République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farés de Medea
Faculté des Sciences
Département de Mathématique et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLOME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par :

CHIKH TOUHAMI SOUHILA

Titre : La régularité métrique et ses applications

Soutenu publiquement le 13 juin 2017 devant le jury composé de

Président du jury :	TOUMACHE KAMEL	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinateur :	MEKDACHE NOUREDDINE	*MAA*	*U.Y.F.M*
Encadreur :	BOUALEM ALLECHE	*Pr*	*U.Y.F.M*

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Dédicace

♡

♠♠***J****e dédie ce mémoire à mes chèrs parents, ma mère pour ses encouragements et ses prières, mon père pour l'affection et le soutien qu'il m'a offert depuis ma naissance.*

A*ucun mot ne pourrait exprimer ma gratitude, mon amour et mon profond respect.*

A *mes frères(HAMZA et OTHMEN) et mes soeurs(LOUBNA et YAMNA).*

J*e le dédie aussi à mon mari (MENOUER).*
E*t sans oublier mes collègues de la promotion 2016-2017.*

J*e le dédie sincèrement à tous ceux qui aiment SOUHILA .*♠♠

♡

CHIKH TOUHAMI SOUHILA

Remerciements

***J**e tiens avant tout à rendre grâce à ALLAH le tout puissant qui m'a donné la patience, la volanté et le courage pour bien achever mes études.*

***J**'exprime ma gratitude et mes remerciements à mon encadreur **Monsieur ALLECHE BOUOUALEM** pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce travail.*
***J**e tiens à remercier également les membres de jury pour avoir accepter de jurer ce mémoire.*

***M**es plus sincères remerciements sont adressés à mes enseignants, qui ont contribué durant nos études à ma formation et tous les enseignants de **l'Université DR.YAHIA FARES de Médéa**.*

***J**e tiens à exprimer une profonde et chaleureuse reconnaissance à tous mes amies et à toute ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragé.*

***J**e voudrais encore remercier, du plus profond de mon coeur, "**MENOUER**" mon mari pour ses encouragements, ses conseils et ses remarques.*

***E**nfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de loin ou de près à la finalisation de ce modeste travaille.*

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire concerne une étude sur la régularité métrique et ses applications dans le calcul sous-différentiel. On donne des conditions assurant la régularité métrique graphique et la régularité métrique de multi-applications d'un espace de Banach X dans un espace de dimension finie. Concernant la régularité métrique d'applications lipschitziennes d'un espace de Banach dans un autre, on donne des conditions assurant ceci en termes d'approximations.

Précisement, on montre l'importance de la régularité métrique en optimisation et en analyse variationelle.

On intéresse à la résolution d'inclusions de la forme $0 \in f(x) + F(x)$, où f est une application univoque et F est une application multivoque à graphe fermé.

Mots clés : Application multivoque, régularité métrique, Aubin-continuité, semistabilité, hemistabilité.

Abstract

The work presented in this thesis concerns **the metric regularity theory** which lies in the very heart of variational analysis, a relatively new discipline whose appearance was to a large extent determined by needs of modern optimization theory in which such phenomena as non-differentiability and set-valued mappings naturally appear.

The roots of the theory go back to such fundamental results of the classical analysis as the implicit function theorem, Sard theorem and some others.

The paper offers a survey of the state-of-the-art of some principal parts of the theory along with a variety of its applications in analysis and optimization. In this thesis, we focus on inclusions in the form of $0 \in f(x) + F(x)$, where f is a singlevalued function and F is a set-valued map with closed graph. In the last few years, various methods to solve such inclusions have been developed ; after having recalled some notions in analysis (single-valued and set-valued) we present some of them using metric regularity on the set-valued map. Then, instead of considering this metric regularity assumption, we prefer assumptions which are directly connected to the solution, that are semistability and hemistability.

Keywords : Set-valued map, metric regularity, pseudo-Lipschitz, semistability, hemistability.

Table des matières

Introduction **viii**

1 Généralités **1**

1.1 Eléments d'analyse fonctionnelle 1

1.1.1 Espace de Banach 1

1.1.2 Opérateurs linéaires dans un espace de Banach 2

1.2 Continuité et différentiabilité des applications univoques 3

1.2.1 Continuité 3

1.2.2 Différentiabilité 4

1.3 Ensembles et fonctions semi-analytiques et sous-analytiques 6

1.4 Elements de topologie 7

1.4.1 Espace topologique 7

1.4.2 Espace métrique 7

1.4.3 Espace séparé 8

1.5 Analyse multifonctionnelle 9

1.5.1 Concepts fondamentaux sur les multifonctions 9

1.5.2 Continuité 10

1.5.3 Exemples d'applications multivoques 11

2 Quelques théorèmes sur la théorie classique du régularité métrique **12**

2.1 Théorème de l'application ouverte de Banach-schauder 12

2.2 Théorème des points réguliers d'une application 13

2.2.1 Théorème de Lusternik 13

2.2.2 Théorème de Grave . . . 13
2.3 Théorèmes de fonction inverse et implicite . . . 14
2.4 Théorème de Sard . . . 16
2.5 Théorème de transversalité . . . 16

3 La théorie de la régularité métrique 17
3.1 Régularité locale . . . 17
3.1.1 Propriétés régularité locale . . . 18
3.2 Régularité non locale . . . 19
3.3 Critères de régularité . . . 21
3.3.1 Critères généraux . . . 21
3.3.2 Critère infinitesimaux . . . 22
3.4 Régularité métrique et Aubin-continuité . . . 23
3.4.1 Équivalence entre régularité métrique et Aubin-continuité de l'inverse . . . 28
3.4.2 Exemples d'applications Aubin-continues . . . 29
3.5 Semistabilité et Hemistabilité . . . 29
3.5.1 La sous-régularité métrique forte . . . 30
3.5.2 Semistabilité et régularité . . . 31

4 Résolution d'inclusions variationnelles : quelques méthodes utilisant la régularité métrique 33
4.1 Vitesse de convergence . . . 36
4.2 Méthode de type Newton . . . 36
4.2.1 La convergence quadratique . . . 37
4.2.2 La stabilité . . . 39
4.3 Méthode multipoints . . . 40
4.4 Méthode d'ordre >2 . . . 41
4.5 Des nouveaux résultats utilisant la semistabilité et l'hémistabilité . . . 41
4.5.1 Méthode de type Newton . . . 42

Bibliographie 46

Notations et symboles

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- $\emptyset$: l'ensemble vide.
- R :L'ensemble des nombres réels.
- N :L'ensemble des nombres naturels.
- $\|.\|$: La norme.
- $\overline{\mathrm{B}}(0.R)$: La boule fermée de centre 0 et de rayon R.
- B(0.R) :La boule ouverte de centre 0 et de rayon R.
- Graph (F) :Le graphe de F.
- F^{-} : L'inverse inférieure.
- F^{+} : L'inverse supérieure.
- supp (S) :le support d'ensemble S.
- A : Opérateur.

- D(A) : Domaine de A.
- $\langle ., . \rangle$: Produit scalaire.
- Ω : Ouvert borné de $\$\mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{T}_x M$: Espace tengent
- $\mathrm{D}^\alpha = \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} ... \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.
- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^t$.
- i.e : signifie.
- $\blacklozenge$: La fin de démonstration.

Introduction

Les applications multivoques, jouent un rôle prépondérant dans notre travail, associent à un point de l'espace de départ, un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. Compte tenu du fait que l'on peut identifier un point à un singleton, on peut voir les applications multivoques comme une généralisation des applications univoques.

Les applications multivoques s'avèrent très utiles pour résoudre des problèmes en théorie du contrôle, en économie et gestion, en biologie, en combinatoire, en théorie des graphes, en théorie des jeux...

Les inclusions variationnelles peuvent être vues comme une généralisation des équations du type $f(x) = 0$. En fait, il s'agit d'inclusions de la forme $0 \in F(x)$, où F est une application multivoque. Elles modélisent une grande variété de problèmes mathématiques tels que les problèmes de complémentarité (linéaires ou non), les systèmes d'équations non linéaires, les inégalités variationnelles, etc

L'étude des théorèmes des multiapplications implicites se pose dans les problèmes liés au concept de régularité métrique, dans les inégalités variationnelles et dans de nombreux autres domaines. En effet, l'outil mathématique central dans l'analyse de sensibilité des problèmes variationnels est le concept de la régularité métrique (metric regularity) pour des multiapplications. Considérons l'équation généralisée suivante :

$$y \in F(x)$$

où, $F : X \rightrightarrows Y$ est une multiapplication de X dans Y et $y \in Y$ donné. **Une question importante** est la suivante :" L'ensemble $F^{-1}(y)$ des solutions de l'équation généralisée est-il stable par rapport à une "petite" perturbation du paramètre y" ?

Un outil essentiel pour répondre à cette question est la notion de régularité métrique.

Ce mémoire comporte 4 chapitres :

Chapitre 1 :Généralités.

L'objectif de ce chapitre est de rappeller l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travaille, on donne quelques inégalités et quelques théorèmes qui jouent un rôle essentiel dans les autres chapitres.

Chapitre 2 :Quelques théorèmes sur la théorie classique du régularité métrique.

Dans ce chapitre on donne quelques théorèmes du régularité métrique qui remontent à des résultats de l'analyse classique en tant que théorème de fonction implicite, théorème de l'application ouverte de Banach-schauder, théorème de Sard et quelques autres.

Chapitre 3 :La théorie de la régularité métrique.

Dans le troixième chapitre on donne des critères généraux et infinitesimaux de la régularité métrique, et aussi quelque définitions et équivalences de régularité locale et non locole puisque les recherches actuelles sont basées sur la régularité locale. Aussi on donne les définitions de deux concepts "la semistabilité et l'hemistabilité" qui permettent de reprendre certaines méthodes itératives.

Chapitre 4 :Résolution d'inclusions variationnelles :quelques méthodes utilisant la régularité métrique.

On s'intéresse dans ce chapitre à présenter un certain nombre de méthodes itératives utilisant la régularité métrique qui permettent de résoudre des inclusions variationnelles. Et aussi des nouveaux résultats plus en détail nous nous intéresserons à la semistabilité et à l'hemistabilité.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Eléments d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 ***(Norme)***
Un espace vectoriel réel ou complexe X *est dit espace vectoriel normé si l'on a associé à tout* $x \in \mathrm{X}$ *un nombre réel positif ou nul,* $\| x \|$ *appelé la norme de* x *et vérifie :*

- $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. *pour tout* $x \in \mathrm{X}$
- $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, *pour tout* $x, y \in \mathrm{X}$.

Théorème 1.1.1 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie* E *:*

1. *Tout les normes sont équivalentes.*
2. *Pour toute norme, les compacts sont les fermés bornés.*
3. *Si* $(\mathrm{F}, \| \, . \, \|_{\mathrm{F}})$ *est un autre K-espace vectoriel normé, toute application linéaire de* E *dans* F *est continue.*

Remarque 1.1.1

En mathématique, les espaces vectoriels topologiques sont une des stuctures de base de l'analyse fonctionnelle. Ce sont des espaces munis d'une structure topologique associée à une structure d'espace vectoriel, avec des relations de compatibilité entre les deux structures.

Les exemples les plus simples d'espaces vectoriels topologiques sont les espaces vectoriels normés, parmi lesquels figurent les espaces de Banach, en particulier les espaces de Hilbert.

Définition 1.1.2 *On dit qu'un espace vectoriel normé* X *est complet si toute suite de cauchy est convergente dans* X.

Définition 1.1.3 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

1.1.2 Opérateurs linéaires dans un espace de Banach

On note par E, F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.4
Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire $A : D(A) \subset E \to F$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$, à valeurs dans F. $D(A)$ est le domaine de A.
On dit que A est borné s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in D(A).$$

Définition 1.1.5 ***(opérateur)***
Soient E, F deux espaces normés, une application linéaire $L : E \to F$ est appelée un opérateur.

Définition 1.1.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$.*
On définit la norme d'un opérateur A par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|_F.$$

On note par :

$$R(A) = \{Ax/\ x \in D(A)\}$$

l'image de A et $N(A) = \{x \in D(A)/\ Ax = 0\}$ le noyau de A.

Définition 1.1.7
Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Pour $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ la plus petite constante M telle que

$$\forall x \in E,\ \|Ax\|_F \leq M\|x\|_E.$$

On a donc :

$$\forall x \in E,\ \|Ax\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

Définition 1.1.8 *Soit E, F deux espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E,F)$.*

1. *On dit que l'opérateur A est un isomorphisme, s'il est bijectif, continu.*
2. *Si de plus, $\|Ax\|_F = \|x\|_E\ \forall x \in E$, on dit que A est un opérateur isométrique.*

1.2 Continuité et différentiabilité des applications univoques

1.2.1 Continuité

Les fonctions continues constituent une classe de fonctions dont l'étude joue un rôle fondamental en analyse. Commençons par donner la définition de la continuité dans les espaces vectoriels normés, qui se généralise également au cadre des espaces métriques.

Définition 1.2.1 *[20] On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est continue en $\bar{x}$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon, \bar{x}) = \eta, \forall x \in \mathbb{B}_\eta(\bar{x}),\quad \|f(x) - f(\bar{x})\| \leq \epsilon.$$

Ou encore f est dite continue si pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $\bar{x}$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(\bar{x})$.
On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) = \eta, \forall x, y \in X,\quad \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon,$$

dès que $\|x - y\| \leq \eta$.

Nous utilisons une notion plus forte que la continuité et même que la continuité uniforme : la lipschitziannité, dont la définition est la suivante.

Définition 1.2.2
On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est lipschitzienne sur un sous-ensemble E de X si :

$$\exists K > 0, \forall x, y \in E,\quad \|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

En particulier, si f est $K-$lipschitzienne en $\bar{x}$ alors f est uniformément continue en $\bar{x}$.

La borne inférieure de toutes les constantes K est appelée le module de Lipschitz de f en $\bar{x}$, noté lip $f(\bar{x})$, et se définit par :

$$lip\, f(\bar{x}) = \limsup_{x,y\to\bar{x}} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}.$$

Lorsque lip $f(\bar{x}) < \infty$, la fonction f est dite localement lipchitzienne en $\bar{x}$.

Aussi nous nous intéresserons également à une catégorie de fonctions plus générales que les fonctions lipschitziennes, le groupe des fonctions hölderiennes.

Définition 1.2.3
On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est hölderienne d'exposant $\alpha \in]0,1]$ sur $E \subset X$ si :

$$\exists K_\alpha > 0, \forall x, y \in E, \quad \|f(x)-f(y)\| \leq K_\alpha \|x-y\|^\alpha.$$

On peut remarquer que si $\alpha = 1$, on retrouve une condition de type Lipschitz.

1.2.2 Différentiabilité

Dans l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle, la notion de dérivée joue un rôle clé, notamment dans la recherche d'extrema.les notions de différentiabilité généralisent bien la dérivabilité

Définition 1.2.4 *[20]*
On dit que $f : X \to Y$ est directionnellement dérivable (au sens de Dini) en $x \in X$ suivant le vecteur $v \in X$ si la limite suivante existe

$$f'(x,v) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

Et dans ce cas, $f'(x,v)$ est la dérivée directionnelle de f au point x suivant le vecteur v.

On définit la différentiabilité au sens de Fréchet.

Définition 1.2.5 *[20] Soit U un ouvert de X. $f : U \to Y$ est dite Fréchet diférentiable en $x \in U$ s'il existe un opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1.1}$$

A est la dérivée de Fréchet de f au point x notée $f'(x)$. La fonction f est Fréchet diférentiable sur U si elle est Fréchet diférentiable en tout point $x \in U$.
Notons que si f est Fréchet-diférentiable en x alors f est directionnellement dérivable en x suivant tout vecteur.
Ainsi, si f est Fréchet-diférentiable en x alors f est continue en x.
On dit que f est continûment diférentiable sur un ouvert U de X si f est diférentiable sur U et si l'application $x \mapsto f'(x)$ est continue sur U.

Énonçons maintenant quelques résultats pratiques sur la différentiabilité.

Proposition 1.2.1
Si $f : X \to Y$ est continûment différentiable alors, pour tous $x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_2) = f(x_1) + \left(\int_0^1 f'(x_1 + t(x_2 - x_1))dt\right)(x_2 - x_1).$$

On peut remarquer que si une fonction $f : X \to Y$ est Fréchet-différentiable et que f' est bornée sur X alors f est lipschitzienne sur X.

Définition 1.2.6
Une fonction f d'un espace vectoriel normé X dans un espace vectoriel normé Y est strictement (ou fortement) différentiable en $x_0 \in X$ s'il existe un opérateur linéaire continu de X vers Y, noté $f'(x_0)$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \epsilon\|x_1 - x_2\|,$$

Une fonction strictement différentiable est évidemment Fréchet-différentiable, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

1.3 Ensembles et fonctions semi-analytiques et sous-analytiques

Quelques définitions et exemples

Définition 1.3.1

Une fonction réelle f définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est dite analytique si pour tout $y \in \Omega$, il existe un voisinage V de y contenu dans Ω tel que sur V , f soit la somme d'une série entière convergente.

Définition 1.3.2 *[20]*

Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit semi-analytique si pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de a et une famille de fonctions analytiques $f_{i,j}$
Une fonction est dite semi-analytique si son graphe est semi-analytique.

Exemple 1.3.1 *Quelques exemples d'ensembles et de fonctions semi-analytiques.*

1. *Les sous-ensembles semi-analytiques de $\mathbb{R}$ sont les réunions disjointes et localement finies d'intervalles.*
2. *L'ensemble des solutions d'un système d'équations polynômiales à plusieurs variables (ensemble algébrique) est semi-analytique.*
3. *Les fonctions polynômes et rationnelles sont des fonctions semi-analytiques.*

Définition 1.3.3 *[20]*

Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit sous-analytique si tout $a \in \mathbb{R}^n$ admet un voisinage U tel que $X \cap U$ soit la projection d'un ensemble semi-analytique relativement compact.
Une fonction est dite sous-analytique si son graphe est sous-analytique.

Exemple 1.3.2 *Quelques exemples de fonctions sous-analytiques*

1. *Si A est un ensemble sous-analytique fermé de $\mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est sous-analytique.*
2. *Le supremum d'une famille finie de fonctions sous-analytiques continues est sous-analytique.*

1.4 Elements de topologie

1.4.1 Espace topologique

Définition 1.4.1 *[18]*

On appelle espace topologique un couple (X, O) où X est un ensemble et O est une famille de parties de X, appelées ouverts vérifiant :

1. *Toute réunion d'ouverts est un ouvert,*
2. *Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert,*
3. *X et $\emptyset$ sont des ouverts.*

1.4.2 Espace métrique

Définition 1.4.2

Soit X un ensemble non vide et $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application vérifiant :

1. *$d(x, y) = 0$ si et suelement si $x = y$ pour tout $x, y \in X$.*

2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pour tout* $x, y \in X$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *pour tout* $x, y, z \in X$.

Exemple 1.4.1

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(a,b) \longmapsto \mid b - a \mid$$

C'est une distance sur $\mathbb{R}$ *appelée distance usuelle.*

Définition 1.4.3
Un espace métrique est un couple constitué par un ensemble non vide X *et par une distance* d *sur* X.
Un espace métrique en générale noté (X,d).

1.4.3 Espace séparé

Définition 1.4.4 *Un espace séparé, dit aussi espace de Haussdorff, est un espace topologique dans lequel deux point distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.*

Remarque 1.4.1 *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.4.5 ***(Dual topologique)***
Soit E *un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de* E *et l'on note* E^*, *l'ensemble des formes linéaires continues sur* E.

E^* *est muni de la norme duale*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|$$

Lorsque $f \in E^*$ *et* $x \in E$ *on notera généralement* $\langle f, x \rangle$ *au lieu de* $f(x)$, *on dit que* $\langle ., . \rangle$ *est le produit scalaire dans la dualité* E^*, E.

1.5 Analyse multifonctionnelle

1.5.1 Concepts fondamentaux sur les multifonctions

Tout d'abord on désigne par applications univoques les applications (classiques). Une application univoque f d'un ensemble X vers un ensemble Y associe à un point $x \in X$ un unique point $f(x) \in Y$.

Une application multivoque va associer à un point de l'espace de départ un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. Tout point $y \in Y$ étant identifiable au singleton $\{y\} \in \mathcal{P}(Y)$, on peut considérer les applications multivoques comme une généralisation des applications univoques.

Définition 1.5.1 *[20]*
Étant donnés deux espaces X et Y , une application multivoque (ou multifonction) F associe à un élément $x \in X$, un ensemble $F(x) \subset Y$,c'est-à-dire un élément de l'espace $\mathcal{P}(Y) :=$ ensemble des parties de Y.
On utilisera la notation $F : X \rightrightarrows Y$ plutôt que $F : X \to P(Y)$ pour marquer la différence avec les applications univoques.
Une application multivoque F est dite non triviale si son graphe est non vide, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément $x \in X$tel que $F(x)$ soit non vide. L'application F est dite stricte si pour tout $x \in X$, on a $F(x) \neq 0$. On a

$$x^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in graphF,$$

L'image d'un ensemble $\mathrm{C} \subset X$ par F est

$$F(\mathrm{C}) := \bigcup_{x \in \mathrm{C}} F(x) = y \mid F^{-1}(y) \cap \mathrm{C} \neq 0,$$

et l'image réciproque d'un ensemble $D \subset Y$ par F est

$$F^{-1}(\mathrm{D}) := \bigcup_{y \in \mathrm{D}} F^{-1}(y) = x \mid F(x) \cap \mathrm{D} \neq 0.$$

Remarque 1.5.1 *On note que*

1. *$domF^{-1} = imF = F(X)$ et $imF^{-1} = domF = F^{-1}(Y)$,*
2. *contrairement aux applications univoques, l'inverse est toujours défini.*

On dit qu'une application multivoque F est fermée (respectivement convexe) si et seulement si son graphe est fermé (respectivement convexe). Si les images de F sont fermées (respectivement convexes, bornées) alors on dit que F est à valeurs fermées (respectivement à valeurs convexes, à valeurs bornées).
On définit également, comme pour les applications univoques, une addition et une multiplication par un scalaire pour les applications multivoques par

$$(F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x) \quad et \quad (\lambda F)(x) := \lambda F(x).$$

1.5.2 Continuité

La continuitée est une notion essentielle dans le cadre des applications multivoques. On définit la continuitée des applications multivoques à l'aide de la semi-continuité supérieure et de la semi-continuité inférieure.

Définition 1.5.2 *[20] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque.*

Soient X et Y deux espaces topologiques
*F est dite **semi-continue supérieurement** en $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout ouvert V contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $F(x) \subset V, \forall x \in U$*

*F est dite **semi-continue inférieurement** en $x_0 \in X$si et seulement si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $F(x) \cap V \neq \emptyset, \forall x \in U$*
*F est dite **continue** en x si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semicontinue supérieurement en x et elle est continue si elle est continue en tout point $x \in X$.*

On note qu'une application multivoque peut être semi-continue supérieurement et pas semi-continue inférieurement et inversement. Nous donnons un exemple d'application semi-continue inférieurement mais pas semi-continue supérieurement.

Exemple 1.5.1 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1], & si \quad x \neq 0, \\ \{0\}, & si \quad x = 0. \end{cases}$$

F est semi-continue inférieurement en 0 mais n'est pas semi-continue supérieurement.

En effet, soit $U \subset \mathbb{R}$ *tel que* $U \cap \{0\} \neq \emptyset$ *(i.e.* $0 \in U$*).* $\exists x \in U, x \neq 0$ *puisque* U *est ouvert.*
Posons $\eta = |x|$*. Ainsi* $\forall x' \in \mathbb{B}_\eta(0), 0 \ni F(x')$ *(i.e.*$F(x') \cap U \neq \emptyset$*). Donc* F *est bien semi-continue inférieurement en* 0*.*
En revanche, soit $U =]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ *et soit* $\eta > 0$*. Pour* $x' = \frac{\eta}{2}$*,* $F(x') = [-1, 1] \not\subset U$*.*
Donc F *n'est pas semi-continue supérieurement en* 0*.*

1.5.3 Exemples d'applications multivoques

Nous donnons ici quelques exemples d'applications multivoques.

Exemple 1.5.2

1. *Soit* $f : X \rightrightarrows Y$ *une application univoque.Alors, pour tout* $y \in Y$*,l'ensemble* $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ *est sous ensemble de* X*. On peut donc définir une application multivoque* $F : Y \rightrightarrows X$ *par* $F(y) = f^{-1}(y)$*.*
2. *L'application* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = [a, b]$*, avec* a*,*$b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$*, est une application multivoque constante.*
3. *L'application* $\Phi : \mathbb{Z} \rightrightarrows \mathbb{Z}$ *définie par* $\Phi(n) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \in n\mathbb{Z}\}$ *est une application multivoque qui pourrait nous donner une autre vision de le divisibilité :*

$$m \in Z \quad \text{est divisible par } n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \Phi(n).$$

4. *En analyse convexe, le sous-différentiel d'une fonction convexe d'un espace de Banach* X *dans* $\mathbb{R}$ *en un point* x_0 *est défini par :*

$$\partial_c f(x_0) = \{x_* \in X^* | f(x) - f(x_0) \geq < x^*, x - x_0 >, \forall x \in X\}.$$

L'application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^*$ *définie par* $F(x) = \partial_c f(x)$ *est une application multivoque et, par exemple pour* $f(x) = \mid x \mid$

on a

$$F(0) = \{x_* \mid\mid x \mid \geq < x^*, x >= [-1, 1].$$

Notons au passage un résultat d'analyse convexe qui dit que : si f *est différentiable en* x_0 *alors* $\partial_c f(x_0) = \{f'(x_0)\}$*.*

Chapitre 2

Quelques théorèmes sur la théorie classique du régularité métrique

Dans ce chapitre on suit [2] pour donner quelques théorèmes classiques qui sont les plus importants, et les plus anciens paradigmes des mathématiques.

2.1 Théorème de l'application ouverte de Banach-schauder

Dans cette section tous les espaces sont de Banach.

Théorème 2.1.1
soit $A : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné sur Y ,c'est-à-dire, $A(X) = Y$. Alors $0 \in intA(B)$. Le théorème signifie qu'il existe un $K > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, il existe un $x \in X$ tel que $A(x) = y$ et $x \leq Ky$

Définition 2.1.1 ***(Constante de Banach)***
Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. La quantitée

$$C(A) = \sup r \geq 0 : rB_Y \subset A(B_X) = \inf \|y\| : y \notin A(B_X)$$

s'appelle la constante de Banach de A.
Soit $A : X \to Y$ l'opérateur linéaire , on fixe

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\|y\| \leq 1} d(0, A^{-1}(y)) = \sup_{\|y\|=1} inf\{\|x\| : Ax = y\}$$

Bien sur, si A est homomorphisme linéaire, cela coïncide avec la norme habituelle de l'opérateur inverse.

Proposition 2.1.1 ***(calcul de*** $C(A)$*)*
Pour l'opérateur linéaire borné $A : X \longrightarrow Y$

$$C(A) = \inf_{\|y^*\|=1} \|A^*Y^*\| = \|A^{-1}\|^{-1}$$

2.2 Théorème des points réguliers d'une application

Théorème 2.2.1 *Soit* $F : X \longrightarrow Y$ *au sens de Fréchet différentiable en* $\bar{x} \in X$*. On dit que* F *est régulière à* x *si sa dérivée* $F^{'}(\bar{x})$ *est un opérateur linéaire sur* Y*. Soit* $M \in X$ *une variété différentielle . L'espace tangent* T_xM *à* M *à* $x \in M$ *est la collection de* $h \in X$ *telle que* $d(x+th, S) = o(t)$ *Lorsque* $t \longrightarrow +0$*.*

2.2.1 Théorème de Lusternik

Théorème 2.2.2
Supposons que F *soit continuement différentiable et régulière en* x*. Alors, l'espace tangent au niveau défini* $M = \{x : F(x) = F(\bar{x})\}$ *à* $\bar{x}$ *coïncide avec* $KerF'(\bar{x})$*.*

2.2.2 Théorème de Grave

Théorème 2.2.3
Soit F *une application continue au voisinage de* $\bar{x} \in X$ *en* Y*. Supposons qu'il existe un opérateur borné linéaire* $A : X \to Y$ *et soient* $\delta > 0$*,* $\gamma > 0$*,* $\epsilon > 0$ *des nombres positifs ,tels que* $C(A) > \delta + \gamma$ *et*

$$\|F(x') - F(x) - A(x' - x)\| < \delta\|x' - x\|$$

Lorsque x *et* x' *appartiennent à* ϵ*-boule ouverte de rayon* $\bar{x}$ *,Alors*

$$B(F(\bar{x}), \gamma t) \subset F(B(\bar{x}, t))$$

pour toute $t \in (0, \epsilon)$

Démonstration :

On suppose que $F(\bar{x}) = 0$, *on prend* $K > 0$ *tel que* $KC(A) > 1 > K(\delta, \gamma)$ *et* $\|y\| < \gamma t$ *pour* $t < \epsilon$, *soit* $x_0 = \bar{x}, y_0 = y$ *et on définit de façon récursive* x_n, y_n *comme suit :*

$$y_{n-1} = A(x_n - x_{n-1}), \|x_n - x_{n-1}\| \leq K\|y_{n-1}\|, y_n = A(x_n - x_{n-1}) - (F(x_n) - F(x_{n-1})).$$

Il est facil de vérifier que

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq (K\delta)^{n-1}K\|y\|, \quad \|y_n\| \leq (K\delta)^n\|y\|$$

Et

$(y_{n-1} - y_n) = (F(x_n) - F(x_{n-1})$,*de sorte que* (x_n) *converge vers un* x *tel que* $F(x) = y$ *et*

$$\|x - \bar{x}\| \leq \frac{K}{1 - K\delta}\|y\| \leq (K\delta)\|y\| \leq \gamma^{-1}\|y\| < t. \qquad \blacklozenge$$

Théorème de Lusternik-Grave

Théorème 2.2.4

Supposons que $F : X \to Y$ *est continuement différentiable et régulière en* x , *pour tout* r *positif* $r < C(F'(\bar{x}))$, *il existe un* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$B(F(\bar{x}), rt) \subset F(B(\bar{x}, t))$$

Pour tout $\|x - \bar{x}\| < \epsilon, 0 \leq t < \epsilon$.

Plus généralement, le théorème de ***Lusternik*** *(1936)-****Graves*** *(1950)[2] dit qu'une application différentiable (pas nécessairement linéaire)* $F : R^n \to R^m$ *est métriquement régulière en* x *exactement lorsque son gradient* $\nabla F(x)$ *est surjectif et de plus son module de régularité* $regF(x)$ *gouverne la rapidité du schéma itératif naturel qui résout* $F(x) = y$.

2.3 Théorèmes de fonction inverse et implicite

Théorème de fonction inverse

Théorème 2.3.1

Supposons que F *soit continuement différentiable en* X *et sa dérivée* $F'(x)$ *est un opérateur inversible sur* Y.

Alors il exsite une application G en X définie dans un voisinage de $y = F(x)$, strictement différentiable en Y et tel que

$$G'(\bar{y}) = (F'(\bar{x})^{-1}), \ \ et, \ \ F \circ G = I_Y$$

Démonstration :

On pose $A = F'(\bar{x})$ et $F(x') - F(x) - A(x' - x) = r(x', x)\|x' - x\|$ où $\|r(x', x)\| \to 0$ lorsque $x, x' \to \bar{x}$ puisque A est inversible il existe un $K > 0$ tel que $\|Ah\| > K\|h\|$.

Par conséquent $\|F(x') - F(x)\| \geq (K - r(x', x))\|x' - x\| > 0$ si x, x' proche de $\bar{x}$.

Cela signifie que F est unique dans le voisinage de $\bar{x}$.

Puisque $G = F^{-1}$ est définie dans un voisinage de $F(\bar{x})$, alors y et y' dans un voisinage de $\bar{y} = F(\bar{x})$.

Soit x', x tel que $F(x') = y', F(x) = y$, alors comme nous l'avons vu $\|y - y'\| \geq K\|x' - x\|$.

On a

$$A^{-1}(F(x') - F(x) - A(x' - x)) = A^{-1}(y' - y) - G(y') - G(y)$$

Pour que

$$\begin{aligned} \|G(y') - G(y) - A^{-1}(y' - y)\| &\leq \|A\|^{-1}\|F(x') - F(x) - A(x' - x)\| \\ &= \|A^{-1}\|\|r(x', x)\|\|x' - x\| \leq q(y, y')\|y' - y\| \end{aligned}$$

Où $q(y, y') = Kr(G(y), G(y'))$ va évidemment à zéro lorsque $y, y' \to \bar{y}$. ♦

Théorème de fonction implicite

Théorème 2.3.2

Soient X,Y,Z les espaces de Banach et F une application en Z qui est définie dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ et strictement différentiable en $(\bar{x}, \bar{y})$. Supposons en outre que la dérivée partielle $F_y(\bar{x}, \bar{y})$ soit un opérateur inversible.

Ensuite, il existe des voisinages $U \in X$ de $\bar{x}$ et $W \in Z$ de $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = F(\bar{x}, \bar{y})$ et une application $S : U \times W \to Y$ tel que $(x, z) \longmapsto (x, S(x, z))$ est un homomorphisme de $U \times W$ sur un voisinage de (x, y) dans $X \times Y$ et

$$F(x, S(x, z)) = z, \quad \forall x \in U, \quad \forall z \in W$$

L'application S est strictement différentiable en $(\bar{x}, \bar{z})$ avec

$$S_z(\bar{x}, \bar{z}) = (F_y(\bar{x}, \bar{z}))^{-1}, \ \ S_x(\bar{x}, \bar{z}) = (F_y(\bar{x}, \bar{z}))^{-1}F_x(\bar{x}, \bar{y}) \tag{2.1}$$

2.4 Théorème de Sard

Définition 2.4.1 ***(Valeur critique et régulière)***

Soient X et Y les espaces de Banach, et soit F une application définie en Y et continuement différentiable sur un ensemble ouvert de $U \in X$.
Un vecteur $y \in Y$ s'appelle une valeur critique de F s'il existe un $x \in U$ tel que $F(x) = y$, et x un point singulier de F.
Tout point dans l'espace de distribution qui n'est pas une valeur critique est appelé une valeur régulière, même si elle n'appartient pas à ImF.
Ainsi, y est une valeur régulière si $y \neq F(x)$ pour tout x du domaine de F où $ImF'(x) = Y$ pour tout x tel que $F(x) = y$.

2.5 Théorème de transversalité

Définition 2.5.1
Soit $F : X \to Y$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, et $M \subset Y$ une sous-variété différentielle de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que F est transversale sur M en x si $y = F(x) \notin M$ où $y \in M$ et $ImF'(x) + T_yM = Y$.
On dit que F est transversale sur M, si elle est transversale en chaque x du domaine de F.

La relation avec régularité est immédiate de la définition : si (L, φ) une paramétrisation locale pour M en y et $y = F(x)$, alors la transversalité de F sur M en x est équivalente à la régularité sur $(x, 0, 0)$ de l'application $\Phi : X \times L \to Y$ donnée par $\Phi(u, v) = F(u) - \varphi(v)$.

Ces derniers théorèmes contient des concepts de topologie différentielle qui besoin beaucoup d'études mais c'est pas mon objectif dans ce mémoire.

Chapitre 3

La théorie de la régularité métrique

L'étude des théorèmes des multiapplications implicites se pose dans les problèmes liés au concept de ***régularité métrique****, dans les inégalités variationnelles et dans de nombreux autres domaines. En effet, l'outil mathématique dans l'analyse de sensibilité des problèmes variationnels est le concept de la régularité métrique (metric regularity) pour des multiapplications.*
Considérons l'équation généralisée suivante

$$y \in F(x) \tag{3.1}$$

où, $F : X \rightrightarrows Y$ *est une multiapplication de* X *dans* Y *et* $y \in Y$ *donné. Une question importante est la suivante :" L'ensemble* $F^{-1}(y)$ *des solutions de (3.1) est-il stable par rapport à une "petite" perturbation du paramètre* y *" ?*

Un outil essentiel pour répondre à cette question est la notion de ***régularité métrique****[2].*

3.1 Régularité locale

Soient X *et* Y *sont des espaces métriques. On commence par le cas le plus simple et le plus populaire de régularité locale dans un voisinage d'un certain point du graphe.*

soit $F : X \to Y$ *une application donnée dans un voisinage de* $(\bar{x}, \bar{y}) \in GraphF$.

3.1.1 Propriétés régularité locale

Définition 3.1.1 *On dit que F est*

- *ouvert où fermée à un taux linéaire dans un voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$ s'il y a $r>0,\epsilon>0$ tel que*

$$B(y,rt)\cap B(\bar{y},\epsilon)\subset F(B(x,t)),\qquad \forall(x,y)\in GraphF,\quad d(x,\bar{x})<\epsilon,t\geq 0.$$

  La limite supérieure $surF(\bar{x}|\bar{y})$ pour toute r est le module de F dans un voisinage de $(\bar{x}|\bar{y})$. Si aucun r,ϵ n'existent, on met $surF(\bar{x}|\bar{y})=0$.

- *métriquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}|\bar{y})\in GraphF$ s'il y a $K>0$, $\epsilon>0$ tel que*

$$d(x,F^{-1}(y))\leq Kd(y,F(x)),\qquad si\quad d(x,\bar{x})<\epsilon,d(y,\bar{y})<\epsilon.$$

  La limite inférieure $regF(\bar{x}|\bar{y})$ de K est le module où le taux de régularité métrique de F dans un voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$. Si aucun K,ϵ n'existent, on met $regF(\bar{x}|\bar{y})=\infty$.

- *Pseudo-Lipschitz où la propriété d'Aubin dans un voisinage de $(\bar{x}|\bar{y})$ s'il y a $K>0$ et $\epsilon>0$ tel que*

$$d(y,F(x))\leq Kd(x,u),\qquad si\quad d(x,\bar{x})<\epsilon,d(y,\bar{y})<\epsilon,y\in F(u).$$

  La limite inférieure de $lipF(\bar{x}|\bar{y})$ est le module de Lipschitz où le taux de F dans un voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$. Si aucun K,ϵ n'existent, on met $lipF(\bar{x}|\bar{y})=\infty$.

Le concept de régularité est celui d'ouverture à un taux linéaire (openness at a linear rate) est très souvent utilisé en analyse variationnelle et en optimisation.

Proposition 3.1.1 ***(L'équivalence locale)***
F est un ouvert à un taux linéaire dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}) \in GraphF$ si et seulement si F est métriquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$ et si et seulement si F^{-1} suit la propriété de l'Aubin dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$. En outre, selon cette relation $0 \cdot \infty = 1$ on a

$$surF(\bar{x}|\bar{y}) \cdot regF(\bar{x}|\bar{y}) = 1, \qquad (\bar{x}|\bar{y}) = lipF^{-1}(\bar{y}|\bar{x}).$$

Définition 3.1.2 ***(La régularité du graphe)***.
F est dit graphiquement-régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}) \in GraphF$ s'il y a $K > 0$, $\epsilon > 0$ tel que l'inégalité

$$d(x, F^{-1}(y)) = Kd((x, y), GraphF) \tag{3.2}$$

A condition $d(x, \bar{x}) < \epsilon$,$d(y, \bar{y}) < \epsilon$.

Proposition 3.1.2 ***(Régularité métrique et régularité graphique)***.
Soit $F : X \rightrightarrows Y$, et $(\bar{x}, \bar{y}) \in GraphF$. Alors F est métriquement régulière à $(\bar{x}, \bar{y})$ si et seulement s'elle est graphiquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$.

3.2 Régularité non locale

Comme nous l'avons déjà mentionné, la plupart des recherches actuelles basée sur la régularité locale.
Globalement, cela s'explique par la relation entre l'étude de l'analyse variationnelle moderne et la théorie de l'optimisation qui s'intéressent essentiellement aux résultats locaux : Les conditions d'optimalités, la stabilité des solutions sous petites perturbations, etc.
Une autre raison moins visible est que la régularité non locale est un concept plus délicat car dans le cas non local on ne peut pas changer façilement le domaine de la régularité.

Définition 3.2.1 ***(Les propriétés de régularité non locale)***.
Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ (on suppose généralement que U et V sont des ouverts), et $F : X \rightrightarrows Y$. Soit $\gamma(\cdot)$ et $\delta(\cdot)$ sont des multifonctions réelles sur X et Y qui ont des valeurs positives (éventuellement infinies) respectivement sur U et V.
On dit que F est

- $\gamma - ouvert (ou\ \gamma - fermé)$ *à un taux linéaire sur* $U \times V$ *s'il y a un* $r > 0$ *tel que*

$$B(F(x), rt) \bigcap V \subset F(B(x, t))$$

Si $x \in U$ *et* $t < \gamma(x)$. *On note par* ${}_{\gamma}F(U|V)$ *la limite supérieure pour toute* r.
Si aucun r *n'existe, on pose* $sur_{\gamma}F(U|V) = 0$. *On appelle que* $sur_{\gamma}F(U|V)$ *est le module de la* $\gamma - ouvert$ *de* F *sur* $U \times V$.

- $\gamma -$ *métriquement régulière sur* $U \times V$ *s'il y a un* $K > 0$ *tel que*

$$d(x, F^{-1}(y)) = Kd(y, F(x))$$

à condition que $x \in U$, $y \in V$ *et* $Kd(y, F(x)) < \gamma(x)$. *On note par* $reg_{\gamma}F(U|V)$ *la limite inférieure pour toute* K. *Si aucun* K *n'existe, on pose* $reg_{\gamma}F = \infty$. *On appelle que* $reg_{\gamma}F(U|V)$ *est le module (ou le taux) de la* $\gamma -$ *régularité métrique de* F *sur* $U \times V$;

- $\delta -$ *pseudo-Lipschitz sur* $U \times V$ *s'il y a un* $K > 0$ *tel que*

$$d(y, F(x)) = Kd(x, u)$$

Si $x \in U$, $y \in V$, $Kd(x, u) < \delta(y)$ *et* $y \in F(u)$. *On note par* $lip_{\delta}F(U|V)$ *la limite inférieure de* K.
Si aucun K *n'existe, alors* $lip_{\delta}F = \infty$. *On appelle* $lip_{\delta}F(U|V)$ *est le module (ou le taux) de la* $\delta -$*Lipschitz de* F *sur* $U \times V$.
Si $U = X et\ V = Y$, *on écrit* $sur_{\gamma}F$, $reg_{\gamma}F$, $lip_{\delta}F$ *au lieu de* $sur_{\gamma}F(X|Y)$, *Etc. Le rôle des fonctions* γ *et* δ *est clair à partir des définitions.*

Théorème 3.2.1 ***(Théorème d'équivalence)***.
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour toute espaces métriques X, Y, *soit* $F : X \rightrightarrows Y$, *pour tout* $U \subset X$ *et* $V \subset Y et$ *pour tout fonction* $\gamma(x)$ *qui est positive sur* U :

(a) F *est* $\gamma - ouvert$ *à un taux linéaire sur* $U \times V$;
(b) F *est* $\gamma -$*métriquement régulière sur* $U \times V$;
(c) F^{-1} *est* $\gamma - pseudo - Lipschitz$ *sur* $V \times U$.

De plus (selon la relation $0 \cdot \infty = 1$*)*

$$Sur_{\gamma}F(U|V) \cdot reg_{\gamma}F(U|V) = 1,\ reg_{\gamma}F(U|V) = lip_{\gamma}F^{-1}(V|U)$$

3.3 Critères de régularité

3.3.1 Critères généraux

On montre dans cette section les conditions nécessaires et suffisantes pour la régularité. Soit $f : X \rightrightarrows Y$ *une multifonction ,on pose*

$$\varphi_y(x,v) = \begin{cases} d(y,v), & si \;\; v \in F(x) \\ +\infty, & sinon \end{cases} \quad , \; \psi_y(x) = d(y, F(x)) \;\; , \; \bar{\psi}_y(x) = \liminf_{u \to x} \psi(u).$$

On note que φ_y *est lipschitzienne continue sur le Graph* F*, par conséquent, elle est semi-continue inférieurement lorsque le Graph* F *est un ensemble fermé.*

Définition 3.3.1
On définit la $\zeta-$*métrique sur* $X \times Y$ *tel que* $\zeta > 0$

$$d_\zeta((x,y),(x',y')) = max\{d(x,x'), \zeta d(y,y')\}$$

Théorème 3.3.1 ***(Critère de la régularité du Milyutin)***
Soit $U \subset X$ *et* $V \subset Y$ *sont des applications ouverts et soit* $f : X \rightrightarrows Y$ *une mutifonction dont le graphe est complet dans le produit métrique.*
Pour tout $x \in U, y \in V, v \in F(x)$ *tel que* $r > 0$ *et* $\zeta > 0$ *, avec* $0 < d(y,v) < rm(x)$*,il existe un couple* $(u,w) \in GraphF$ *différent de* (x,v)*,*

et de telle sorte que

$$d(y,w) \leq d(y,v) - r d_\zeta((x,v),(u,w)). \tag{3.3}$$

Alors F *est Milyutin régulière sur* $U \times V$ *avec* $sur_m F(U|V) \geq r$.
Inversement, si F *est Milyutin régulière sur* $U \times V$*, alors pour tout* r *positif* $(r < sur_\gamma F(U|V))$*,pour tout* $\zeta \in (0, r^{-1})$*,* $x \in U, V \in F(x)$ *et* $y \in V$ *puisque* $0 < d(y,v) < r_\gamma(x)$ *vérifié , il y a un couple* $(u,w) \in GraphF$ *différent de* (x,v) *de telle sorte que (3.3) est vérifiée.*

Cet théorème est un outil puissant pour établir des conditions nécessaires d'optimalité pour une vaste classe de problèmes du calcul des variations et de la théorie de l'optimisation. Il nous donne une interprétation géométrique très simple du phénomène de régularité : cela veut dire que F est régulière si pour tout $(x, v) \in GraphF$ et pour tout $y \neq v$ il y a un point qui appartient le graphe est plus proche de y (que v) et la distance entre le nouveau point au point de départ (x, v) est proportionnelle .

Théorème 3.3.2 ***(Deuxième critère de régularité du Milyutin)***
Soit X un espace métrique complet ,et soientt $U \subset X$ et $V \subset Y$ deux applications ouverts.
$F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction avec un graphe fermé. On dit que F est Milyutin régulière sur $U \times V$ avec $sur_m F(U|V) \geq r$ si et seulement si pour tout $x \in U$ et tout $y \in V$ avec $0 < \bar{\psi}_y(x) < rm(x)$ il existe $u \neq x$ tel que

$$\bar{\psi}_y(u) \leq \bar{\psi}_y(x) - rd(x, u). \tag{3.4}$$

Le théorème est particulièrement pratique lorsque ψ_y est semi-continue inférieure pour toute $y \in V$.

Théorème 3.3.3 ***(Critère de régularité locale)***
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multivoque avec un graphe fermé, tel que $(\bar{x}, \bar{y}) \in GraphF$. Alors F est régulière au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$ si et seulement s'il y a $\epsilon > 0, \zeta > 0$ et $r > 0$ tel que pour tout x, v et y satisfaisant $d(x, \bar{x}) < \epsilon, d(y, \bar{y}) < \epsilon, v \in F(x)$ et $0 < d(y, v) < \epsilon$.
où l'un des deux propriétés suivantes est valable :

(a) *Graph F est localement complète et il y a un couple $(u, w) \in GraphF, (u, w) \neq (x, v)$ de telle sorte que (3.3) est vérifiée.*

(b) *X est un espace métrique complet, le graphe de F est fermé et soit (3,4) est vrai.*
En outre, dans les deux cas $surf(x|y) \geq r$.

3.3.2 Critère infinitesimaux

L'outil principal de la théorie infinitésimale de la régularité dans les espaces métriques est fourni par le concept de pente qui est juste la vitesse maximale de descente de la fonction à partir d'un

point donnée.

Définition 3.3.2 *(pente).*
Soit f une fonction à valeur réelle finie sur X. La quantité

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{u \to x} \frac{(f(x) - f(u))^+}{d(x,u)}$$

est appelée la pente de f en x.
On définit $|\nabla f|(x) = \infty$ si $f(x) = \infty$. Il est facile d'observer que $|\nabla f|(x) > r$ signifie arbitrairement dans un voisinage de x tel que $u \neq x$ on a $f(x) > f(u) + rd(x,u)$.
Cela permet de reformuler la partie suffisante des critères de régularité en termes infinitésimales.

$$\varphi_y(x,v) = d(y,v) + i_{GraphF}(x,v),\ \psi_y(x) = d(y,F(x)),\ \bar{\psi}_y(x) = \liminf_{u \to x} \psi_y(u),$$

∇_ξ représente la pente de fonctions de $X \times Y$ par rapport à la d_ξ-metrique : $d_\xi((x,v),(x',v')) = max\{d(x,x'), \xi d(v,v'))\}$.

Définition 3.3.3 *[4, 21] Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$.*
F est dite fortement (métriquement) régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si $\bar{y} \in F(\bar{x})$ et F^{-1} possède une localisation univoque lipschitzienne en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$.

3.4 Régularité métrique et Aubin-continuité

Dans cette section, nous donnerons la défnition de ce concept et certaines propriétés dont une caractérisation importante avec l'Aubin-continuité [20]. L'équivalence entre régularité métrique d'une multiapplication F et Aubin-continuité de F^{-1} donne une passerelle qui permet de passer à l'inverse en conservant une propriété de régularité sur l'application.
Nous énoncerons préalablement les défnitions de la distance d'un point à un ensemble,de l'excès et de la distance de Hausdorff.

Commençons par rappeler la distance d'un point à un ensemble :

Définition 3.4.1 *X et Y sont des espaces de Banach.*
Soient $x \in X$ et $A \in X$. La distance du point x à l'ensemble A notée $d(x,A)$ est défnie par

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Par convention, $d(x, \emptyset) = \infty$.

On note que

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists y \in A, \|x - y\| \leq d(x, A) + \epsilon.$$

Ce qui entraîne que $\forall x \in X$, $\forall A \subset X, d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$. *Nous défnissons maintenant l'excès d'un ensemble à un autre dans un espace métrique* (E, d), *qui n'est pas une distance sur* $P(E)$ *mais qui joue un rôle important en analyse multivoque.*

Définition 3.4.2
Soit (E, d) *un espace métrique et soient* A *et* B *deux sous-ensembles de* E. *L'excès de* A *à* B, *noté* $e(A, B)$, *est défni par :*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B),$$

où l'on suppose $e(\emptyset, B) = 0$ *pour* $B \neq \emptyset$ *et* $e(\emptyset, B) = +\infty$ *si* $B = \emptyset$.
La notion d'excès est une notion qui n'est pas symétrique car l'excès de A *à* B *n'est pas égal en général à l'excès de* B *à* A.
Nous défnissons également la distance de Hausdorf dans un espace métrique (E, d) *qui n'est pas vraiment une distance sur* $P(E)$ *mais plutôt sur l'ensemble des parties fermées de* E.

Définition 3.4.3
Soit (E, d) *un espace métrique et soient* A *et* B *deux sous-ensembles de* E. *La distance de Hausdorff de* A *à* B, *notée* $h(A, B)$, *est défnie par :*

$$h(A, B) = max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

La distance de Hausdorff est évidemment symétrique et pour $A, B \in P(E)$, *on a* $h(A, B) = 0 \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$. *Et quand à l'inégalité triangulaire, elle vient de celle de l'excès dont une démonstration est donnée par Moreau.*

Venons-en maintenant à la régularité métrique.
La notion de ***régularité métrique*** *est étroitement liée au théorème de l'application ouverte de*

Banach quand on déja vue en 2^{me} chapitre. Ce théorème concerne des applications linéaires et continues entre deux espaces de Banach. L'ensemble des applications linéaires continues muni de la norme

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

est un espace de Banach noté (X, Y).

D'après le chapitre 2 le théorème de l'application ouverte de Banach pourra être déduit d'un résultat plus général pour les applications multivoques.
Considérons une application linéaire et continue A qui est surjective.
Alors ce théorème nous assure l'existence d'un $k > 0$ tel que pour tout $y \in$ il existe x vérifiant

$$y = Ax \quad et \quad \|x\| \leq k\|y\|.$$

En effet :
La relation de ce théorème exprime que pour tout $x \in X$ tel que$\|Ax\| < c$, alors $\|x\| \leq 1$.
Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ vérifiant $y = Ax$, puisque A est surjective.
Soit $c' < c$et soit $z = \frac{c'}{\|y\|}x$, on a $\|Az\| < c$ et donc $\|x\| \leq \frac{1}{c'}\|y\|$.

Par suite,

$$d(0, A^{-1}(y)) \leq k\|y\|, \forall y \in Y = imA.$$

Grâce à la linéarité, pour tout $x \in X$ on a :

$$d(x, A^{-1}(y)) = d(0, A^{-1}(y - Ax)) \leq k\|y - Ax\| = kd(y, Ax).$$

c'est-à-dire,

$$d(x, A^{-1}(y)) \leq kd(y, Ax), \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Cette dernière propriété est appelée régularité métrique. Ainsi, le théorème de l'application ouverte de Banach peut être énoncé de la façon suivante : Si $A \in (X, Y)$ est surjective alors A est métriquement régulière en tout point $x \in X$ pour tout point $y \in Y$.

Nous définissons la régularité métrique d'applications multivoques agissant entre deux espaces de Banach.

Définition 3.4.4 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$. F est dite métriquement régulière en $(\bar{x}, \bar{y})$ si $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\ F$ et s'il existe une constante $k > 0$ et des voisinages U de $\bar{x}$ et$V$ de $\bar{y}$ tels que :*

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq kd(y, f(x)), \forall (x, y) \in U \times V. \tag{3.5}$$

La borne inférieure de l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles est vérifiée est appelée module de régularité et est notée $reg(F, \bar{x}|\bar{y})$, c'est-à-dire

$$reg(F, \bar{x}|\bar{y}) = inf\{k|il\ existe\ des\ voisinages\ U\ et\ V\ tels\ que\ (3.5)\ soit\ vérifiée\}.$$

L'absence de régularité métrique sera signalée par $reg(F, \bar{x}|\bar{y}) = \infty$.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, pour les applications linéaires et continues, la surjectivité entraîne la régularité métrique en tout point.
Afin d'obtenir une formule pour le module de régularité, considérons $A \in (X, Y)$ qui est métriquement régulière en $(0, 0)$ (ou de manière équivalente, en tout point $(\bar{x}, A\bar{x})$. Grâce à (3.5), pour $x = 0$ et y proche de 0 on a $d(0, A^{-1}(y)) \leq k\|y\|\ \ \forall y \in Y$.
Ce qui veut dire que k peut prendre n'importe quelle valeur plus grande que $supd(0, A^{-1}(y))|y \in \bar{\mathbb{B}}_Y$.

C'est-à-dire

$$regA = \sup_{\|y\| \leq 1} d(0, A^{-1}(y))\, pour A \in (X, Y).$$

Remarquons que, grâce à la linéarité, le module de régularité de A est le même en tout point du graphe de A, et par conséquent le point de référence n'est pas indiqué dans (3.6). Ainsi, le théorème de l'application ouverte de Banach peut maintenant être énoncé comme suit :

$$regA < \infty \Longleftrightarrow Aest\ surjective.$$

En effet, A n'est pas surjective si et seulement si on peut trouver $y \in \bar{\mathbb{B}}_Y$ tel que $A^{-1}(y) = \emptyset$, ce qui revient à dire que le sup évoqué dans (3.6) est égal à ∞. Et si de plus A est bijective, la relation

(3.6) nous donne : $regA = \|A^{-1}\|$.

On montre que si une application multivoque est métriquement régulière alors son inverse vérifie une propriété appelée Aubin-continuité que nous définissons ci-dessous :

Définition 3.4.5
Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite M-Aubin-continue autour de $(x_0, y_0) \in graphF$ s'il existe des voisinages V de x_0 et U de y_0 tels que :

$$\sup_{y \in F(x_1) \cap U} dist(y, F(x_2)) \leq M\|x_1 - x_2\|, \ pourtout \quad x_1, x_2 \in V.$$

ou, en terme d'excès

$$e(F(x_1) \cap U, F(x_2)) \leq M\|x_1 - x_2\|, \ pourtout \quad x_1, x_2 \in V. \tag{3.6}$$

La borne inférieure de l'ensemble des $k \geq 0$ pour lesquels (3.6) est satisfaite est appelée module de lipschitziannité de F autour (x_0, y_0) et notée lip $F(x_0, y_0)$. L'absence d'Aubin-continuité sera signalée par $lipF(x_0, y_0) = \infty$.

Remarque 3.4.1 *Notons que*

1. *Si F est une application univoque, l'Aubin-continuité revient à la lipschitziannité.*
2. *L'Aubin-continuité de l'application F en $(\bar{x}, \bar{y})$ impose implicitement $\bar{x} \in int \ \ domF$.*

C'est ce que traduit le lemme suivant.

Lemme 3.4.1
Si F est Aubin-continue en $(\bar{x}, \bar{y})$, alors pour tout voisinage U de $\bar{y}$ il existe un voisinage V' de $\bar{x}$ tel que

$$F(x) \cap U \neq \emptyset, \forall x \in V'. \tag{3.7}$$

L'Aubin-continuité peut également être définie avec une variable "libre", comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.4.1 *[6] Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est k-Aubin-continue en $(\bar{x}, \bar{y})$ si et seulement s'il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que :*

$$e\left(F(x') \cap V, F(x)\right) \leq k\|x' - x\|, \quad \textit{pour tous } x' \in X \textit{ et } x \in U.$$

Lorsqu'une application est Aubin-continue, on dit aussi qu'elle est pseudo-Lipschitz ou Lipschitz-like.

Le résultat qui suit nous donne une caractérisation importante de la régularité métrique.

3.4.1 Équivalence entre régularité métrique et Aubin-continuité de l'inverse

Théorème 3.4.1 *[16, 22]*
Pour une application $F : X \rightrightarrows Y$, soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ tels que $\bar{y} \ni F(\bar{x})$. Alors F est métriquement régulière en $(\bar{x}, \bar{y})$ de constante k si et seulement si son inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est Aubin-continue en $(\bar{y}, \bar{x})$ avec la même constante k, i.e. il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que :

$$e\left(F^{-1}(y') \cap U, F^{-1}(y)\right) \leq k\|y' - y\|, \quad \forall y', y \in V. \tag{3.8}$$

De plus, la borne inférieure de l'ensemble de ces valeurs de k est égale à $reg(F, \bar{x} \mid \bar{y})$.

Dans la plupart des problèmes que nous cherchons à résoudre , on considère une application univoque f et une application multivoque F. Dans le cas où f est strictement stationnaire en un point, ***Dontchev*** *et* ***Hager*** *[5] ont démontré le résultat suivant.*

Théorème 3.4.2
Soit X un espace métrique complet, soit Y un espace vectoriel avec une métrique invariante et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque à graphe convexe fermé. Si $\bar{y} \in F(\bar{x})$ et $f : X \to Y$ est une fonction continue et strictement stationnaire en $\bar{x}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) L'application F^{-1} est Aubin-continue en $(\bar{y}, \bar{x})$,
ii) l'application $(f + F)^{-1}$ est Aubin-continue en $(\bar{y} + f(\bar{x}), \bar{x})$.

Le théorème précédent est en fait un corollaire d'un résultat plus général (Théorème de l'application inverse) dont la démonstration utilise le lemme du point fixe.

3.4.2 Exemples d'applications Aubin-continues

Nous donnons, dans ce paragraphe, quelques exemples d'applications Aubin-continues.

Exemple 3.4.1
Soit $f : X \to Y$ une application strictement différentiable en $\bar{x}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $f'(\bar{x})$ *est surjective,*
ii) f^{-1} *est Aubin-continue en* $(f(\bar{x}), \bar{x})$.

On démontre ce résultat en utilisant le théorème de l'application ouverte.

Exemple 3.4.2
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application à graphe convexe fermé et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in graphF$, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

i) $y \in int \ \ imF$,
ii) F *est ouverte en* $(\bar{x}, \bar{y})$,
iii) F *est métriquement régulière en* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Exemple 3.4.3 *L'application $T : R \to R$ définie par*

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\}, \quad pour \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

est métriquement régulière en $(0, 0)$.

En effet,

$$dist(x, \mathrm{T}^{-1}(y)) = dist(y, \mathrm{T}(x)) = \begin{cases} 0, & si \leq y, \\ x - y, & si \ x > y. \end{cases}$$

3.5 Semistabilité et Hemistabilité

Dans la suite, nous utiliserons le concept de semistabilité introduit par ***J.F. Bonnans*** *dans [15].*
Une solution $\bar{x}$ d'une inclusion $0 \in f(x) + F(x)$ est semistable si, pour une petite perturbation dans le membre de gauche, une solution x du problème perturbé suffisamment proche de $\bar{x}$ est telle que

la distance de x à $\bar{x}$ est de l'ordre de grandeur de la perturbation.
la semistabilité n'implique pas l'existence d'une solution du problème perturbé. L'existence est en général obtenue en adjoignant à la semistabilité un autre concept qui est l'hémistabilité.

Définition 3.5.1 *Une solution $\bar{x}$ de l'inclusion $0 \in f(x) + F(x)$ est dite semistable s'il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que, pour tout $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, solution de*

$$\delta \in f(x) + F(x),$$

et $\|x - \bar{x}\| \leq c_1$, alors $\|x - \bar{x}\| \leq c_2\|\delta\|$.

Dans le cas des ensembles polyédraux convexes, la semistabilité est équivalente au fait que $\bar{x}$ est une solution isolée de l'inclusion linéarisée en $\bar{x}$.

$$0 \in f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + F(x).$$

En dimension finie, si $F = \{0\}$, la semistabilité revient à l'inversibilité de $f'(\bar{x})$.

*Le concept de semistabilité est équivalent à une notion de **régularité métrique** un peu différente de celle vue dans le chapitre précédent : la sous-régularité métrique forte.*

3.5.1 La sous-régularité métrique forte

Définition 3.5.2 *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $(\bar{x}, \vec{y}) \in X \times Y$. F est dite fortement (métriquement) sous-régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si $\bar{y} \in F(\bar{x})$ et*

$$\exists \geq 0, \exists U \in \mathcal{V}(\bar{x}), \ \|x - \bar{x}\| \leq kd(\bar{y}, F(x)) \quad \text{pour tout } x \in U. \tag{3.10}$$

où $\mathcal{V}(\bar{x})$ désigne l'ensemble des voisinages de $\bar{x}$.

Ainsi, soit $\bar{x}$ une solution de l'inclusion $0 \in F(x)$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $\bar{x}$ est une solution semistable de $0 \in F(x)$,

(i) F est fortement sous-régulière en $\bar{x}$ pour 0.

Intéressons-nous maintenant à l'hemistabilité que nous définissons comme suit.

Définition 3.5.3 *Une solution $\bar{x}$ de l'inclusion $0 \in f(x) + F(x)$ est dite hemistable si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ suffisamment proche de $\bar{x}$, l'inclusion variationnelle*

$$0 \in f(x) + f'(x)\xi + F(x + \xi)$$

a une solution $\xi(x)$ telle que $\xi(x) \to 0$ quand $x \to \bar{x}$.

En général, aucune des deux propriétés de semistabilité et d'hemistabilité n'implique l'autre. Toutefois, la régularité forte de Robinson [21] sur la solution $\bar{x}$ que nous définissons ci-dessous est une condition suffisante à la fois de régularité métrique, de semistabilité (sous-régularité métrique forte) et d'hemistabilité.
Par ailleurs, dans certains cas en dimension finie, la semistabilité (sous-régularité métrique forte) entraîne la régularité métrique.

3.5.2 Semistabilité et régularité

Soit f une application deux fois continûment différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On cherche à résoudre les inclusions variationnelles de la forme

$$0 \in f(x) + F(x) \tag{3.11}$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une application multivoque à graphe fermé.
la semistabilité peut être une condition suffisante de régularité métrique.

Dans [23], nous avons montré la proposition suivante.

Proposition 3.5.1
[23] Si $\bar{x}$ est une solution semistable de (3.11) et $int(f(\bar{x})+F(\bar{x})) \neq \emptyset$ alors l'application multivoque $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par $\Gamma(x) := f(x) + F(x)$ est métriquement régulière en $(\bar{x}, 0)$.

Preuve 3.5.1 *Comme $\bar{x}$ est une solution semistable de (3.11), on a :*
$\forall x \in \mathbb{B}^*(\bar{x}, c_1), \forall \delta \in \Gamma(x), d(x, \bar{x}) < cd(0, \delta)$, *avec $c > c_2$, et donc, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $d(x, \bar{x}) + c\varepsilon_1 \leq cd(0, \delta)$.*
On obtient alors $d(x, \bar{x}) \leq c(d(0, \delta) - \varepsilon_1)$, ce qui implique que $d(x, \bar{x}) \leq cd(y, \delta)$, pour tout $y \in \mathbb{B}(0, \varepsilon_1)$.
Soit $\varepsilon_2 > 0$ tel que $\mathbb{B}(0, \varepsilon_2) \subset \Gamma(\bar{x})$ et soit $y \in B(0, \varepsilon)$, où $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Comme $\bar{x} \in \Gamma^{-1}(y)$, on a $d(x, \Gamma^{-1}(y)) \leq cd(y, \delta)$.
On a finalement obtenu que,

$$\forall x \in \mathbb{B}^*(\bar{x}, c_1), \forall \delta \in \Gamma(x), \forall y \in \mathbb{B}(0, \varepsilon), \quad d(x, \Gamma^{-1}(y)) \leq cd(y, \delta)$$

Chapitre 4

Résolution d'inclusions variationnelles : quelques méthodes utilisant la régularité métrique

Dans ce chapitre, on suit [3, 20] pour présenter un certain nombre de méthodes itératives permettant de résoudre des inclusions variationnelles de la forme

$$0 \in f(x) + F(x) \tag{4.1}$$

où $f : X \to Y$ est une application univoque et $F : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque à graphe fermé.
Ce type d'inclusion modélise divers problèmes variationnels, d'optimisation, de complémentarité, de programmation mathématique par exemple. On note que si :

- *$F = \{0\}$, résoudre (4.1) revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.*
- *$F = \mathbb{R}^n_+$, alors l'inclusion (4.1) décrit un système d'inégalités .*
- *F est le cône normal d'un ensemble convexe et fermé K, alors (4.1) représente une inéquation variationnelle.*

Dans ce dernier cas, on considère par exemple une application f continûment différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Étant donné K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, on considère l'inéquation variationnelle.

$$\langle \varphi(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K, x \in K. \tag{4.2}$$

On définit le cône (convexe fermé) normal sortant à K en un point $x \in K$ par

$$N(x) := \{z \in \mathbb{R}^n, \langle z, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K\}$$

et si $x \notin K, N(x) := \emptyset$.

L'inéquation variationnelle (4.2) est équivalente à la relation

$$0 \in f(x) + N(x).$$

Avant de présenter les méthodes de ce chapitre,on annonce un résultat de point fixe dans le cadre multivoque de A.L. Dontchev et W.W. Hager qui est utilisé dans la plupart des méthodes utilisant la régularité métrique qu'on présente.On peut aussi consulter [1] pour une version récente de ce lemme.

Lemme 4.0.1 *(du point fixe)*

Soient (X, ρ) un espace métrique complet, Ψ une application multivoque définie dans X à valeurs dans les sous-ensembles fermés de $X, \eta_0 \in X, r$ et λ des constantes réelles telles que $0 \leq \lambda < 1$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) $dist(\eta_0, \Psi(\eta_0) < r(1 - \lambda)$.

b) $e(\Psi(x_1) \cap \mathbb{B}_r(\eta_0), \Psi(x_2)) \leq \lambda \rho(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{B}_r(\eta_0)$.

alors Ψ a un point fixe dans $\mathbb{B}_r(\eta_0)$.

De plus, si Ψ est une application univoque alors x est l'unique point fixe de Ψ appartenant à la boule $\mathbb{B}_r(\eta_0)$.

*Ce lemme est une généralisation du théorème du point fixe de **Ioffe-Tihomirov** qui utilise l'excès au lieu de la distance de Hausdorff. Si l'on est dans le cas univoque, il revient en fait au théorème de Banach-Picard.*

On en donne la démonstration, qui est très instructive, à des fins pédagogiques.

Démonstration :

D'après a), il existe $\eta_1 \in \Psi(\eta_0)$ *tel que* $\rho(\eta_1, \eta_0) < r(1-\lambda)$. *Raisonnons par récurrence.*
On suppose qu'il existe $\eta_{k+1} \in \Psi(\eta_k) \cap \mathbb{B}_r(\eta_0)$, *pour* $k = 1, ..., n-1$ *tel que*

$$\rho(\eta_{k+1}, \eta_k) < r(1-\lambda)\lambda^k.$$

D'après b),

$$dist(\eta_n, \Psi(\eta_n)) \leq e(\Psi(\eta_{n-1}) \cap \mathbb{B}_r(\eta_0), \Psi(\eta_n)) \leq \lambda\rho(\eta_n, \eta_{n-1}) < r(1-\lambda)\lambda^n.$$

Ceci implique qu'il existe $\eta_{n+1} \in \Psi(\eta_n)$ *tel que*

$$\rho(\eta_{n+1}, \eta_n) < r(1-\lambda)\lambda^n.$$

D'où, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\rho(\eta_{n+1}, \eta_0) \leq \sum_{k=0}^{n} \rho(\eta_{k+1}, \eta_k) < r(1-\lambda)\sum_{k=0}^{n} \lambda^k < r.$$

alors $\eta_{n+1} \in \Psi(\eta_n) \cap \mathbb{B}_r(\eta_0)$, *ce qui achève la récurrence. Pour* $n > m$, *on a*

$$\rho(\eta_n, \eta_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} (\eta_{k+1}, \eta_k) < r(1-\lambda)\sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k < r\lambda^m.$$

Donc $(\eta_k)_k$ *est une suite de Cauchy qui converge vers* $\eta \in \mathbb{B}_r(\eta_0)$.

D'après b), on a

$$dist(\eta_n, \Psi(\eta)) \leq e(\Psi(\eta_{n-1}) \cap \mathbb{B}_r(\eta_0), \Psi(\eta) \leq \lambda\rho(\eta, \eta_{n-1}).$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$dist(\eta_n, \Psi(\eta)) \leq \rho(\eta, \eta_n) + dist(\eta_n, \Psi(\eta)) \leq \rho(\eta, \eta_n) + \lambda\rho(\eta, \eta_{n-1}).$$

et cette distance tend vers zéro lorsque n croît. Puisque $\Psi(\eta)$*est fermé alors* $\eta \in \Psi(\eta)$.
Si Ψ *est une application univoque, la condition b) implique que* Ψ *est l'unique point fixe de* η *appartenant à* $\mathbb{B}_r(\eta_0)$. ♦

Avant de présenter la première méthode à laquelle on nous intérèsse. On annonce un petit rappel sur la vitesse de convergense quand l'utilisera dans notre travail.

4.1 Vitesse de convergence

La vitesse de convergence d'une suite représente la vitesse à laquelle les termes de la suite se rapprochent de sa limite. Ce concept a une grande importance pratique lorsque nous travaillons avec une suite d'approximations successives obtenue à partir d'une méthode itérative, car en général peu d'itérations sont nécessaires pour donner une valeur approchée intéressante lorsque la vitesse de convergence est grande. Il est intéressant également de comparer les vitesses de convergence de suites qui convergent vers la même limite , on peut ainsi obtenir un "classement" des méthodes itératives.

Définition 4.1.1 *[19] Soit (x_n) une suite qui converge vers $\bar{x} \in X$.*

Si $K_p := lim \frac{\|x_{n+1}-\bar{x}\|}{\|x_n-\bar{x}\|^p}$ existe et $K_p > 0$, Alors (x_n) est dite convergente d'ordre p vers $\bar{x}$.

- *Lorsque $p = 1$, (x_n) est dite linéairement convergente.*
- *Lorsque $p = 2$, (x_n) est dite quadratiquement convergente.*
- *lorsque $p = 3$, (x_n) est dite cubiquement convergente.*

Si $K_1 = 0$, alors (x_n) est dite superlinéairement convergente et si $K_2 = 0$, alors (x_n) est dite superquadratiquement convergente.

Voici la première méthode à laquelle on nous intérèsse dans ce chapitre.

4.2 Méthode de type Newton

*Pour résoudre l'inclusion (4.1), **Dontchev** [8] a proposé une méthode de la forme*

$$0 \in f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),\ k = 0, 1, ... \tag{4.3}$$

Cette méthode peut être vue comme une méthode de type Newton basée sur une linéarisation partielle : on écrit l'inclusion au point x_{k+1}, on a alors $0 \in f(x_{k+1}) + F(x_{k+1})$, puis on remplace

$f(x_{k+1})$ par sa linéarisation $f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. [8] Dontchev a prouvé la convergence quadratique de cette méthode et sa stabilité.
Avant de citer les principaux résultats, on donne deux lemmes qui seront utiles pour la suite.
on considère d'abord une propriété de conservation de l'Aubin-continuité après linéarisation.

Lemme 4.2.1 *[7]*
Soit x^* une solution de (4.1), soit f une application Fréchet-différentiable sur un voisinage de x^* dont sa dérivée f'est L-lipschitzienne sur Ω. Soit l'application multivoque F dont le graphe est fermé, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *l'application $(f + F)^{-1}$est Aubin-continue en (y^*, x^*),*

2. *l'application $Q(\cdot) = [f(x^*) + f'(x^*)(\cdot - x^*) + F(\cdot)]^{-1}$ est Aubin-continue en (y^*, x^*).*

On aura également besoin du lemme suivant dans l'étude de la convergence de la méthode de Newton.

Lemme 4.2.2 *[9]*
Soit $(x^*, y^*) \in graph(f + F)$, soit f une application Fréchet différentiable sur un voisinage ouvert Ω de x^* telle que la dérivée f' est continue en x^* et soit F une application multivoque à graphe fermé. Si $(f + F)^{-1}$ est Aubin-continue en (y^*, x^*) alors il existe des constantes positives α, β et M telles que pour tout $x \in \mathbb{B}_\alpha(x^*)$,

Si $P_x(\cdot) = [f(x) + f'(x)(\cdot - x) + F(\cdot)]^{-1}$ alors

$$e(P_x(y') \cap \mathbb{B}_\alpha(x^*), P_x(y'')) \leq M\|y' - y''\|, \quad \forall y', y'' \in \mathbb{B}_\beta(y^*).$$

Étudions maintenant des résultats concernant l'existence et la convergence d'une suite issue de la méthode (4.3)

4.2.1 La convergence quadratique

Théorème 4.2.1 *[8]*
Soit x^* une solution de (4.1) et f une application Fréchet-différentiable sur un voisinage Ω de x^*

dont la dérivée f' est L*-lipschitzienne sur* Ω*. Soit l'application multivoque F dont le graphe est fermé. Si l'application* $(f(x^*)+f'(x^*)(\cdot-x^*)+F(\cdot))^{-1}$ *est* M*-Aubin-continue en* $(0,x^*)$ *alors, pour tout* $c > \frac{ML}{2}$*,on peut trouver* $\delta > 0$ *tel qu'à partir d'un point d'initialisation* $x_0 \in \mathbb{B}_\delta(x^*)$*, il existe une suite de type* ***Newton*** $(x_k)_k$ *définie par (4.3), qui vérife :*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^2 \tag{4.4}$$

ce qui signifie que $(x_k)_k$ *converge quadratiquement vers* x^**.*

De plus, si x^* *est une solution isolée de* (4.1) *alors, pour tout* $c > \frac{ML}{2}$*, on peut trouver* $\delta > 0$ *tel que toute suite* $(x_k)_k \subset \mathbb{B}_\delta(x^*)$ *définie par (4.3) vérifie l'inégalité (4.4).*
Considérons maintenant une méthode de type Newton pour une perturbation de l'inclusion (4.1) *par un paramètre* y*, plus précisément, une inclusion de la forme*

$$y \in f(x) + F(x) \tag{4.5}$$

Considérons la méthode suivante proposée par Dontchev

$$y \in f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),\ k = 0, 1, ... \tag{4.6}$$

On a obtenu les résultats suivants.

Théorème 4.2.2 *[9]*
Soient x^* *une solution de* (4.1)*, et* f *une application Fréchet-différentiable sur un voisinage ouvert* Ω *de* x^* *telle que la dérivée* f' *est* L*-lipschitzienne sur* Ω *et* F *une application multivoque à graphe fermé.*
Si $(f+F)^{-1}$ *est* c*-Aubin-continue en* $(0,x^*)$ *alors il existe des constantes* σ, b *et* γ *telles que pour tout* $y \in \mathbb{B}_b(0)$ *et pour tout point d'initialisation* $x_0 \in \mathbb{B}_\sigma(x^*)$*, il existe une suite de type Newton* $(x_k)_k$ *qui converge quadratiquement vers une solution* x *de (4.5), ce qui signifie que*

$$\|x_{k+1} - x\| \leq \gamma\|x_k - x\|^2,\ k = 0, 1, ...$$

Voyons également un résultat de stabilité qui montre qu'une petite variation sur les données implique aussi une petite variation sur les résultats.

4.2.2 La stabilité

Théorème 4.2.3 *[9]*

Soit x^* une solution de (4.1), et f une application Fréchet-différentiable sur un voisinage ouvert Ω de x^* telle que la dérivée f' est continue sur Ω. Soit une application multivoque F dont le graphe est fermé.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- **i)** *l'application $(f+F)^{-1}$ est* M*-Aubin-continue en $(0, x^*)$,*
- **ii)** *il existe des constantes σ, b et c telles que pour tout $y \in \mathbb{B}_b(0)$ et pour tout point d'initialisation $x_0 \in \mathbb{B}_\sigma(x^*)$, il existe une suite de type Newton $(x_k)_k$ définie par (4.5) qui converge vers une solution x de (4.5).En outre, si x_0 est une solution de (4.6) avec $y = y_0$ alors la limite x de x_k satisfait :*

$$\|x - x_0\| \leq c\|y - y_0\|$$

*Suite à ces travaux, **Piétrus** a considéré le cas où la dérivée f'de f satisfait une condition höldérienne. Il a alors prouvé l'existence d'une suite de type Newton donnée par (4.3) qui converge superlinéairement vers une solution x^* de (4.1) ainsi que la stabilité de la méthode.*

***C. Cabuzel** et **A. Pietrus** ont considéré dans [11, 12] des méthodes dans le cas où la fonction où la fonction f est sous-analytique.*

On s'intéresse, dans un premier temps, à la méthode suivante pour résoudre l'inclusion (4.1)

$$0 \in f(x_k) + \Delta f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \tag{4.7}$$

avec $\Delta f(x_k) \in (x_k)$.

Soit Ω un voisinage de $\bar{x}$ une solution de (4.1). On considère les hypothèses suivantes :

- **(H1.1)** *f est localement lipschitzienne et sous-analytique.*
- **(H1.2)** *$\exists K, \forall x \in \Omega, \forall \Delta f(x) \in \partial f(x), \|\Delta f(x)\| \leq K$.*
- **(H1.3)** *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$est à graphe fermé .*
- **(H1.4)** *$\forall \Delta f(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x})$ l'application $(f(\bar{x}) + \Delta f(\bar{x})(\cdot - \bar{x}) + F(\cdot))^{-1}$ est* L*-Aubin-continue en $(0, \bar{x})$ avec $2LK < 1$.*

Théorème 4.2.4

*Soit $\bar{x}$ une solution de (4.1). On suppose que les hypothèses **(H1.1)-(H1.4)** sont satisfaites, alors*

il existe une constante C_1 telle que pour tout $C > \frac{LC_1}{1-2LK}$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout point initial $x_0 \in \mathbb{B}^*_\delta(\bar{x})$, il existe une suite $(x_k)_k$ définie par (4.7) vérifiant :

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq C\|x_k - \bar{x}\|^{1+\gamma}$$

où γ est un rationnel positif.

4.3 Méthode multipoints

La méthode multipoints présentée ici est la méthode d'interpolation par les fonctions d'itération multipoints sans mémoire. Voici la présentation de cette méthode

$$0 \in f(x_k) + \sum_{i=1}^{N} a_i f'(x_k + \beta_i(x_{k+1} - x_k))(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}) \tag{4.8}$$

où $N > 1, (a_i)_{1\leq i\leq N}$ et $(\beta_i)_{1\leq i\leq N}$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \quad \sum_{i=1}^{N} a_i\beta_i = \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Les résultats de cette section s'appuient sur le lemme suivant :

Lemme 4.3.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *$(f + F)^{-1}$ est Aubin-continue en (y^*, x^*).*
- *$[f(x^*) + \sum_{i=1}^{N} a_i f'(x^* + \beta_i(\cdot - x^*))(\cdot - x^*) + F(\cdot)]^{-1}$ est Aubin-continue en (y^*, x^*).*

Dans le cas où la dérivée seconde f'' est lipchitzienne, Les auteurs montrent que l'on obtient une convergence cubique.
Soit Ω un voisinage borné d'une solution x^* de (4.1). Ils font les hypothèses suivantes :

(H1) *f'' est K_2-lipschitzienne sur Ω.*

(H2) *F est à graphe fermé,*

(H3) *L'application $(f + F)^{-1}$ est L-Aubin-continue sur un voisinage de $(0, x^*)$.*

Ils ont obtenu le résultat de convergence cubique suivant.

4.4 Méthode d'ordre >2

Dans la méthode de type Newton développée par ***Dontchev****, on considère l'approximation de l'application f au point x_{k+1} par une linéarisation partielle. Afin d'améliorer la vitesse de convergence de cette méthode,* ***Geoffroy****[17] a proposé une méthode de la forme*

$$0\inf(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2 + F(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, ... \tag{4.10}$$

Qui consiste à approximer l'application f au point x_{k+1} par

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2,$$

Ce qui fait intervenir la dérivée seconde de Fréchet f'' de f.
Les auteurs ont montré que la méthode (4.8) converge cubiquement si f'' est lipschitzienne et superquadratiquement lorsque f'' est hölderienne , ils ont également montré la stabilité de cette méthode.

On considère les hypothèses suivantes :

(H0) *x^* est une solution de (4.1), Ω est un voisinage ouvert de x^*.*

(H1) *$f : X \to Y$ est deux fois Fréchet-différentiable sur Ω.*

(H2) *$F : X \rightrightarrows Y$ est à graphe fermé.*

Nous avons essentiellement considéré l'hypothèse d'Aubin-continuité (ou régularité métrique) grâce à laquelle on obtient des résultats d'existence de suites qui convergent vers une solution de l'inclusion $0 \in f(x) + F(x)$ à des vitesses très intéressantes.

4.5 Des nouveaux résultats utilisant la semistabilité et l'hémistabilité

Jusqu'à maintenant, nous avons essentiellement considéré l'hypothèse d'Aubin-continuité (ou régularité métrique) grâce à laquelle on obtient des résultats d'existence de suites qui convergent vers une solution de l'inclusion $0 \in f(x) + F(x)$ à des vitesses très intéressantes.
Nous nous intéresserons plus en détail à la semistabilité et à l'hemistabilité.
Dans [15], ***Bonnans*** *considère l'inéquation variationnelle suivante*

$$\langle f(x), y - x\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K, x \in K. \tag{4.11}$$

On note que (4.11) est équivalent à la relation

$$0 \in f(x) + N_C(x). \tag{4.12}$$

où C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et N_C désigne l'opérateur cône normal.
Ainsi, la théorie des inclusions variationnelles peut être utilisée pour résoudre des inéquations variationnelles du type de (4.11).

On notera $N(x)$ (au lieu de $N_C(x)$).

4.5.1 Méthode de type Newton

Pour approcher une solution de (4.11), on considère l'algorithme de type Newton suivant :

Algorithme

- *On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $k \to 0$.*
- *Tant que x_k n'est pas solution de (4.12) : on choisit M_k, une matrice $n \times n$, et on cherche x_{k+1} solution de*
$$0 \in f(x_k) + M_k(x_{k+1} - x_k) + N(x_{k+1}).$$

Lorsque $M_k = f'(x_k)$ l'algorithme précédent est en fait la méthode de type Newton donnée par Dontchev dans [8] définie par la relation :

$$0 \in f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + N(x_{k+1}) \tag{4.13}$$

On a obtenu les résultats suivants :

Théorème 4.5.1 ***(Convergence quadratique).***[15] *Soit $\bar{x}$ une solution semistable de (4.11), et soit (x_k) une suite définie par l'algorithme qui converge vers $\bar{x}$. Alors :*

1. *Si $(f'(\bar{x}) - M_k)(x_{k+1} - x_k) = o(x_{k+1} - x_k)$, alors (x_k) converge superlinéairement.*

2. *Si* $(f'(\bar{x}) - M_k)(x_{k+1} - x_k) = O(\|x_{k+1} - x_k\|^2)$ *et* f' *est localement Lipschitzienne, alors* (x_k) *converge quadratiquement.*

On a également le corollaire suivant.

Corollaire 4.5.1 *Si une suite* (x_k) *définie par l'algorithme converge vers une solution semistable* $\bar{x}$ *de (4.11), alors :*

- **i.** *Si* $M_k \to f'(\bar{x})$,*alors* (x_k) *converge superlinéairement.*
- **ii.** *Si* f' *est localement Lipschitzienne et* $M_k = f'(\bar{x}) + O(x_k - \bar{x})$, *alors* (x_k) *converge quadratiquement.*

Dans le théorème précédent, on suppose l'existence d'une suite convergente mais on n'a pas pas d'hypothèse qui implique son existence. L'hypothèse d'hémistabilité nous apporte ceci en plus, l'existence d'une suite qui converge vers la solution $\bar{x}$.

Théorème 4.5.2 ***(Convergence quadratique).***[15] *Si* $\bar{x}$ *est une solution semistable et hemistable de (4.11), il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que si* $\|x_0 - \bar{x}\| < \varepsilon$, *alors :*

- **i.** *À chaque itération* k, *il existe une solution* x_{k+1} *de (4.13) vérifiant* $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 2\varepsilon$.
- **ii.** *La suite* (x_k) *ainsi définie converge superlinéairement (quadratiquement si* f' *est localement lipschitzienne) vers* $\bar{x}$.

Remarque 4.5.1 *Dans le cas où* $K = \mathbb{R}^n$, $N(x) = \{0\}$ *et l'inclusion (4.12) revient à l'équation*

$$f(x) = 0. \tag{4.14}$$

et la semistabilité est équivalente à l'inversibilité de $f'(\bar{x})$. *De plus, dans ce cas, la méthode (4.13) est en fait la méthode de Newton classique pour (4.14) définie par la relation*

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Conclusion

Les résultats présentés dans ce mémoire concernent la résolution d'inclusions variationnelles en utilisant la régularité métrique.
Les applications multivoques, jouent un rôle prépondérant dans notre travail, l'étude des théorèmes des multiapplications implicites se pose dans les problèmes liés au concept de régularité métrique, dans les inégalités variationnelles et dans de nombreux autres domaines.

la semistabilité et l'hemistabilité sont deux concepts qui permettent de reprendre certaines méthodes itératives sans utiliser explicitement l'Aubin-continuité et en obtenant des taux de convergence similaires.
La combinaison semistabilité/hemistabilité semble apporter une alternative intéressante à l'Aubin continuité. Bien que les méthodes inexactes nous indiquent que la convergence est conservée lorsque l'on perturbe les fonctions, on peut se demander si on a une certaine stabilité de ces méthodes si l'on perturbe les variables.

On conclut que ***La régularité métrique*** *est l'outil mathématique central dans l'analyse de sensibilité des problèmes variationnels pour des multiapplications.*

Bibliographie

[1] ***B.Alleche and V.D.Rădulescu***, *"Inverse of the sum of set-valued mappings and applications", Numerical analysis and optimisation.Volume 38.2,2017,p :139-159.*

[2] ***A.D.IOFFE***, *"Metric regularity", Department of Mathematics. October 27, 2015.*

[3] ***A.JOURANI et A.KRUGER***, *"Régularité métrique, multi-applications implicites et applications", Thèse de doctorat 26 octobre 2012.*

[4] ***A.L.Dontchev***, *"Regularity estimates, and convergence of algorithms", In Optimization, games and dynamics, Paris 2011.*

[5] ***A.L.Dontchev and W.W.Hager***, *"An inverse function theorem for set-valued maps", Proc. Amer. Math. Soc, 121 :481-489, 1994.*

[6] ***A.L.Dontchev and R.T.Rockafellar***, *"Implicit Functions and Solution Mappings".2009.*

[7] ***A.L.Dontchev***, *"Local analysis of a Newton-type method based on partial linearization", In Smale Renegar, Shub, editor, The mathematics of numerical Analysis. 1995 AMS-SIAM summer seminar in applied mathematics, RI : AMS. Lect. Appl. Math.32, pages 295-306, 1995.*

[8] ***A.L.Dontchev***, *"Local convergence of the Newton method for generalized equation", C. R.A.S Paris 322, Série I :327-331, 1996.*

[9] ***A.L.Dontchev***, *"Uniform convergence of the Newton method for aubin continuous maps", Serdica. Math. J,22 :385-398, 1996.*

[10] ***C.Cabuzel, A. Piétrus and S. Burnet***, *"Exact and inexact Newton methods for subanalytic variational inclusion", preprint.*

[11] ***C.Cabuzel and A. Pietrus***, *"Mixed secant method for a perturbed subanalytic variational inclusion", Preprint.*

[12] ***C.Cabuzel and A. Pietrus****, "Solving variational inclusions by a multipoint iteration method under center-Hölder continuity conditions", Applicaciones Mathematicae, 34(4) :493-503, 2007.*

[13] ***C.Cabuzel and A. Pietrus****, "Local convergence of Newton's method for subanalytic variational inclusions", Positivity, 12(3) :525-533,2008.*

[14] ***H.BREZIS****, "Analyse fonctionnelle : Théorie et application", Masson Paris New York Barcelon SaoPaulo, 1987.*

[15] ***J.F.Bonnans****, "Local analysis of Newton-type methods for variational inequalities and nonlinear programming", Appl. Math. Optim. 29, n(2) :161-186, 1994.*

[16] ***J.-P. Aubin and H. Frankowska****, "Set-Valued Analysis", Birkhäuser, Boston, 1990.*

[17] ***M.H.Geoffroy, S. Hilout, and A. Piétrus****, "Acceleration of convergence in Dontchev's iterative method for solving variational inclusions", Serdica Math. J,29 : 45-54, 2003.*

[18] ***N.BOCCARA****, "Analyse Fonctionnelle : une introduction pour physiciens", Paris (1984).*

[19] ***R.L.Burden and J.D.Faires****, "Numerical Analysis", Seventh Edition, 2001.*

[20] ***S. BURNET****, "Méthodes de résolution d'inclusions variationnelles sous hypothèses de stabilité", Thèse de doctorat de l'université des antilles et de la guyane,30 octobre 2012.*

[21] ***S. M. Robinson****, "Strongly regular generalized equations", Math. Oper. Res. 5 :43-62, 1980.*

[22] ***R. T. Rockafellar and J.B. Wets****, "Variational Analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1997.*

[23] ***S. Burnet and A. Pietrus****, "Local analysis of a cubically convergent method for variational inclusions", Applicationes Mathematicae,38 (2) :183-191, 2011.*