors $\{v_i \otimes 1\}$, que nous noterons également $\{v_i\}$, est une base de $V^{\tilde{\mathbb{K}}}$ sur $\tilde{\mathbb{K}}$.Réciproquement si W est un espace vectoriel sur $\tilde{\mathbb{K}}$ alors on peut restreindre la multiplication à des scalaires dans $\mathbb{K}$. Cela défini alors un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ que nous noterons $W^{\mathbb{K}}$.

Définition 2.10.1. *L'espace vectoriel* $V^{\tilde{\mathbb{K}}}$ *est l'extension de* V *sur* $\tilde{\mathbb{K}}$, *l'espace vectoriel* $W^{\mathbb{K}}$ *est la restriction de* W *à* $\mathbb{K}$.

Il est clair que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\tilde{\mathbb{K}}}(V^{\tilde{\mathbb{K}}})$ et $dim_{\mathbb{K}}(W^{\mathbb{K}}) = [\tilde{\mathbb{K}} : \mathbb{K}] \dim_{\tilde{\mathbb{K}}}(W)$, où $[\tilde{\mathbb{K}} : \mathbb{K}]$ désigne le degré de l'extension $\mathbb{K} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{K}}$. Considérons le cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$, i.e V est un espace vectoriel réel et W est un espace vectoriel complexe. $W^{\mathbb{R}}$ est simplement l'espace vectoriel W vu comme un espace vectoriel réel, de sorte que $\dim_{\mathbb{C}}((W^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(W)$. D'autre part $\dim_{\mathbb{R}}((V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}) = 2 \dim_{\mathbb{R}}(V)$. En particulier, les opérations $(.) \mapsto (.)^{\mathbb{R}} et (.) \mapsto (.)^{\mathbb{C}}$ ne sont pas inverses l'une de l'autre. En fait nous avons $(V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = (V \otimes 1) \oplus (1 \otimes iV)$, où i désigne la multiplication par $\sqrt{-1}$, Nous écrirons simplement $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$.

Définition 2.10.2. *Soient* V *un espace vectoriel réel et* W *un espace vectoriel complexe* $V^{\mathbb{C}}$ *est la complexification de* V. *Si* $W^{\mathbb{R}} = V \oplus iV$ *alors on dit que* V *est une forme réelle de* W. *De plus l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire qui vaut* 1 *sur* V *et* -1 *sur* iV *est la conjugaison de l'espace vectoriel complexe* $V^{\mathbb{C}}$ *relativement à la forme réelle* V.

Exemple 2.10.1. *Si $V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $W = \tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$, alors $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$, $W^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, $(V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ et $(W^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$. De plus $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ où i est la conjugaison complexe usuelle, i.e $\mathbb{R}$ est une forme réelle de $\mathbb{C}$.*

La conjugaison d'un espace vectoriel complexe W relativement à une forme réelle est un isomorphisme de $W^{\mathbb{R}}$.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\mathbb{K}}$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie sur $\tilde{\mathbb{K}}$, à l'aide du crochet $[.,.]^{\tilde{\mathbb{K}}}$ défini par : $[X \otimes x, Y \otimes y]^{\tilde{\mathbb{K}}} = [X, Y] \otimes xy$ pour tous $X \otimes x$ et $Y \otimes y$ dans $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$. Nous désignerons par $\kappa_{\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}} : \mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}} \otimes \mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}} \to \tilde{\mathbb{K}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$.

Définition 2.10.3. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ est l'extension de $\mathfrak{g}$ à $\tilde{\mathbb{K}}$.*

Remarque 2.10.4. *Comme nous l'avons remarqué précédemment, toute base de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est également une base de $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ sur $\tilde{\mathbb{K}}$, et donc $\kappa_{\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}}|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} = \kappa$. De plus, en identifiant $\mathfrak{g}$*

avec le sous-espace $\mathfrak{g} \otimes 1$ de $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$, nous avons $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\tilde{\mathbb{K}}} = [\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}, \mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}]$. En effet, il est clair que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\tilde{\mathbb{K}}} \subseteq [\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}, \mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}]$ puisque $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$. L'inclusion $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\tilde{\mathbb{K}}} \supseteq [\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}, \mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}]$ provient du fait que $[X \otimes x, Y \otimes y]^{\tilde{\mathbb{K}}} = [X, Y] \otimes xy \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \otimes \tilde{\mathbb{K}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\tilde{\mathbb{K}}}$.

Définition 2.10.5. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$, alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est la complexification de $\mathfrak{g}$. Une forme réelle d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$. En particulier toute algèbre de Lie réelle est une forme réelle de sa complexification.*

Remarque 2.10.6. *La conjugaison d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{s}$ relativement à une forme réelle est un isomorphisme de $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$.*

Chapitre 3

Algèbres de Lie semi-simples

3.1 Algèbres de Lie nilpotentes

Dans ce section le corps $\mathbb{K}$ est quelconque, en particulier sa caractéristique n'est pas nécessairement nulle et il n'est pas nécessairement algébriquement clos.

3.1.1 Définitions et exemple

Définition 3.1.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On pose, pour tout entier $j \geq 0$, $\mathfrak{g}_{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(j)}]$, avec $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}_{(0)} \supseteq \mathfrak{g}_{(1)} \supseteq ... \supseteq \mathfrak{g}_{(j)} \supseteq ...$ est appelée la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$.*

Définition 3.1.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$. En particulier, si $\mathfrak{g}_{(k-1)} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$, on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente de cran k.*

Exemple 3.1.1. *Toute algèbre de Lie abélienne est nilpotente.*

Exemple 3.1.2. *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures), dont les éléments diagonaux sont nuls, est nilpotente.*

Le cas le plus simple d'une algèbre de Lie nilpotente non abélienne, i.e $\mathfrak{g}_{(j)} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{(j)} = \{0\}$, est l'algèbre de Heisenberg.

Exemple 3.1.3. *Soit n un entier naturel non-nul. L'algèbre de Heisenberg est l'algèbre de Lie réelle de dimension $2n+1$ engendrée par $2n+1$ éléments X_i, Y_i et Z, $i = 1, ..., n$, soumis aux seuls crochets non-nuls $[X_i, Y_i] = Z$. Cette algèbre de Lie nilpotente de cran 2 et son centre engendré par Z.*

3.1.2 Structure des algèbres de Lie nilpotentes

Proposition 3.1.3. *[6] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.*

- **(i)** *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors le centre de $\mathfrak{g}$ n'est pas trivial.*
- **(ii)** *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors tout élément X de $\mathfrak{g}$ est ad-nilpotente, i.e ad(X) est un endomorphisme nilpotente de $\mathfrak{g}$.*
- **(iii)** *Si l'algèbre de Lie $ad(\mathfrak{g}) = \{ad(W) \mid W \in \mathfrak{g}\}$ est une algèbre de Lie nilpotente alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*
- **(iv)** *Tout sous-algèbre ou tout quotient d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotent.*
- **(v)** *Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$ et si l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Démonstration. (i) est une immédiate de la définition d'un algèbre de Lie nilpotente. Pour (ii), nous avons $ad^j(X)Y \in \mathfrak{g}_{(j)}$ pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, et $j \geq 1$. D'autre part, puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente, il existe un entier k tel que $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$, et donc $ad^k(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, ce qui démontre (ii). Pour (iii), puisque $ad(\mathfrak{g})_{(j)} = ad(\mathfrak{g}_{(j)})$, alors nous avons $ad(\mathfrak{g})_{(j)} = \{0\} \Rightarrow \mathfrak{g}_{(j+1)} = \{0\}$. D'autre part, si $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{s}_{(j)} \subseteq \mathfrak{g}_{(j)}$ pour tout j. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ la surjection canonique, on a $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_{(j)} \subseteq \pi(\mathfrak{g}_{(j)})$, de sorte que si $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors les algèbre $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont nilpotentes, ce qui démontre (iv). Pour (v), soit $\mathfrak{h}$ un idéal nilpotente de $\mathfrak{g}$ contenu dans le centre dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est nilpotente alors il existe un entier k pour lequel $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_{(k)} \subseteq \mathfrak{h}$, i.e $\mathfrak{g}_{(k)} \subset \mathfrak{h}$, Alors $\mathfrak{g}_{(k+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(k)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{0\}$ puisque $\mathfrak{h}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. □

Théorème 3.1.4. *[6] (Théorème de Engel)*
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension $r \geq 1$ sur $\mathbb{K}$. Si $\rho(X)$ est un endomorphisme nilpotent de V, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, alors :

- **(i)** *il existe un vecteur non nul v de V tel que $\rho(X)v = 0$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$,*
- **(ii)** *il existe une chaine de sous-espaces vectoriels $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset ... \subset V_r = V$ tels que $\dim(V_j) = j$ et $\rho(\mathfrak{g})V_j \subset V_{j-1}$ pour tout j. Autrement dit, il existe une base de V dans laquelle tout endomorphisme $\rho(X)$ de V, $X \in \mathfrak{g}$, est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont nuls,*
- **(iii)** *si $ad(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

3.2 Algèbres des Lie résolubles

Dans ce section, sauf mention contraire, le corps $\mathbb{K}$ est arbitraire.

3.2.1 Définitions et exemple

Définition 3.2.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On pose, pour tout $j \geq 0$, $\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$ avec $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq ... \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq ...$ est appelée la suite dérivée de $\mathfrak{g}$.*

Définition 3.2.2. *Une algèbre de Lie non-triviale $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est résoluble si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$.*

Exemple 3.2.1. *Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble, puisque $\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}_{(j)}$ pour tout j.*

L'exemple le plus simple d'une algèbre de Lie résoluble non abélienne, i.e $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \{0\} et \mathfrak{g}^{(2)} = 0$, est l'algèbre de Lie des transformations affines de la droite définie dans l'exemple 2.1.5.

Exemple 3.2.2. *L'algèbre de Lie des transformations affines de la droite est résoluble.*

Exemple 3.2.3. *L'algèbre de Lie réelle de dimension 3 engendrée par trois éléments A, X et Y soumis aux seuls crochets non-nuls $[A, Y] = X - Y$ et $[A, Y] = X + Y$ est résoluble.*

Exemple 3.2.4. *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) est résoluble.*

3.2.2 Structure des algèbres de Lie résolubles

Proposition 3.2.3. *[6] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.*

- **(i)** *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*
- **(ii)** *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $\mathfrak{g}$ contient un idéal de codimension 1.*
- **(iii)** *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est résoluble. En particulier un idéal dans une algèbre de Lie résoluble est résoluble.*

(iv) *Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est résoluble.*

(v) *Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont résolubles, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

(vi) *La somme de tous les idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$ est l'unique idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ contenant tous les idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Pour (i), si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ pour tout $k \geq 1$, on pose $k = j + 1$ on a $\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\} \neq \mathfrak{g}$, pour tout $j \geq 0$. Pour (ii) comme $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ d'âpre (i), de sorte qu'il existe un sous-espace vectoriel V de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. On a alors $[V, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ce qui montre que V est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ la surjection canonique et $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Il est clair que $\pi(\mathfrak{g}^{(j)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(j)}$ et $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ pour tout $j \geq 0$. Cela prouve (iv) et (v), supposons que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = \{0\}$ and $\mathfrak{h}^l = \{0\}$. On a $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = \{0\}$ et $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{h}$ de sorte que $\mathfrak{g}^{(k+l)} \subset \mathfrak{h}^{(l)}$. Finalement, il reste à établir la propriété (vii). Pour cela, il suffit de montrer que si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont deux idéaux résoluble de $\mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Évidemment la somme de deux idéaux de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour la résolubilité de $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, nous appliquons (v) et (vi) à l'isomorphisme $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2 \simeq \mathfrak{h}_1/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$. . □

3.2.3 Corps algébriquement clos et Caractéristique d'un corps

Définition 3.2.4. *On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ à une racine dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 3.2.5. *Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Les corps des rationnels $\mathbb{Q}$ et des réels $\mathbb{R}$ ne sont pas algébriquement clos, de même les corps finis (si $\mathbb{F}$ est un corps fini, alors le polynôme $1 + \prod_{\lambda \in \mathbb{F}}(X - \lambda)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{F}$).*

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\phi_{\mathbb{K}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ le morphisme qui à l'entier n associe $n1_K \in \mathbb{K}$, où 1_K est l'élément unitaire de $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est intègre, le noyau de $\phi_{\mathbb{K}}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$, c'est à dire que l'on a $\ker \phi_{\mathbb{K}} = \{0\}$ ou $\ker \phi_{\mathbb{K}} = p\mathbb{Z}$, p étant un nombre premier.

Définition 3.2.5. *Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\phi_{\mathbb{K}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ comme précédemment,*
- si $\ker \phi_{\mathbb{K}} = \{0\}$, on dit que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0 (ou parfois infinie) ou d'exposant caractéristique 1,
- si $\ker \phi_{\mathbb{K}} = p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier, on dit que $\mathbb{K}$ est de caractéristique p ou d'exposant caractéristique p.
Les corps de caractéristiques les nombres premiers sont dits de caractéristiques positives.

Exemple 3.2.6. *Les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont de caractéristique 0, si p est un nombre premier, le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est de caractéristique p.*

Exemple 3.2.7. *Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est algébriquement clos de caractéristique nulle.*

Théorème 3.2.6. *[6] (Théorème de Lie)*
Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps algébriquement cols de caractéristique nulle. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V non trivial sur $\mathbb{K}$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors :

(i) *il existe un vecteur propre v non nul commun à tous les $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$ i.e il existe une fonction scalaire $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ telle que $\rho(X)v = \lambda(X)v$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$,*

(ii) *il existe une suite $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset ... \subset V_r = V$ de sous-espace vectoriels de V telle que $\dim(V_j) = j$ et $\rho(\mathfrak{g})V_j \subset V_j$ pour tout j. Autrement dit, il existe une base de V dans laquelle tous les endomorphismes $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$, prennent la forme de matrices triangulaires supérieures.*

Corollaire 3.2.7. *[6] Soit $\mathfrak{g}$ un algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ soit un corps algébriquement cols de caractéristique nulle.*

(i) $\mathfrak{g}$ *résoluble si, seulement si ,*$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *nilpotente.*

(ii) *Si* $\mathfrak{g}$ *est résoluble alors il existe une suite* $\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 ... \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ *d'idéaux de* $\mathfrak{g}$ *telle que pour tout* j *:* $\dim(\mathfrak{g}_j) = j$, $\mathfrak{g}_j$ *est un idéal dans* $\mathfrak{g}_{j+1}$ *et* $\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j$ *est une algèbre de Lie abélienne, i.e* $[\mathfrak{g}_{j+1}, \mathfrak{g}_{j+1}] \subset \mathfrak{g}_j$.

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors, d'après le théorème de Lie, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $ad(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, prend la forme d'une matrice triangulaire supérieure, de sorte que $ad([X,Y]) = [ad(X), ad(Y)]$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont nuls. Ainsi tous les endomorphismes $ad([X,Y])$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ sont nilpotents, Le théorème de Engel implique alors que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est une algèbre de Lie nilpotente. Réciproquement si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotente alors elle résoluble et donc $\mathfrak{g}$ est résoluble puisque $\mathfrak{g}^{(j)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{(j-1)}$. Cela démontre (i). Pour (ii), il suffit d'appliquer le théorème de Lie à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, i.e $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = ad$. □

Remarque 3.2.8. *Il est clair que si le corps* $\mathbb{K}$ *est de caractéristique nulle, mais n'est pas algébriquement clos (par exemple* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*) alors le théorème de Lie reste vrai à condition que toutes les valeurs propres de,chaque endomorphisme* $ad(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, *appartiennent à* $\mathbb{K}$. *Si le corps* $\mathbb{K}$ *n'est pas de caractéristique nulle, le théorème de Lie n'est pas vrai.*

Remarque 3.2.9. *Évidemment si* T *est un endomorphisme d'un espace vectoriel* V *sur un corps algébriquement clos, alors il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* V *dans laquelle* T *prend la forme d'une matrice triangulaire supérieure. Plus généralement, si* $T_1, ..., T_m$ *sont des endomorphismes de* V*, on peut trouver pour chaque* T_j*, une base* $\mathcal{B}_j$ *de* V *dans laquelle l'opérateur* T_j *est une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls. Les bases* $\mathcal{B}_j$ *sont à priori distinctes. Le théorème de Lie montre que si la famille* $\{T_1, ..., T_m\}$ *engendre une algèbre de Lie résoluble, alors il est possible de choisir une même base* $\mathcal{B}$ *pour tous les opérateurs* T_j.

3.2.4 Critère de résolubilité de Cartan

Théorème 3.2.10. *[6] Soit* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique nulle admettant une extension* $\tilde{\mathbb{K}}$ *dans* $\mathbb{C}$*, i.e* $\tilde{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{C}$. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *et* κ *la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

(ii) $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \{0\}$.

(iii) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset rad(\kappa)$.

3.2.5 Radical d'une algèbre de Lie

Dans ce paragraphe le corps $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle qui admet une extension dans $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.2.11. *D'après la proposition* 3.2.3(vi)*, il existe un unique idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$ *qui contienne tout idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$. *Cet idéal est appelé le radical de* $\mathfrak{g}$ *et est note* $rad(\mathfrak{g})$.

Proposition 3.2.12. *[6] Supposons que* $\mathbb{K}$ *est un corps de caractéristique nulle. alors le noyau de la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$ *est un idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$ *qui contient le centre de* $\mathfrak{g}$*, i.e* $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subset rad(\kappa) \subset rad(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Si X appartient au centre de $\mathfrak{g}$ alors l'endomorphisme $ad(X)$ s'annule sur $\mathfrak{g}$, de sorte que $\kappa(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. D'autre part, si $Y \in rad(\kappa)$ et $X \in \mathfrak{g}$ alors $\kappa(W, [X,Y]) = -\kappa([X,W], Y) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$. Ainsi $rad(\kappa)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui contient le centre de $\mathfrak{g}$. Il nous reste à montrer qu'il est résoluble. Soit $\tilde{\kappa}$ la forme de Killing de $rad(\kappa)$. Alors, puisque $rad(\kappa)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, nous avons, pour tous X et Y dans $rad(\kappa)$:$\tilde{\kappa}(X,Y) = Tr(ad(X)ad(Y)|_{ad(\kappa)\times rad(\kappa)}) = Tr(ad(X)ad(Y)) = \kappa(X,Y)$. On en déduit que $\tilde{\kappa} = 0$, et donc, d'après le critères de résolubilité de Cartan (théorème 3.2.10), $rad(\mathfrak{g})$ est résoluble. □

Exemple 3.2.8. *Le radical de l'algèbre de Lie* $\mathbf{o}(3,\mathbb{R})$*, définie dans l'exemple 2.1.4, est trivial.*

Exemple 3.2.9. *Le radical de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$*, définie dans l'exemple 2.1.6, est trivial.*

Exemple 3.2.10. *Le radical de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$*, définie dans l'exemple 2.1.3, est n'est pas trivial, puisqu'il contient les matrices scalaires.*

3.3 Algèbres de Lie semi-simples

Dans ce section le corps $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle qui admet une extension dans $\mathbb{C}$.

3.3.1 Définitions et exemples

Définition 3.3.1. *Une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *est simple si elle est non abélienne et si elle ne contient pas d'idéaux propres non triviaux.*

Définition 3.3.2. *Une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *est semi-simple si elle ne contient pas d'idéaux résolubles non triviaux, i.e si* $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Exemple 3.3.1. *L'algèbre de Lie* $\mathbf{o}(3,\mathbb{R})$*, définie dans l'exemple 2.1.4, est semi-simple.*

Exemple 3.3.2. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$*, définie dans l'exemple 2.1.6, est simple pour tout* $n \geq 2$.

3.3.2 Structure des algèbres de semi-simples

Proposition 3.3.3. *[6] Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$.
(i) L'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/rad(\mathfrak{g})$ *est semi-simple.*
(ii) Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
(iii) Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*
(iv) Si $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, alors le centre de* $\mathfrak{g}$ *est trivial.*
(v) Si $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, alors tout idéal de* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*
(vi) Si $\mathfrak{g}$ *est semi-simple alors* $\mathfrak{g}$ *est la somme directe de deux idéaux semi-simples.*

Démonstration. Soient $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/rad(\mathfrak{g})$ la surjection canonique et b un idéal résoluble de $\mathfrak{g}/rad(\mathfrak{g})$. Alors $a = \pi^{-1}(b)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, de sorte que $\pi(a) = b$ est résoluble. D'autre part le noyau $\ker(\pi|_a)$ de la restriction de π à a est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, puisqu'il contenu dans $rad(\mathfrak{g})$. D'après la proposition 3.2.3(v), on en déduit que a est résoluble, et donc $\phi(a) = b = \{0\}$, ce qui démontre (i). Pour (ii), $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et donc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne. D'après (ii), on a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. D'autre part $rad(\mathfrak{g})$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, de sorte que $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ou $rad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Si $rad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}$ est résoluble, en particulier $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ ce qui contredit (ii). On en déduit que $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$, i.e $\mathfrak{g}$ est semi-simple, ce qui démontre (iii). Pour (iv), d'après la proposition 3.2.12, si $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ alors $rad(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ alors $rad(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$,ce qui contredit la semi-simple de $\mathfrak{g}$. L'assertion (v) est une conséquence immédiate de la proposition 2.8.3(iii). Pour (vi), d'après la proposition 2.8.6(i), si $\mathfrak{s}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ alors l'orthogonal $\mathfrak{s}^\perp$ de $\mathfrak{s}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Par ailleurs, d'après la proposition 3.2.12, $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}^\perp$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, puisque $rad(\kappa_\mathfrak{s}) = rad(\kappa_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}) = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}^\perp$. L'intersection $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}^\perp$ est nécessairement trivial, $\mathfrak{g}$ étant semi-simple. Or, d'après (v), $\mathfrak{s}$ est semi-simple et donc $\kappa|_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}$ est non-dégénérée. La proposition 2.8.3(iii) implique alors que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \otimes \mathfrak{s}^\perp$. □

3.3.3 Critère de semi-simplicité de Cartan

Théorème 3.3.4. *[6] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et κ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *κ est non-dégénérée.*

(ii) *$\mathfrak{g}$ est semi-simple.*

(iii) *$\mathfrak{g}$ est une somme directe $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ d'idéaux simple de $\mathfrak{g}$. Cette décomposition est unique, et tout idéal de $\mathfrak{g}$ est une somme de ces $\mathfrak{g}_i$.*

Démonstration. (i)⇒ (ii) :supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas semi-simple, alors le radical $rad(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal résoluble non trivial de $\mathfrak{g}$. D'après la définition 3.1.1, il existe donc un entier $r \geq 2$ tel que $(rad(\mathfrak{g})^{(j)} = \{0\}$ pour tout $j \geq r$ et $(rad(\mathfrak{g})^{(r-1)} \neq \{0\}$. L'identité de Jacobi montre qu'en fait $(rad(\mathfrak{g})^{(r-1)}$ est un idéal abélien non trivial de $\mathfrak{g}$. Soit V un sous espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = (rad(\mathfrak{g})^{(r-1)} \oplus V$. Pour tout élément $X \in (rad(\mathfrak{g})^{(r-1)}$ et tout élément $Y \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme de $ad(Y) \circ ad(X)$ de $\mathfrak{g}$ est nilpotent. En effet, $(ad(Y) \circ ad(X))^2 = 0$ sur $\mathfrak{g}$, puisque :$(ad(Y) \circ ad(X))(A) = 0$ si $A \in (rad(\mathfrak{g})^{(r-1)}$ et $(ad(Y) \circ ad(X))(A) \in (rad(\mathfrak{g})^{(r-1)}$ si $A \in V$. Autrement dit $Tr(ad(Y) \circ ad(X)) = 0$ pour tout $X \in (rad(\mathfrak{g})^{(r-1)}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, i.e $(rad(\mathfrak{g})^{(r-1)} \subset rad(\kappa)$. on en déduit alors que $rad(\kappa) \neq \{0\}$, et κ est dégénérée.
(ii)⇒ (iii) : si $\mathfrak{g}$ est simple l'implication est triviale. Supposons donc que $\mathfrak{g}$ ne soit pas simple. On fait une récurrence de $\mathfrak{g}$. D'après la (preuve de la) proposition 3.3.3(v)-(vi), $\mathfrak{s}$ et l'orthogonal $\mathfrak{s}^\perp$ de $\mathfrak{s}$ sont deux idéaux semi-simples de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}^\perp$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}^\perp] \subset \mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}^\perp = \{0\}$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{s}$ et à $\mathfrak{s}^\perp$.
(iii)⇒ (i) : supposons que $\mathfrak{g}$ soit une somme directe $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ d'idéaux simples $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{g}$. En particulier, pour tous $i \neq j$, nous avons : $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$, puisque $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ et donc $\kappa(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j) = \{0\}$ d'après la ad-invariance de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et la proposition 3.3.3(ii)-(iii). Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\kappa(X, Y_i) = 0$ pour tout $Y_i \in \mathfrak{g}_i$. En écrivant $X = \oplus_j X_j$, $X_j \in \mathfrak{g}_j$, on obtient, d'après la proposition 2.8.6(ii), que $\kappa_{\mathfrak{g}_j}(X_j, Y_j) = 0$ pour tout j et tout $Y_j \in \mathfrak{g}_j$. Cela entraine que $X_j = 0$, pour tout j, puisque $\kappa_{\mathfrak{g}_j}$ est non-dégénérée, On a donc $(\kappa(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}) \Rightarrow X = 0$, i.e κ est non-dégénérée. □

Corollaire 3.3.5. *[6] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ l'extension de $\mathfrak{g}$ à $\tilde{\mathbb{K}}$. Alors $\mathfrak{g}$ est semi-simple si, et seulement si, $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ est semi-simple. En particulier si $\mathfrak{s}$ est une forme réelle d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{h}$,alors $\mathfrak{h}$ est semi-simple si, seulement si , $\mathfrak{s}$ est semi-simple.*

Démonstration. D'après la remarque 2.10.4, $\kappa_{\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}} | \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = \kappa_{\mathfrak{g}}$, de sorte que les formes de Killing de $\mathfrak{g}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ et de $\mathfrak{g}$ sont toutes deux non-dégénérée ou toutes deux dégénérée. Le résultat découle alors du théorème 3.3.4. □

Corollaire 3.3.6. *[6] Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple alors toute dérivation de $\mathfrak{g}$ est intérieure.*

Démonstration. Comme nous lavons déjà remarque dans l'exemple 2.9.2, $ad(\mathfrak{g}) \subseteq Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ pour tout algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il nous faut donc montrer que si $\mathfrak{g}$ est semi-simple alors $ad(\mathfrak{g}) = Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. Pour tous X et Y dans $ad(\mathfrak{g}) \subseteq Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, et D dans $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, nous avons :

$$\begin{aligned}[ad(X), D](Y) &= [X, D(Y)] - D([X, Y]) \\ &= [X, D(Y)] - [D(X), Y] - [X, D(Y)] \\ &= -ad(DX)(Y),\end{aligned}$$

de sorte que $ad(\mathfrak{g})$ est un idéal de $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. D'après la proposition 2.8.6(i), l'orthogonal de $(ad(\mathfrak{g}))^\perp$ de $ad(\mathfrak{g})$ dans $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est également un idéal dans $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, et donc $[ad(\mathfrak{g}), (ad(\mathfrak{g}))^\perp] \subseteq ad(\mathfrak{g}) \cap (ad(\mathfrak{g}))^\perp$. D'autre part, d'après la proposition 2.8.6(ii), la forme de Killing de $ad(\mathfrak{g})$ est la restriction à $ad(\mathfrak{g})$ de la forme de Killing de $Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple alors son centre est trivial (proposition 3.2.3(*iii*)), de sorte que le morphisme d'algèbre de Lie $ad : \mathfrak{g} \to ad(\mathfrak{g})$ est injective, et donc $ad(\mathfrak{g})$ est semi-simple. Le critère de semi-simplicité de Cartan (théorème 3.3.4) implique alors que $ad(\mathfrak{g}) \cap (ad(\mathfrak{g}))^\perp = \{0\}$. On en déduit que, pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $D \in (ad(\mathfrak{g}))^\perp$, $ad(D(X)) = 0$, i.e $D(X) = 0$. Ainsi nous obtenons que $(ad(\mathfrak{g}))^\perp = \{0\}$, i.e $ad(\mathfrak{g}) = Der_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. □

Bibliographie

[1] Azzouz AWANE. *"Cours de géométrie différentielle"*. Faculté des Sciences Ben M'sik Casablanca. Maroc, 2005.

[2] François LABOURIE. *"Géométrie différentielle"*. 25 septembre 2013.

[3] Ismael BAILLEUL. *"Sous-Variétés de $\mathbb{R}^n$, théorème d'inversion locale et conséquences"*. Agrégation de Mathématiques, Rennes 1.

[4] Jacques FARAUT. *"Groupes et algèbres de Lie"*. Université Pierre et Marie Curie, 2001.

[5] Olivier DEBARRE. *"Algèbre 2"*. École Normale Supérieure, 2012–2013.

[6] Thierry Barbot. *"Algébre, dynamique et analyse pour la géométrie"*. Edition Ellipses

[7] Thierry MASSON. *"Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions"*. Laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, Bâtiment 210 91 405 Orsay Cedex, France, 2001.