RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MEDEA

FACULTÉ DES SCIENCES



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de :

Master en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par :

Asmaa Moudoud
Fairouz Nouar

Thème

RESOLUTION DE L'EQUATION DKP A (1+1) DIMENSIONS EN PRESENCE D'UNE CERTAINE CLASSE DE POTENTIELS

Soutenu publiquement, le ../../...., devant le jury composé de:

RADJAI Missoum	MCA	Université de Médéa	Président
ZITOUNI Hannachi	Professeur	Université de Médéa	Examinateur
DEKAR Liès.	MCA	Université de Médéa	Examinateur
LANGUEUR Omar	MCB	Université de Médéa	Encadreur
AMARI..Malika..	MCB	Université de Médéa	Co-Encadreur

Année universitaire 2020 / 2021

ملخـــــــص :

في هذا العمل ،قمنا بحل معادلة DKP في وجود كمون من نوع كولوم ، وحددنا وظائف الموجة بطريقة تحليلية بحتة ، والتي كانت في شكل دالة ويتاكر ، حيث استخدمنا شروط الاستمرارية للحصول على طيف الطاقة ، ثم حددنا مستوى الطاقة الأساسي وقمنا بتمثيلها بيانيا لقيم مختلفة من العوامل (a,V_0).

Résumé

Dans ce travail, nous avons résolu l'équation **DKP** en présence d'un potentiel de type Coulombien, nous avons déterminé les fonctions d'ondes de manière analytique pure, qui était sous la forme de la fonction de **W**hittaker, où nous avons utilisé les conditions de continuité pour obtenir le spectre d'énergie, puis nous avons déterminé le niveau d'énergiefondamentale et le représenté graphiquement pour différentes valeurs des facteurs (a, V_0).

Summary

In this work, we solved the DKP equation in the presence of a Coulomb-type potential, we determined the wave functions in a pure analytic way, which was in the form of the Whittaker function, where we used the conditions of continuityto obtain the energy spectrum, then we determined the fundamental energy level and represented graphically for different values of the factors (a, V_0).

Remerciement

Nous remerçions notre encadreur Dr.Langueur.O pour ses efforts, l'enseignant
Dr.Bouchachia.K pour ses conseils
et tous les enseignants qui nous ont dirigés durant notre cursus universitaire, spéciales
remerciements aux chercheurs qui
eclairent le monde par la lumière de la science.

Dédicace

At the outset, I would like to extand special thanks to my generous family, especially my dear parents for thier support
during my academic journey, I also want to thank everyone who stood by my side and helped me even a little bit.Finally
I salute my Hasband, dear niece Mariem and the little angel Arwa.
Fairouz Nouar

To my kind family , my wonderful friends , to those who see me beautiful and to everything I sow and see beauty in.
Asmaa Moudoud

Table des Matières

I Présentation de l'équation DKP et son Algèbre **9**

0.1 Notations et conventions 10

0.2 L'équation **DKP** 10

0.3 Vérification de quelques propriétés des matrices β^i 11

0.4 La densité de caurant 14

0.5 Résolution de l'équation **DKP** de spin 0 en présence d'un potentiel scalaire $V(z)$ 15

0.6 Les conditions de continuité: 17

II Application: **19**

1 Résolution de l'équation DKP de spin 0 en présence d'une marche de potentiel et une masse constante : **20**

1.1 Introduction 20

1.2 Résolution de l'équation **DKP** de spin 0: 20

1.3 Coéfficients de transmission et de réflexion 23

1.4 Résultats numériques 24

2 La solution de l'équation DKP de spin 0 pour un potentiel sous forme coulombien **27**

2.1 Introduction 27

2.2 Résolution de l'équation **DKP** de spin 0 27

2.3 Le spèctre de l'énergie: 34

2.4 Niveau d'énergie de l'état fondamental $n = 0$: 35

2.5 Annex A 38

2.6 Les propiétes des fonctions spéciales utilisées dans les calculs 38

2.6.1 L'équation de Whittaker 38

2.6.2 L'équation de Kummer 40
2.6.3 Les solutions standards 40
2.6.4 Les fonctions hypergéométriques 40
2.7 Annex B 41
Introduction

Introduction:

Au début du **20** ^{ème} siècle, la physique connaissait une révolution , lorsque les chercheurs pensaient que les sciences physiques sont mortes et finis, et le scientifique anglais **W**illiam **T**homson (**B**aron **K**elvin) disait qu'il ne reste rien à inventer dans la physique sauf des calculs plus précises, [1]. **A**lbert **E**instein, et en **1905** ,inventait la relativité restreinte avant la relativité générale en **1915**. Quelques années plus tard, **B**ohr et autres chercheurs inventaient la mécanique quantique. Il était nécessaire de trouver une relation entre ces deux théories et la mécanique quantique relativiste était parmi ces éssaies .

La mécanique quantique relativiste unifie les postulats de la mécanique quantique non-relativiste et le principe de la relativité restreinte [2]. Dans la mécanique quantique, l'équation de Schrodinger est une équation de base. Elle a été inventée par **E**rwin **S**chrodinger (**1887-1961**) en **1926.** Cette équation satisfait la fonction d'onde associée à une particule quantique ponctuelle non- relativiste pour une particule de masse m plongée dans un potentiel V [2].

Dans la mécanique quantique relativiste, l'équation de **K**lein **G**ordon définit les particules de spin 0, elle est de premier ordre pour le temps et de deuxième ordre dans l'espace. **O**skar **K**lein (**1894-1977**), **W**alter **G**ordon (**1893-1939**) et **V**ladimir **F**ock (**1898-1974**) sont les fondateurs de cette équation, mais Schrodinger était le premier qui la dérivait dans sa quête de l'équation qui porte désormais son nom [2], en **1925**.

En **1928**, **D**irac a introduit une équation d'une forme linéaire pour traiter les problèmes posés par l'équation de **K**lein-**G**ordon. Comme l'a fait remarquer **D**irac en **1927**, la source des problèmes de l'équation de **KG** était due à la présence de dérivées du second ordre par rapport au temps. L'idée de **D**irac a été de reformuler l'équation de **K**lein-**G**ordon de telle sorte qu'elle fasse apparaitre une dérivée du premier ordre à la fois pour le temps et les coordonnées d'espace.

Le succès qui a connu l'équation de **D**irac [3] dans la déscription relativiste des particules de spin 1/2, motivais certains chercheurs pour tenter de trouver une équation d'onde du premier ordre similaire à celle de **D**irac et décrit les particules de spin 0 et 1à la fois. Cette équation est appelée l'équation **DKP**. Elle a été adaptée d'après l'équation de **K**lein-**G**ordon-**F**ock

et l'équation de **P**roco qui décrit les particules de spin 1.

Cette équation a été inventée dans les années **30**. Elle a été adaptée son nom d'après trois scientifiques qui l'ont développée pendant des périodes différentes, l'américain **R**ichard **J**ames **D**uffin (**1909-1996**), le russe **N**icholas **K**emmer (**1911-1998**) et le français **G**elbert **P**etiau (**1935-2020**).Cette équation possède une forme covariante similaire à celle de **D**irac où les matrices γ sont remplacées par les matrices β de **K**emmer. Ces matrices peuvent être de dimension (5×5) lorsque la particule est scalaire et de dimension (10×10) s'il s'agit d'un boson vectoriel massif.

D'après **V**.**Y**a **F**ainberg et **B**.**M**.**P**imentel [4], le développement de l'équation **DKP** par rapport à son équivalence avec l'équation de **K**lein **G**ordon connait trois périodes, la première depuis **1939** jusqu'à **1970**, dans cette période la plupart des travaux concernant l'équation **DKP** ont été concentrés sur le développement du formalisme de **DKP** et à l'enquête de l'interaction des particules chargées avec le champ électromagnétique. Pendant la deuxième période qui est les années **70**, les chercheurs découvraient la violation de la parité et la théorie de modèle standard, sous cette information, la formalisme **DKP** donne dans certains cas des résultats différents à celles de **K**lein-**G**ordon [5, 6, 7]. Dans la troisième période, depuis **1980** jusqu'au début du **21** ^{ème} siècle. La majorité des scientifiques pensent qu' il n'ya aucune équivalence entre l'équation **DKP** et l'équation **KG**.Portant il y'a quelques autres chercheurs qui pensent de cet équivalence dans certains cas spéciaux pour un spin 0.

Partie I

Présentation de l'équation DKP et son Algèbre

0.1 Notations et conventions

Toutes les éxpressions figurantes dans ce manuscrit seront écrites en considérant

$$\hbar = c = 1$$

Tenseur métrique, indices covariants et contravariants:

La métrique dans l'éspace-temps est une métrique pseudo-euclidienne, définie au moyen du tenseur métrique g de signe $(+---)$:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Le quadrivecteur champ électromagnétique s'écrit: $A = (V; A)$ avec $V = V(r; t)$ désigne le potentiel scalaire, et $A = A(r; t)$ désigne le potentiel vecteur.

L'opérateur gradient s'écrit:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right).$$

Avec

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

et

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu = (\partial t + ieV, \nabla - ieA).$$

0.2 L'équation DKP

L'équation **DKP** est une extension du formalisme covariante de **D**irac [8], aux particules scalaires de spin 0 et véctorielles de spin1., le système qui décrit l'équation **DKP** et l'équation de **D**irac , est appellé le système de **B**habha, qui est sous la forme suivante:

$$(i\partial_\mu \alpha^\mu - \chi)\psi(x, t) = 0. \tag{2}$$

Avec χ représente la masse , et α^μ sont quatre matrices décrivants les propriétés de spin de la particule[8]

l'équation **DKP** décrivant les particules de spin 0 et 1 intéragissant avec un champ électromagnétique A^{μ} est décrite par l'équation suivante :

$$[\, i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) - m]\, \psi(x,t) = 0. \tag{3}$$

Les matrices β possèdent trois représentations irréductibles, la triviale de dimension 0; et celles de dimensions $[(5 \times 5)\ \text{et}\ (10 \times 10)]$; respectivement les représentations de spin $s = 0$ et $s = 1$[8, 9, 10]

Elles génèrent l'algèbre **DKP** :

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\lambda} + \beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\mu} = g^{\mu\nu}\beta^{\lambda} + g^{\nu\lambda}\beta^{\mu}. \tag{4}$$

Ces matrices sont trouvés pour satisfaire les identités suivantes [4, 8, 9, 10]

$$(\beta^{i})^{3} = \beta^{i}, \tag{5}$$

$$\beta^{i}(\beta^{j})^{2} + (\beta^{j})^{2}\beta^{i} = \beta^{i}, i \neq j, \tag{6}$$

$$\beta^{i}\beta^{j}\beta^{k} + \beta^{k}\beta^{j}\beta^{i} = 0, i \neq j, k \neq j. \tag{7}$$

Et contrairement aux matrices des algèbres de spin $\frac{1}{2}$, tel que l'algèbre de **D**irac, elles possèdent la propriété des algèbres de spin entier, celle d'être non inversible.On choisit une représentation pour les β^{j} dans laquelle $\beta^{k+} = -\beta^{k}$; et $\beta^{0+} = \beta^{0}$; et on écrit pour le spin 0

$$\beta^{0} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \rho^{i} \\ -\rho_{T}^{i} & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

Avec

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

0.3 Vérification de quelques propriétés des matrices β^{i}

Pour

$$\mu = \nu = \lambda = 0, \tag{10}$$

donc

$$\beta^0\beta^0\beta^0 + \beta^0\beta^0\beta^0 = g^{00}\beta^0 + g^{00}\beta^0 \Rightarrow \tag{11}$$

$$2(\beta^0)^3 = 2\beta^0 \quad \text{car} \quad g^{00} = 1. \tag{12}$$

Vérification

$$(\beta^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow, \tag{13}$$

$$(\beta^0)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

et

$$2(\beta^0)^2(\beta^0) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\beta^0, \tag{16}$$

Alors

$$\left(\beta^0\right)^3 = \beta^0. \tag{17}$$

Pour

$$\mu = \nu = \lambda = 1, \tag{18}$$

donc

$$\begin{aligned}\beta^1\beta^1\beta^1+\beta^1\beta^1\beta &= g^{11}\beta^1+g^{11}\beta^1 \Rightarrow,\\ 2(\beta^0)^3 &= -2\beta^1 \quad \text{car} \quad g^{11}=-1,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\beta^1=\begin{pmatrix}0 & \rho^1\\ -\rho^1_T & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$(\beta^1)^2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$2(\beta^1)^3=2\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=-2\beta^1, \tag{22}$$

Alors

$$\left(\beta^1\right)^3=-\beta^1. \tag{23}$$

Pour

$$\mu=0,\nu=1,\lambda=2, \tag{24}$$

$$\beta^0\beta^1\beta^2+\beta^2\beta^1\beta^0=g^{01}\beta^2+g^{12}\beta^0, \tag{25}$$

$$\beta^0\beta^1\beta^2+\beta^2\beta^1\beta^0=\beta^0\beta^1\beta^2+\beta^0\beta^2\beta^1=\beta^0\beta^1\beta^2-\beta^0\beta^1\beta^2=0. \tag{26}$$

On a

$$g^{01}=g^{12}=o. \tag{27}$$

Pour

$$\mu=2,\nu=0,\lambda=1, \tag{28}$$

$$\beta^2\beta^0\beta^1 + \beta^1\beta^0\beta^2 = g^{20}\beta^1 + g^{01}\beta^2, \tag{29}$$

$$\beta^2\beta^0\beta^1 = -\beta^1\beta^0\beta^2 \quad \text{car} \quad g^{20} = g^{01} = 0. \tag{30}$$

0.4 La densité de caurant

A partir de L'équation de continuité de **DKP** [11], on peut tirer l'éxpression de la densité de courant suivante:

$$\partial_u J^u = 0, \tag{31}$$

Où

$$J^\mu = \bar{\psi}\beta^\mu\psi. \tag{32}$$

où

$$\bar{\psi} = \psi^+(2\beta_0^2 - 1), \tag{33}$$

$$\bar{\psi} = \psi^+\eta_0. \tag{34}$$

Avec

$$\eta_0 = (2\beta_0^2 - 1). \tag{35}$$

$$\eta_0 = (2\beta_0^2 - 1) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

Lorsque le potentiel est selon l'axe z, l'éxpréssion de la densité de courant devient:

$$J^3 = \bar{\psi}\beta^3\psi. \tag{37}$$

Donc la densité de courant s'écrit:

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & 0 & 0 & \phi_5^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & 0 & 0 & -\phi_5^* \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\bar{\psi}\beta^3 = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & 0 & 0 & -\phi_5^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_5^* & 0 & 0 & 0 & -\phi_1^* \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$J^3 = \bar{\psi}\beta^3\psi = \begin{pmatrix} -\phi_5^* & 0 & 0 & 0 & -\phi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_5 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Alors

$$J^3 = -(\phi_5^*\phi_1 + \phi_1^*\phi_5). \tag{41}$$

0.5 Résolution de l'équation DKP de spin 0 en présence d'un potentiel scalaire $V(z)$

Soient des particules de spin 0 intéragissants avec un poentiel $v(z)$, l'équation **DKP** est unidimensionnelle $(1+1)$ pour les bosons se déplacent dans un potentiel scalaire s'écrit:

$$\left[i\beta^0(\frac{\partial}{\partial t} + iev(z)) + i\beta^3\frac{\partial}{\partial z} - m \right] \psi(z,t) = 0 \ . \tag{42}$$

La solution stationnaire de l'équation 42 est de la forme suivante :

$$\psi(z,t) = e^{-iEt}\phi(z). \tag{43}$$

L'équation 42 devient:

$$\left[i\beta^0(\frac{\partial}{\partial t}+iev\left(z\right))+i\beta^3\frac{\partial}{\partial z}-m\right]\ e^{-iEt}\phi(z)=0\ ,$$
$$\Rightarrow\left[\ i\beta^0(E-ev\left(z\right))+i\beta^3\frac{\partial}{\partial z}-m\right]\phi(z)=0\ . \tag{44}$$

Décomposant la fonction d'onde $\phi\left(z\right)$ selon un vecteur de dimension(5×1) comme suit

$$\phi\left(z\right)^T=\left(\begin{array}{ccccc}\phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5\end{array}\right). \tag{45}$$

On aura:

$$\left[\left(\begin{array}{ccccc}0 & (E-ev) & 0 & 0 & 0\\ (E-ev) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{ccccc}0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)-m\right]\left(\begin{array}{c}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\end{array}\right)=0, \tag{46}$$

$$\left[\left(\begin{array}{ccccc}0 & (E-ev\left(z\right)) & 0 & 0 & -i\frac{\partial}{\partial z}\\ (E-ev\left(z\right)) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\end{array}\right)-m\left(\begin{array}{c}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\end{array}\right)\right]=0. \tag{47}$$

On obtient le système d'équations suivant:

$$\left\{\begin{array}{c}(E-ev)\phi_2-i\frac{\partial}{\partial z}\phi_5-m\phi_1=0\\ (E-ev)\phi_1-m\phi_2=0\\ -m\phi_3=0\\ -m\phi_4=0\\ i\frac{\partial}{\partial z}\phi_1-m\phi_5=0\end{array}\right.\ . \tag{48}$$

Alors

$$\begin{cases} (E-ev\,(z))\phi_2 - i\dfrac{\partial}{\partial z}\phi_5 - m\phi_1 = 0 \\ \phi_2 = \dfrac{(E-ev\,(z))}{m}\phi_1 \\ \phi_3 = \phi_4 = 0 \\ \phi_5 = \dfrac{i}{m}\dfrac{\partial}{\partial z}\phi_1 \end{cases} \Rightarrow , \tag{49}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(E-eV)}{m} \\ \dfrac{i}{m}\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \otimes \phi_1 \ . \tag{50}$$

On découple le système d'équations précédant, on obtient:

$$(E-ev)\frac{(E-ev\,(z))\phi_1}{m} - i\frac{\partial}{\partial z}(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial z}\phi_1) - m\phi_1 = 0 \Rightarrow , \tag{51}$$

$$\frac{(E-ev\,(z))^2}{m}\phi_1 + \frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_1 - m\phi_1 = 0 \ . \tag{52}$$

Où bien:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (E-ev\,(z))^2 - m^2)\phi_1 &= 0, \\ &\Rightarrow \quad O_{KG}\phi_1 = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Tel que O_{KG} est l'opérateur de **K**lein-**G**ordon.

0.6 Les conditions de continuité:

Dans cette section, nous allons déterminer les bonnes conditions aux limites de marche de potentiel pour $z = 0$ [11]. Pour trouver les conditions adéquates, nous choisissons la condition qui satisfait l'équation **KG** l'équation (53). Ensuite, nous devons l'imposer et sa dérivée comme des conditions de continuité qui suivent

$$\phi_1(0)^+ = \phi_1(0)^- \text{ et } \frac{d\phi_1(0)^+}{dz} = \frac{d\phi_1(0)^-}{dz}. \tag{54}$$

En utilisant les conditions l'équation (54) et l'équation 50 , on obtient

$$\begin{pmatrix} \phi_1(0_+) \\ \phi_2(0+) \\ \phi_5(0+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E-eV_0}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(0_-) \\ \phi_2(0_-) \\ \phi_5(0_-) \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Partie II

Application:

Chapitre 1

Résolution de l'équation DKP de spin 0 en présence d'une marche de potentiel et une masse constante :

1.1 Introduction

Le choix de ce potentiel en raison de qu'il soit le plus simple possible [10, 11], il permet de décrire divers systèmes physiques en première approximation. Alors, il permet de résoudre l'équation **DKP** sous sa forme la plus simple.

1.2 Résolution de l'équation DKP de spin 0:

Ce potentiel est décrit mathématiquement comme suit:

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ v_0 & \text{si} \quad z > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous pouvons le représenter graphiquement comme suit

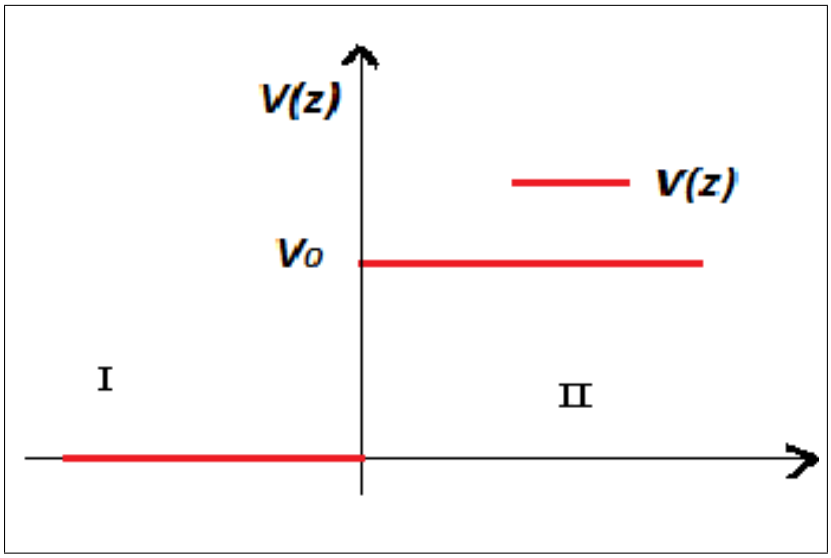


Figure-1- Evolution de l'nergie potentiellle lectrique $v\,(z)$ en fonction de z.

- Les solutions de l'équation DKP pour la région **I** $(v_I = 0)$

L'équation 53 devient:

$$(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (E^2 - m^2))\phi_1 = 0. \tag{1.2}$$

Cette équation est une équation différentielle d'ordre deux de la forme

$$y'' + r^2 y = 0. \tag{1.3}$$

Elle admet une solution de la forme $\phi_1\,(z) = c\exp\,(ik_1 z)$, son équation caractéristique est de la forme

$$\begin{aligned} -k_1^2 + (E^2 - m^2) &= 0, \\ \Rightarrow \quad k_1 &= \sqrt{E^2 - m^2}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Alors , la solution générale prend la forme:

$$\phi_1 = c_1 e^{ik_1 z} + c_2 e^{-ik_1 z}. \tag{1.5}$$

Telles que c_1, c_2 sont des constantes réelles.

Et les autres spineurs s'éxpriment comme suit:

$$\phi_2 = \frac{E}{m}\phi_1 \Rightarrow \phi_2 = \frac{E}{m}(c_1 e^{ik_1 z} + c_2 e^{-ik_1 z}), \tag{1.6}$$

$$\phi_5 = \frac{i}{m}\frac{d}{dz}\phi_1 \Rightarrow \phi_5 = -\frac{k_1}{m}\left[c_1 e^{ik_1 z} - c_2 e^{ik_1 z}\right]. \tag{1.7}$$

La solution générale donc s'écrit:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{k_1}{m} \end{pmatrix} c_1 e^{ik_1 z} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{m} \end{pmatrix} c_2 e^{-ik_1 z}. \tag{1.8}$$

- solutions de l'équation DKP dans la région **II** $(v_{II} = v_0)$.

$$(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (E - ev_0)^2 - m^2)\phi_1 = 0. \tag{1.9}$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrite comme suit:

$$\phi_1 = c_3 e^{ik_2 z} + c_4 e^{-ik_2 z}. \tag{1.10}$$

Tels que

$$(k_2)^2 = (E - ev_0)^2 - m^2 \Rightarrow k_2 = \sqrt{(E - ev_0)^2 - m^2}. \tag{1.11}$$

Est comme l'onde se propage de $(-\infty)$ vers $(+\infty)$, l'onde réflichie n'éxiste plus dans la deuxieme région donc la solution générale s'éxprime comme suit

$$\phi_1 = c_3 e^{ik_2 z}.$$

Et les autres composants sont de la forme:

$$\phi_2 = \frac{E}{m}\phi_1 \Rightarrow \phi_2 = \frac{E - ev_0}{m} c_3 e^{ik_2 z}, \tag{1.12}$$

$$\phi_5 = \frac{i}{m}\frac{d}{dz}\phi_1 \Rightarrow \phi_5 = -\frac{k_2}{m} c_3 e^{ik_2 z}. \tag{1.13}$$

La solution génerale de l'équation DKP s'écrit

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{E - ev_0}{m} \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{k_2}{m} \end{pmatrix} c_3 e^{ik_2 z}. \tag{1.14}$$

1.3 Coéfficients de transmission et de réflexion

Pour calculer les coéfficients de transmission et réflexion T et R, il faut appliquer les conditions de continuité au borne du potentiel c-à-d à $z = 0$, pour la fonction d'onde $\phi_1(0_-) = \phi_1(0_+)$ et sa dérivée $\dfrac{\partial \phi_1(0_-)}{\partial z} = \dfrac{\partial \phi_1(0_+)}{\partial z}$.Comme nous l'avons vu au paravantdans le chapitre 1 l'équation 54.

Donc on obtient le système d équations suivant:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_3, \\ ik_1(c_1 - c_2) = ik_2 c_3. \end{cases} \tag{1.15}$$

Qui est reécrit en fonction de c_3 comme suit:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k_2 + k_1}{2k_1} c_3 \\ c_2 &= \frac{k_1 - k_2}{2k_1} c_3 \end{aligned}$$

D'après la défénition des coéfficients de transmission et de réflexion nous écrivons:

$$T = \frac{J_{tran}}{J_{inc}}, \tag{1.16}$$

$$R = \frac{J_{ref}}{J_{inc}}. \tag{1.17}$$

A partir de l'équation 41 la densité de courant s'écrite:

$$J_{tran} = -(\phi_5^* \phi_1 + \phi_1^* \phi_5) = \tag{1.18}$$

$$-\left(-\frac{k_2}{m} c_3\right)^* e^{-ik_2 z} \times c_3 e^{ik_2 z} + (c_3)^* e^{-ik_2 z} \times \left(-\frac{k_2}{m} c_3\right) e^{ik_2 z} = -\frac{k_2}{m} |c_3|^2 . \tag{1.19}$$

De la mème façon on tire les valeurs de la densité de courantJ_{ref} et J_{inc} :

$$J_{ref} = -\frac{k_1}{m}\left|c_2\right|^2, \tag{1.20}$$

$$J_{inc} = -\frac{k_1}{m}\left|c_1\right|^2. \tag{1.21}$$

Alors, les expressions finales des coéfficients de transmission et réflexion sont données comme suit:

$$R = \frac{J_{ref}}{J_{inc}} = \left|\frac{c_2}{c_1}\right|^2 \Rightarrow \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2, \tag{1.22}$$

$$T = \frac{J_{tran}}{J_{inc}} = \frac{k_2}{k_1}\left|\frac{c_3}{c_1}\right|^2 \Rightarrow \frac{4k_2k_1}{(k_2 + k_1)^2}. \tag{1.23}$$

On remaque toujours que la charge est conservée parceque

$$R + T = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 + \frac{4k_2k_1}{(k_2 + k_1)^2} = 1.$$

1.4 Résultats numériques

On peut tracer l'évolution des coéfficients de transmission et de réflexion pour différentes valeurs de l'énrgie totale E , ou bien pour une valeur constante de E et un potentiel V_0 varié. On obtient les graphes suivants:

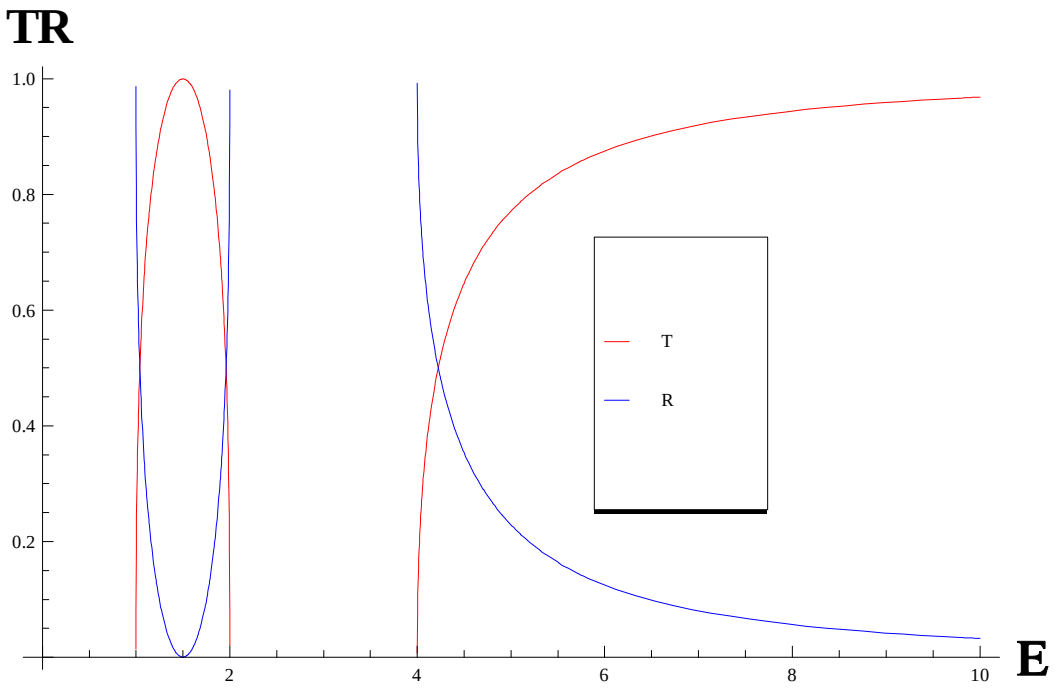


Figure-2- Le graphe illustre le comportement des coefficients de transmission et de rflexion (T, R) pour diffrentes valeurs de l'nergies E avec $e = 1, v_0 = 3, m = 1$.

On observe deux pics de transmission par effet tunnel à100% , pour $E > v_0$ on observe aussi l'absence de transmission au début, et à partir d'une certaine valeur de l'énergie, le coefficient de transmission augmente sous la forme d'une fonction exponentielle et attent une valeur max qui est 1.

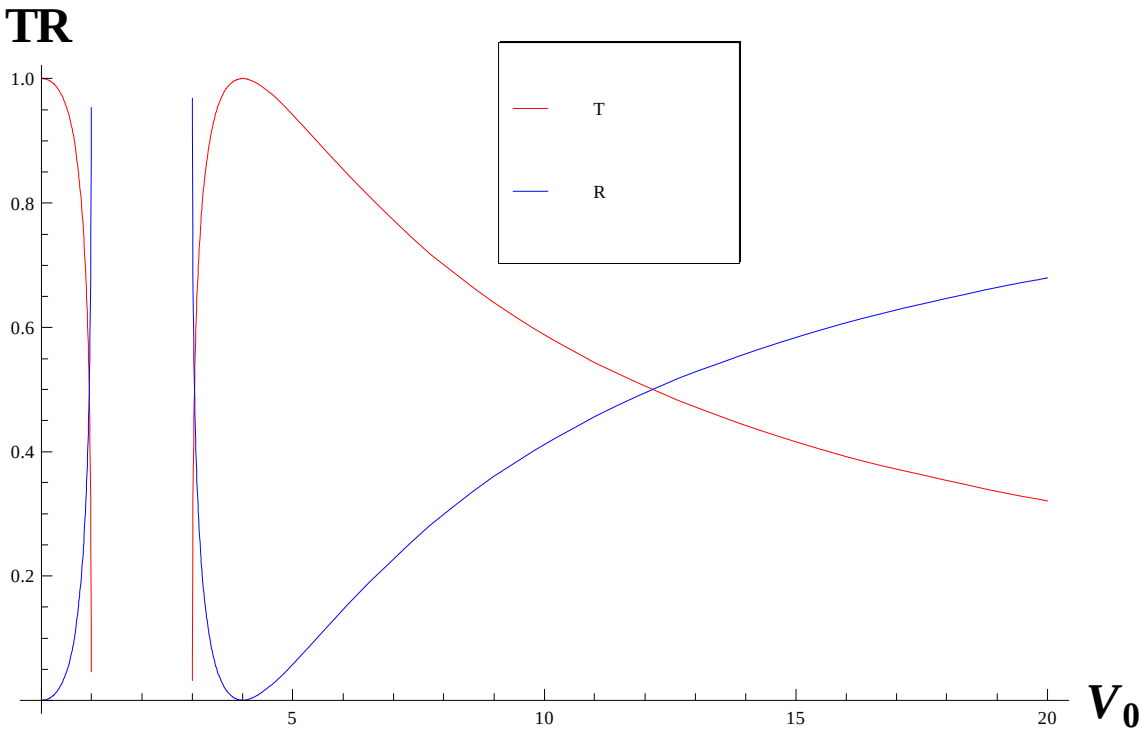


Figure-3- Le graphe illustre le comportement du coefficients de transmission est de rflexion (T, R) pour diffrentes valeurs d'nergies v_0 avec $e = 1$, $E = 2$, $m = 1$.

On observe un pic de transmission par effet tunnel à100%, pour $v_0 > E$ Le coefficient de transfert diminue à partir de son maximum sous la forme d'une fonction exponentielle

Chapitre 2

La solution de l'équation DKP de spin 0 pour un potentiel sous forme coulombien

2.1 Introduction

Le but de choisir ce potentiel est qu'il est très similaire au l'intérêt du potentiel Morse[12, 13, 14, 15]. Ce dernier est une fonction empirique qui décrit l'énergie potentielle de la liaison covalente dans une molécule diatomique. Puisque nous pouvons obtenir une version quantique explicite en l'intégrant dans l'équation de **S**chrodinger.[16]

2.2 Résolution de l'équation DKP de spin 0

Ce potentiel est définit comme suit

$$v(z) = \begin{cases} -\dfrac{v_0}{2}\exp\left(\frac{z}{a}\right) & \text{si} \quad z < 0 \\ -\dfrac{v_0}{2}\exp\left(\frac{-z}{a}\right) & \text{si} \quad z > 0 \end{cases}$$

Où a est une constante qui modifie la forme de la courbe de potentiel $v\,(z)$, et $(V_0/2 > 0)$ représente la hauteur du potentiel , nous pouvons le représenter graphiquement comme suit:

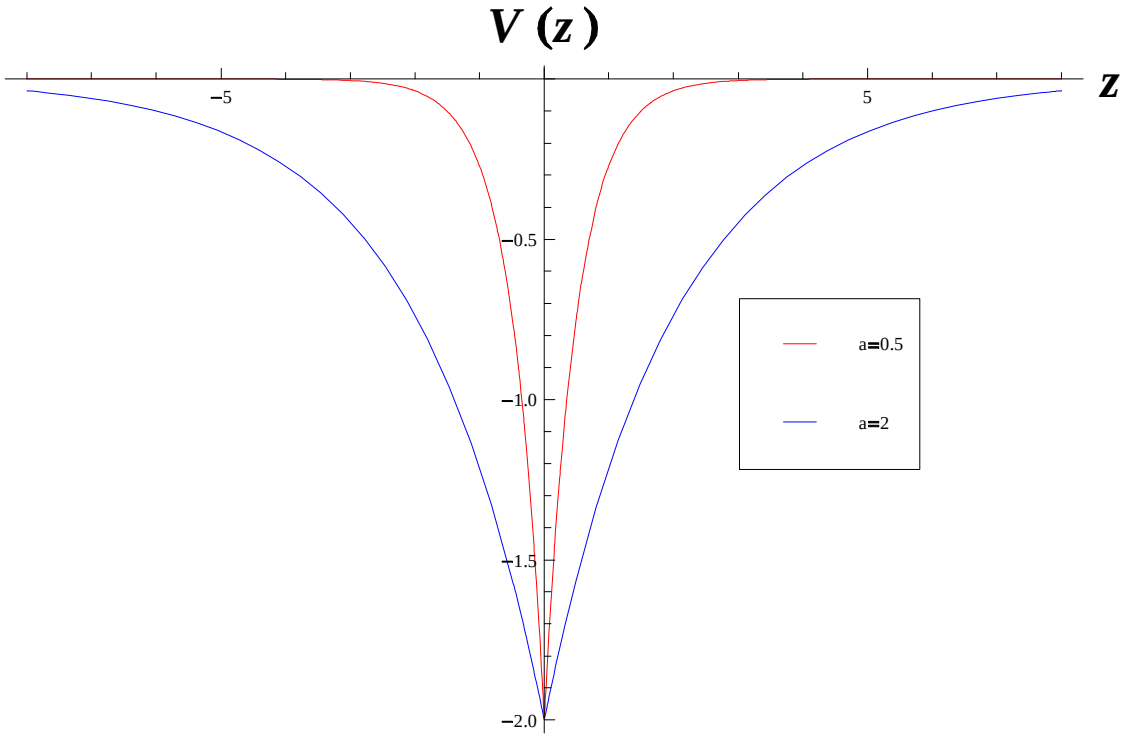


Figure-4- Le graphe reprsente la variation d'un potentiel sous forme coulombien pour differentes valeurs de a.

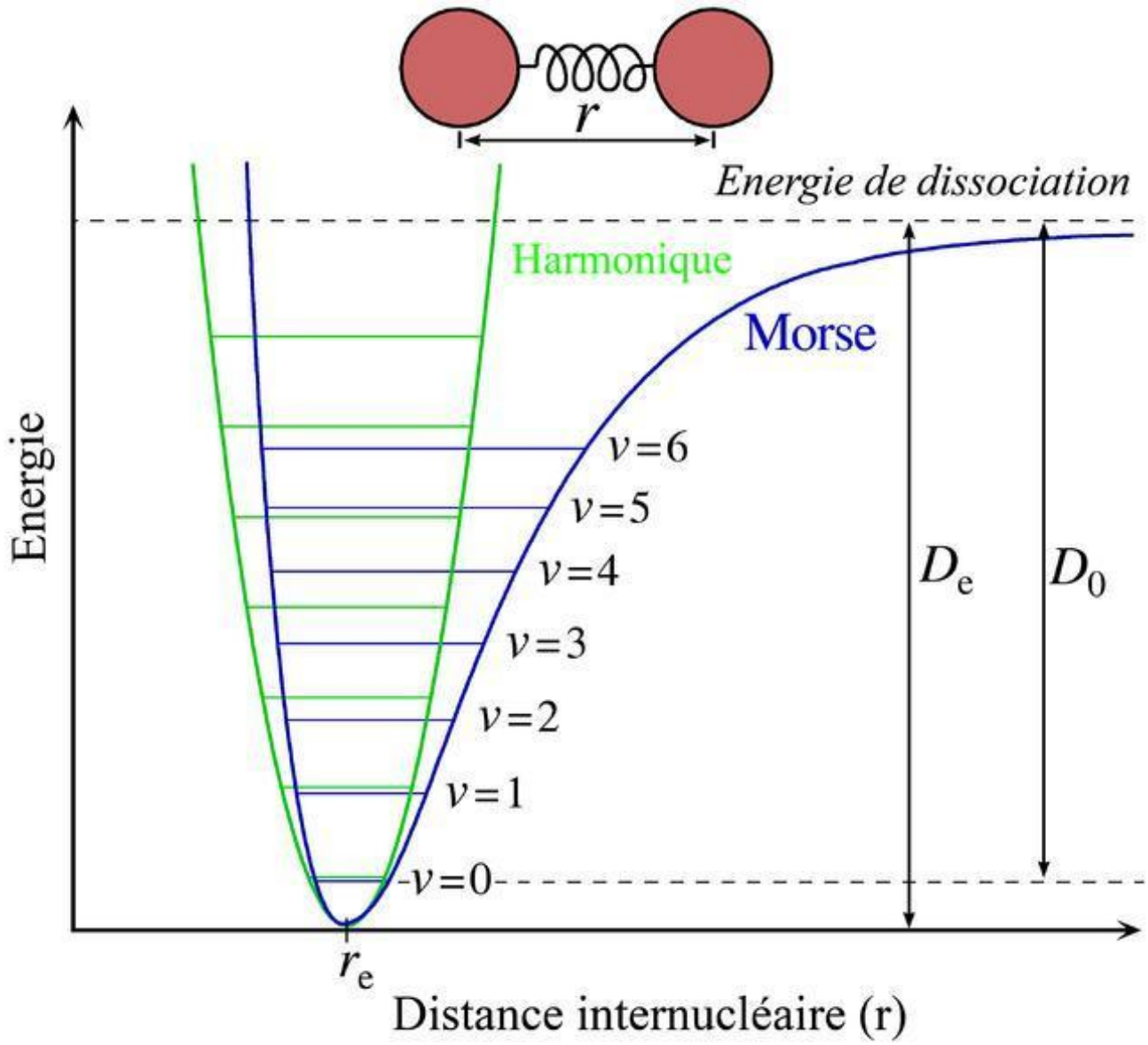


Figure-5- Le graphe reprsente le potentiel de Morse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Potentiel_de_Morse

- La solution pour $z > 0$

D'après l'équation 53 dans le chapitre 1 on a:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + [E - ev(z)]^2 - m^2\right] \phi_1 = 0 \Rightarrow , \tag{2.1}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + E^2 - 2Eev(z) + (ev(z)^2) - m^2\right] \phi_1 = 0. \tag{2.2}$$

On fait le changement de variable suivant , $y = \exp\left(-\frac{z}{a}\right)$ tel que:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{a}y\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi = \frac{1}{a^2}\left[y\frac{\partial \phi}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right] \end{cases} . \tag{2.3}$$

L'équation 2.2 devient:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (E)^2 - Eev_0 y + \frac{e^2 v_0}{4}y^2 - m^2\right]\phi_1 = 0 , \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_1 + \left(E^2 - m^2\right)\phi_1 - Eev_0 y\phi_1 + \frac{e^2 v_0}{4}y^2\phi_1 = 0 . \tag{2.5}$$

Remplaçant l'équation 2.3 dans l'équation 2.2 on obtien le résultat suivant:

$$\frac{1}{a^2}y^2\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2}y\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \left[\frac{e^2 v_0}{4}y^2 - Eev_0 y + E^2 - m^2\right]\phi_1 = 0. \tag{2.6}$$

On vas essayer d'écrire la fonction d'onde sous la forme $\phi_1(y) = y^r\Phi(y)$, tel que r est un réel bien diterminé:

Tel que

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi_1(y) = \frac{\partial}{\partial y}y^r\Phi(y) = ry^{r-1}\Phi + y^r\frac{\partial}{\partial y}\Phi, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_1(y) = y^r\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi + 2ry^{r-1}\frac{\partial}{\partial y}\Phi + (r^2 - r)y^{r-2}\Phi. \tag{2.8}$$

Remplaçant l'équations 2.7 et 2.8 dans l'équation 2.6 qui s'écrit comme suit:

$$\begin{array}{c} \frac{1}{a^2}y^2\left[y^r\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + 2ry^{r-1}\frac{\partial}{\partial y}\psi + (r^2 - r)y^{r-2}\psi\right] \\ +\frac{1}{a^2}y\left[ry^{r-1}\psi + y^r\frac{\partial}{\partial y}\psi\right] + \left[\frac{e^2 v_0^2}{4}y^2 - Eev_0 y + E^2 - m^2\right]y^r\psi(y) = 0 \end{array} , \tag{2.9}$$

et qui devient:

$$\frac{1}{a^2}y^2y^r\left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + 2ry^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\psi + y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\psi + [(r^2 - r)y^{-2} \\ +ry^{-2} + a^2\frac{e^2 v_0^2}{4} - a^2 Eev_0 y^{-1} + a^2(E^2 - m^2)y^{-2}\Big]\psi \end{array}\right] = 0. \tag{2.10}$$

Le terme $\frac{1}{a^2}y^2y^r$ n'est pas toujours nul, alors.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + 2ry^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\psi + y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\psi + ((r^2-r)y^{-2} \\ +ry^{-2} + a^2\frac{e^2v_0^2}{4} - a^2Eev_0y^{-1} + a^2(E^2-m^2)y^{-2})\psi \end{array} , \tag{2.11}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + y^{-1}((2r+1)\frac{\partial}{\partial y}\psi + \left(r^2y^{-2} + a^2\frac{e^2v_0^2}{4} - a^2Eev_0y^{-1} + a^2(E^2-m^2)y^{-2}\right)\psi = 0 \tag{2.12}$$

Cherchant la valeur de r qui conduit à l'annulation du coéfficient de la première dérivée $\frac{\partial}{\partial y}\psi$ dans l'équation 2.12

Donc

$$(2r+1) = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

L'équation 2.12 devient

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \left[\frac{1}{4}y^{-2} + a^2\frac{e^2v_0^2}{4} - a^2Eev_0y^{-1} + a^2(E^2-m^2)y^{-2}\right]\psi = 0 , \tag{2.14}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \left[\frac{\frac{1}{4} + a^2(E^2-m^2)}{y^2} - \frac{a^2Eev_0}{y} + a^2\frac{e^2v_0^2}{4}\right]\psi = 0 , \tag{2.15}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \left[\frac{\frac{1}{4} - a^2(m^2-E^2)}{y^2} + i^2\frac{a^2Eev_0}{y} - i^2a^2\frac{e^2v_0^2}{4}\right]\psi = 0 . \tag{2.16}$$

On utilise la notation suivante pour simplifier:

$$q = \sqrt{E^2-m^2},\ g = iv_0ae. \tag{2.17}$$

On obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \left[\frac{\frac{1}{4} - a^2q^2}{y^2} + \frac{iaEg}{y} - \frac{g^2}{4}\right]\psi = 0. \tag{2.18}$$

On fait un autre changement de variable tel que $\omega = gy$, telque

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\omega}.\frac{\partial\omega}{\partial y} = g\frac{\partial\psi}{\partial\omega}, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(g\frac{\partial\psi}{\partial\omega}) = g^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}. \tag{2.20}$$

L'équation 2.18 s'écrit:

$$g^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}+g^2\left[\frac{\left[\frac{1}{4}-a^2q^2\right]}{\omega^2}+\frac{iEa}{\omega}-\frac{1}{4}\right]\psi=0\Rightarrow, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}+\left[\frac{\frac{1}{4}-q^2a^2}{\omega^2}+\frac{iEa}{\omega}-\frac{1}{4}\right]\psi(\omega)=0\ . \tag{2.22}$$

On obtient une équation différentielle de la forme suivante

$$[\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}+(\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{\omega^2}+\frac{k}{\omega}-\frac{1}{4})]\psi(\omega)=0. \tag{2.23}$$

Avec

$$\mu=aq,\ k=iaE.$$

Cette équation appellée l'équation de **W**hittaker,.admet deux solutions indépendentes linéaires , et elles sont éxprimées comme suit [17]

$$M_{k,w}(w)=e^{\frac{-\omega}{2}}\omega^{\mu+\frac{1}{2}}M(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,\omega), \tag{2.24}$$

$$W_{k,w}(w)=e^{\frac{-\omega}{2}}\omega^{\mu+\frac{1}{2}}U(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,\omega). \tag{2.25}$$

La solution générale de cette équation s'éxprime comme suit

$$\psi = A_1e^{\frac{-\omega}{2}}\omega^{\mu+\frac{1}{2}}M(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,\omega)+A_2e^{\frac{-\omega}{2}}\omega^{\mu+\frac{1}{2}}U(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,\omega), \tag{2.26}$$

$$\phi = A_1y^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-\omega}{2}}\omega^{\mu+\frac{1}{2}}M(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,\omega)+A_2y^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-\omega}{2}}\omega^{\mu+\frac{1}{2}}U(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,\omega) \tag{2.27}$$

La solution en fonction de la variable y s'écrit:

$$\phi_1=A_1e^{\frac{-gy}{2}}(g)^{\mu+\frac{1}{2}}y^{\mu}M(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,gy)+A_2(g)^{\mu+\frac{1}{2}}y^{\mu}e^{\frac{-gy}{2}}U(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,gy).$$

Le comportement de la fonction d'onde au borne du potentiel, lorsque($z\to+\infty$ ou $y\to0$), on a

$$\lim_{y\to0}U(\mu-k+\frac{1}{2},1+2\mu,gy)=\text{infinité complexe} \tag{2.28}$$

Comme la limite est imaginaire, la solution n'a aucun aspect physique, alors en garde uniquement la deuxième solution

$$\phi_1 = A_1 e^{\frac{-gy}{2}} (g)^{\mu+\frac{1}{2}} y^{\mu} M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, gy). \tag{2.29}$$

La solution générale de $\phi_+(z)$ en fonction de la variable z s'écrit

$$\begin{aligned}
\phi_{1+} &= A_+(iv_0a)^{\mu+\frac{1}{2}} \\
&\quad \exp\left(\frac{-iv_0a}{2}e^{\frac{-z}{a}} - qz\right) M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{-z}{a}}), \qquad (2.30) \\
\phi_{2+} &= \frac{(E-ev)}{m} A_+(iv_0a)^{\mu+\frac{1}{2}} \\
&\quad \left[\exp\left(\frac{-iv_0a}{2}e^{\frac{-z}{a}} - qz\right) M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{-z}{a}})\right], \qquad (2.31) \\
\phi_{5+} &= \frac{iA_+(iv_0a)^{\mu+\frac{1}{2}}}{m} \exp\left(\frac{-iv_0a}{2}e^{\frac{-z}{a}} - qz\right) \\
&\quad \begin{bmatrix} (\frac{g}{2}e^{\frac{-z}{a}} - q)M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{-z}{a}}) \\ -\frac{\alpha}{\beta}iv_0e^{\frac{-z}{a}}M(\mu - k + \frac{3}{2}, 2 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{-z}{a}}) \end{bmatrix}. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

- Pour $z < 0$

A cause de la symétrie du potentiel en peut tirer la solution generale de $\phi_-(z)$à partir de la solution précédente, nous changerons seulement z par $-z$

$$\begin{aligned}
&\phi_{1-} = A_-(iv_0a)^{\mu+\frac{1}{2}} \\
&\exp\left(\frac{-iv_0a}{2}e^{\frac{z}{a}} + qz\right) M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{z}{a}}), \qquad (2.33) \\
\phi_{2-} &= \frac{(E-ev)}{m} A_+(iv_0a)^{\mu+\frac{1}{2}} \\
&\quad \left[\exp\left(\frac{-iv_0a}{2}e^{\frac{z}{a}} + qz\right) M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{z}{a}})\right], \qquad (2.34) \\
\phi_{5-} &= \frac{iA_-(iv_0a)^{\mu+\frac{1}{2}}}{m} \exp\left(\frac{-iv_0a}{2}e^{\frac{z}{a}} + qz\right) \\
&\quad \begin{bmatrix} (\frac{-g}{2}e^{\frac{z}{a}} + q)M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{z}{a}}) \\ +\frac{\alpha}{\beta}iv_0e^{\frac{z}{a}}M(\mu - k + \frac{3}{2}, 2 + 2\mu, iv_0ae^{\frac{z}{a}}) \end{bmatrix}. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

2.3 Le spèctre de l'énergie:

Pour déterminer le spèctre de l'énergie on va appliqué les conditions de continuitié de la fonction d'onde et sa dérivée que nous avons vu au premier chapitre à $z = 0$

$$\begin{aligned}&\phi_{1+}(0) = \phi_{1-}(0)\\ &\Rightarrow A_+(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{-g}{2}) = A_-(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{-g}{2}) \,.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Alors

$$\begin{aligned}A_+ &= A_-,\\ \frac{d\phi_{1+}(0)}{dz} &= \frac{d\phi_{1-}(0)}{dz}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

D'après la référence [17] on a:

$$\frac{dM(\alpha,\beta,z)}{dz} = \frac{\alpha}{\beta} M(\alpha+1,\beta+1,z]. \tag{2.38}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_{1+}}{dz} &= A(g)^{\mu+\frac{1}{2}} (\frac{g}{2} e^{\frac{-z}{a}} - \frac{\mu}{a}) \exp(\frac{-g}{2a} e^{\frac{-z}{a}} - \frac{\mu z}{a}) M(\alpha,\beta,g e^{\frac{-z}{a}})\\ &\quad + A(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{-g}{2} e^{\frac{-z}{a}} - \frac{\mu z}{a}) (\frac{\alpha}{\beta}\frac{-g}{a}) e^{\frac{-z}{a}} M(\alpha+1,\beta+1,g e^{\frac{-z}{a}}) \,,\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_{1+}}{dz} = A(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{g}{2} e^{\frac{-z}{a}} - \frac{\mu z}{a}) [(\frac{g}{2a} e^{\frac{-z}{a}} - \frac{\mu}{a}) M(\alpha,\beta,g e^{\frac{-z}{a}}) - \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a} e^{\frac{-z}{a}} M(\alpha+1,\beta+1,g e^{\frac{-z}{a}})]. \tag{2.40}$$

Avec

$$\alpha = \mu - k + \frac{1}{2} \quad \text{et} \qquad \beta = 1 + 2\mu$$

De la mème façon pour $\phi_{1-}(z)$:

$$\frac{d\phi_{1-}}{dz} = A(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{-g}{2} e^{\frac{z}{a}} + \frac{\mu z}{a}) [(\frac{-g}{2a} e^{\frac{z}{a}} + \frac{\mu}{a}) M(\alpha,\beta,g e^{\frac{-z}{a}}) + \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a} e^{\frac{z}{a}} M(\alpha+1,\beta+1,g e^{\frac{z}{a}})]. \tag{2.41}$$

Donc à $z = 0$

$$A(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{g}{2}) [(\frac{g}{2a} - \frac{\mu}{a}) M(\alpha,\beta,g) - \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a} M(\alpha+1,\beta+1,g)] = , \tag{2.42}$$

$$A(g)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp(\frac{-g}{2}) [(\frac{-g}{2a} + \frac{\mu}{a}) M(\alpha,\beta,g) + \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a} M(\alpha+1,\beta+1,g) \,. \tag{2.43}$$

$$\Rightarrow (\frac{g}{2a} - \frac{\mu}{a})M(\alpha,\beta,g) - \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a}M(\alpha+1,\beta+1,g) = , \tag{2.44}$$

$$(\frac{-g}{2a} + \frac{\mu}{a})M(\alpha,\beta,g) + \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a}M(\alpha+1,\beta+1,g)\ . \tag{2.45}$$

Qui conduit à l'expression suivante:

$$2\frac{\alpha}{\beta}\frac{-g}{a}M(\alpha+1,\beta+1,g) = 2(\frac{g}{2a} + \frac{\mu}{a})M(\alpha,\beta,g)\ , \tag{2.46}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}\frac{g}{a}M(\alpha+1,\beta+1,g) = (\frac{g}{2a} + \frac{\mu}{a})M(\alpha,\beta,g)\ . \tag{2.47}$$

Alors

$$\frac{M(\alpha+1,\beta+1,g)}{M(\alpha,\beta,g)} = \frac{(\frac{iv_0}{2} - \sqrt{m^2-E^2})\left(1+2a\sqrt{m^2-E^2}\right)}{iv_0(a\sqrt{m^2-E^2} + iaE + \frac{1}{2})}. \tag{2.48}$$

2.4 Niveau d'énergie de l'état fondamental $n = 0$:

L'expréssion génerale de la fonction confluente Hypèrgeométrique [17] est

$$M(a,b,z) = \sum \frac{(a)_n}{(b)_n n!}z^n = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)2!}z^2 + ... + \frac{a(a+1).....(a+n)}{b(b+1).....(b+n)\,n!}z^n. \tag{2.49}$$

Pour l'état fondamental $n = 0$

$$M(\alpha+1,\beta+1,g) = M(\alpha,\beta,g) = 1.$$

Alors

$$\frac{\left(\frac{iv_0}{2} - \sqrt{m^2-E_0^2}\right)\left(1+2a\sqrt{m^2-E_0^2}\right)}{iv_0\left(a\sqrt{m^2-E_0^2} - iE_0a + \frac{1}{2}\right)} = 1. \tag{2.50}$$

Pour obtenir les valeurs d'énergie en utilisant le programme Mathématica , l'évolution de l'énergie fondamentale E_0 en fonction des paramètres (v_0, a)est présentée sur la figure si-dessuous.

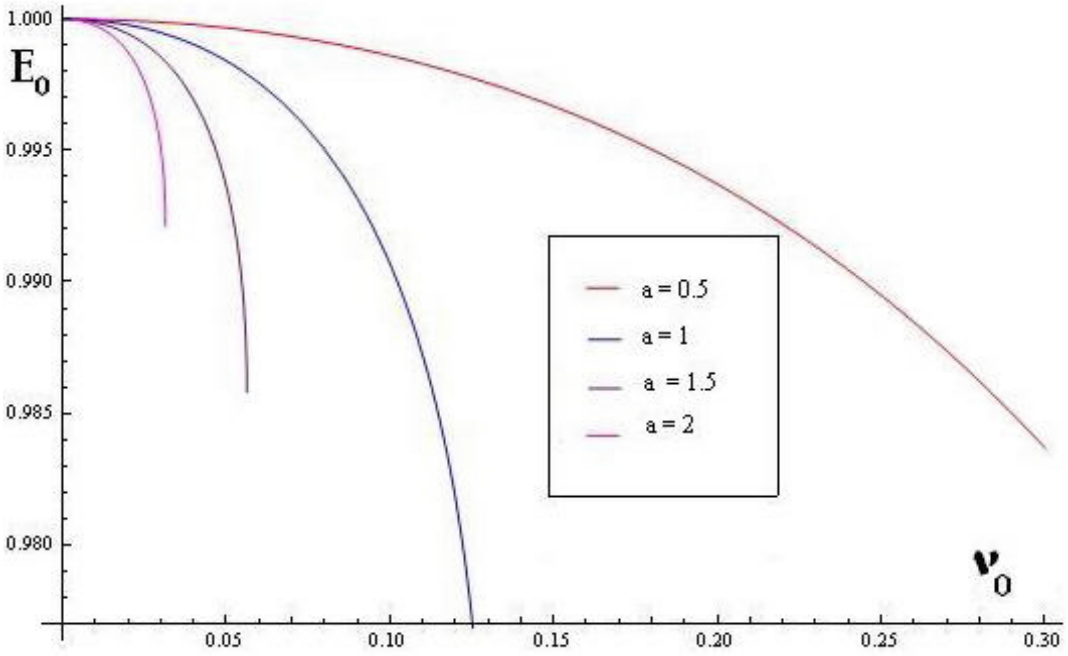


Figure-6- Le graphe reprsente la variation de l'nergie fondamentale E_0 en fonction de v_0 avec des valeurs difftentes de a

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons résolu l'équation **DKP** en présence de certaine formes de potentiel pour spin 0 avec une masse constante.

Dans le premier chapitre, nous avons résolu l'équation **DKP** en présence d'un potentiel scalaire $v(z)$ qui est l'expression de base pour résoudre l'équation **DKP**. Nous avons défini l'algèbre **DKP** et les propriétés des matrices β, puis nous avons vérifié l'expression de l'algèbre **DKP** en utilisant les propriétés des matrices β.[8, 9, 10].

Dans le deuxième chapitre, nous avons résolu cette équation dans le cas d'une marche de potentiel avec une masse constante, nous avons trouvé cinq solutions avec deux solutions nules.

Nous avons calculé les densités de courant, puis les coefficients de transmission T et de réflexion R. A partir de ces résultats nous avons conclue qu'il y a une conservation de charge, et enfin nous avons traçé les courbes de R et T en fonction de E et v_0.

Au troisième chapitre , nous avons résolu l'équation **DKP** à la présence de potentiel de type coulombien, nous avons trouvé cinq solutions, apporté des changements de variables pour obtenir l'équation de **W**hitaker, et nous l'avons résolue. Après avoir utilisé les termes de continuité pour trouver la relation du spectre d'énergie. Nous avons injecté cette relation dans le programme Mathematica pour obtenir les expressions d'énergie en fonction des paramètres v_0 et a. Enfin, nous avons utilisé le même programme afin de tracer les courbes d'énergie fondamentale E_0 en fonction de v_0 et pour différentes valeurs de a.

2.5 Annex A

2.6 Les propiétes des fonctions spéciales utilisées dans les calculs

2.6.1 L'équation de Whittaker

$$[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} + \frac{k}{z} - \frac{1}{4})]\omega = 0 \tag{2.51}$$

Cette équation a été obtenue d'après l'équation de **K**ummer avec les substitutions

$$\omega = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu}, k = \frac{1}{2}a - b \text{ et } \mu = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$$

Elle a une singularité régulière pour la région concernant des indices $\frac{1}{2} \mp \mu$ et une singularité irrégulaire à l'infinité

Les solutions standards

$$M_{k,z}(z) = e^{\frac{-z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} M(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, z) \tag{2.52}$$

$$W_{k,z}(z) = e^{\frac{-z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} U(\mu - k + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, z) \tag{2.53}$$

Et contrairement:

$$M(a, b, z) = e^{\frac{1}{2}z} z^{-\frac{1}{2}b} M(\frac{1}{2}b - a, \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}, 1)(z) \tag{2.54}$$

$$U(a, b, z) = e^{\frac{1}{2}z} z^{-\frac{1}{2}b} W(\frac{1}{2}b - a, \frac{1}{2}b - \frac{1}{2})(z) \tag{2.55}$$

Continuation analytiquece

$$M_{k,\mu}(ze^{\pm\pi i}) = \pm i e^{\pm\mu\pi i} M_{-k,\mu}(z) \tag{2.56}$$

$$M_{k,\mu}(ze^{2m\pi i}) = (-1)^m e^{2m\mu\pi i} M_{k,\mu}(z) \tag{2.57}$$

tel que m dans ce qui vient est un entier

$$W_{k,\mu}(ze^{2m\pi i}) = \frac{(-1)^{m+1} 2\pi i \sin(2\pi\mu m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - k)\Gamma(1 + 2\mu)\sin(2\pi\mu)} M_{k,\mu}(z) + (-1)^m e^{-2m\mu\pi i} W_{k,\mu}(z) \tag{2.58}$$

$$(-1)^m W_{k,\mu}(ze^{2m\pi i}) = -\frac{e^{2k\pi i}\sin(2m\mu\pi)+\sin((2m-2)\mu\pi)}{\sin(2\mu\pi)}W_{k,\mu}(z) \quad (2.59)$$

$$-\frac{\sin(2m\mu\pi)2\pi i e^{k\pi i}}{\sin(2\mu\pi)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-k)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-k)}W_{-k,\mu}(ze^{\pi i}) \quad (2.60)$$

Sauf lorsque $z=0$, chaque branche des fonctions $M_{k,\mu}(z)$, $\Gamma(2\mu+1)$ et $W_{k,\mu}(z)$ est entier dans k et μ .

Les formes limites

- Pour $z \to 0$

$$M_{k,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}(1+O(z)) \quad (2.61)$$

Avec $2\mu = -1,-2,-3...$, dans le cas lorsque $\frac{1}{2}-k\pm\mu = -n$, où n est un entier positif.

$$W_{\frac{1}{2}\pm\mu+n,\mu}(z) = (-1)^n(1\pm 2\mu)_n z^{\frac{1}{2}\pm\mu} + O(z^{\frac{3}{2}\pm\mu}) \quad (2.62)$$

Et dans tous les autres cas

$$W_{\frac{1}{2}\pm\mu+n,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-k)}z^{\frac{1}{2}\pm\mu} + O(z^{\frac{3}{2}-R\mu}) \quad (2.63)$$

Avec $R\mu \geqslant \frac{1}{2}, \mu \neq \frac{1}{2}$

$$W_{k,\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-k)}z^{\frac{1}{2}\pm\mu} + O(z\ln z) \quad (2.64)$$

$$W_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-k)}z^{\frac{1}{2}-\mu} + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-k)}z^{\frac{1}{2}+\mu}O(z^{\frac{3}{2}-R\mu}) \quad (2.65)$$

- Avec $0 \leqslant R\mu < \frac{1}{2}, \mu \neq \frac{1}{2} W_{k,O}(z) = -\frac{\sqrt{z}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)}(\ln z + \psi(\frac{1}{2}-k)+2\gamma) + O(z^{\frac{3}{2}}\ln z)$

- Pour $z \to \infty$

Sauf lorsque $\mu - k = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}...$(cas polynomials)

$$M_{k,\mu}(z) \sim \Gamma(1+2\mu)e^{\frac{1}{2}z}z^{-k}/\Gamma(1+\mu-k) \quad (2.66)$$

Aussi

$$W_{k,\mu}(z) \sim e^{\frac{1}{2}z}z^k \quad (2.67)$$

2.6.2 L'équation de Kummer

$$z\frac{d^2\omega}{dz^2} + (b-z)\frac{d\omega}{dz} - a\omega = 0 \tag{2.68}$$

Cette équation a une singularité régulaire pour la région concernant des indices a et $1-b$ et une singularité irrégulaire pour une infinité d'ordre 1. Il est possible de la regarder comme une infinité pour les équations différentielles hypergéométriques.

2.6.3 Les solutions standards

$$M(a,b,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} z^s = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}z^2 + ... + \frac{a(a+1)..... (a+n)}{b(b+1)..... (b+n)\, n!}z^n; \tag{2.69}$$

2.6.4 Les fonctions hypergéométriques

Une fonction hypergéométrique et parfois elle est sous le nom de fonction hypergéométrique de **G**auss. Elle est une fonction spéciale particulière dépendant de trois paramètres, s'éxprime sous la forme de la série hypergéométrique. La solution de l'équation de **K**emmer est une fonction hypergéométrique.

2.7 Annex B

Les images suivantes réprésentent les commandes qui nous avons utilisé dans Mathemathica pour obtenir les solutions et le graphe des spèctres d'énergie

La commande des solutions

$$q = \sqrt{1 - y^2}$$

$$r = 1 - \frac{(I g - a^2 q)(1 + 2 a q)}{2 I g \left(\frac{1}{2} + i a y + a q\right)}$$

```
NSolve[r == 0, y]
```

Un éxemple sur les solutions

$$\{y \to -\frac{}{a^2} + 0.5\sqrt{\left(\frac{1.\,g^2}{a^4} - \frac{1.\,(0.25\,a^2 - 2.\,a^4 + 1.\,g^2)}{a^4} + \frac{0.0833333\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)}{a^4} + (26.8783\,(0.00390625\,a^4 - 0.25\,a^6 + 1.\,a^8 + 0.03125\,a^2\,g^2 + 0.5\,a^4\,g^2 + 0.0625\,g^4))\Big/ \left(a^4\left(6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3 + \sqrt{(-4.\,(a^4 - 64.\,a^6 + 256.\,a^8 + 8.\,a^2\,g^2 + 128.\,a^4\,g^2 + 16.\,g^4)^3 + (6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3)^2)}\right)^{1/3}\right) + \frac{1}{a^4}0.0661417\left(6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3 + \sqrt{(-4.\,(a^4 - 64.\,a^6 + 256.\,a^8 + 8.\,a^2\,g^2 + 128.\,a^4\,g^2 + 16.\,g^4)^3 + (6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3)^2)}\right)^{1/3}\right) + 0.5\sqrt{\left(\frac{2.\,g^2}{a^4} - \frac{1.\,(0.25\,a^2 - 2.\,a^4 + 1.\,g^2)}{a^4} - \frac{0.0833333\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)}{a^4} - (26.8783\,(0.00390625\,a^4 - 0.25\,a^6 + 1.\,a^8 + 0.03125\,a^2\,g^2 + 0.5\,a^4\,g^2 + 0.0625\,g^4))\Big/ \left(a^4\left(6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3 + \sqrt{(-4.\,(a^4 - 64.\,a^6 + 256.\,a^8 + 8.\,a^2\,g^2 + 128.\,a^4\,g^2 + 16.\,g^4)^3 + (6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3)^2)}\right)^{1/3}\right) - \frac{1}{a^4}0.0661417\left(6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3 + \sqrt{(-4.\,(a^4 - 64.\,a^6 + 256.\,a^8 + 8.\,a^2\,g^2 + 128.\,a^4\,g^2 + 16.\,g^4)^3 + (6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,g^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 2.\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)^3)^2)}\right)^{1/3} + \left(0.25\left(\frac{16.\,g}{a^2} - \frac{8.\,g^2}{a^6} + \frac{8.\,g\,(0.25\,a^2 - 2.\,a^4 + 1.\,g^2)}{a^6}\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\left(\frac{1.\,g^2}{a^4} - \frac{1.\,(0.25\,a^2 - 2.\,a^4 + 1.\,g^2)}{a^4} + \frac{0.0833333\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2)}{a^4} + (26.8783\,(0.00390625\,a^4 - 0.25\,a^6 + 1.\,a^8 + 0.03125\,a^2\,g^2 + 0.5\,a^4\,g^2 + 0.0625\,g^4))\Big/ \left[a^4\left(6912.\,a^8\,g^2 + 1728.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\right]q^2 - 288.\,a^6\,(-1. + 4.\,a^2)\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) + 576.\,a^4\,g^2\,(a^2 - 8.\,a^4 + 4.\,g^2) +$$

La commande du graphe

```
Needs["PlotLegends`"]
a = 2.
T =
```

Bibliographie

[1] https://www.goodreads.com/author/quotes/5605433.William_Thomson

[2] Taillet, Richard. "Dictionnaire de physique." (2009).

[3] Boumali, Abdelmalek. "Solutions de l'Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour certaines formes d'interactions."(2006).

[4] Fainberg, V. Ya, and B. M. Pimentel. "On equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon equations." Braz J Phys 30 : 275-281, (2000).

[5] Krajcik RA and Nieto MM - Phys. Rev. D 10, 4049 (1974).

[6] Krajcik R A and Nieto M M 1977 Am. J. Phys. 45 818).

[7] Pimentel B M and Fainberg V Ya 2000 Teoret. Mat. Fiz.124 445.

[8] G. Petiau, Contribution a la theorie des equations d'ondes corpusculaires, Acad.Roy. Belg. Mem. Collect 16 (1936).

[9] R. Y. Duffin, On the characteristic matrices of covariant systems, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).

[10] N. Kemmer, The particle aspect of meson theory, Proc. R. Soc. A 173, 91 (1939).

[11] Langueur, Omar, and M. Merad. "Etude de la dynamique des particules relativistes en interaction avec une certaine classe des potentiels." (2020).

[12] L´opez and C. Rojas, Can. J. Phys., in press, 2020.

[13] Rao, Nagalakshmi A., B. A. Kagali, and Vijay Sivramkrishna. "Bound states of Klein–Gordon particles in scalar screened Coulomb potential." Int Jour Mod Phys A 17.31 4793-4799: (2002)

[14] Dominguez-Adame, F., & Rodriguez, A. A one-dimensional relativistic screened Coulomb potential. Phys Letts A, 198(4), 275-278 (1995).

[15] L´opez , Eduardo, and Clara Rojas. "Bound states of a Klein–Gordon particle in the presence of a smooth potential well." Int J Mod Phys A 35.23: 2050140, (2020).

[16] http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/morse/theorie_Morse.pdf

[17] Olver, Frank WJ, et al., eds. NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM. Cambridge university press, (2010).