République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et l'Informatique

MÉMOIRE DE MASTER

en mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Autour de la Domination Transversale Chromatique dans les graphes

Présenté

par

ABDELLATIF Fatma Zohra et BELLOULOU Selssabil

Soutenu publiquement devant le Jury composé de :

N. IKHLEF ESCHOUF	Professeur	U.Y.F-Médéa	Président
A. BENDALI-BRAHAM	MCB	U.Y.F-Médéa	Examinatrice
S. KOUIDER AÏAD	MAA	U.Y.F-Médéa	Examinatrice
A. BENKACI	MAA	U.Y.F-Médéa	Promoteur

Médéa, 24 – juin – 2024

Dédicace

Je dédie ce travail,

- *À mon cher père* ***Smain*** *et ma chère mère* ***Naima*** *qui sont si précieux à mon coeur, je vous dédie, non seulement ce travail, mais aussi toutes mes réussites présentes et à venir. Votre amour inconditionnel, votre soutien indéfectible et vos sacrifices immenses ont façonné la personne que je suis aujourd'hui.*
- *À mes chers frères* ***El houssine*** *et* ***El hassen*** *qui ont toujours souhaité me voir à la hauteur, je vous suis reconnaissante de tout ce que vous avez fait pour moi.*
- *À mon frère* ***Khaled*** *et ma belle-soeur* ***Chahinez****.*
- *À toute ma famille (famille* ***Abdellatif*** *et* ***Tchoketch-Kebir****).*
- *À mon intime amie* ***Meriem****, ma chère binôme* ***Selssabil*** *qui ma accompagné pour la préparation de ce mémoire, mes autres amies et mes collègues de la classe recherche opérationnelle promotion 2024, pour les beaux jours que nous avons passés ensemble.*
- *À ceux qui bravent les obstacles et maintiennent leur intégrité professionnelle, vous êtes une inspiration.*

Abdellatif Fatma zohra, juin - 2024.

Dédicace

Je dédie ce travail en signe de respect et de reconnaissance :

- *À celle qui a tout donné, tout sacrifié, à la femme qui règne sur mon cœur, "**Ma mère**".*
- *À celui qui m'a toujours dirigé, guidé, aidé et encouragé pour me voir affronter la vie avec sérénité et courage, à l'homme qui a toujours souhaité me voir à la hauteur, "**Mon père**".*
- *À ma sœur **Zineb**.*
- *À mes frères **Abdellatif**, **Okba** et **Mohamed**.*
- *À mes tantes **Hayat** et **Zahia**.*
- *À toute ma famille (famille **BELLOULOU** et **BEZIA**).*
- *À mon binôme **ABDELLATIF Fatma Zohra** et toute la classe Master 2, promotion 2024.*

Belloulou Selssabil, juin - 2024.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la Domination Chromatique Transversale (DCT) dans les graphes. Pour une χ-coloration de G donnée, un ensemble dominant chromatique transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble dominant $S \subseteq V(G)$ tel que S intersecte chaque classe de couleurs de G. Le nombre de domination chromatique transversale, noté $\gamma_{ct}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble de DCT de G. Dans notre travail, nous caractérisons la classe de graphes pour lesquels le nombre de DCT est égal à deux. Nous présentons aussi un exemple de graphe pour contredire l'énoncé d'un théorème trouvé dans la littérature concernant les graphes G vérifiant l'égalité $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.

Mots–clés : nombre chromatique, nombre de domination, nombre de domination chromatique transversale.

Abstract

In this report, we focus on Domination Chromatic Transversal (DCT) in graphs. For a given χ-coloring of a graph $G = (V, E)$. A dominating set $S \subseteq V(G)$ is said to be Domination Chromatic Transversal (DCT) set if it contains at least one vertex from each color class of G. The Domination Chromatic Transversal number, denoted $\gamma_{ct}(G)$ is the minimum cardinality taken over all DCT sets of G. In this work, we characterize the class of graphs for which the number of DCT is equal to two. We also present an example graph to contradict the statement of a theorem found in the literature concerning graphs G verifying the equality $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.

Keywords : chromatic number, domination number, domination chromatic transversal number.

Remerciements

Nous remercions ALLAH le Tout Puissant, pour nous avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail de recherche.

Nous tenons à remercier notre promoteur Monsieur A. BENKACI, enseignant à la faculté des sciences de l'université de Médéa, qui nous a encadré tout au long de ce mémoire et qui nous a fait partager ses idées et ses intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il nous a dépensés.

Nos vifs remerciements vont à notre enseignante à l'université de Médéa, Madame S. KOUIDER AÏAD d'avoir acceptée d'examiner notre travail, et aussi pour nous avoir fait partager ses connaissances durant toute la formation de Master Recherche Opérationnelle.

Nous remercions également, Madame A. BENDALI-BRAHAM, enseignante à l'université de Médéa, pour avoir acceptée d'éxaminer notre modeste travail.

Nous sommes très honorées par la présence au jury notre enseignant, Monsieur N. IKHLEF-ESCHOUF, Professeur à l'université de Médéa. Nous le remercions très sincèrement, d'avoir accepté d'être président du jury.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui ont contribué au succès de notre formation et qui nous ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Médéa, juin 2024

Table des matières

Page

Résumé i

Abstract ii

Remerciements iii

List of Figures v

Introduction 8

Chapitre

1 Généralités sur les graphes 11

1.1 Notions préliminaires sur les graphes 11

1.1.1 Graphe simple 11

1.1.2 Voisinage et Degré d'un sommet 12

1.1.3 Chaîne et Cycle 13

1.1.4 Stable et Clique 13

1.1.5 Distance, Excentricité, Diamètre, Rayon et Centre 14

1.1.6 Graphes isomorphes 14

1.2 Graphes particuliers 15

1.2.1 Sous-graphe et graphe partiel 15

1.2.2 Graphe biparti et biparti complet 17

1.2.3 Graphe régulier 19

1.2.4 Graphe planaire 19

1.2.5 Graphe scindé 20

1.3 Ensemble minimal(maximal) et minimum(maximum) . . 20

2 Coloration et Domination dans les graphes 22

2.1 Complexité de problèmes combinatoires 22
2.2 Coloration dans les graphes 24
2.2.1 Coloration propre des sommets et nombre chromatique 25
2.2.2 Bornes sur le nombre chromatique 27
2.2.3 Applications de la coloration 28
2.3 Domination dans les graphes 29
2.3.1 Ensemble dominant et nombre de domination 30
2.3.2 Bornes sur le nombre de domination 31
2.3.3 Autres paramètres de domination 32
2.3.4 Applications de la domination 33

3 Domination Chromatique Transversale (DCT) 35
3.1 Définitions et propriétés 35
3.2 Résultats existants sur la DCT 37
3.2.1 Bornes sur le nombre de DCT 37
3.2.2 Nombre de DCT de graphes particuliers . . 37
3.2.3 Graphes G avec $\gamma_{ct}(G) \in \{1, n-1, n\}$ 38
3.2.4 Graphes G avec $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$ 38
3.3 Nouveaux résultats sur la DCT 39
3.3.1 Borne inférieure pour le nombre de DCT . 39
3.3.2 Nombre de DCT du graphe de Petersen . . . 40
3.3.3 Caractérisation de graphes dont le nombre de DCT est égal à deux 41
3.3.4 Graphes G avec $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$ 43

Conclusion 45

Notations et Abréviations 47

Références 50

Liste des figures

1.1 Graphe simple d'ordre 6, et de taille 8. 12

1.2 Le cycle C_6 à gauche, et la chaîne P_6 à droite. 13

1.3 Graphe simple, Sous-graphe et Graphe partiel. 15

1.4 Le graphe C_5 et son complémentaire $\overline{C_5}$ 16

1.5 Graphes connexe et non connexe. 16

1.6 Le graphe complet K_5. 17

1.7 Le grahe $\overline{K_6}$. 17

1.8 Graphe biparti et le graphe biparti complet $K_{4,3}$. 18

1.9 L'étoile $K_{1,5}$. 18

1.10 La double étoile $S_{3,4}$. 18

1.11 Un arbre. 19

1.12 Graphe 4-régulier. 19

1.13 Graphe planaire. 20

1.14 Graphe scindé. 20

2.1 Classification des problèmes combinatoires. 24

2.2 Coloration propre des sommets de G. 26

2.3 Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$. 31

3.1 Exemple de graphe G, tel que $\chi(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$. 36

3.2 Graphe de Petersen. Les nombres désignent une coloration optimale des sommets. 41

Introduction

La Recherche Opérationnelle (RO) est une branche de mathématiques appliquées également liée à l'algorithmique et la théorie de la complexité. Son importance se justifie d'une part, par la grande difficulté des problèmes d'optimisation sous-jacents, et d'autre part par de nombreuses applications pratiques pouvant être modélisées sous la forme d'un problème d'optimisation afin de les résoudre dans différents secteurs de l'industrie. Un problème d'optimisation consiste à trouver la meilleure solution selon un objectif ou un critère donné.

La Théorie des Graphes (TG) est une branche de mathématiques traitant les relations entre les objets. Elle s'intéresse à modéliser et à résoudre des problèmes réels issus des domaines pratiques. Cette discipline a connu un essor considérable ces dernières années et a suscité un grand intérêt dans les milieux académiques. Les concepts de la coloration et de la domination dans les graphes jouent un rôle central dans la construction et le développement des modèles mathématiques permettant ainsi aux chercheurs de formuler des problèmes d'optimisation réels de nature combinatoire et de les résoudre.

Une *coloration propre* d'un graphe G est une fonction f associant à tout sommet v du graphe G, un entier $f(v)$ representant une couleur telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Le problème d'optimisation classique est de trouver une coloration avec un nombre de couleurs minimum. *Le nombre chromatique*,

noté $\chi(G)$ est le nombre minimum de couleurs utilisées pour colorier tous les sommets de G. Ce problème est $\mathcal{NP}$-Complet [11].

Un *ensemble dominant* d'un graphe G est un sous-ensemble D de l'ensemble V des sommets tel que tout sommet qui n'appartient pas à D possède au moins un voisin dans D. *Le nombre de domination*, noté $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G. Ce problème est $\mathcal{NP}$-Complet [11].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la Domination Chromatique Transversale (DCT) [8] dans les graphes. Un *ensemble dominant chromatique transversal* d'un graphe G est un ensemble dominant S tel que pour une coloration optimale c donnée du graphe G, l'ensemble S intersecte chaque classe de couleurs de c. *Le nombre de domination chromatique transversale*, noté $\gamma_{ct}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble de DCT de G.

Ce mémoire se décompose en une introduction générale et trois chapitres.

Le premier chapitre a pour vocation de présenter les notions préliminaires et les concepts de base relatifs à la théorie des graphes qui vont nous être utile tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons brièvement les notions de base liées à la complexité des problèmes de nature combinatoire, ensuite nous exposons le concept de la coloration propre et celui de la domination classique dans les graphes.

Dans le troisième chapitre, nous exposons d'abord la notion de la domination chromatique transversale (DCT) ainsi que quelques résultats importants qui ont été obtenus pendant l'étude du paramètre $\gamma_{ct}(G)$. Ensuite, nous présentons notre contribution qui se présente en la caractérisation de graphes pour lesquels le nombre de domination chromatique transversale est égal à deux. Nous présentons aussi un exemple de graphe pour contredire l'énoncé de la condition suffisante trouvée dans la littérature, concernant l'égalité $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.

Au final, le manuscrit se termine par une conclusion générale, et des perspectives de recherche envisagées.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base relatives à la théorie des graphes, ainsi que leurs notations mathématiques, qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire.

1.1 Notions préliminaires sur les graphes

Dans cette section, nous rappelons les définitions et les notations de base relevant de la théorie des graphes, afin que le lecteur puisse se familiariser avec la terminologie utilisée par la suite.

1.1.1 Graphe simple

Un graphe quelconque est noté $G = (V, E)$, où V est un ensemble des sommets, et E est un ensemble de paires des sommets appelées arêtes. L'ordre de G est le nombre de ses sommets noté $n = |V|$. La taille de G est le nombre de ses arêtes noté $m = |E|$. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet.

- Deux sommets u, v d'un graphe $G = (V, E)$ sont voisins ou adjacents s'ils ont au moins une arête qui les relie. Si $e = uv$ est une arête de G, alors u et v sont les extrémités de e, et e est dite incidente à u et v.

- Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont identiques.
- Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples.

Exemple 1.1 La Figure 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et $E(G) = \{x_0x_1, x_0x_3, x_0x_4, x_1x_2, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_4\}$.

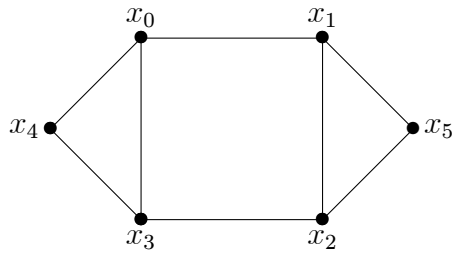


Figure 1.1 – Graphe simple d'ordre 6, et de taille 8.

1.1.2 Voisinage et Degré d'un sommet

On appelle voisinage ouvert d'un sommet u et noté $N_G(u)$, l'ensemble des sommets adjacents à u dans G. Le plus souvent, quand le contexte étant explicite, on notera simplement $N(u)$. Le voisinage fermé d'un sommet u désigne l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. On parle aussi d'un voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$ et noté $N(S)$, pour désigner l'union des voisinages ouverts des sommets de S. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de S est l'union des voisinages fermés des sommets de S, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$. Le voisinage privé d'un sommet $u \in S$ par rapport à S, noté $pn_G(u, S)$ (ou $pn(u, S)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets dans $N(S)$ ayant uniquement u pour voisin dans S, i.e. $pn(u, S) = N(S) - N(S \backslash \{u\})$. Si $v \in pn(u, S)$, alors on dit que v est un voisin privé de u par rapport à S.

On appelle degré d'un sommet v dans G noté $d_G(v)$, le nombre des arêtes de G incidentes à v.

Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$.

De même, le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$.

1.1.3 Chaîne et Cycle

- Une chaîne d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes de la forme $(v_0, e_0, v_1, ..., e_k, v_k)$, où k est un entier positif ou nul, les v_i Sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes de G tels que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. v_i et v_{i+1} sont extrémités de l'arête e_i. L'entier k est la longueur de la chaîne. Une chaîne est dite simple si elle ne contient pas deux fois une même arête. Elle est élémentaire si elle ne contient pas deux fois un même sommet. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n est une chaîne élémentaire.
- Un cycle est une chaîne telle que les extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues, il est noté C_n. Par exemple voir Figure 1.2.

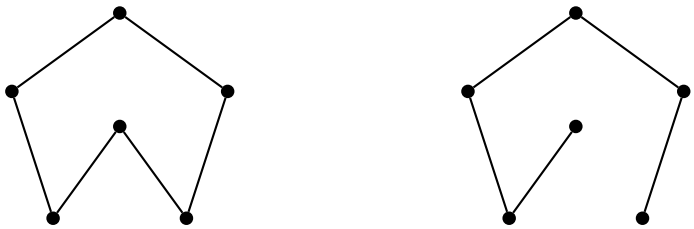


Figure 1.2 – Le cycle C_6 à gauche, et la chaîne P_6 à droite.

1.1.4 Stable et Clique

- Un ensemble stable S (ou ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents.

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance). On la désigne par $\alpha(G)$, tel que $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$.

- Une clique d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet.

Une clique maximum de G est une clique de cardinalité maximale. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique. On la désigne par $\omega(G)$.

1.1.5 Distance, Excentricité, Diamètre, Rayon et Centre

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et u et v deux sommets de V.

- La distance entre u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur de la chaîne la plus courte reliant u à v dans G.
- L'excentricité de v, notée $e(v)$ est définie par $e(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$.
- Un sommet v est appelé centre s'il satisfait $e(v) = \min\{\max\{d(v, w) : w \in V\}\}$ (c'est à dire, v est un sommet d'excentricité minimale dans G). Il est à noter qu'un centre n'est pas unique.
- Le diamètre $\text{diam}(G)$ et le rayon $r(G)$ d'un graphe G sont définis, respectivement, par $\text{diam}(G) = \max\{e(v) : v \in V\}$ et $r(G) = \min\{e(v) : v \in V\}$.

1.1.6 Graphes isomorphes

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes ($G \cong G'$) s'il existe une bijection f tel que $f : V \to V'$ préservant les relations d'adjacences entre les arêtes et assurant ainsi la correspondance des voisins pour chaque sommet. Autrement dit,

$$\forall x, y \in V,\ xy \in E \iff f(x)f(y) \in E'.$$

1.2 Graphes particuliers

Cette section est consacrée aux graphes particuliers. Les notions de sous-graphe, de graphe partiel et de graphe complémentaire, sont rappelées. Nous définissons aussi, les graphes biparti, régulier, planaire et scindé.

1.2.1 Sous-graphe et graphe partiel

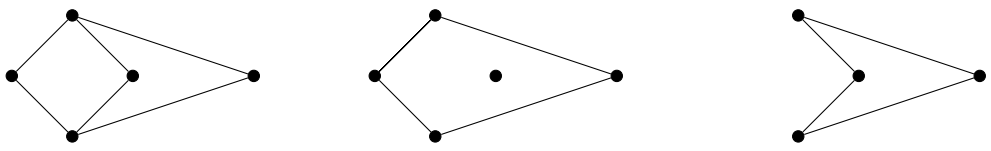
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Sous-graphe. On appelle sous-graphe de G, un graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous graphe induit par A, noté $G[A]$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans A.

Graphe H-libre (ou sans H). Soit H un graphe. G est dit H-libre (ou sans H), si H n'est pas un sous-graphe induit de G.

Graphe partiel. Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe $G_B = (V, B)$ dont l'ensemble d'arêtes est un sous-ensemble de $E(G) : E(G_B) \subseteq E(G)$.

Un exemple de graphe partiel et celui d'un sous-graphe, sont représentés dans la Figure 1.3



(a) Graphe G (b) Graphe partiel de G (c) Sous-graphe de G

Figure 1.3 – Graphe simple, Sous-graphe et Graphe partiel.

Graphe complémentaire. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe, noté $\overline{G}$ tel que $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$. Par exemple La Figure 1.4 représente un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

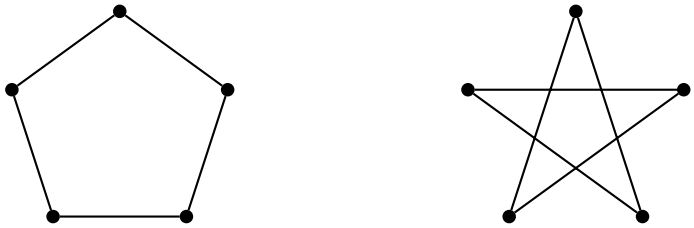
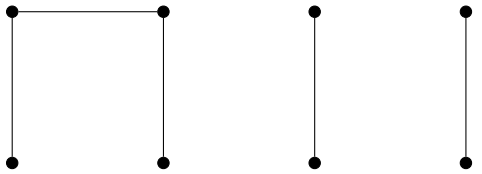


Figure 1.4 – Le graphe C_5 et son complémentaire $\overline{C_5}$

Graphe connexe. Un graphe G est dit connexe si pour toute paire des sommets distincts u et v de G est reliée par une chaîne. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal. Dans la Figure 1.5 a), le graphe G est connexe.



(a) Connexe (b) Non connexe

Figure 1.5 – Graphes connexe et non connexe.

Graphe complet. Un graphe G est dit complet si pour toute paire de sommets (x, y), il existe une arête qui les relient, (tous les sommets sont deux à deux adjacents). Un graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe, le degré de chaque sommet est égal à $n - 1$. La Figure 1.6 représente le K_5.

Graphe discret. Un graphe discret est un graphe sans arêtes. La Figure 1.7 représente le graphe discret $\overline{K_6}$.

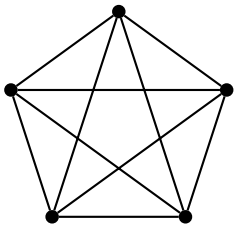


Figure 1.6 – Le graphe complet K_5.

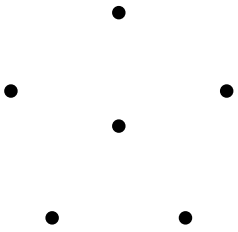


Figure 1.7 – Le grahe $\overline{K_6}$.

1.2.2 Graphe biparti et biparti complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si V se décompose en deux sous ensembles stables V_1 et V_2. Un graphe biparti complet est un graphe biparti telle que tous les sommets disons, de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$. La Figure 1.8 représente un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{4,3}$.

Étoile. Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = t$, $(t \geq 1)$ est appelé une étoile, il est noté $K_{1,t}$. Le sommet x de V_1 est appelé sommet central de l'étoile. La Figure 1.9 représente une étoile $K_{1,5}$.

Double étoile. Une double étoile est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant les deux sommets centraux x et y des étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$, elle se note aussi $S_{p,q}$, $(1 \leq p \leq q)$. La Figure 1.10 représente la double étoile $S_{3,4}$.



(a) Graphe biparti (b) Graphe biparti complet

Figure 1.8 – Graphe biparti et le graphe biparti complet $K_{4,3}$.

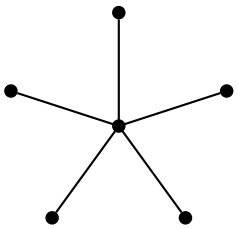


Figure 1.9 – L'étoile $K_{1,5}$.

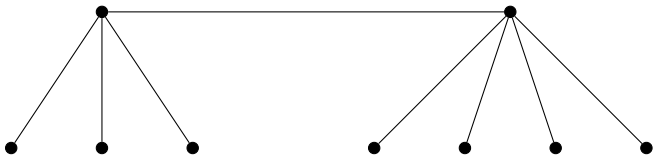


Figure 1.10 – La double étoile $S_{3,4}$.

Arbre. Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes, et il est noté T. La Figure 1.11 représente un arbre.

1.2.3 Graphe régulier

Un graphe est dit régulier si tous ses sommets ont le même degré, c'est à dire : $\forall u, v \in V(G)$, $d_G(u) = d_G(v)$. En plus, nous avons $\delta(G) = \Delta(G)$. Prenons par

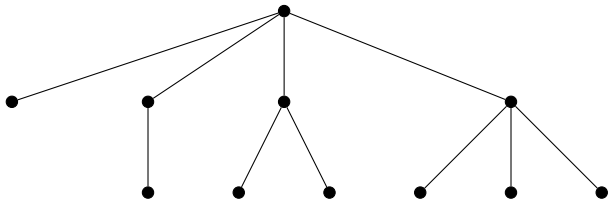


Figure 1.11 – Un arbre.

exemple le graphe représenté dans la Figure 1.12. Le graphe G est un graphe 4-régulier.

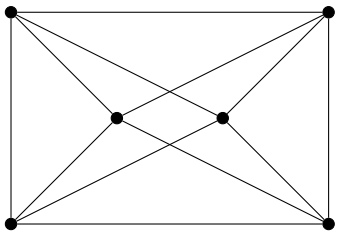


Figure 1.12 – Graphe 4-régulier.

1.2.4 Graphe planaire

Un graphe planaire est un graphe qui peut être dessiné sur un plan sans que ses arêtes se croisent. En d'autres termes, imaginez que vous dessinez le graphe sur une feuille de papier, si aucune ligne ne se superpose, le graphe est planaire. La Figure 1.13 représente un graphe planaire.

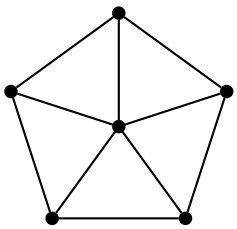


Figure 1.13 – Graphe planaire.

1.2.5 Graphe scindé

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe scindé, en anglais "split graph" s'il existe une partition de $V = S \cup K$ telle que S est un stable et K est une clique. Par exemple la Figure 1.14 représente un graphe scindé.

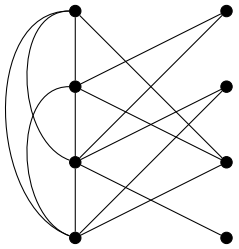


Figure 1.14 – Graphe scindé.

1.3 Ensemble minimal(maximal) et minimum(maximum)

Dans cette section, nous exposons la notion de minimalité et de maximalité d'un sous-ensemble par rapport à une propriété donné.

Soient $G = (V, E)$ un graphe, et P une propriété.

- On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une proprité P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp.$B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie P.
- On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $|A| > |B|$ (resp.$|B| > |A|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

Chapitre 2

Coloration et Domination dans les graphes

Les concepts de la coloration et la domination sont très étudiés dans le domaine de la recherche opérationnelle depuis une dizaine d'années pour ses caractéristiques théoriques et ses applications dans le monde industriel en général.

Dans ce chapitre, nous débutons par une présentation d'un résumé concis sur la complexité des problèmes combinatoires, puis nous rappelons les définitions de base sur la coloration et la domination dans les graphes, où des exemples illustratifs liés à chaque concept sont aussi présentés. Ensuite, nous jetons la lumières sur les résultats classiques qui sont obtenus à la fois sur les bornes inférieures et supérieures du nombre chromatique et de celui de domination. Au final, les principaux domaines d'applications relevant des deux concepts, sont mentionnés et cités.

2.1 Complexité de problèmes combinatoires

La théorie de la complexité (Cook, 1971) [9] a pour but d'analyser les coûts de résolution, en termes de temps de calcul, des problèmes d'optimisation combinatoire. Elle permet d'établir une classification des problèmes en plusieurs niveaux de difficulté.

Parmi les classes de problèmes combinatoires, on distingue les problèmes de décision et les problèmes d'optimisation.

- Un problème d'optimisation est un problème pour lequel on doit chercher une solution admissible optimisant au mieux une fonction économique.
- Un problème de décision est un énoncé auquel la réponse peut être uniquement OUI ou NON. Chaque problème d'optimisation possède un problème de décision correspondant.

Par la suite, nous avons besoin de ces deux définitions :

- Un algorithme est dit polynômial si le nombre d'opérations élémentaires, nécessaires pour atteindre le résultat, est majoré par un polynôme de la taille des données n, par exemple $O(n^{\alpha})$ avec α est une constante positive indépendante de n .
- Un algorithme est dit exponentiel si le nombre d'opérations élémentaires est minoré par une forme exponentielle de la taille des données n, par exemple $O(a^n)$ avec $(a > 1)$ est une constante indépendante de n.

La classe des problèmes $\mathcal{NP}$ (Non déterministe Polynomial) est la classe des problèmes de décision pouvant être résolus par un algorithme polynomial sur une machine de Turing non déterministe (Garey, 1979) [11]. C'est-à-dire, les problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme tel que si on lui fournit une solution dont la réponse est OUI, il est capable de la vérifier en temps polynomial.

Parmi la classe $\mathcal{NP}$, on distingue deux grandes sous-classes : la classe des problèmes polynomiaux (la classe $\mathcal{P}$) et la classe des problèmes $\mathcal{NP}$-Complet (la classe $\mathcal{NPC}$).

La classe $\mathcal{P}$ est la classe des problèmes de décision solvables par un algorithme polynomial déterministe, c'est-à-dire, les problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme polynomial permettant de répondre à la question par un OUI. C'est la classe des problèmes les plus « faciles » de $\mathcal{NP}$.

La classe $\mathcal{NPC}$ est la classe des problèmes dont il n'existe aucun algorithme polynomial pour les résoudre, sous l'hypothèse ($\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$). Cependant, si on peut résoudre un problème de $\mathcal{NPC}$ en un temps polynomial, on obtient par transformation des algorithmes polynomiaux pour tous les problèmes de $\mathcal{NPC}$.

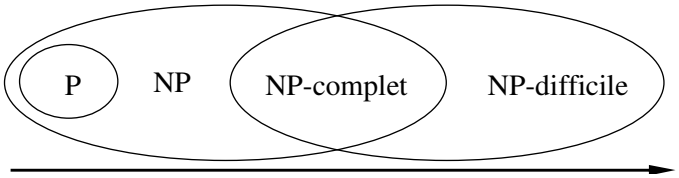


Figure 2.1 – Classification des problèmes combinatoires.

Quand un problème est $\mathcal{NP}$-Complet, il n'est pas possible, à l'heure actuelle, de construire un algorithme polynomial pour le résoudre. Un problème d'optimisation est dit $\mathcal{NP}$-Difficile si le problème de décision qui lui correspond est $\mathcal{NP}$-Complet.

Pour résoudre un problème combinatoire de manière efficace, il faut prendre en compte la particularité de chaque problème. C'est pourquoi il y a autant d'approches que de problèmes. Toutefois, il existe des approches qui fournissent des solutions approchées de bonne qualité pour un certain nombre de problèmes.

Dans la section suivante, nous présentons le problème classique de coloration de graphes.

2.2 Coloration dans les graphes

Le problème de coloration de graphes consiste à affecter à chaque sommet une couleur de sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur tout en utilisant le nombre minimum de couleur. C'est l'un des problèmes les plus étudiés en optimisation combinatoire en raison de ses multiples applications et de la complexité de sa résolution. La notion de coloration a vu le jour en 1852 lorsque Francis Guthrie a soulevé le célèbre problème des quatres couleurs, se demandant s'il était possible

de colorier toute carte géographique avec seulement quatre couleurs différentes, sans que deux pays voisins ne partagent pas la même couleur. Ce n'est qu'en 1976 que les chercheurs américains K.Appel et W.Haken ([1],[2]) ont pu apporter une réponse affirmative à ce problème.

Dans la littérature, Il existe plusieurs variantes de colorations, à savoir la *coloration des sommets*, *la coloration des arêtes* et *la coloration totale*. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la coloration des sommets.

Dans cette section, nous commençons à rappeler les définitions de base sur la coloration dans les graphes, nous présentons aussi des exemples illustratifs. Ensuite, nous exposons des résultats classiques qui sont obtenus sur les bornes inférieures et supérieures du nombre chromatique. Au final, les principaux domaines d'applications de la coloration dans les graphes, sont mentionnés et cités.

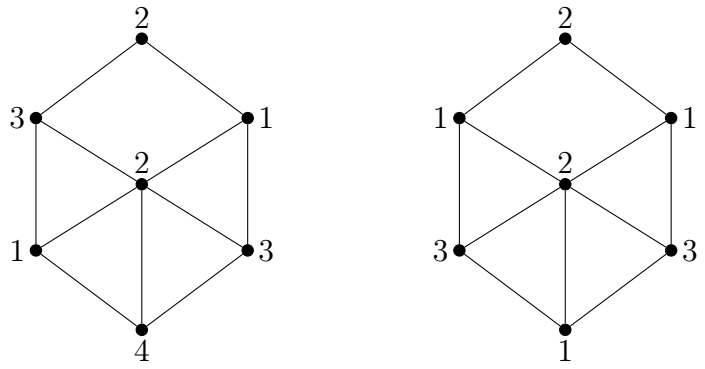
2.2.1 Coloration propre des sommets et nombre chromatique

Dans cette sous section, nous rappelons les définitions de base sur la coloration dans les graphes, et nous présentons aussi des exemples illustratifs permettant de clarifier des ambiguïtés éventuelles.

Définition 2.1 Soit k un entier non nul. Une k-coloration propre des sommets d'un graphe G est une application f de l'ensemble des sommets $V(G)$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, \ldots, k\}$ de telle sorte que deux sommets adjacents dans G reçoivent des couleurs différentes. Autrement dit, pour toute arête $uv \in E(G)$, $f(u) \neq f(v)$. Un graphe qui admet une k-coloration propre des sommets est dit k-colorable.

Définition 2.2 Le nombre chromatique, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k telle que G admet une k-coloration propre des sommets.

Exemple 2.1 Soit G le graphe représenté dans la Figure 2.2. La coloration de G dans la Figure (a) est une coloration propre des sommets de G utilisant 4 couleurs. Par contre, la coloration de G dans la Figure (b) est une coloration propre des sommets, n'utilisant que 3 couleurs, et on peut vérifier que cette coloration est optimale.



(a) 4-coloration (b) 3-coloration (optimale)

Figure 2.2 – Coloration propre des sommets de G.

De ce qui précède, les proprietés suivantes sont valides. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

- Soit un entier $k \geq 1$. Une k-coloration propre des sommets de G peut être considérée comme étant une partition de l'ensemble de sommets V en k stables.
- Il est bien connu que $1 \leq \chi(G) \leq n$. En plus, $\chi(G) = 1$ si et seulement si $G \cong \overline{K_n}$, et $\chi(G) = n$ si et seulement si $G \cong K_n$.

Proposition 2.1 ([6]) . *Soit G un cycle d'ordre n alors :*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 3, & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des graphes pour lesquels le nombre chromatique est égal à 2.

Théorème 2.2 ([24]) *Soit G un graphe de taille $m \geq 1$. Alors $\chi(G) = 2$ si et seulement si G est un graphe biparti.*

2.2.2 Bornes sur le nombre chromatique

La détermination du nombre chromatique d'un graphe quelconque est un problème $\mathcal{NP}$-complet [11]. Par conséquent, de nombreuses recherches ont été menées dans le but de trouver des bornes supérieures et inférieures de ce nombre en fonction d'autres paramètres caractérisant les graphes. Parmi les résultats classiques et fondamentaux obtenus sur le nombre chromatique, nous citons le célèbre théorème de Brooks [7].

Théorème 2.3 (Brooks, [7]) *Pour tout graphe connexe G de degré maximum $\Delta(G)$, si G n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$. De plus, si G est un graphe complet ou un cycle impair, alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

Le nombre chromatique de tout sous-graphe H de G constitue une borne inférieure pour le nombre chromatique du graphe G.

Théorème 2.4 ([24]) *Si H est un sous graphe de G, alors $\chi(G) \geq \chi(H)$.*

Une autre borne inférieure du nombre chromatique peut être déterminée en fonction de la taille maximum d'une clique $\omega(G)$. En effet, si le graphe G comporte une clique d'ordre k, alors d'après le théorème 2.4, au minimum k couleurs sont nécessaires pour le colorer.

Théorème 2.5 ([24]) *Pour tout graphe G on a : $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

L'inégalité ci-dessous est dûe à Gaddum et Nordhaus [17].

Théorème 2.6 ([17]) *Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1. \tag{2.2}$$

Parmi les nombreux résultats relatifs au nombre chromatique, nous mentionnons le résultat historique établi en 1976 par Appel et Haken.

Théorème 2.7 ([1], [2]) *Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.*

2.2.3 Applications de la coloration

Bien que la coloration des graphes est considérée comme étant un domaine de recherche théorique, elle possède de nombreuses applications en pratique dans divers domaines pour optimiser l'utilisation de ressources limitées ou organiser des systèmes complexes. Voici quelques exemples d'applications, les plus courants :

- Planification des horaires : la coloration des graphes trouve des applications intéressantes dans la planification des horaires, notamment pour les emplois du temps scolaires, universitaires ou dans les entreprises. Voici comment on peut l'appliquer : chaque sommet du graphe représente un cours, deux sommets (cours) sont reliés par une arête s'il y a un conflit (même salle utilisée au même créneau, même enseignant, même groupe d'étudiants). Une coloration propre du graphe avec un nombre minimum de couleurs correspond à un emploi du temps sans conflits avec un nombre minimum de créneaux horaires nécessaires.
- Registres d'assignation : Lors de la compilation d'un programme informatique, l'allocation de registres est une étape cruciale pour générer un code objet efficace. Les registres étant une ressource limitée sur les processeurs, il faut les utiliser de manière optimale. Le problème est modélisé par un graphe où : chaque sommet représente une variable du programme, deux sommets sont reliés par une arête si les variables correspondantes sont vivantes (utilisées) en même temps durant l'exécution. Une coloration propre de ce graphe avec un nombre minimum de couleurs correspond à une allocation de registres valide avec un nombre minimum de registres utilisés. Les variables qui ne peuvent

pas être allouées à un registre (car trop de couleurs seraient nécessaires) seront stockées en mémoire. Outre économiser les registres, avoir moins de variables en mémoire accélère l'exécution du code généré car l'accès aux registres est plus rapide que la mémoire.

- Ordonnancement de tâches avec contraintes de ressources : on peut modéliser ce problème par un graphe où chaque sommet représente une tâche et deux sommets sont reliés par une arête si les tâches correspondantes nécessitent la même ressource (machine, opérateur, etc.) et ne peuvent donc pas être exécutées simultanément. Une coloration propre du graphe avec un nombre minimum de couleurs correspond alors à un ordonnancement optimal qui minimise le nombre de ressources utilisées et le temps d'exécution total.

Dans la section suivante, nous présentons le problème classique de domination dans les graphes.

2.3 Domination dans les graphes

Le concept de domination trouve son origine dans les jeux d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'étude mathématique des ensembles dominants n'a commencé qu'à la fin des années 50 du siècle précédent. En 1862, De Jaenisch [16] posa le problème suivant : Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines, pour un échiquier 8×8 le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier est 5, et pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent.

En 1892, Ball [4] a traité la question de De Jaenisch en consédérant des conditions supplémentaires. En 1964, les frères Yaglom [23] on étudié les problèmes posés par

De Jaenisch et Ball. L'appellation "coefficient de stabilité externe" a été introduite par Berge [5] pour définir le nombre de domination.

Dans cette section, nous rappelons tout d'abord les définitions de base sur la domination dans les graphes, nous présentons aussi des exemples illustratifs. Ensuite, nous exposons des résultats classiques qui sont obtenus sur les bornes inférieures et supérieures du nombre de domination. Au final, les principaux domaines d'applications de la domination dans les graphes, sont mentionnés et cités.

2.3.1 Ensemble dominant et nombre de domination

Définition 2.3 Un sous-ensemble de sommets D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins un voisin dans D.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes à l'ensemble dominant dans les graphes, nous citons :

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si $\cup_{v \in D} N[v] = V$.

Nous rappelons aussi la définition d'un ensemble dominant minimal.

Définition 2.4 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant D est dit dominant minimal si pour tout sommet $v \in D$, l'ensemble $D - \{v\}$ n'est pas un dominant.

Définition 2.5 Le nombre de domination inférieur d'un graphe G (appelé nombre de domination), noté $\gamma(G)$, représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant

de G. Un ensemble dominant de G de cardinal minimum est noté $\gamma(G)$-ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.

Exemple 2.2 Dans le graphe de la Figure 2.3, l'ensemble des sommets en gras représente un γ-ensemble. Le nombre de domination de ce graphe est égal à 2.

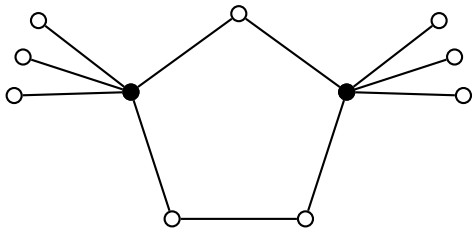


Figure 2.3 – Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$.

De ce qui précède, les proprietés suivantes sont valides. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

- Si D est un ensemble dominant de G, alors D contient tous les sommets isolés de G.
- L'ensemble V est un ensemble dominant, donc $\gamma(G) \leq n$. En plus, $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G \cong \overline{K_n}$.
- Un dominant contient au moins un sommet, donc $\gamma(G) \geq 1$. En plus, $\gamma(G) = 1$ si et seulement si G possède un sommet v de degré $n - 1$.

La proposition 2.8 donne la valeur exacte du nombre de domination pour les chaînes et les cycles.

Proposition 2.8 ([13]) *Pour les cycles C_n d'ordre n et les chaînes P_n d'ordre n, on a*

$$\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil . \tag{2.3}$$

2.3.2 Bornes sur le nombre de domination

Nous résumons ci-dessous, quelques bornes concernant le nombre de domination, dont nous aurons besoin dans le troisième chapitre.

Walikar et al. [22] ont donné une borne inférieure pour le nombre de domination $\gamma(G)$.

Théorème 2.9 ([22]) *Pour tout graphe G d'ordre n, et de degré maximum $\Delta = \Delta(G)$, on a :*

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1}. \tag{2.4}$$

Dans [12], on trouve aussi une borne inférieure pour le nombre de domination en fonction du diamètre de G.

Théorème 2.10 ([12]) *Si G est un graphe connexe, avec $d = \mathrm{diam}(G)$, alors*

$$\gamma(G) \geq \frac{d+1}{3}. \tag{2.5}$$

Une borne supérieure a été établie par Ore [19] sur le nombre de domination $\gamma(G)$. En 1962, il a prouvé que le nombre de domination d'un graphe sans sommet isolé est au plus la moitié de son ordre.

Théorème 2.11 ([19]) *Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés, alors*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}. \tag{2.6}$$

Une autre borne supèrieure a été établie par Berge [5].

Théorème 2.12 ([5]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta = \Delta(G)$, alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta. \tag{2.7}$$

2.3.3 Autres paramètres de domination

Dans cette sous section, nous exposons certaines variantes de domination dans les graphes simples, où des conditions supplémentaires sont imposées sur l'ensemble dominant, sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer.

Dans la littérature, Il existe plusieurs variantes de domination, nous citons entre autres :

Domination globale : Un sous-ensemble D de V est un dominant globale de G si D est un ensemble dominant de G ainsi que son complémentaire $\overline{G}$. Le nombre de domination globale $\gamma_g(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant globale de G.

Domination connexe : Un sous-ensemble D de V est un dominant connexe de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par D est connexe. Le nombre de domination connexe, noté par $\gamma_c(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G.

Domination stable : Un sous-ensemble D de V est un dominant stable s'il est dominant et le sous-graphe induit par D est sans arêtes. Le nombre de domination stable d'un graphe G est le cardinal minimum d'un stable maximale de G. Il est noté $i(G)$ et un ensemble indépendant (stable) maximal de cardinal minimum est dit $i(G)$-ensemble.

Domination totale : Un sous-ensemble D de V est un dominant total de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par D ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale d'un graphe G est le cardinal minimum d'un dominant total, noté $\gamma_t(G)$.

2.3.4 Applications de la domination

La notion de domination offre la possibilité dans de nombreux domaines d'améliorer les performances d'un système donné ou bien d'un problème caractérisé, qu'il soit problème de réseau de communication ou bien dans les systèmes électroniques ou d'autre.

La domination dans la pratique est trés présente et cela revient à l'existence d'autres nouveaux paramètres de domination qui sont apparus lorsque une condition supplémentaire dans le graphe représenté a été exigée. Voici quelques exemples d'application :

- Réseaux de communication, on peut chercher le nombre minimum de stations pour installer des transmetteurs de telle sorte que tout le perimètre considéré soit couvert, c'est-à-dire les stations qui ne sont pas munies d'un transmetteur doivent en avoir liaison directe.
- Problème de localisation des radars où un certain nombre de sites doivent être controlés par des radars. L'objectif est de déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leurs emplacements de façon à surveiller tous les points (les sites), ce qui revient à trouver un dominant de cardinal minimum du graphe représentant cette situation.

Chapitre 3

Domination Chromatique Transversale (DCT)

La domination et la coloration sont les deux concepts majeurs de la théorie des graphes qui ont connu un développement important dans le domaine de la recherche ces dernières années.

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord des définitions et propriétés de base relevant de la Domination Chromatique Transversale (DCT) dans les graphes. Ensuite, nous présentons quelques résultats existants sur la DCT. Au final, nous exposons notre contribution qui consiste à proposer de nouveaux résultats sur la DCT.

3.1 Définitions et propriétés

Dans cette section, nous exposons des définitions et propriétés de base liées au concept de la DCT, et qui sont utiles tout au long de ce chapitre.

Définition 3.1 Un sous ensemble $S \subseteq V$ est dit un ensemble Transversal d'un graphe simple $G = (V, E)$ si, S intersecte toutes les classes de couleurs de G, pour une χ-coloration donnée.

Définition 3.2 Un sous ensemble $S \subseteq V$ est dit un ensemble Dominant Chromatique Transversal d'un graphe simple $G = (V, E)$ si,

- S est un ensemble Dominant.
- S est un ensemble Transversal.

Définition 3.3 Un ensemble dominant chromatique transversal de G est dit minimal s'il ne contient aucun sous-ensemble strict qui est Dominant Chromatique Transversal.

Définition 3.4 Le nombre de domination chromatique transversale d'un graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble Dominant Chromatique Transversal de G. Il est noté $\gamma_{ct}(G)$. Un sous ensemble DCT optimal est noté $\gamma_{ct}(G)$-ensemble.

De ce qui précède, les proprietés suivantes sont valides. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

- Soit S un ensemble DCT. Alors S existe toujours, il suffit de prendre l'ensemble de tous les sommets $S = V$.
- Si S est un ensemble DCT de G, alors S contient tous les sommets isolés de G.
- Soit G un graphe, tout ensemble Dominant n'est pas nécessairement un ensemble DCT, comme il est illustré dans l'Exemple 3.1.

Exemple 3.1 Dans le graphe G de la Figure 3.1, nous pouvons vérifier que les ensembles $S_1 = \{u, v, h, g\}$ et $S_2 = \{u, f, e, d\}$ sont deux ensembles DCT.

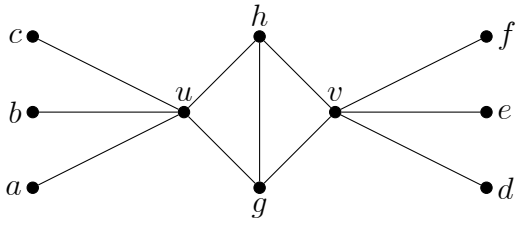


Figure 3.1 – Exemple de graphe G, tel que $\chi(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$.

3.2 Résultats existants sur la DCT

Dans cette section, nous présentons des résultats classiques des travaux antérieurs. Tout d'abord, nous présentons des bornes inférieures et supérieures ainsi que des valeurs exactes pour le nombre de DCT dans des classes de graphes, particulières telles que les chaînes, les cycles et les graphes bipartis complets. Ensuite, nous exposons tous les graphes G d'ordre n, pour lesquels le nombre de DCT est égal respectivement à 1, $n-1$, et n. Au final, nous présentons une condition suffisante pour que $\gamma_{ct}(G)$ soit égal à $\chi(G)$.

3.2.1 Bornes sur le nombre de DCT

Ici, nous résumons quelques bornes concernant le nombre de DCT. Chaluvaraju et al. [8] ont donné des bornes inférieures et supérieures, encadrant ainsi le nombre de DCT.

Théorème 3.1 ([8]) *Pour tout graphe G,*

$$\max\{\chi(G), \gamma(G)\} \leq \gamma_{ct}(G) \leq \gamma(G) + \chi(G) - 1. \tag{3.1}$$

Théorème 3.2 ([8]) *Pour tout graphe biparti d'ordre $n \geq 2$,*

$$2 \leq \gamma_{ct}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil. \tag{3.2}$$

3.2.2 Nombre de DCT de graphes particuliers

Chaluvaraju et al. [8] ont déterminé la valeur exacte du nombre de DCT pour les chaînes, les cycles et les graphes bipartis complets.

Théorème 3.3 ([8]) *Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 4$,*

$$\gamma_{ct}(P_n) = \gamma(P_n). \tag{3.3}$$

Théorème 3.4 ([8]) *Pour tout cycle C_{2k} avec $k \geq 2$,*

$$\gamma_{ct}(C_{2k}) = \gamma(C_{2k}). \tag{3.4}$$

Théorème 3.5 ([8]) *Pour tout graphe biparti complet $K_{p,q}$ avec $2 \leq p \leq q$,*

$$\gamma_{ct}(K_{p,q}) = \gamma(K_{p,q}). \tag{3.5}$$

3.2.3 Graphes G avec $\gamma_{ct}(G) \in \{1, n-1, n\}$

Cette partie est consacrée à la caractérisation des graphes G d'ordre n, pour lesquels le nombre de DCT est égal respectivement à 1, $n-1$, et n.

Théorème 3.6 ([8]) *Pour un graphe G, $\gamma_{ct}(G) = 1$ si et seulement si $G = K_1$.*

Théorème 3.7 ([8]) *Pour tout graphe G d'ordre n, $\gamma_{ct}(G) = n$ si et seulement si $G \cong K_n$ ou $\overline{K_n}$.*

Théorème 3.8 ([8]) *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, avec $\delta(G) \geq 2$. Alors $\gamma_{ct}(G) = n - 1$ si et seulement si G n'est pas un graphe complet, et qui contient le graphe K_{n-1} comme sous-graphe induit.*

3.2.4 Graphes G avec $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$

Dans cette partie, nous présentons une condition suffisante pour que $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$ qui est due à Vaidya et al. [21]. Dans la deuxième section, nous allons montrer que ce résultat n'est pas valide.

Théorème 3.9 ([21]) *Soit G un graphe tel que $\gamma(G) \leq \chi(G)$. Alors $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.*

3.3 Nouveaux résultats sur la DCT

Dans cette section, nous présontons une borne inférieure sur le nombre de DCT, puis nous déterminons le nombre de DCT du graphe de Petersen. Ensuite, nous caractérisons les graphes pour lesquels le nombre de DCT est égal à deux. Au final, nous examinons les graphes G avec $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$, où nous donnons une condition suffisante, et nous présentons aussi deux exemples de graphes permettant de contredire l'énoncé de Théorème trouvé dans [21].

3.3.1 Borne inférieure pour le nombre de DCT

Dans cette partie, nous présontons une borne inférieure pour le nombre de DCT.

La proposition 3.10 affirme que le nombre de domination globale constitue une borne inférieure au nombre de DCT. Nous rappelons que dans [10], Les auteurs ont montré que $\gamma_g(G) \geq \gamma(G)$.

Proposition 3.10 *Pour tout graphe G, l'inégalité suivante est satisfaite,*

$$\gamma_{ct}(G) \geq \gamma_g(G). \tag{3.6}$$

La borne est atteinte.

Preuve. Soit $k = \chi(G)$. On considère $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ une k-coloration de G. Soit $S \subseteq V(G)$ un γ_{ct}-ensemble de G. D'une part, S est un ensemble dominant de G par définition. D'autre part, puisque S est un ensemble transversal, donc il existe au moins un sommet dans chaque classe de couleur V_i, $(1 \leq i \leq k)$ qui est une clique dans $\overline{G}$. Dans ce cas, l'ensemble S domine à la fois G et $\overline{G}$. Par conséquent S est un ensemble dominant global de G, donc $\gamma_g(G) \leq |S|$.

La borne est atteinte pour les graphes complets, ou les chaînes P_n, $(n \geq 4)$, ou les cycles pairs C_n, $(n \geq 4)$, ou les bipartis complets $K_{p,q}$, $(2 \leq p \leq q)$. □

3.3.2 Nombre de DCT du graphe de Petersen

Dans cette partie, nous déterminons la valeur exacte du nombre de DCT du graphe de Petersen. Tout d'abord, nous rappelons la proprieté suivante.

Propriété 3.11 ([13]) *Soit $G = (V, E)$ le graphe de Petersen. Si $D \subseteq V$ est un γ-ensemble, alors il existe un sommet v appartenant à $V - D$ tel que $N_G(v) = D$.*

La valeur exacte du nombre de DCT du graphe de Petersen est donnée par la proposition 3.12.

Proposition 3.12 *Le nombre de domination chromatique transversale du graphe de Petersen est égal à 4.*

Preuve. Soit G le graphe de Petersen. Il est bien connu que $\chi(G) = \gamma(G) = 3$.

D'une part, d'aprés la double inégalité (3.1) nous obtenons $3 \leq \gamma_{ct}(G) \leq 5$. Supposons que $\gamma_{ct}(G) = 3$, ici $\gamma_{ct}(G) = \gamma(G) = \chi(G)$. Soit $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ un γ_{ct}-ensemble. Nous observons que S est aussi un γ-ensemble, car $\gamma(G) = 3$. D'après la propriété 3.11, il existe un sommet $x \in V - S$ tel que $N_G(x) = S$, donc x reçoit de la couleur 4, puisque S est un transversal de 3 couleurs. Contradiction avec le fait que $\chi(G) = 3$. Donc $\gamma_{ct}(G) \geq 4$.

D'autre part, pour la coloration de G adoptée (voir Figure 3.2), Nous pouvons vérifier que l'ensemble $S = \{v_1, u_1, u_2, u_5\}$ est un dominant chromatique transversal, donc $\gamma_{ct}(G) \leq |S| = 4$. Au final, nous déduisons que $\gamma_{ct}(G) = 4$. □

Une idée alternative pour démontrer la Proposition 3.12, est de combiner la Proposition 3.10, avec le fait que $\gamma_g(G) = 4$, ce qui donne,

$$\gamma_{ct}(G) \geq \gamma_g(G) = 4 \tag{3.7}$$

ensuite, pour avoir de l'égalité $\gamma_{ct}(G) = \gamma_g(G)$, il suffit d'éxhiber un ensemble de DCT de cardinal 4.

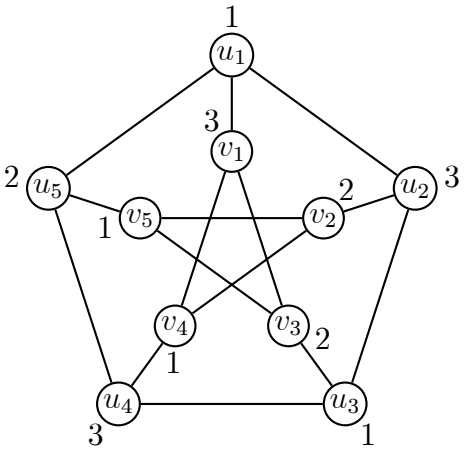


Figure 3.2 – Graphe de Petersen. Les nombres désignent une coloration optimale des sommets.

3.3.3 Caractérisation de graphes dont le nombre de DCT est égal à deux

Dans cette partie, nous caractérisons les graphes pour lesquels le nombre de DCT est égal à deux. Dans [3], les auteurs ont fait le même travail dans les arbres en se basant sur la notion du diamètre d'un graphe G. Dans ce travail, nous allons adopter une autre approche.

En général, pour tout graphe G, l'inégalité $\gamma_{ct}(G) \geq \max\{\gamma(G), \chi(G)\}$ est valide, mais dans le cas particulier où $\gamma_{ct}(G) = 2$, nous obtenons l'égalité $\gamma_{ct}(G) = \max\{\gamma(G), \chi(G)\}$, comme il est montré dans la proposition 3.13.

Proposition 3.13 *Si* $\gamma_{ct}(G) = 2$, *alors* $\gamma_{ct}(G) = \max\{\gamma(G), \chi(G)\}$.

Preuve. Il est bien connu que $\gamma_{ct}(G) \geq \max\{\gamma(G), \chi(G)\}$. Si $\gamma_{ct}(G) = 2$ alors $\max\{\gamma(G), \chi(G)\} \leq 2$, ce qui donne $\gamma(G) \leq 2$ et $\chi(G) \leq 2$. En éliminant le cas où $\gamma(G) = \chi(G) = 1$, car d'après le Théorème 3.6 $\gamma_{ct}(G) = 1$, Nous obtenons l'égalité voulue. □

Le premier résultat principal de cette section est formulé comme suit.

Théorème 3.14 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors $\gamma_{ct}(G) = 2$ si et seulement si G est isomorphe à l'un des graphes suivants :*

i) Le complémentaire de K_2.

ii) L'étoile $K_{1,n-1}$.

iii) Graphe formé à partir d'union de deux étoiles (probablement une est triviale), en ajoutant des arêtes (éventuellement aucune), en interdisant toute arête entre un sommet central et un sommet pendant, et que G soit sans cycle impair.

Preuve. Commençons par la condition nécessaire. Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Supposons que $\gamma_{ct}(G) = 2$, d'après la proposition 3.13, nous avons $\max\{\gamma(G), \chi(G)\} = 2$, et nous distinguons les cas suivants.

Cas 1, $\gamma(G) = 2$ et $\chi G) = 1$.

Il résulte immédiatement, que $G \cong \overline{K_2}$.

Cas 2, $\gamma(G) = 1$ et $\chi(G) = 2$.

Il résulte immédiatement, que $G \cong K_{1,n-1}$.

Cas 3, $\gamma(G) = 2$ et $\chi(G) = 2$.

D'une part, G est un graphe biparti, donc l'ensemble de sommets $V(G)$ se décompose en deux ensembles stables X et Y, tels que $|X| = p$ et $|Y| = q$, $(1 \leq p \leq q)$.

D'autre part, soit $S = \{x, y\}$ un γ_{ct}-ensemble. Puisque S est un transversal, alors $x \in X$ et $y \in Y$, en plus S est un dominant, donc $N_G(x) \subseteq Y$ et $N_G(y) \subseteq X$, avec $|N_G(x)| \geq q - 1$, et $|N_G(y)| \geq p - 1$.

La condition suffisante est évidente.

□

3.3.4 Graphes G avec $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$

Dans cette partie, nous examinons les graphes G avec $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$, en donnant une condition suffisante, et nous présentons aussi des exemples de graphes permettant de contredire l'énoncé du Théorème trouvé dans [21].

Pour tout graphe G, l'inégalité $\gamma_{ct}(G) \geq \chi(G)$ est satisfaite. La proposition 3.15 présente une condition suffisante pour que $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.

Proposition 3.15 *Soient $G = (V, E)$ un graphe, et $D \subseteq V$ un ensemble dominant de G. Si D est une clique, alors $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.*

Preuve. Posons $k = \chi(G)$. Soit D un ensemble dominant clique, tel que $t = |D|$, où $(1 \leq t \leq k)$. D'après (3.1), il suffit de montrer que $\gamma_{ct}(G) \leq \chi(G)$. Soit $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ une coloration optimale de $V(G)$. D'une part, puisque D est une clique, il intersecte disant, les t premières classes de couleurs. D'autre part, puisque D est un dominant, il suffit de prendre un seul sommet dans chaque classe de couleur parmi les $k - t$ classes restantes. L'ensemble S ainsi construit est un dominant transversal, donc $\gamma_{ct}(G) \leq |S| = t + (k - t) = k$. On obtient au final $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$. □

Corollaire 3.16 *Si G est un graphe scindé, alors $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.*

Preuve. Soit $G = (K \cup I, E)$ un graphe scindé, où K désigne une clique, et I désigne un stable. Puisque G est connexe, les voisins de chaque sommet v de I, sont dans K, donc K est un ensemble dominant, et la proposition 3.15 s'applique, d'ou $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$. □

Dans [21], les auteurs ont énoncé le Théorème 3.17 qui nous a captivé énormément dans notre travail. Nous le citons ici.

Théorème 3.17 ([21]) *Soit G un graphe tel que $\gamma(G) \leq \chi(G)$. Alors $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.*

Le deuxième résultat principal de notre travail, consiste à présenter deux Exemples 3.2 et 3.3, permettant de contredire l'énoncé du Théorème 3.17. Pour ce faire, nous commençons par la Proposition 3.18.

Proposition 3.18 *Soit G le graphe représenté dans la Figure 3.1. Alors $\gamma_{ct}(G) = 4$.*

Preuve. D'après (3.1), nous avons $3 \leq \gamma_{ct}(G) \leq 4$. Supposons que $\gamma_{ct}(G) = 3$, et soit S un γ_{ct}-ensemble. Puisque $\chi(G) = 3$, l'ensemble S contient 3 sommets de différentes couleurs.

Nous affirmons que l'un et un seul des sommets u ou v doit appartenir à S. Pour n'importe χ-coloration les sommets u et v ont la même couleur. Supposons que nous assignons la couleur 1 à u et la couleur 2 à v. Puisque le sommet h est adjacent à u et v, il reçoit de la couleur 3, de même le sommet g reçoit de la couleur 4, puisqu'il est adjacent à u, v et h. Ce qui contredit le fait que $\chi(G) = 3$.

Maintenant, Soit $u \in S$ (par symétrie). Comme S est un ensemble dominant, les sommets $\{f, e, d\}$ doivent appartenir aussi à S, puisque $v \notin S$, donc $|S| = 4$. Contradiction. On conclue que $\gamma_{ct}(G) = 4$. □

Exemple 3.2 Soit G est le graphe de la Figure 3.1. Ici $\gamma(G) = 2, \chi(G) = 3$, et $\gamma_{ct}(G) = 4$.

Exemple 3.3 Soit G est le graphe de Petersen. Ici $\gamma(G) = \chi(G) = 3$, et $\gamma_{ct}(G) = 4$.

Dans les deux Exemples, bien que l'inégalité $\gamma(G) \leq \chi(G)$ est valide, l'égalité $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$ n'est pas valide. Ce qui contredit le Théorème 3.17 .

Conclusion

Aujourd'hui, la théorie des graphes a connu un développement majeur dans divers domaines de recherche en raison de son lien étroit avec l'informatique. Elle joue un rôle important dans plusieurs domaines de l'informatique tels que la conception logique, l'intelligence artificielle, les langages formels, l'organisation et la recherche d'informations, y compris dans les domaines des sciences sociales, de la linguistique et de l'ingénierie de la communication.

Les concepts de la coloration et de la domination dans les graphes, prennent de l'ampleur de plus en plus ces dernières années, aussi bien dans les milieux académiques, que dans la vie quotidienne en raison de ses applications diversifiées pour modéliser de nombreux problèmes réels et les résoudre de manière efficace.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la Domination Chromatique Transversale (DCT) dans les graphes. Un *ensemble dominant chromatique transversal* d'un graphe G est un ensemble dominant S tel que, pour une coloration optimale c donnée de G, l'ensemble S intersecte chaque classe de couleurs de c. *Le nombre de domination chromatique transversale*, noté $\gamma_{ct}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble de DCT de G.

La démarche scientifique que nous avons adoptée durant ce travail, se résume comme suit. En premier lieu, nous avons présenté les notions préliminaires et les concepts de base relatifs à la théorie des graphes qui vont nous être utile tout au long de ce manuscrit. Ensuite nous avons rappelé brièvement les notions de base

liées à la complexité des problèmes combinatoires, puis nous avons exposé le concept de la coloration propre et celui de la domination classique dans les graphes. Ensuite, nous avons présenté la notion de la domination chromatique transversale (DCT) ainsi que quelques résultats importants qui ont été obtenus pendant l'étude du paramètre $\gamma_{ct}(G)$. Au final, nous avons éxposé notre contribution qui se présente en la caractérisation de graphes pour lesquels le nombre de domination chromatique transversale est égal à deux. Nous présentons aussi un exemple de graphe pour contredire l'énoncé de la condition suffisante trouvée dans la littérature, concernant l'égalité $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$.

Ces résultats conduisent à envisager quelques perspectives s'articulant autour les points suivants,

- Étudier la complexité du problème de domination chromatique transversale.
- Établir de nouvelles bornes inférieures ou supérieures au nombre $\gamma_{ct}(G)$.
- Déterminer la valeur exacte de $\gamma_{ct}(G)$ pour d'autres classes de graphes.
- Caractériser les graphes vérifiant $\gamma_{ct}(G) = \gamma(G)$, ou $\gamma_{ct}(G) = \chi(G)$, ou $\gamma_{ct}(G) = \gamma(G) + \chi(G) - 1$.

Le travail que nous avons effectué dans ce mémoire, nous a permis d'approfondir et de perfectionner nos connaissances théoriques et pratiques dans le domaine de la théorie des graphes et d'acquérir de nouvelles idées à la fois en Coloration et en Domination dans les graphes. Nous espérons que ce travail contribue à l'avancement de la recherche dans ce domaine, et que notre but est atteint.

Notations et Abréviations

Symboles :

$G = (V, E)$	Graphe simple.
V ou $V(G)$	Ensemble des sommets de G, avec $n = \|V(G)\|$.
E ou $E(G)$	Ensemble des arêtes de G, avec $m = \|E(G)\|$.
$N_G(v)$	Voisinage ouvert du sommet v dans G.
$N_G[v]$	Voisinage fermé du sommet v dans G, ou $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
$\Delta(G)$	Degré maximum de G, ou $\Delta(G) = \max\{\|N_G(v)\| : v \in V\}$.
$\delta(G)$	Degré minimum de G, ou $\delta(G) = \min\{\|N_G(v)\| : v \in V\}$.
$\mathrm{diam}(G)$	Plus grande distance entre deux sommets dans $V(G)$.
$\alpha(G)$	Nombre de stabilité.
$\omega(G)$	Nombre de clique.
$\chi(G)$	Nombre chromatique.
$\gamma(G)$	Nombre de domination.
$\gamma_g(G)$	Nombre de domination globale.
$\gamma_{ct}(G)$	Nombre de domination chromatique transversale.
$G \cong H$	G et H sont isomorphes.

Abréviations :

RO	Recherche Opérationnelle.
TG	Théorie des Graphes.
DCT	Domination Chromatique Transversale.

Références

[1] K. Appel, W. Haken. *Every planar map is four colorable* : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths, 21 : 429-490, 1977.

[2] K. Appel, W. Haken. *Every planar map is four colorable* : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths, 21 : 491-567, 1977.

[3] S.K.Ayyaswamy, C. Natarajan. *On graphs whose chromatic transversal number is two*. Vol. 30, No 1, 59-64, 2011.

[4] W. W. Ball Rouse, *Mathematical recreation and problem of past and present times*, Mac Millan, London, 1892.

[5] C. Berge. *The Theory of Graphs and its Applications*, Methuen & Co., London, 1962.

[6] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.

[7] R. Brooks. *On coloring the nodes of a network*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194-197, 1941.

[8] B. Chaluvaraju, C. AppajiGowda, The Dom-chromatic number of a graph, Malaya Journal of Mathematik, 4(1), 1-7, 2016.

[9] S. A. Cook, *The Complexity of Theorem Proving Procedures* - University of Toronto, 1971.

[10] W. J. Desormeaux, P. E. Gibson, T. W. Haynes, *Bounds on the global domination number*. Quaestiones Mathematicae, 38, 563-572, 2015.

[11] M. R. Garey, D. S. Johnson. Computers and Intractibility : *A guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[12] T. W. Haynes, *Domination in Graphs* : Volume 2 : Advanced Topics. Routledge. 2017.

[13] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker.New York, 1998.

[14] T. W. Haynes, D. Knisley, E. Seier et Y. Zou, *A quantitative analysis of secondary RNA structure using domination based parameters on trees*, The BMC Bioinformatics, 7 : 108-115, 2006.

[15] M. Joice Punitha, E. F. Beulah Angeline. *Dom-chromatic number of certain splitting graphs*. Vol. 21, Issue 1, 123-131, 2021.

[16] C. F. De Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématiques au jeu d'échecs*, Berlin, 1862.

[17] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. *On complementary graphs*. Ann. Math. Monthly, 63 : 175-177, 1956.

[18] S. Uma Maheswari, T. Arockiamary Santiago. *Dom-chromatic number of certain cycle related graphs*. Malaya Journal of Matematik, Vol. 8, No. 1, 177-182, 2020

[19] O. Ore. *Theory of graphs*. Amer. Math Soc. Colloq. Publ. 38, 1962.

[20] M. Poobalaranjani et S. Krithika. *An approximation algorithm to find a Dom-chromatic set and the Dom-chromatic number of a graph*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 13, No. 9, pp. 6133-6141, 2017.

[21] S. K. Vaidya, A. D. Parmar. *On chromatic transversal domination in graphs*. Malaya Journal of Matematik, Vol. 7, No. 3, 419-422, 2019.

[22] H. B. Walikar, B. D. Acharya et E. Sampathkumar. *Recent developments in the theory of domination in graphs*, In MRI Lecture Notes in Math, Mahta Research Instit., Allahabad, volume 1, 1979.

[23] I.M. Yaglom, V.G. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, Volumes I et II, Holden-Day, San Francisco, 1964.

[24] P. Zhang. *Graphs and digraphs*. 6e édition, 2006.