**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**
**UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA**
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**

## Mémoire de fin d'études de Master

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

## Thème

# Détermination des paramètres de rupture d'un matériau FGM

**Proposé par :** Dr Nasreddine AMOURA

**Réalisé par :** M. Fares IMAM
M. Chakib Arslane SELMI

**Juin 2023**

# الملخص

الهدف من مشروع رسالة الماستر هو تحديد معاملات انتشار التشقق في مادة تتميز بتغير تدريجي في الخواص الميكانيكية في اتجاه محدد، والمعروفة أيضًا باسم مادة ذات تدرج وظيفي (FGM). تعنى معاملات انتشار التشقق بتوزيع صلابة المادة عبر المادة وعامل شدة التوتر لحجم التشقق المحدد.

في هذه الدراسة، تم استخدام عدة دوال مثل الدالة الخطية والأسية والقوة لإنشاء تدرج في الخواص الميكانيكية في المادة. لكل نوع من التدرج، تم حساب الحجم الحرج للتشقق باستخدام مبادئ ميكانيكا الكسر الخطية، والتي تنطبق على المواد الهشة.

أظهرت النتائج المستخلصة من المحاكاة المختلفة التي أجريت على مادة FGM مكونة من الألمنيوم (المعدن) والألومينا (السيراميك) أن صلابة المادة تزداد عندما نتحرك من جانب السيراميك إلى جانب المعدن. وعلاوة على ذلك، كان من الممكن إقامة ارتباط بين صلابة المادة والمؤشر الدالة القوية المستخدمة لتحديد تدرج الخواص الميكانيكية.



**الكلمات المفتاحية:** مادة ذات تدرج وظيفي. ANSYS Workbench®, Quasistatique. معاملات انتشار التشقق.

عينة SENT.



# Abstract

The objective of this master's thesis project is to determine the crack propagation parameters of a material with a gradual variation in mechanical properties in a specific direction, also known as a Functionally Graded Material (FGM). The crack propagation parameters refer to the distribution of toughness throughout the material and the stress intensity factor for a given crack size.

In this study, several functions such as linear, exponential, and power functions were used to create the gradation of mechanical properties in the material. For each type of gradation, the critical crack size was calculated using principles from linear fracture mechanics, which are applicable to brittle materials.

The results obtained from various simulations conducted on an FGM composed of aluminum (the metal) and alumina (the ceramic) demonstrated that the material's toughness increases as one moves from the ceramic side to the metal side. Furthermore, it was possible to establish a correlation between the material's toughness and the exponent of the power function used to determine the gradation of mechanical properties.



**Keywords:** Functionally Graded Material. ANSYS Workbench®, Quasistatic. The crack propagation parameters. SENT Specimen



# Résumé

L'objectif de ce projet de fin d'études de master consiste à déterminer les paramètres de fissuration d'un matériau présentant une variation graduelle des propriétés mécaniques dans une direction spécifique, également appelé matériau à gradient fonctionnel (FGM). Les paramètres de fissuration font référence à la répartition de la ténacité à travers le matériau et au facteur d'intensité des contraintes pour une taille de fissure donnée.

Dans cette étude, plusieurs fonctions, telles que linéaire, exponentielle et puissance, ont été utilisées pour créer la gradation des propriétés mécaniques du matériau. Pour chaque type de gradation, la taille critique de la fissure a été calculée en utilisant les principes de la mécanique linéaire de la rupture, qui s'appliquent aux matériaux fragiles.

Les résultats obtenus à partir des différentes simulations effectuées sur un FGM à base d'aluminium (le métal) et d'alumine (la céramique) ont démontré que la ténacité du matériau augmente à mesure que l'on se déplace du côté céramique vers le côté métal. De plus, il a été possible d'établir une corrélation entre la ténacité du matériau et l'exposant de la fonction puissance utilisée pour déterminer la gradation des propriétés mécaniques.



**Mots clés :** Matériau à Gradient Fonctionnel, ANSYS Workbench®, Quasistatique, Paramètres de rupture. Eprouvette SENT.

# Remerciements

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire de master. Le chemin parcouru n'aurait pas été possible sans leur soutien, leurs encouragements et leurs précieux conseils.

Nous souhaitons exprimer notre reconnaissance envers notre encadrant, Dr Nasreddine AMOURA, pour sa patience, son expertise et ses précieuses orientations tout au long de ce projet. Ses conseils éclairés et sa disponibilité constante nous ont permis de progresser et d'approfondir nos connaissances dans le domaine de la simulation numérique.

Nous tenons également à remercier les membres de notre jury de soutenance, Pr Mourad BACHENE et Dr Yasser CHIKER, pour avoir consacré leur temps et leur expertise à l'évaluation de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à nos enseignants, dont les connaissances et les enseignements nous ont guidés tout au long de notre parcours universitaire. Leur passion pour l'enseignement et leur engagement envers leurs étudiants ont été une source d'inspiration et ont nourri notre passion pour la recherche.

Nous souhaitons également adresser nos remerciements à nos familles et à nos proches pour leur soutien indéfectible tout au long de nos études. Leur encouragement et leur confiance ont été des piliers essentiels dans la réalisation de ce mémoire.

Enfin, Nous voudrions remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet. Leur aide, leurs conseils et leur motivation ont été d'une valeur inestimable.

La rédaction de ce mémoire de master a été une expérience enrichissante et gratifiante. Grâce à l'appui et à l'implication de chacun d'entre vous, nous avons pu repousser nos limites et atteindre nos objectifs académiques. Votre confiance en nous a été un moteur qui nous a poussés à donner le meilleur de nous-même.

En conclusion, nous sommes profondément reconnaissants envers tous ceux qui ont contribué à ce mémoire de master. Votre soutien inconditionnel et votre implication ont été essentiels dans la réalisation de ce travail. Nous vous adressons nos plus sincères remerciements pour votre précieuse contribution à notre parcours académique.

# Dédicaces

La joie de réussir n'est jamais complète que si elle est partagée avec ceux qu'on aime. Je dédie ce modeste travail à mon cher père, à ma chère mère et à mes grands-parents.

– A mes frères Abderrahmane rodouane Omar et Mohamed Nacer.

– A mes tentes, mes oncles, à chaque cousins et cousines.

A mes amies, a tous mes camarades de classe et `a toute personnes qui m'ont encouragé ou aidé au long de mes études.

**Fares**

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes chers parents, pour leurs dévouements, leurs amours, leur compréhension, leurs sacrifices, leur tendresse, leurs prières et leur patience à notre égard.
- Mes chers frères et sœurs : Tedj, Amira, Mounia, Sabrina Pour leurs soutien durant toute la période de nos études.
- Mes amis et cousins : pour leur compagnie et bons moments passés ensemble.
- A nos camarades de classe (promotion 2022-2023).
- A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

**Chakib Arslane**

# Table des matières

Remerciements ..... 3

Dédicaces ..... 4

Table des matières ..... 5

Liste des figures ..... 8

Liste des tableaux ..... 9

Introduction Générale ..... 10

1 Généralités sur les matériaux FGM ..... 13

1.1 Introduction ..... 13

1.2 Types de FGM ..... 14

1.3 Propriété de FGM ..... 15

1.3.1 Propriétés des matériaux métalliques ..... 15

1.3.2 Propriétés des matériaux céramiques ..... 15

1.4 Processus de fabrication des FGM ..... 16

1.4.1 Le traitement constructif ..... 16

1.4.2 Le traitement de transport ..... 17

1.5 Domaines d'applications des FGM ..... 18

1.6 Conclusion ..... 19

2 Mécanique linéaire de la rupture ..... 21

2.1 Introduction ..... 21

2.2 Définition ..... 21

2.3 Mécanique linéaire de la rupture ..... 21

2.3.1 Champ des contraintes et déplacements ..... 22

2.4 Théorie d'élasticité ..... 23

2.4.1 Les équations d'équilibre ..... 23

2.4.2 Les équations de compatibilité ..... 24

2.4.3 L'équation constitutive ..... 25

2.5 Types de ruptures ..... 25
2.5.1 Rupture ductile ..... 26
2.5.2 Rupture fragile ..... 26
2.5.3 Rupture par fatigue ..... 26
2.6 Modes de ruptures ..... 26
2.7 Inspection et détection des fissures ..... 27
3 Modélisation des matériaux FGM ..... 30
3.1 Introduction ..... 30
3.2 Géométrie des éprouvettes d'essai ..... 30
3.2.1 Eprouvette CT (compact tension) ..... 31
3.2.2 Eprouvette SENB (Single-Edge Notched Bend) ..... 31
3.2.3 Eprouvette SENT (Single-Edge Notched Tension) ..... 31
3.2.4 Eprouvette DC(T) (Disk - Shaped Compact Tension) ..... 32
3.3 Caractérisation des matériaux ..... 33
3.3.1 Méthodes de description de la gradation des propriétés ..... 33
3.3.2 La règle des mélanges ..... 33
3.3.3 Module de Young ..... 34
3.3.4 Coefficient de Poisson ..... 35
3.3.5 Facteur d'intensité de contrainte critique $K_{IC}$ ..... 35
3.4 Conclusion ..... 36
4 Simulations et résultats ..... 38
4.1 Introduction ..... 38
4.2 Présentation des logiciels utilisés ..... 38
4.3 Description de la géométrie ..... 39
4.4 Propriétés du matériau ..... 39
4.5 L'analyse structurale ..... 42
4.5.1 Le maillage ..... 42
4.5.2 Le chargement et les conditions initiales ..... 42

4.6 Résultats de l'analyse structurale ..... 43
4.6.1 Répartition des contraintes ..... 43
4.6.2 Les déplacements et les déformations ..... 44
4.6.3 Le facteur d'intensité des contraintes normalisé ..... 46
4.6.4 Taille critique de la fissure ..... 47
4.7 Conclusion ..... 50
Conclusion Générale ..... 51
Références bibliographiques ..... 52
ANNEXE ..... 53

# Liste des figures

Figure 1-1 FGM en gradation progressive et continue. 13
Figure 1-2 FGM en gradins. 13
Figure 1-3 Classifications des méthodes de production des FGM [1]. 18
Figure 1-4 Domaines d'applications des FGM. 19
Figure 2-1 Champ des contraintes au voisinage du fond de fissure 22
Figure 2-2 Géométrie avec les domaines. 24
Figure 2-3 modes de ruptures. 27
Figure 3-1 l'éprouvette CT. 31
Figure 3-2 L'éprouvette SENB 31
Figure 3-3 L'éprouvette SENT. 32
Figure 3-4 L'éprouvette DC(T). 32
Figure 3-5 Les modèles de Voight et Reuss 34
Figure 4-1 Illustration de la gométrie utilisée 39
Figure 4-2 Variation de la température en fonction de (x/w). 40
Figure 4-3 Répartition du coefficient de Poisson. 41
Figure 4-4 Répartition du module de Young. 41
Figure 4-5 Le maillage de la plaque 42
Figure 4-6 Répartition de la température dans la plaque. 43
Figure 4-7 Répartition de la contrainte normale maximale sur le plan de la fissure pour un a/w= 10% 43
Figure 4-8 Le deplacement total dans la plaque FGM. 44
Figure 4-9 Déformation équivalente dans la plaque. 45
Figure 4-10 Déformation au voisinage du bord de fissure. 45
Figure 4-11 Répartition de déformation normale maximale sur le plan de la fissure pour un a/w= 10% 46
Figure 4-12 Fonction de forme f (x/w) 47
Figure 4-13 Approximation de la relation ($a_c$ – exposant de la loi puissance) par une régression linéaire 48
Figure 4-14 Evolution de $K_I$ et $K_{IC}$ en fonction de a/w selon les différentes formes de gradation 49

# Liste des tableaux

Tableau 4-1 Propriétés des matériaux utilisés. ..... 39
Tableau 4-2 Le facteur d'intensité de contrainte normalisé ..... 46
Tableau 4-3 Taille critique de la fissure en fonction de l'exposant n de la loi puisssance. ..... 48

# Introduction Générale

Les progrès scientifiques dans le domaine de la science des matériaux et les développements continus de l'industrie moderne, notamment dans les secteurs de la défense, de l'aérospatiale et du biomédical, encouragent l'optimisation des matériaux afin de satisfaire les propriétés et qualités nécessaires. Cela a conduit au développement des alliages, qui sont constitués de plusieurs éléments chimiques, tels que les céramiques et les aciers. Ces alliages se retrouvent partout dans les structures et les machines industrielles. L'ajout d'autres éléments au métal de base permet de durcir le matériau en augmentant ses caractéristiques mécaniques. Cependant, ces matériaux présentent des propriétés continues qui ne répondent pas toujours aux objectifs suggérés.

Suite à ces recherches, les matériaux composites ont été développés. Ces matériaux possèdent des propriétés intéressantes telles que la légèreté et la flexibilité, et ils sont plus résistants. De plus, ils peuvent également offrir une résistance à la corrosion et à l'usure. Toutefois, ces matériaux ont pour inconvénient de voir leur résistance diminuer à des températures élevées, et ils présentent une transition brusque des propriétés à la jonction des différents matériaux, ce qui conduit à des concentrations élevées de contraintes et à la défaillance des composants par le processus de délamination. D'autre part, les matériaux céramiques présentent une excellente résistance thermique, mais leurs applications sont limitées en raison de leur faible dureté.

La mise au point de matériaux aux propriétés graduées a été nécessaire pour obtenir une transition plus graduelle et pour répondre aux exigences de performances fonctionnelles, afin d'améliorer les performances globales des composants. Ces matériaux, considérés comme la quatrième génération de matériaux composites et appelés, matériaux à gradient fonctionnel ou FGM (Functionally Graduated Materials), permettent de combiner les propriétés spécifiques de différents matériaux en un seul composant, avec des transitions graduelles dans la composition. Ils sont très attrayants pour des applications exigeantes telles que les revêtements thermiques et d'usure.

Dans les FGM, la distribution des propriétés des matériaux change progressivement d'une région à une autre, ce qui crée un matériau hétérogène pouvant présenter des propriétés mécaniques et physiques uniques. Cette hétérogénéité peut également influencer le comportement des fissures et des fractures dans le matériau, ce qui rend la mécanique de la

rupture un outil essentiel pour comprendre et concevoir des FGM pour diverses applications. La mécanique de la rupture dans les FGM implique l'étude des interactions entre les fissures et les propriétés mécaniques variables à l'intérieur du matériau. Cela peut inclure le calcul du facteur d'intensité de contrainte, du taux de croissance de fissures et de la ténacité du matériau, entre autres paramètres.

L'objectif de ce travail est de déterminer, par simulation numérique sous ANSYS® et Matlab®, les paramètres de fissuration d'un matériau FGM à base d'aluminium (le métal) et d'alumine (la céramique). Les paramètres de fissuration font référence à la répartition de la ténacité à travers le matériau et au facteur d'intensité des contraintes pour une taille de fissure donnée.

Pour atteindre cet objectif, différentes fonctions telles que linéaire, exponentielle et puissance ont été utilisées afin de créer une gradation des propriétés mécaniques du matériau dans la direction transversale (perpendiculaire à la direction de chargement). Pour chaque type de gradation, les contraintes, les déformations, la ténacité du matériau et la taille critique des fissures ont été calculées en utilisant les principes de la mécanique linéaire de la rupture, qui s'appliquent aux matériaux fragiles.

Le mémoire est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre donne un aperçu des matériaux FGM, en abordant leurs types, leurs propriétés mécaniques, leurs processus de fabrication et leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre présente les notions fondamentales de la mécanique linéaire de la rupture appliquées aux matériaux fragiles.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation des matériaux FGM selon trois approches : analytique, numérique et expérimentale. Ce chapitre offre un aperçu des méthodes de caractérisation des FGM ainsi que des géométries d'éprouvettes d'essai utilisées.

Le quatrième et dernier chapitre regroupe les résultats essentiels du travail. Il présente les résultats des simulations numériques par éléments finis, ainsi que les interprétations appropriées.

Le mémoire se conclut par une synthèse et des perspectives pour de futurs travaux.

# CHAPITRE I

# GENERALITES SUR LES MATERIAUX FGM

# 1 Généralités sur les matériaux FGM

## 1.1 Introduction

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) ont été initialement proposés au Japon en 1984 afin de développer un seul matériau qui pourrait supporter des conditions extrêmes, comme une température de surface de 2000K et un gradient de température de 1000K dans une section transversale inférieure à 10mm.

La composition du matériau étant continuellement modifiée pour atteindre d'excellentes qualités réfractaires et mécaniques et il a était utilisé pour construit un engin spatial. En 1992, les FGM ont été classées parmi les dix technologies les plus innovantes au Japon et, depuis, elles ont suscité un intérêt considérable à l'échelle mondiale.

Bien que les FGM soient une invention relativement nouvelle, les organismes vivants examinent des changements graduels dans la microstructure des matériaux depuis des millions d'années, et des FGM ont été découverts dans la nature, comme dans les os et les dents.

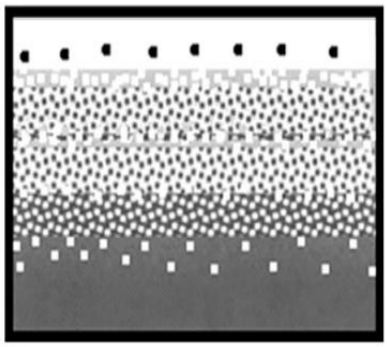


Figure 1-1 FGM en gradation progressive et continue.

Les matériaux FGM sont élaborés pour avoir des propriétés qui varient en fonction du volume du matériau, dans le but d'accomplir des fonctions spécifiques. Ces propriétés ne sont pas uniformes sur toute la longueur du matériau et dépendent de la position spatiale du matériau dans la structure globale. Les propriétés des matériaux FGM peuvent être de nature chimique, mécanique, magnétique, thermique et électrique et elles sont conçues pour varier de manière graduelle ou continue[2], en fonction des applications. Les FGM peuvent être structurés sous forme de gradins Figure 1-2 ou de manière graduelle en continu Figure 1-1.

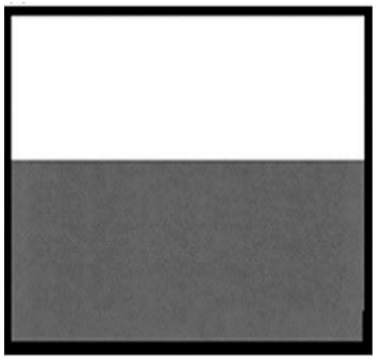


Figure 1-2 FGM en gradins.

## 1.2 Types de FGM

Il existe trois principaux types de matériaux FGM, matériaux à gradient de porosité, matériaux à gradient chimique et matériaux structurés par gradient microstructural[2].

- **Les matériaux de gradient de porosité :** peuvent être une gradation de densité de porosité ou une gradation de la taille des pores, obtenue par différentes tailles de particules de poudre ou des paramètres de traitement de production. La gradation de porosité favorise l'absorption des chocs, l'isolation thermique, l'efficacité catalytique et la relaxation des contraintes électriques et thermiques peut également affecte la résistance à la traction et le module de Young.

- **Matériaux structurés par gradient microstructural :** c'est un autre type de FGM, où La microstructure du matériau est adaptée pour produire différentes microstructures à l'intérieur du matériau. On peut y parvenir par des procédés de solidification ou de traitement thermique contrôlés, ce qui entraîne une modification progressive des propriétés des matériaux par rapport à leur position. Les FGM à gradient microstructural sont utilisés dans les composants qui nécessitent une surface dure pour résister à l'usure et un noyau qui résiste un impact élevé, comme l'acier durci, les cames, les roulements et les applications de turbine.

- **Les matériaux à gradient chimique :** ont une composition chimique qui varie graduellement en fonction de leur position spatiale. Les FGM peuvent être soit un matériau monophasé, résultant de la solubilité des éléments chimiques, soit un matériau multiphasé, avec différentes phases et compositions chimiques variant dans l'ensemble du volume du matériau.

Les FGM multiphasés sont plus couramment utilisés et conçus. Les différentes phases formées dans un FGM dépendent de la quantité de matériau de renforcement utilisée et des conditions de fabrication spécifiques employées.

En métallurgie des poudres, les FGM sont produites par l'empilement séquentiel de la composition de poudre souhaitée, suivi de la compression et du frittage. Ce processus de frittage provoque la réaction de certaines poudres métalliques et la formation de différents composés et phases chimiques, qui sont distribués spatialement dans le FGM.

## 1.3 Propriété de FGM

FGM, Qui est souvent construit de deux types de matériaux de base, La céramique et le métal qui peuvent être combinés de différentes manières. Choisi en fonction des caractéristiques physiques de chaque composant, Peut comprendre des propriétés incompatibles telles que la résistance à la chaleur, l'usure et l'oxydation de la céramique à haute ténacité, haute résistance et la possibilité à l'usinage.

### 1.3.1 Propriétés des matériaux métalliques

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium. Ils possèdent plusieurs avantages tel que :

- Résistance mécanique élevée.
- Ductilité.
- Conductivité électrique et thermique élevée.
- Ténacité.
- Déformation élastique élevée.
- Absorption d'énergie élevée.
- Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

### 1.3.2 Propriétés des matériaux céramiques

La majorité des matériaux céramiques sont des matériaux extrêmement durs fabriqués à partir de la combinaison de métal (Al, Ni, Ti, Zr, etc.) et d'éléments non métalliques. Ils sont fréquemment utilisés dans les environnements à haute température. Ils se distinguent par leur comportement réfractaire, qui s'explique par leur résistance mécanique et thermique extrêmement élevée. Ils ont un comportement généralement irrégulier, ce qui limite leur utilisation dans les situations impliquant des chocs mécaniques et thermiques importants.

Les céramiques possèdent plusieurs avantages tel que :

- Rigidité et résistance à la compression élevées.
- Résistance à la chaleur et à la corrosion.
- Résistance à l'abrasion.
- Isolation électrique.
- Faible coefficient de dilatation thermique.
- Haute résistance diélectrique.

## 1.4 Processus de fabrication des FGM

Les Processus de fabrication des FGM jouent un rôle très important dans la recherche et peuvent également nous fournir des approximations de la disposition de matériaux FGM lors de modélisation numérique. Ces techniques modernes reposent sur deux grandes catégories, le traitement constructif et le traitement de transport de masse Figure 1-3.

### 1.4.1 Le traitement constructif

Le traitement constructif consiste à fabriquer la FGM couche par couche, tandis que le transport de masse repose sur des phénomènes de transport naturels.

La technologie d'automatisation a rendu le processus de gradation constitutif plus faisable. Les techniques de dépôt en phase vapeur, la métallurgie des poudres, la coulée centrifuge et la fabrication de formes libres solides sont les quatre principales méthodes utilisées pour fabriquer des FGM.

- **Les techniques de dépôt en phase vapeur ou CVD** (Chemical Vapor Deposition) impliquent l'utilisation de réactions chimiques, ce sont des techniques largement utilisés dans l'industrie pour former un matériau solide par la superposition des couches minces crée par la réaction des précurseurs gazeux avec une pression et température élevée. Les techniques de CVD les plus courante sont CVD (thermique, plasma, photochimique, à basse pression).

- **La métallurgie des poudres** est utilisée pour produire des pièces de formes complexes avec une grande précision dimensionnelle et des propriétés améliorées telles que la résistance à l'usure et la résistance à la corrosion, cette technique implique la préparation de la poudre la pesée et le mélange de la poudre, l'empilement et le pilonnage des poudres pré-mélangées et le frittage.

- **La coulée centrifuge** consiste à faire tourner le moule en utilisant la force gravitationnelle pour produire des pièces cylindriques. Cette méthode est coûteuse et nécessite une expertise technique avancée mais elle permet de produire des FGM avec une répartition uniforme et une densité contrôlée.

- **La fabrication de formes libres solides** utilise des informations générées par ordinateur pour produire des formes physiques (L'impression 3D) avec la possibilité de

faire varier la composition interne des matériaux pour construire des objets couche par couche à partir de matériaux comme le plastique, la céramique ou le métal. Cette méthode permet de créer des formes complexes qui seraient difficiles, voire impossibles, à produire par d'autres moyens.

### 1.4.2 Le traitement de transport

Les techniques de fabrication qui repose sur le traitement de transport de masse consistent à introduire des différents composants dans un matériau de base pour créer une variation graduelle de composition à travers le matériau. Des techniques telles que la diffusion en phase gazeuse, la pulvérisation cathodique, le dépôt de couches atomiques, la croissance de cristal épitaxial, la synthèse de sol-gel et d'autres techniques similaires.

Les FGM fabrique par ces méthodes sont largement utilisées dans diverses applications telles que la production d'énergie, l'aérospatiale, l'ingénierie biomédicale.

Le traitement de transport de masse permet de créer des FGM avec des propriétés uniques et contrôlables, telles que la conductivité thermique, la conductivité électrique, la résistance à l'usure, la résistance à la corrosion et d'autres propriétés physiques et chimiques.

- **La diffusion en phase gazeuse** est une technique de fabrication couramment utilisée pour produire des FGM avec des gradients de composition contrôlés et précis et des revêtements et des couches minces avec des propriétés spécifiques, mais cette technique est coûteuse et nécessiter un équipement spécialisé pour la préparation et le traitement des gaz.

- **La pulvérisation cathodique** est une méthode relativement simple et facile à mettre en œuvre qui utilise un processus de vaporisation de matériaux qui sont déposés sur un substrat pour former une couche mince. La technique de pulvérisation cathodique est largement utilisée dans l'industrie pour produire des couches minces de matériaux tels que l'or, l'argent, le cuivre, le titane, le zinc et le chrome.

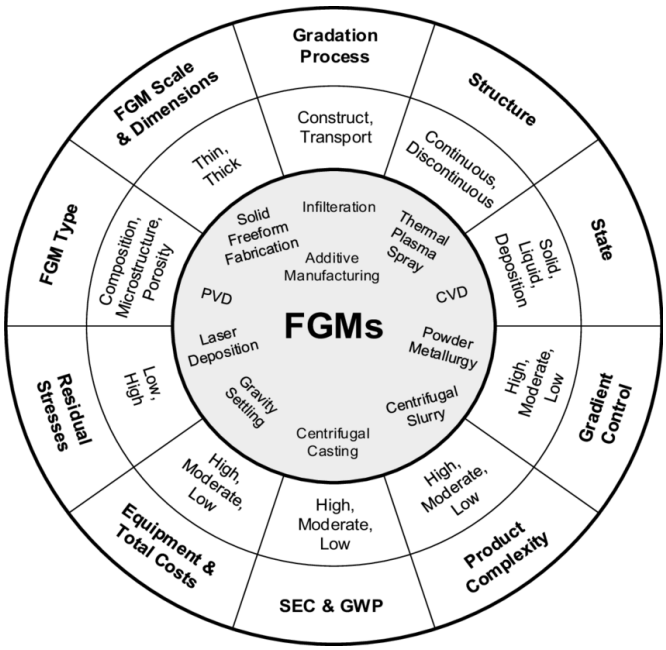



Figure 1-3 Classifications des méthodes de production des FGM [1].

## 1.5 Domaines d'applications des FGM

Les FGM sont favorisés en raison de leurs caractéristiques importantes. Actuellement utilisés dans diverses industries Figure 1-4, ces matériaux présentent un énorme potentiel d'utilisation dans de futures applications. Ces industries incluent l'automobile, l'électronique, la défense, l'énergie et marine, où les utilisations structurelles et les techniques nécessitent la combinaison de fonctionnalités incompatibles entre elles, telles que la ténacité et la dureté.

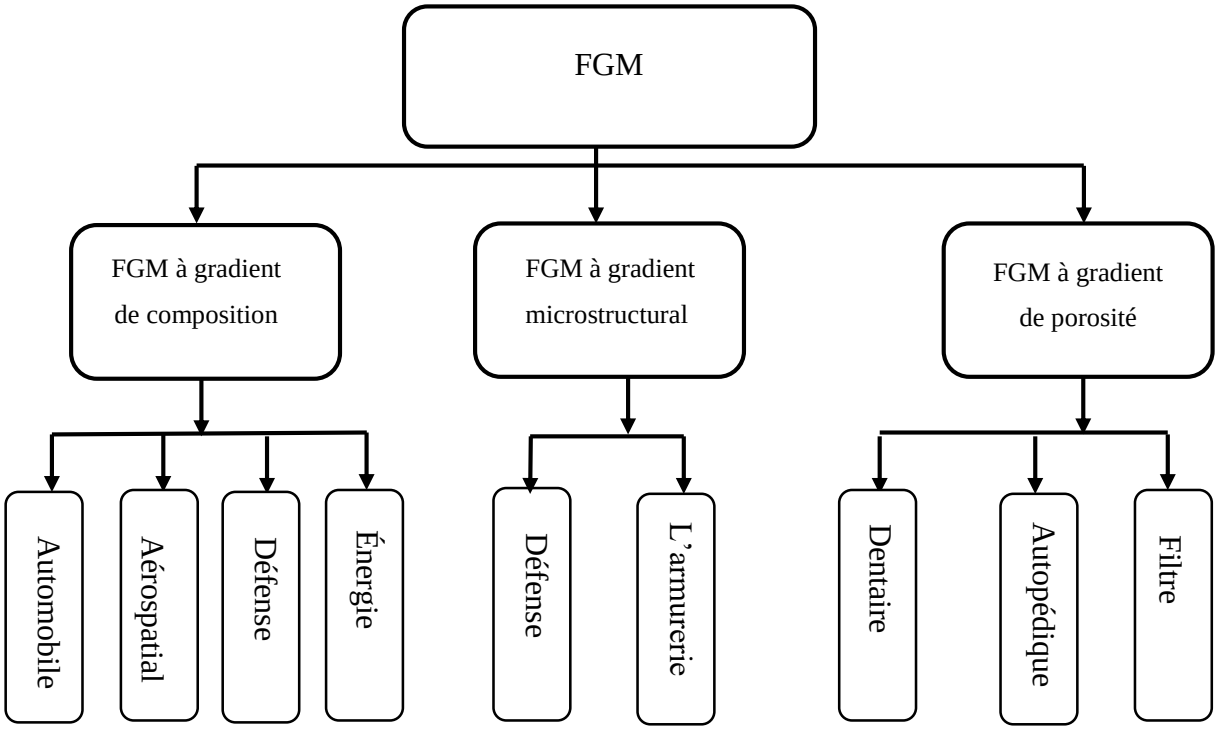



Figure 1-4 Domaines d'applications des FGM.

## 1.6 Conclusion

La majorité des FGM sont des matériaux constitués de divers composants, les céramiques et les métaux étant les plus connus. Dans ce chapitre, nous avons couvert les principes fondamentaux des FGM, y compris leurs différents types, caractéristiques, procédés de fabrication, et domaines d'application. La mécanique de la rupture des FGM sera étudiée dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE 2

# MECANIQUE LINEAIRE DE LA RUPTURE

# 2 Mécanique linéaire de la rupture

## 2.1 Introduction

La présence de la fissure peut réduire considérablement la résistance structurale et la fiabilité, la résistance à la rupture qui peut se considère comme une propriété du matériau traduire par la ténacité. Cette ténacité remplace la résistance du matériau ce qui est la limite élastique.

Les ruptures sont généralement causées par des erreurs de conception ou l'utilisation de nouveaux matériaux ou procédés qui peuvent entraîner des ruptures inattendues.

Contrairement à l'approche classique (RDM) l'approche de la mécanique de la rupture tient compte de l'éventuelle présence des défauts (microfissures).

Griffith a introduit la relation entre la ténacité et la taille des fissures, ce qui fait de la taille des fissures un paramètre important dans l'approche de la mécanique des fractures.

La propagation de la fissure dans les matériaux homogènes est influencée par des facteurs, tels que le mode de chargement, la géométrie et la taille de la fissure .et les propriétés mécaniques du matériau tandis que la propagation des fissures dans les matériaux FGM peut être influencée par la variation des propriétés du matériau à travers la pièce et peut avoir des propriétés qui minimisent la propagation de la fissure.

Ce comportement de propagation peut être décrit à l'aide de modèles de fracture élastique linéaire, qui prennent en considération la variation des propriétés physiques du matériau dans la zone de la fissure. Le taux de propagation des fissures et la résistance du matériau à la rupture peuvent être prédits à l'aide de ces modèles.

## 2.2 Définition

La mécanique des fractures est une branche de la mécanique des solides qui étudie les fractures et leur propagation dans les matériaux et peut aider à améliorer les performances et la durabilité des pièces fabriquées.et également Le coût de défaillance peut être considérablement réduit lorsque les mécanismes de rupture et de développement sont utilisés correctement.

## 2.3 Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de rupture LEFM ou (Linear Elastic Fracture Mechanics) en anglais est un cadre mathématique utilisé pour étudier le comportement des fissures dans les matériaux solides. Elle suppose que le matériau considéré est linéairement élastique, ce qui signifie que sa réponse aux contraintes est proportionnelle à la quantité de contraintes appliquée. LEFM est

particulièrement utile pour étudier le comportement des fissures qui sont petites par rapport aux dimensions de la structure dans laquelle ils sont situés.

Toutes les découvertes les plus avancées dans la mécanique de fracture récentes sont des extensions de la mécanique linéaire de rupture élastique (LEFM) élaborés avant 1960 qui s'appliquent qu'aux matériaux qui satisfont à la loi de Hooke[3].

Ces théories ont été développées depuis 1960 pour tenir compte les matériaux non linéaires avec des ajustements de plasticité à petite échelle.

Dans LEFM, le comportement d'une fissure est décrit en utilisant le facteur d'intensité de contrainte (K), qui est une mesure de la concentration de contrainte à l'extrémité de la fissure. K est lié à la charge appliquée, à la longueur de la fissure et aux propriétés du matériau du solide. Lorsque K dépasse une certaine valeur critique (KIc), la fissure se propage, entraînant la défaillance de la structure.

### 2.3.1 Champ des contraintes et déplacements

Les contraintes et les déplacements au voisinage de fissure Figure 2-1 obtenue en temps que des résultats de la théorie élastique pour un problème de fissure avec une contrainte d'ouverture (mode1) peut s'écrire en coordonné polaire et ils sont donnée par :

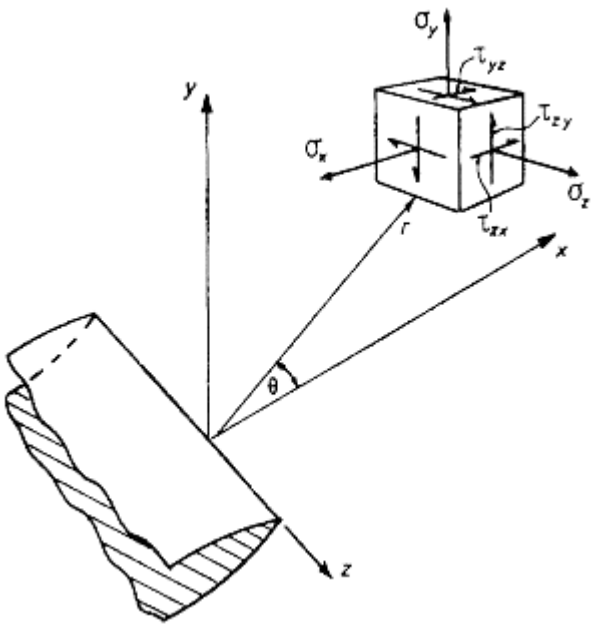



Figure 2-1 Champ des contraintes au voisinage du fond de fissure

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{Bmatrix}1 - sin\left(\frac{\theta}{2}\right) sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\\ 1 + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\end{Bmatrix} \qquad 2\text{-}1$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\\ \tau_{xz} = \tau_{xz} = 0\end{matrix}\right\}\ déformation\ plane. \qquad 2\text{-}2$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{xz} = 0\}\ contrainte\ plane. \quad 2\text{-}3$$

Les déplacements au voisinage de fond de fissure pour (mode 1) sont donnée par :

$$\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\kappa - 1 + 2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\kappa + 1 - 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{Bmatrix} \qquad 2\text{-}4$$

Où μ est le module de cisaillement.

Et $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu \text{ (déformation plane)}\\ (3 - \nu)/(1 + \nu) \text{(contraite plane)}\end{cases}$ 2-5

## 2.4 Théorie d'élasticité

La théorie d'élasticité permet d'étudier le comportement des solides élastiques sous l'action des systèmes de force extérieure appliqués, en particulier pour l'étude de contraintes et de déformation au voisinage des irrégularités locales tel que les fissure ou les entaille dans le matériau.

La théorie d'élasticité peut fournir des solutions pour les problèmes plans de fissures. Les solutions à déterminer sont les équations d'équilibre et les équations de compatibilité.

### 2.4.1 Les équations d'équilibre

Ils sont basés sur le principe fondamental de la mécanique statique. Ces équations assurent que les forces internes équilibrant les forces appliquées et les réactions extérieures sont en équilibre.

Soit un domaine planaire **Ω** délimité par un contour **Γ** divisé en trois partie **($\Gamma_u$; $\Gamma_t$ ; $\Gamma_c$)** Figure 2-2 tel que : $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ et $\Gamma_c \cap \Gamma_t = 0$ 2-6

Les conditions de déplacement $\boldsymbol{u}$ sont imposées $\boldsymbol{\Gamma_u}$ tandis que les forces de tractions sont appliquées sur $\boldsymbol{\Gamma_t}$. Alors que $\boldsymbol{\Gamma_c}$ le domaine sans charge et qui représente les surfaces de fissures. L'équilibre et les conditions limites de ce problème peuvent être décrits comme suit :

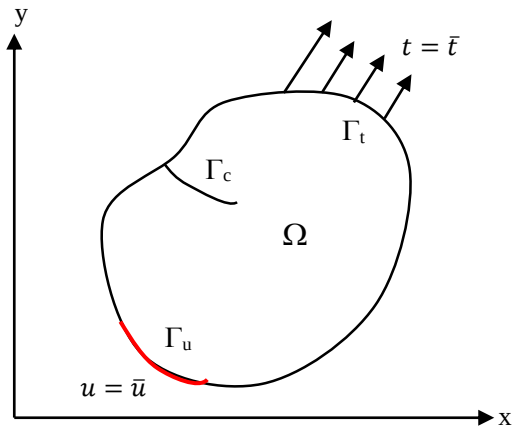



Figure 2-2 Géométrie avec les domaines.

$$\begin{cases} \nabla.\sigma + b_i = 0 & \text{Dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \sigma.\vec{n} = \vec{0} & \text{Sur } \boldsymbol{\Gamma_c} \end{cases} \qquad 2\text{-}7$$

$$\begin{cases} \sigma.\vec{n} = \vec{t} & \text{Sur } \boldsymbol{\Gamma_t} \\ u = \bar{u} & \text{Sur } \boldsymbol{\Gamma_u} \end{cases} \qquad 2\text{-}8$$

À condition que l'une des deux équations limites soit appliquée à chaque point du boudoir et ne s'applique pas en même temps.

Où **:**

- $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contrainte de Cauchy.
- u est le vecteur déplacement.
- b est le vecteur de force volumétrique.
- $\vec{t}$ est le vecteur de forces extérieures de traction.
- $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur.

### 2.4.2 Les équations de compatibilité

Les équations de compatibilité (équations2-9) ont basées sur l'idée que les déformations doivent être cohérentes et compatibles avec les contraintes appliquées. Ils garantissent que les déformations induites par le problème de fissure satisfont aux exigences de continuité et d'équilibre du mouvement.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \qquad 2\text{-}9$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right)$$

Avec $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

Et $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$

$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$

### 2.4.3 L'équation constitutive

L'équation constitutive pour un matériau FGM on considérant les conditions d'élasticité linéaire peut s'écrire :

$[\sigma] = [D]\{\varepsilon\}$ 2-10

Pour des conditions de déformation plane $[D]$ est donnée par :

$$[D] = \frac{E(x)}{(1-2\nu(x))(1+\nu(x))} \times \begin{bmatrix} 1-\nu(x) & \nu(x) & 0 \\ \nu(x) & 1-\nu(x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(x)}{2} \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}11$$

## 2.5 Types de ruptures

Il existe plusieurs types de ruptures selon la mécanique de rupture, qui dépendent des conditions comme (la vitesse de propagation, l'énergie de rupture…ex) et des mécanismes de défaillance

impliqués comme (les sollicitations mécaniques cycliques, amplitude de charge, type de charge…ex). Ci-dessous, les trois types principaux de ruptures :

### 2.5.1 Rupture ductile

La rupture ductile se caractérise par un faciès mat et fibreux. Elle se produit lorsqu'un matériau est soumis à une déformation plastique importante avant la rupture. Les matériaux ductiles ont une bonne capacité à absorber l'énergie avant la rupture, ce qui entraîne une déformation importante plutôt qu'une rupture rapide.

### 2.5.2 Rupture fragile

Une rupture fragile présente un aspect brillant à grain, Contrairement à la rupture ductile, la rupture fragile se produit avec des déformations plastiques faibles. Elle est définie par la défaillance inattendue et soudaine du matériel sans avertissement préalable. Les matériaux fragiles ont une faible tolérance aux défauts et sont souvent plus cassante que les matériaux ductiles.

### 2.5.3 Rupture par fatigue

: Se produit lorsqu'un matériau est soumis à des charges cycliques répétées et si la contrainte globale est au-dessus d'un seuil. Ce seuil est situé dans le domaine élastique du comportement mécanique du matériau qui peut entraîner une défaillance graduelle en raison de l'accumulation de microfissures. Ces microfissures se propagent progressivement jusqu'à ce que toute la rupture soit perçue. La rupture par fatigue présente un faciès strié représentatif du niveau de chargement. Plus le niveau de contrainte est faible et plus la distance entre les stries est petite.

## 2.6 Modes de ruptures

Le mode de rupture décrit comment un matériau se brise en raison d'une contrainte. Il existe plusieurs démarches de rupture, selon la nature de la contrainte appliquée et la géométrie de la pièce. On définit 3 modes élémentaires de déplacement de bord d'une fissure Figure 2-3.

Pour le problème plan :

- (a) Mode 1 : ouverture.
- (b) Mode 2 : Glissement parallèle où cisaillement plan.

Et pour le problème anti plans :

- (c) Mode 3 : Glissement perpendiculaire ou déchirement.

Toute fissure réelle ne peut être que la combinaison de ces 3 modes élémentaires.

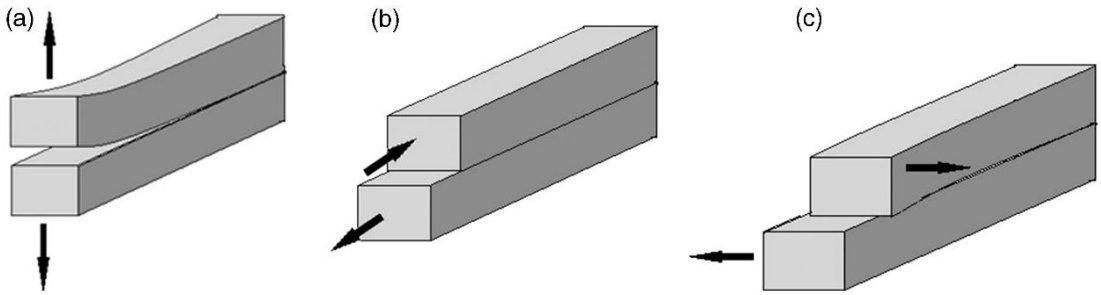



Figure 2-3 modes de ruptures.

## 2.7 Inspection et détection des fissures

Il existe plusieurs méthodes de détection des fissures, selon le type de matériau, l'emplacement et du prolongement de la fissure. Voici quelques méthodes courantes de détection des fissures :

- **Inspection visuelle** : L'inspection visuelle est la méthode la plus simple et la plus courante de détection des fissures. Il consiste à examiner visuellement la surface du matériau à la recherche de fissures visibles ou d'autres signes de dommages. Cette méthode est utile pour détecter les fissures de surface dans les métaux, les plastiques et d'autres matériaux.
- **Essai de ressuage** : L'essai de ressuage est une méthode d'essai non destructif utilisée pour détecter les fissures de surface dans des matériaux non poreux comme les métaux, les céramiques et les plastiques. Il s'agit d'appliquer un colorant liquide ou un agent de ressuage fluorescent à la surface du matériau, qui est ensuite laissé s'infiltrer dans les fissures ou les défauts. Une fois l'excès d'agent de ressuage éliminé, un révélateur est appliqué, ce qui fait en sorte que l'agent de ressuage s'échappe des fissures ou des défauts, les rendant visibles sous la lumière ultraviolette.
- **Essais magnétoscopiques** : Les essais magnétoscopiques sont une autre méthode d'essai non destructif utilisée pour détecter les fissures superficielles et légèrement souterraines dans les matériaux ferromagnétiques comme l'acier. Elle consiste à appliquer un champ magnétique au matériau, puis à introduire des particules de fer qui sont attirées par toute fuite de flux magnétique causée par des fissures ou des défauts.
- **Contrôle par ultrasons** : Le contrôle par ultrasons est une méthode d'essai non destructif qui utilise des ondes sonores à haute fréquence pour détecter des fissures et

d’autres défauts dans les métaux et d’autres matériaux. Il s’agit d’appliquer un transducteur à la surface du matériau, qui émet des ondes sonores qui sont réfléchies au transducteur par des fissures ou des défauts.

- **Radiographie et essais radiographiques** : Les radiographies et les essais radiographiques consistent à utiliser un rayonnement de haute énergie pour pénétrer le matériau et créer une image de toute fissure ou défaut. Cette méthode est utile pour détecter les fissures souterraines dans les métaux, les composites et d’autres matériaux.
- **Essais de courants de Foucault** : Les essais de courants de Foucault sont une méthode d’essai non destructif utilisée pour détecter les fissures de surface et légèrement sous la surface dans les matériaux conducteurs comme les métaux. Il s’agit d’appliquer un champ magnétique au matériau, puis d’induire des courants de Foucault qui sont perturbés par des fissures ou des défauts, provoquant une modification de la conductivité électrique qui peut être détectée.

# CHAPITRE 3

# MODELISATION DES MATERIAUX FGM

# 3 Modélisation des matériaux FGM

## 3.1 Introduction

La modélisation des propriétés des matériaux FGM implique souvent l'utilisation d'approches de modélisation multi-échelles qui prennent en compte les propriétés microscopiques et macroscopiques du matériau.

La modélisation analytique permet de dériver des solutions mathématiques pour décrire les variations des propriétés à travers l'épaisseur du matériau FGM. Cependant, cette approche est limitée aux cas où les variations sont régulières et facilement représentées par des fonctions mathématiques.

La modélisation numérique, telle que la méthode des éléments finis est couramment utilisée pour modéliser les matériaux FGM. Elle divise le matériau en éléments plus petits et résout numériquement les équations qui décrivent le comportement du matériau. Les modèles numériques peuvent prendre en compte divers paramètres comme la composition, la densité, la porosité, etc., et fournir des prédictions sur les propriétés du matériau à différentes positions.

La modélisation expérimentale est essentielle pour comprendre et prédire les propriétés des matériaux FGM. Elle implique l'utilisation de techniques telles que la microscopie électronique, la spectroscopie, la diffraction des rayons X, etc., pour analyser la structure et la composition des matériaux à différentes échelles.

## 3.2 Géométrie des éprouvettes d'essai

Il existe plusieurs types d'éprouvettes d'essai utilisées en mécanique de rupture pour évaluer les propriétés mécaniques et la résistance des matériaux à la rupture notamment la propagation des fissures et déterminer la ténacité des fractures.

L'utilisation de telles éprouvettes est déterminée par la norme d'essai et le matériau à l'étude. Les éprouvettes les plus utilisées sont les suivantes.

### 3.2.1 Eprouvette CT (compact tension)

L'éprouvette CT Figure 3-1 est largement utilisée pour les essais de mécanique de fracture. Une charge de traction est appliquée à un échantillon rectangulaire avec une fracture placée au centre. Le facteur d'intensité de contrainte, KI, est calculé en utilisant la longueur de rupture et la charge appliquée.

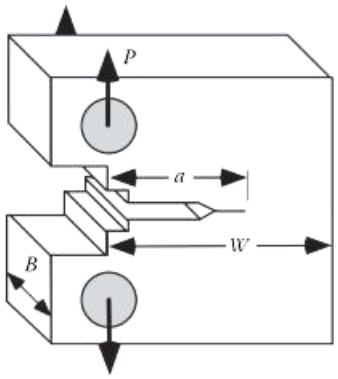



Figure 3-1 l'éprouvette CT.

### 3.2.2 Eprouvette SENB (Single-Edge Notched Bend)

L'éprouvette SENB Figure 3-2 est une éprouvette d'essai normalisé de mécanique de la rupture utilisé pour évaluer la résistance des matériaux à la propagation des fissures et à la ténacité. Il est généralement utilisé pour calculer le facteur d'intensité de contrainte critique (KIc) ou l'intégrale J critique (Jc) d'un matériau. Pour effectuer l'essai SENB, L'éprouvette est chargée en flexion à trois points, avec une force appliquée au milieu et deux points de support utilisés pour fixer l'éprouvette.

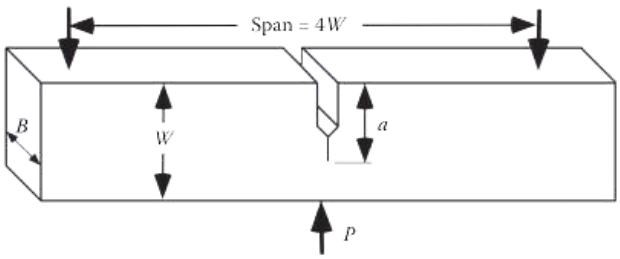



Figure 3-2 L'éprouvette SENB

### 3.2.3 Eprouvette SENT (Single-Edge Notched Tension)

Il est similaire à l'éprouvette (SENB) mais diffère dans la configuration de chargement. Pour effectuer l'essai Sent, L'éprouvette Figure 3-3 est chargée en tension le long de l'axe parallèle au plan de la fissure, Les résultats de l'essai SENT sont essentiels pour évaluer la ténacité du

matériau et sont utilisés dans diverses applications techniques. Les normes et procédures d'essai particulières pour les éprouvettes (SENT) peuvent varier selon le matériau à l'essai et les objectifs souhaités de l'étude.

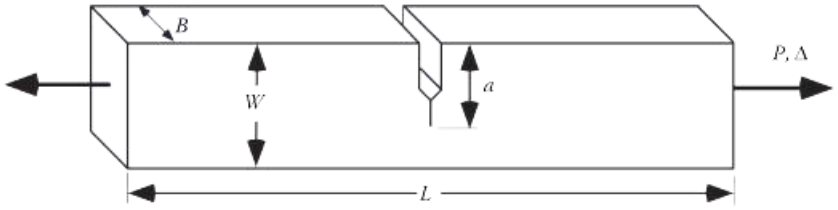



Figure 3-3 L'éprouvette SENT.

### 3.2.4 Eprouvette DC(T) (Disk - Shaped Compact Tension)

L'éprouvette DC(T) Figure 3-4 , est une éprouvette peut être de forme circulaire, elliptiques ou polygonales. Particulièrement utile pour tester des matériaux avec un volume limité ou des formes irrégulières comme les stratifiés composites.

Il se compose d'une plaque en forme de disque avec une fissure centrale de l'épaisseur, qui est créé en utilisant des charges de fatigue ou des méthodes de coupe spécialisées.

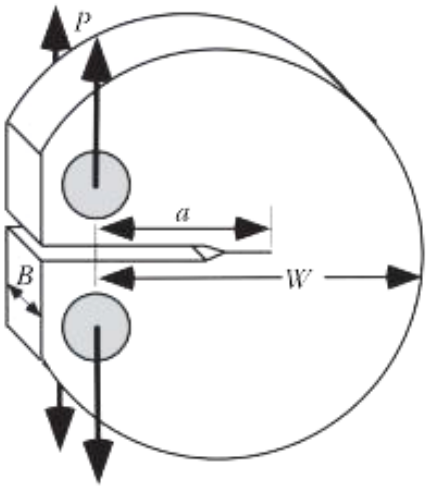



Figure 3-4 L'éprouvette DC(T).

## 3.3 Caractérisation des matériaux

La gradation des propriétés des matériaux FGM peut être accomplie par une variété de modèles, ce qui conduit à différents types de gradation. Les lois qui régissent la gradation des propriétés dans les matériaux FGM sont souvent basées sur des modèles mathématiques et des principes conceptuels. Pour décrire la gradation des propriétés telles que le module élastique, la résistance limite en traction, la conductivité thermique et la conductivité électrique.

### 3.3.1 Méthodes de description de la gradation des propriétés

Ce sont les méthodes qui décrivent la gradation des propriétés. Ces techniques comprennent des modèles mathématiques, analytiques, numériques et expérimentaux. Les modèles mathématiques peuvent être basés sur des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles ou d'autres structures mathématiques. Les modules numériques peuvent être utilisés pour simuler et prévoir les caractéristiques des matériaux de FGM.

### 3.3.2 La règle des mélanges

Est un principe fondamental utilisé pour estimer les propriétés d'un matériau composite en fonction des propriétés de ses constituants et de leurs fractions volumiques. Il fournit une relation linéaire directe entre les propriétés et la composition.

Il existe deux modèles pour la règle de mélange Figure 3-5 :

- **Modèle de Voigt**

Selon le modèle Voigt, le matériau composite se comporte comme s'il était constitué d'une série d'éléments parallèles, dont chacun correspond à une phase différente du matériau. Elle croit que la contrainte est constante pendant toutes les phases. Ce modèle fournit une estimation de la limite supérieure du module du composite.

- **Modèle de Reuss**

Le modèle de Reuss suppose que le matériau composite fonctionne comme s'il était composé d'un certain nombre d'éléments reliés, dont chacun représente une phase différente du matériau. Il suppose que les déformations sont constantes tout au long de chaque phase. Ce modèle offre une estimation de limite inférieure du module du composite.

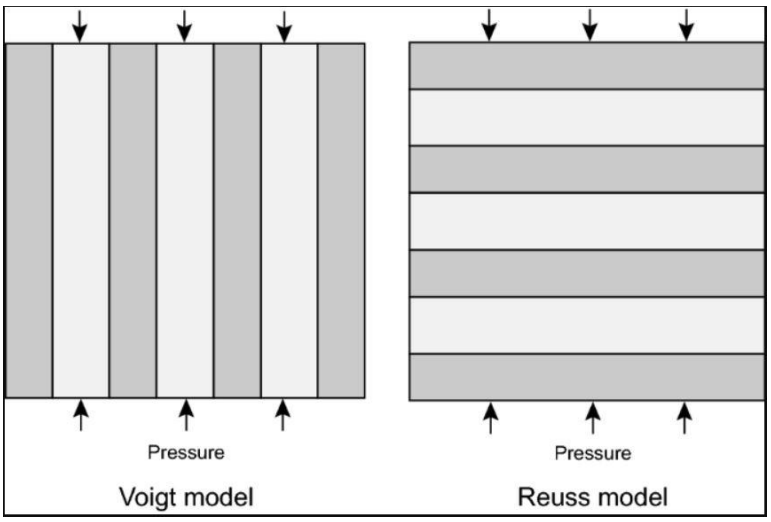


Figure 3-5 Les modèles de Voight et Reuss

### 3.3.3 Module de Young

Les types de gradient décrivent comment les propriétés du matériau changent le long de l'axe de gradient. Il est nécessaire pour l'évaluation de la résistance du matériau et de la résistance à la rupture des différents types et de les comparer pour connaître les avantages et les inconvénients de chaque gradation et les moyens de l'améliorer par le développement et la recherche. Ces types sont déterminées par la types de gradation du module de Young et du coefficient de Poisson souvent, mais peuvent inclure d'autres paramètres telles que le module de cisaillement μ et le facteur d'intensité é de contraints critique $K_{Ic}$[4].

- **Gradation linéaire**

Dans les FGM graduée linéairement, les propriétés changent uniformément et linéairement le long d'une seule direction.

Le module de Young est donné par la loi de répartition suivante[5] :

$$E(x) = E_0 + (E_w - E_0).\left(\frac{x}{w}\right) \qquad 3\text{-}1$$

Ou $E_0$ est le module de Young à (x=0) et $E_w$ est le module de Young à (x=w)

- **Gradation exponentielle**

Les plaques FGM qui sont graduées de façon exponentielle impliquent un changement dans leurs propriétés qui correspond à une fonction exponentielle. Près d'une extrémité, la variation de la propriété s'accélère rapidement avant de ralentir progressivement. Ce type de gradation est fréquemment utilisé pour assurer une transition harmonieuse entre les matériaux.

Le module de Young est donné par :

$$E(x) = E_0 \,.\, e^{\alpha x} \qquad 3\text{-}2$$

Ou α est donné par

$$\alpha = \frac{1}{w} \,.\, Ln\left(\frac{E_w}{E_0}\right) \qquad 3\text{-}3$$

- **Gradation selon une loi puissance**

Les FGM qui suivent une gradation en loi puissance ont des changements de propriétés non linéaires qui peuvent être contrôlés en changeant l'exposant de la loi de puissance n. L'adaptation des propriétés des matériaux est plus flexible avec ce type de gradation.

Le module de Young de la loi des gradations puissance est donnée par [5]:

$$E(x) = E_0 + (E_w - E_0).\left(\frac{x}{w}\right)^n \qquad 3\text{-}4$$

### 3.3.4 Coefficient de Poisson

Le coefficient de poisson peut être obtenu en appliquant la règle des mélanges et en utilisant les fractions volumiques de l'alliage et de la céramique.

Les fractions volumiques de l'alliage et de la céramique sont données par :

$$V_{\mathrm{w}}^{FGM}(x) = \frac{E(x)-E_0}{E_w-E_0} \quad , V_0^{FGM}(x) = 1\text{-}\, V_{\mathrm{w}}^{FGM}(x) \qquad 3\text{-}5$$

Où $V_w^{FGM}(x)$ et $E_w$ sont la fraction volumique et le module de Young de l'alliage et ($V_0^{FGM}(x)$ et$E_0$) sont la fraction volumique de et le module de Young de la céramique[6].

Le coefficient de Poisson est donné par :

$$\nu(x) = \frac{\nu_0\, E_w\, V_0^{FGM}(x) + \nu_w E_0 V_w^{FGM}(x)}{E_w\, V_0^{FGM}(x) + E_0 V_w^{FGM}(x)} \qquad 3\text{-}6$$

Où $\nu_0$ et $\nu_w$ sont les coefficients de Poisson de la céramique et de l'alliage respectivement.

### 3.3.5 Facteur d'intensité de contrainte critique $K_{IC}$

Les matériaux constituants ont des ténacités de rupture $K_{IC}^0$ et $K_{IC}^w$, et des fractions volumiques $V_0^{FGM}(x)$ et $V_{\mathrm{w}}^{FGM}(x)$, respectivement.

La ténacité à la rupture du matériau FGM peut être exprimée en fonction des fractions volumiques des constituants[7].

$$K_{IC}(x) = \frac{K_{IC}^w + K_{IC}^0}{2} + \frac{K_{IC}^w - K_{IC}^0}{2} \times \left(\sqrt{V_{\mathrm{w}}^{FGM}(x)} - \sqrt{V_0^{FGM}(x)}\right) \qquad 3\text{-}7$$

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la modélisation des propriétés des matériaux FGM ayant une gradation continue. Du côté de l'expérimental, nous avons décrit les différents types d'éprouvettes utilisées dans les essais mécaniques. D'un point de vue de la modélisation, nous avons donné quelques lois permettant de donner les propriétés mécaniques (Module de Young et coefficient de Poisson) selon la direction de gradation.

# CHAPITRE 4

# SIMULATIONS ET RESULTATS

# 4 Simulations et résultats

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, les paramètres de fissuration d'un matériau FGM à savoir, le facteur d'intensité de contrainte, la taille critique de la fissure et la ténacité du matériau, sont évalués en utilisant une approche par éléments finis sous le logiciel ANSYS Workbench® 2020 R2. Un script Matlab® a été développé pour créer le gradient fonctionnel des propriétés mécanique selon la direction transversal de la géométrie. Ce script nous a permis d'avoir la répartition du module d'élasticité, du coefficient du poisson et de la ténacité ($K_{IC}$). Pour créer le gradient fonctionnel sous ANSYS, nous avons utilisé un gradient constant de température entre les deux parois de la géométrie.

## 4.2 Présentation des logiciels utilisés

Il s'agit de l'ensemble de logiciels utilisés pour effectuer ce travail à partir d'outils de calcul, de simulation et de rédaction de texte.

- **MATLAB :** C'est un langage de programmation et émulé par un environnement de même nom Crée par CLEVE MOLER à la fin des années 1970 à partir des bibliothèques FORTRAN. Il est utilisé à des fins de calcul numérique. MATLAB permet de manipuler des matrices et d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes ou de crée des interfaces utilisateurs et peut également s'interfacer avec d'autre langages comme le c, c++, Java, et fortran.

- **ANSYS :** C'est un logiciel d'ingénierie largement utilisé. Il fournit des outils de simulation et de visualisation pour analyser et résoudre des problèmes d'ingénierie complexe. Notamment dans les disciplines telles que l'analyse structurelle, dynamique des fluides et modélisation des champs électromagnétiques. Les capacités de mécanique de rupture existent dans ANSYS depuis les années 1980 et ont évolué considérablement depuis pour inclure de nombreux cas liés au calcul de la résistance structurale.

## 4.3 Description de la géométrie

Dans cette étude, nous avons utilisé une géométrie avec des dimensions de (w=50mm) de largeur, qui vaut de (x=0mm à x=50mm) et (2 h=100mm) de hauteur qui vaut de (y=-50mm à y=50mm) .et on a supposé que la plaque soit épaisse donc on se trouve dans les conditions de déformation planes. Pour faciliter les calculs et la simulation on a imposé la symétrie par à port l'axe des x (plan de fissure) et nous avons pris la moitié supérieure de la plaque et on a ajouté la longueur de la fissure comme un paramètre d'étude pour faciliter l'étude paramétrique qui suivra.

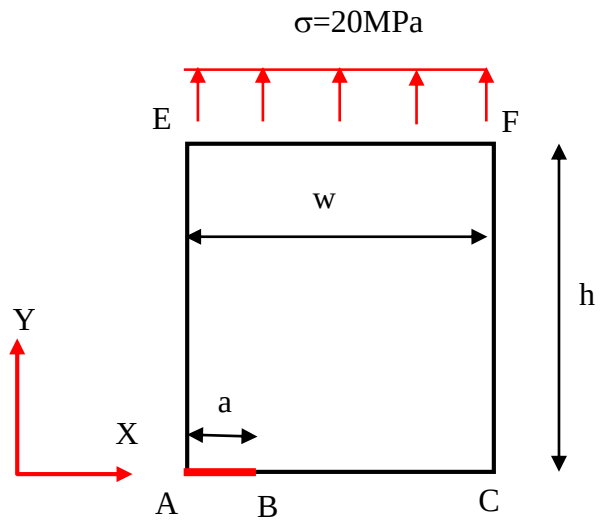



Figure 4-1 Illustration de la gométrie utilisée

## 4.4 Propriétés du matériau

Le matériau FGM utilisé pour la plaque est composé d'aluminium et d'alumine (céramique). La fraction volumique de céramique varie selon la direction transversale afin d'obtenir la gradation en propriété matérielle désirée. Le bord de gauche est en céramique pure alors que le bord de droite est en aluminium pur.

La fissure est positionnée au milieu de la plaque (y=0mm). Les propriétés des matériaux utilisés sont données dans le tableau suivant :

| Propriété de matériau | Aluminium | Céramique (alumine) |
|---|---|---|
| Module de Young E(GPa) | 70 | 300 |
| Coefficient de Poisson ν | 0.33 | 0.21 |
| La ténacité $K_{IC}$ (MPa.m $^{½}$) | 29 | 3.5 |

Tableau 4-1 Propriétés des matériaux utilisés.

Pour créer la gradation des propriétés on a utilisé un module de Young qui varie avec la température. Cette dernière varie linéairement avec la position transversale Figure 4-2 . De plus, afin de ne pas confondre les cotées de la plaque, les températures ont été choisies proportionnellement au module de Young de chaque matériau, la température du côté céramique est de (300 Cº) et celle du côté aluminium est de (70 Cº).

En utilisant les modèles de distribution présentées dans le chapitre précédent équations (3-1.3-2.3-4) on a calculé la répartition du module de Young E(x) et du coefficient de Poisson ν (x) à l'aide de l'outil mathématique MATLAB. Cette répartition est utilisée pour définir le matériau dans la simulation sous ANSYS.

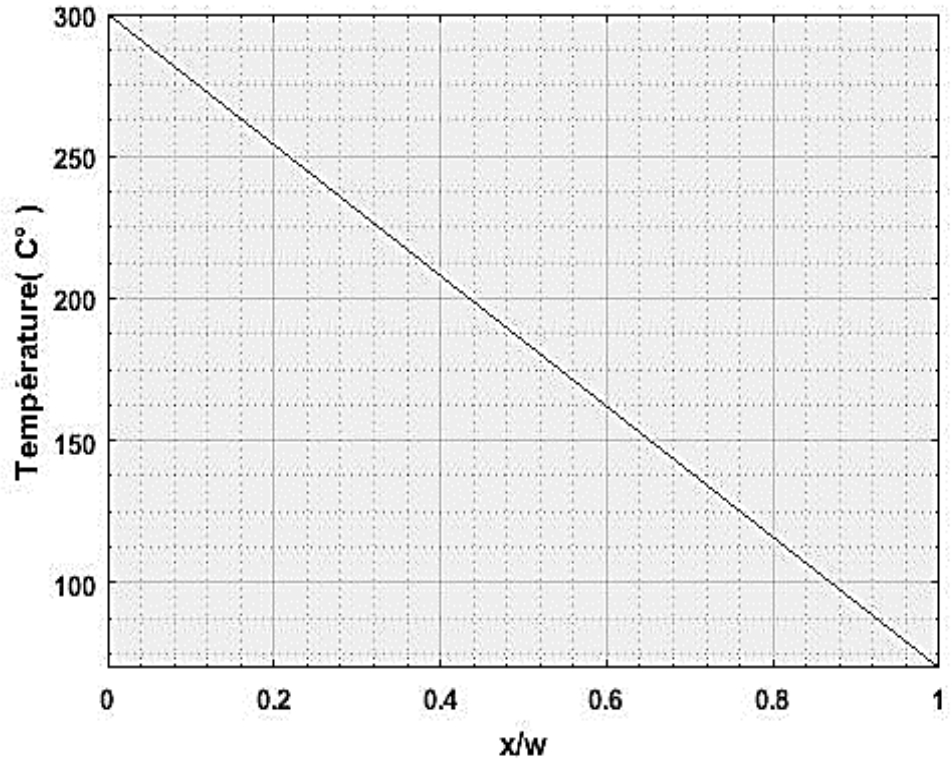



Figure 4-2 Variation de la température en fonction de (x/w).

La répartition de module de Young E(x) et coefficient de Poisson ν (x) est représentée dans la Figure 4-4 et la Figure 4-3 respectivement.

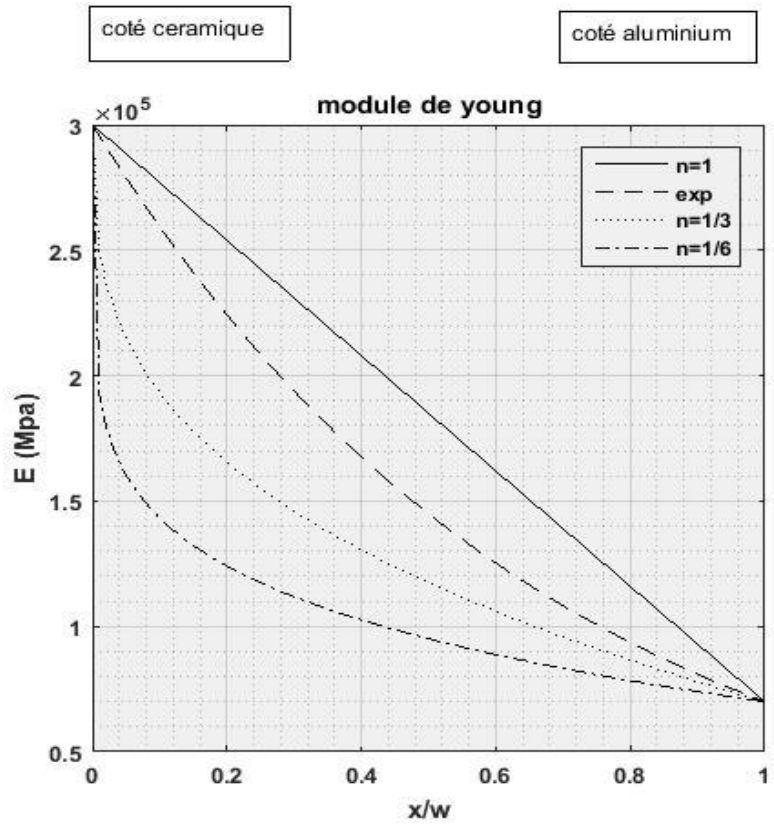



Figure 4-4 Répartition du module de Young.

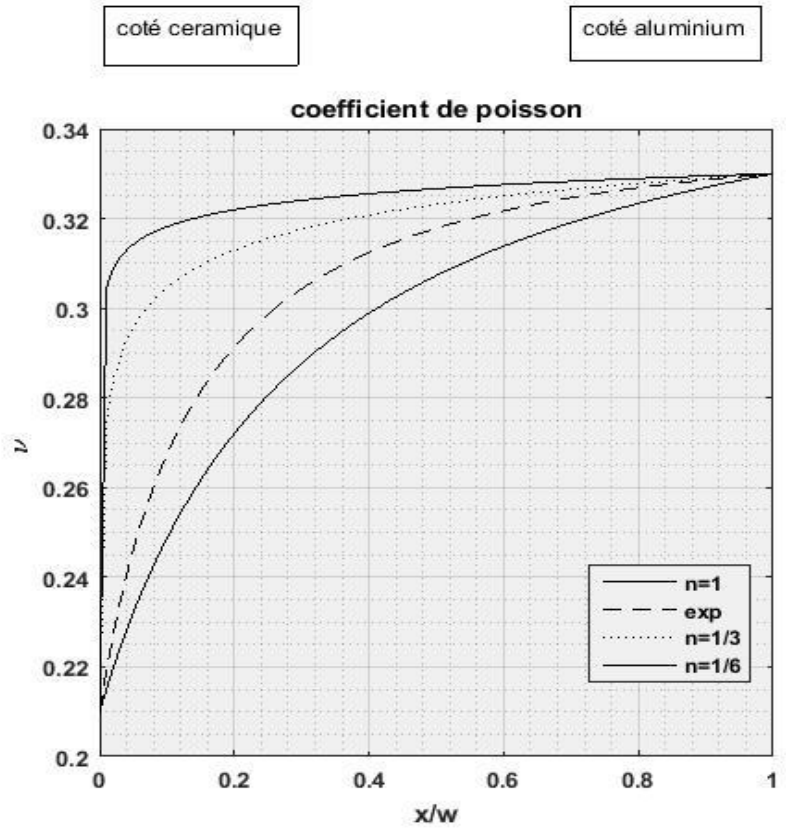



Figure 4-3 Répartition du coefficient de Poisson.

## 4.5 L'analyse structurale

### 4.5.1 Le maillage

La surface de la pièce est maillée avec des éléments triangulaires quadratiques, avec un raffinement au voisinage du fond de fissure. Ce dernier est maillé avec un élément singulier pour une meilleure approximation des déplacements en fond de fissure. Le facteur d'intensité des contraintes ($K_I$) est calculé au moyen d'une approche locale basée sur extrapolation des déplacements en fond de fissure.

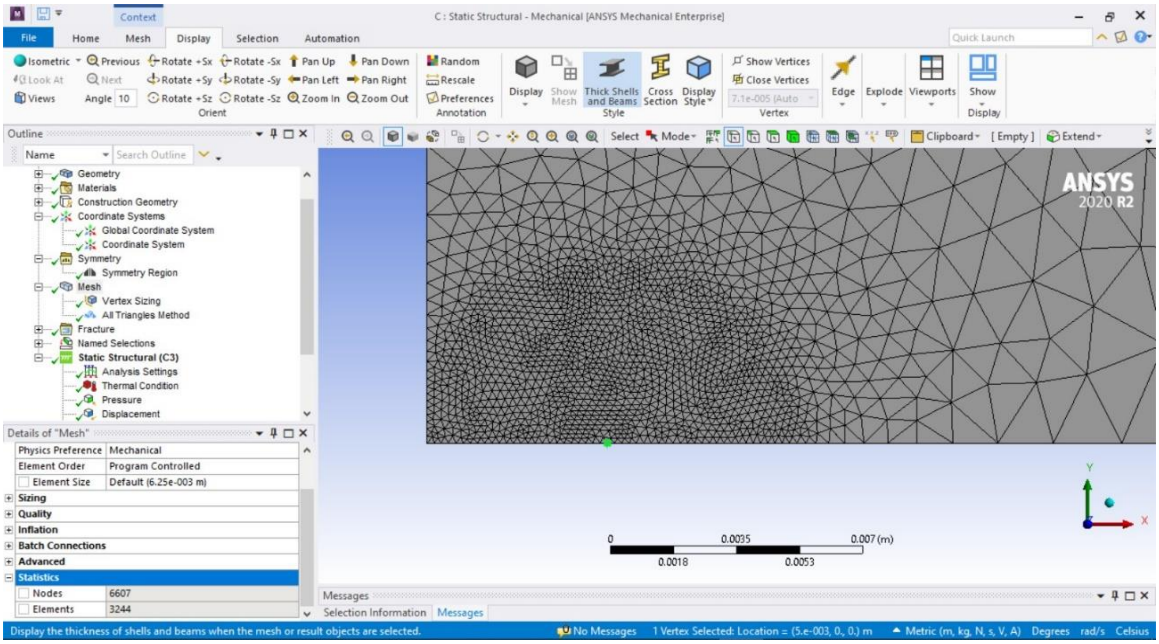



Figure 4-5 Le maillage de la plaque

### 4.5.2 Le chargement et les conditions initiales

L'application du chargement est conforme au modèle SENT présenté dans le chapitre précédent Figure 3-3. Les charges et les conditions initiales sont distribuées comme suit :

- Une contrainte de 20 MPa sur le segment [EF] orientée par la normale $\vec{n}$(0, 1,0).
- Une température qui varie linéairement le long de l'axe x Figure 4-6 avec une mesure de (300 C°) sur le segment [AE] selon la normale $\vec{n}$(-1, 0,0), et de (70 C°) sur le segment [CF] selon la normale $\vec{n}$(1, 0,0).
- Une restriction de déplacement ($U_x$=0) au nœud C (w, 0,0) pour prévenir un déplacement de corps rigide.
- Une symétrie par rapport au segment [BC].
- Les contraintes thermiques sont supprimées dans l'étude statique.

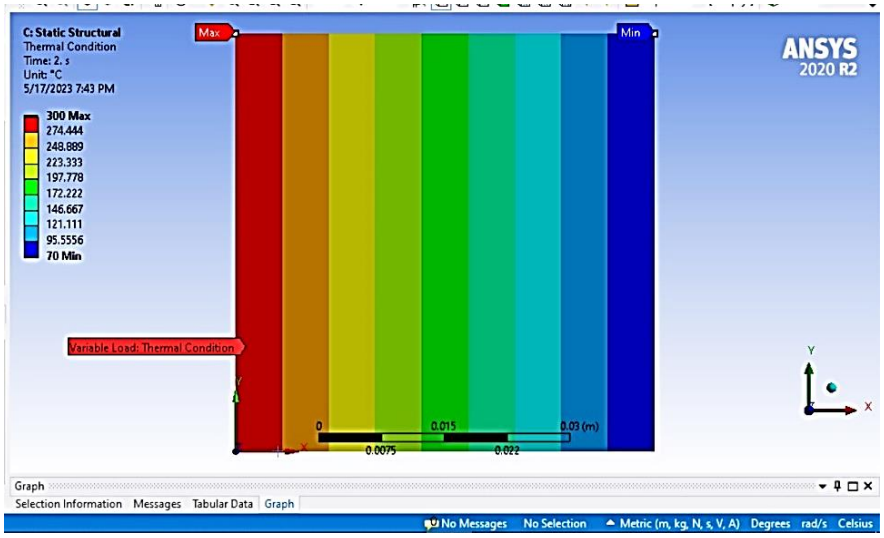



Figure 4-6 Répartition de la température dans la plaque.

## 4.6 Résultats de l'analyse structurale

### 4.6.1 Répartition des contraintes

Les résultats du graphe de la Figure 4-7 sont obtenus par l'évaluation de la contrainte normale maximale sur le plan de fissure (le long de la position transversale) pour une gradation exponentielle. La tension appliquée est de 1.0 MPa sur le bord supérieur et la longueur de la fissure est de 5 mm (a/w=10%).

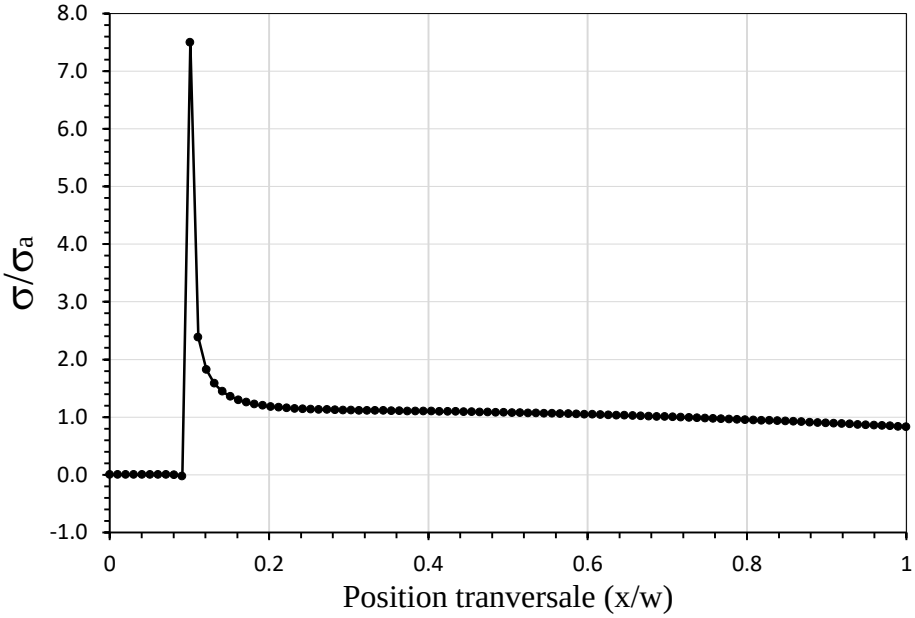



Figure 4-7 Répartition de la contrainte normale maximale sur le plan de la fissure pour un a/w= 10%

La courbe de la Figure 4-7 présente une singularité (Peak), à droite de la pointe de la fissure, due à la présence d'une zone à forte concentration de contraintes. La contrainte est pratiquement nulle à gauche de la pointe de fissure (x<a), ceci s'explique par le fait que les lèvres de la fissure ne sont pas chargées. La contrainte, à droite de la fissure, diminue pour se stabiliser autour de la contrainte appliquée (1.0 MPa), au fur et à mesure que l'on s'approche du bord droit.

### 4.6.2 Les déplacements et les déformations

La Figure 4-8 illustre le déplacement total obtenu avec une gradation exponentielle de la plaque. La tension appliquée est de 20MPa sur le bord supérieur et la longueur de la fissure est de 5mm.

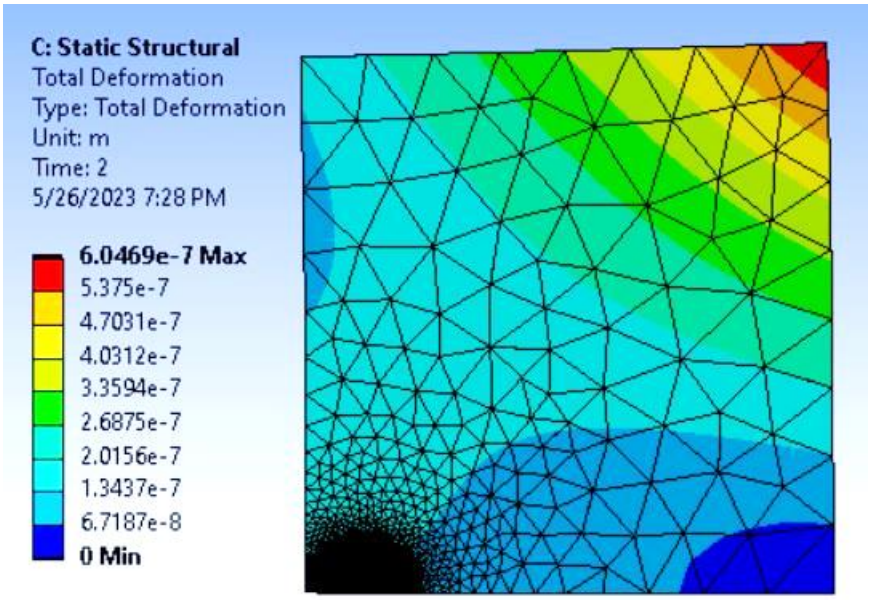



Figure 4-8 Le deplacement total dans la plaque FGM.

Nous constatons que le déplacement total est maximal du côté riche en aluminium et qu'il diminue au fur et à mesure que nous nous approchons du côté riche en céramique. Ceci est prévisible du fait que la céramique est plus rigide que l'aluminium (Module d'élasticité plus élevé pour la céramique).

Le même constat peut être donné pour la déformation équivalente de la plaque Figure 4-9 et au voisinage de fond de la fissure Figure 4-10.

Les résultats du graphe de la Figure 4-11 sont obtenus par l'évaluation de la déformation normale maximale sur le plan de fissure (le long de la position transversale) pour une gradation exponentielle.

La courbe de la Figure 4-11 présente une singularité (Peak), à droite de la pointe de la fissure, due à la présence d'une zone à forte concentration de déformation. La déformation est pratiquement nulle à gauche de la pointe de fissure (x<a), ceci s'explique par le fait que les lèvres de la fissure ne sont pas chargées. La déformation, à droite de la fissure, augmente au fur et à mesure que l'on s'approche du bord droit puisque le module de Young diminue.

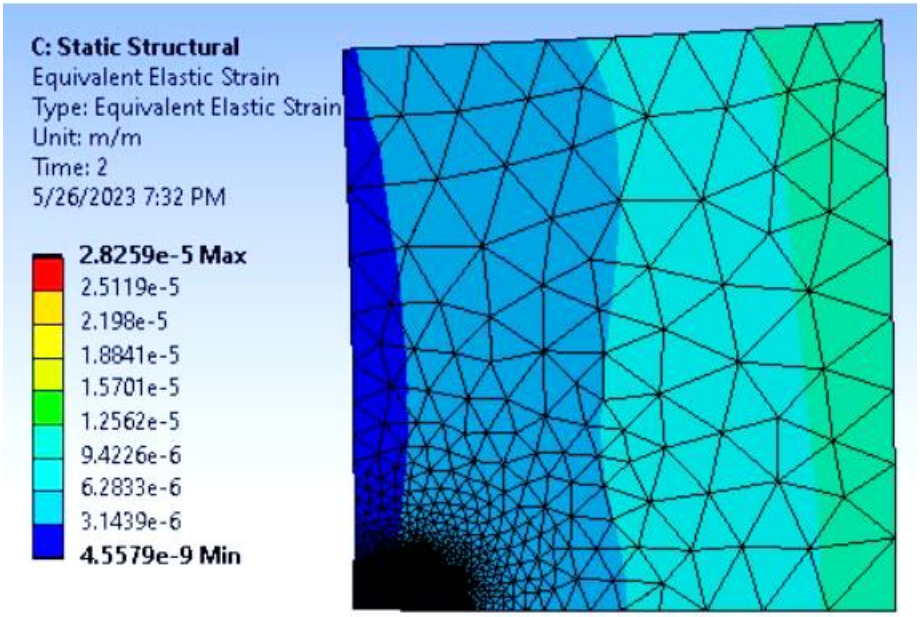



Figure 4-9 Déformation équivalente dans la plaque.

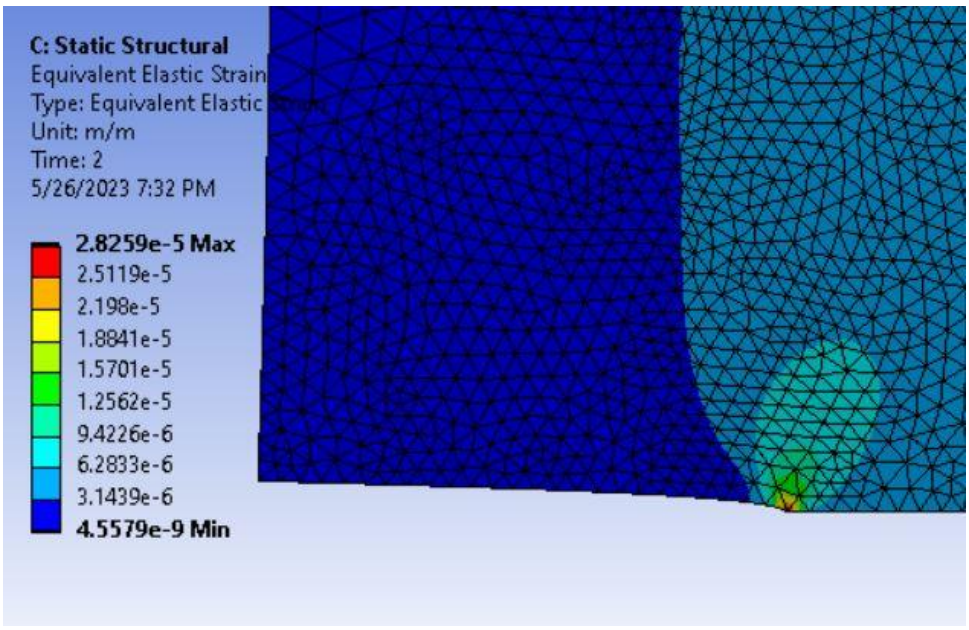



Figure 4-10 Déformation au voisinage du bord de fissure.

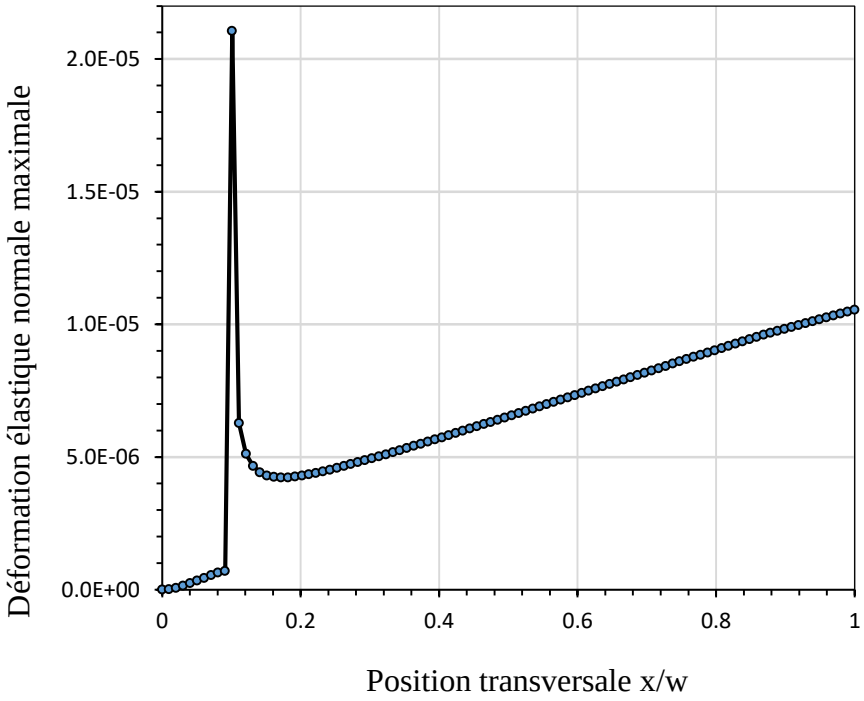



Figure 4-11 Répartition de déformation normale maximale sur le plan de la fissure pour un a/w= 10%

### 4.6.3 Le facteur d'intensité des contraintes normalisé

Les valeurs dans le Tableau 4-2 Le facteur d'intensité de contrainte normalisé ont été calculées en utilisant les valeurs maximales de $K_I$(numérique) avec a/w, le quotient de la longueur de fissure à la largeur de la plaque variant de 0,1 à 0,9. n ; représente l'exposant de la loi puissance et 'exp' représente la loi exponentielle. Des simulations ont été faites pour chaque type de gradation en faisant varier le rapport a/w.

Tableau 4-2 Le facteur d'intensité de contrainte normalisé

| $f\left(\frac{a}{w}\right) = K_I(num) \div \left(\sigma \times \sqrt{\pi \times a}\right)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a/w | n = 1 | exp | n =1/3 | n =1/6 |
| 0.1 | 0,9963 | 1,0754 | 1,2078 | 1,2900 |
| 0.2 | 1,3006 | 1,3858 | 1,4339 | 1,4599 |
| 0.3 | 1,7254 | 1,8017 | 1,7884 | 1,7730 |
| 0.4 | 2,3285 | 2,3709 | 2,3086 | 2,2534 |
| 0.5 | 3,2234 | 3,2068 | 3,0963 | 2,99867 |
| 0.6 | 4,6657 | 4,5443 | 4,3912 | 4,2446 |
| 0.7 | 7,3155 | 7,0056 | 6,8219 | 6,6122 |
| 0.8 | 13,3804 | 12,7782 | 12,5425 | 12,2488 |
| 0.9 | 36,7312 | 35,6075 | 35,2374 | 34,8020 |

A la lumière des valeurs données dans le tableau ci-dessus Tableau 4-2 , nous pouvons conclure que les valeurs du facteur d'intensité de contrainte montrent de faibles différences (< 10 %) pour des rapports de a/w supérieures à 0.5 et ces différences augmentent jusqu'à 30% pour les faibles rapports. Le graphe de la figure (Figure 4-12) donne le tracé des valeurs du tableau 4-2.

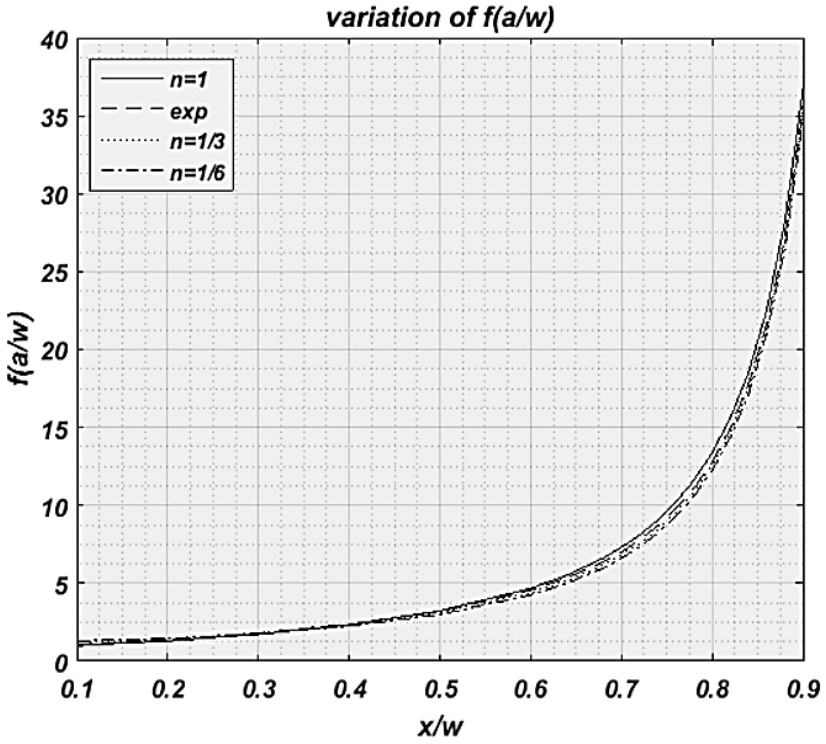



Figure 4-12 Fonction de forme f (x/w)

### 4.6.4 Taille critique de la fissure

Afin de tracer le graphe donnant la variation de $K_{I(num)}$ en fonction du rapport$(x/w)$ , nous avons utilisé 100 valeurs de (x/w) réparties irrégulièrement pour mieux capter ces variations.

La taille critique de la fissure est évaluée selon le scénario suivant :

- Tracer la courbe donnant la répartition de la ténacité ($K_{IC}$) en fonction de la position transversale de la plaque, sachant que $K_{IC}$ augmente au fur et à mesure que l'on s'approche de la paroi droite (riche en aluminium)
- Tracer la courbe donnant l'évolution de $K_I$ en fonction de (x/w).
- Déterminer le point d'intersection entre les deux courbes.
- Considérer que la propagation de la fissure aura lieu pour des valeurs de $K_I$ supérieures à la valeur d'intersection, puisqu'au-delà de ce point, la ténacité du matériau est dépassée.

Les graphes de la Figure 4-14, donnent l'évolution de $K_I$ et $K_{IC}$ en fonction de a/w, selon les différentes formes de gradation. Le Tableau 4-2 donne les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte aux points d'intersection des deux courbes et la taille critique correspondante de la fissure.

Tableau 4-3 Taille critique de la fissure en fonction de l'exposant n de la loi puisssance.

| n | 1 | 9/10 | 3/4 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_c/w$ | 0.4545 | 0.4697 | 0.4955 | 0.5259 | 0.5508 | 0.5714 | 0.5844 |

Le Tableau 4-3 montre que pour n=1 (gradation linéaire) la taille critique de la fissure est minimale. Cette dernière augmente lorsque n diminue. La taille critique de la fissure pour une gradation exponentielle reste une valeur intermédiaire. Pour de faibles valeurs de n la taille de la fissure critique approche la largeur de la plaque ($a_c/w \rightarrow 1$). Ceci est expliqué par le fait que lorsque n devient faible, la couche de céramique (couche fragile) devient mince.

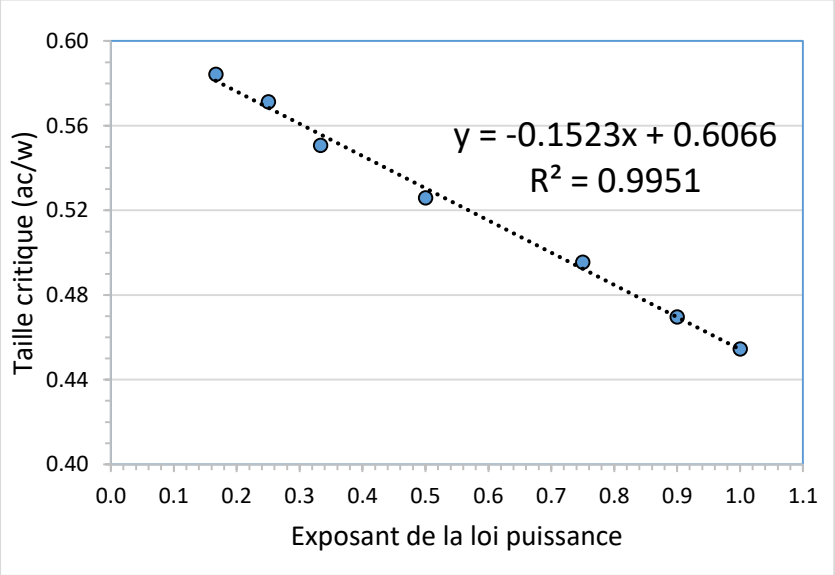



Figure 4-13 Approximation de la relation ($a_c$ – exposant de la loi puissance) par une régression linéaire

La courbe du graphe de la Figure 4-13, donnant l'approximation de la fonction reliant $a_c$ à l'exposant de la fonction puissance, est approximée par une régression linéaire avec un coefficient de corrélation supérieur à 0.99.

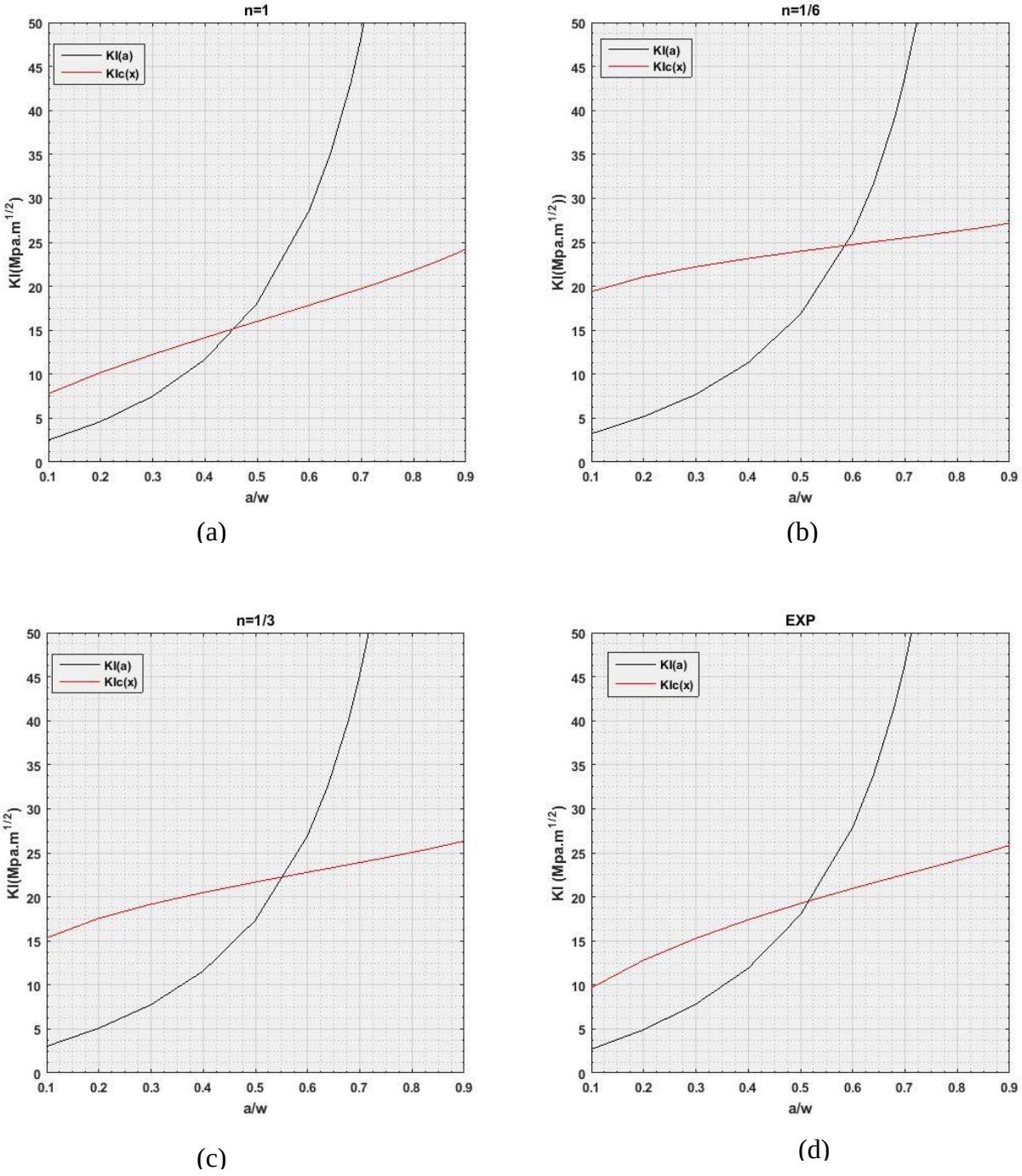



Figure 4-14 Evolution de $K_I$ et $K_{IC}$ en fonction de a/w selon les différentes formes de gradation

## 4.7 Conclusion

Dans ce dernier chapitre nous avons donné l'essentiel de nos résultats, obtenus à partir des différentes simulations. Nous avons pu mettre en évidence, que la composition graduelle du matériau, qui change progressivement de manière contrôlée selon plusieurs fonctions de gradation, peut jouer un rôle déterminant dans la résistance à la fissuration. De plus, la ténacité du matériau, évalué par les différentes simulations, est identifiée comme un paramètre clé pour déterminer la taille critique de la fissure. A la fin du chapitre, nos simulations ont montré une corrélation directe entre la ténacité du matériau et l'exposant de la loi puissance utilisée pour représenter le gradient fonctionnel des propriétés mécaniques du matériau.

# Conclusion Générale

La présente étude a permis d'explorer en profondeur la simulation des paramètres de fissuration d'un matériau FGM et le calcul de la taille critique de la fissure en fonction de la ténacité du matériau. Grâce à une méthodologie rigoureuse et à l'utilisation d'outils de modélisation numériques, nous avons pu obtenir des résultats significatifs qui pourraient contribuer à une meilleure compréhension du comportement à la rupture de ce type de matériaux

Notre travail a mis en évidence l'influence de différents facteurs sur la propagation de la fissure dans les matériaux FGM. Nous avons constaté que la composition graduelle du matériau, qui varie progressivement de manière contrôlée selon plusieurs fonctions (les plus utilisées), peut jouer un rôle crucial dans la résistance à la fissuration. De plus, la ténacité du matériau, évalué par les différentes simulations, a été identifiée comme un paramètre clé pour déterminer la taille critique de la fissure.

Les résultats obtenus grâce à nos simulations ont montré une corrélation directe entre la ténacité du matériau et l’exposant de la loi puissance utilisée pour représenter la composition graduelle des propriétés mécaniques du matériau. Il est apparu que plus la ténacité du matériau n’était élevée, plus la taille critique de la fissure était grande, ce qui indique une meilleure résistance à la propagation de la fissure. Ces résultats sont extrêmement pertinents pour la conception et l'optimisation des matériaux FGM, en particulier dans des applications soumises à des contraintes mécaniques élevées.

Notre travail peut ouvrir également la voie à de futures PFE dans ce domaine passionnant. En effet, bien que nous ayons obtenus des résultats significatifs, certains aspects restent à explorer et à approfondir. Par exemple, il serait intéressant d'étudier l'effet de paramètres supplémentaires tels que la température et les contraintes résiduelles sur la propagation des fissures dans les matériaux FGM. De plus, l'extension de nos simulations à des géométries 3D plus complexes et à des conditions de chargement plus réalistes pourrait également fournir des informations précieuses pour l'application pratique de ces matériaux dans divers secteurs industriels.

# Références bibliographiques


1. El-Galy, I.a.S., Bassiouny and Ahmed, Mahmoud, *Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view.* SN Applied Sciences, 2019. **1**: p. 1378.
2. Mahamood, R.M. and E.T. Akinlabi, *Types of Functionally Graded Materials and Their Areas of Application*, in *Functionally Graded Materials*. 2017, Springer International Publishing: Cham. p. 9-21.
3. Anderson, T.L., *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*. 4th Edition ed. 2017.
4. Bhattacharya, S., et al., *Fatigue crack growth simulations of interfacial cracks in bi-layered FGMs using XFEM.* Computational Mechanics, 2013. **52**: p. 799-814.
5. Ravi Chandran, K.S. and I. Barsoum, *Determination of stress intensity factor solutions for cracks in finite-width functionally graded materials.* International Journal of Fracture, 2003. **121**(3): p. 183-203.
6. Tuan, C.L.H.a.W.H., *Poisson's ratio of two-phase composites.* Materials Science and Engineering: A, 2005. **396**: p. 202-205.
7. Raveendran, K.V., *EFFECTIVE FRACTURE TOUGHNESS OF COMPOSITES* International Journal of Fracture, 1991. **47**: p. 63-65.

# ANNEXE

Script Matlab développé afin de déterminer la répartition des propriétés mécanique dans le matériau FGM.

```
%% Données matériaux
clear all
clc
format long
w= 50 ;
E0= 300e3 (en MPa);
Ew= 70e3 (en MPa)   ;
c_cer=2.8*10^-10;
c_al=10^-12;
m_cer=10;
m_al=3;
v_cer=0.21;
v_al=0.33;
R=Ew/E0;
Rc=c_al/c_cer;
Rm=m_al/m_cer;
KIc_al=29 (en  MPa.√m);
KIc_cer=3(en  MPa.√m);
x1=linspace(0,w);
T=@(x1) E0/1000+(Ew/1000-E0/1000).*(x1./w);(la fonction de répartition de la température.)

%%  lois exponentielle
E=@(x1) E0.*exp(1/w*log(R).*x1);
V_al=@(x1) (E0.*exp(1/w*log(R).*x1)-E0)/(Ew-E0);
V_cer=@(x1) 1-(E0.*exp(1/w*log(R).*x1)-E0)/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);

c=@(x1) c_cer.*exp(1/w*log(Rc).*x1);
m=@(x1) m_cer.*exp(1/w*log(Rm).*x1);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));


%%         Loi des puissances
%          n=1;
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1./w);
V_al=@(x1) (x1./w);
V_cer=@(x1) 1-(x1./w);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

%      n=0.9
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1/w).^(0.9)
V_al=@(x1) ((Ew-E0).*(x1/w).^(0.9))/(Ew-E0);
```

```
V_cer=@(x1) 1-((Ew-E0).*(x1/w).^(0.9))/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w).^(0.9);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w).^(0.9);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

%       n=1/2
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1/w).^(1/2);
V_al=@(x1) ((Ew-E0).*(x1/w).^(1/2))/(Ew-E0);
V_cer=@(x1) 1-((Ew-E0).*(x1/w).^(1/2))/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w).^(1/2);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w).^(1/2);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

%       n=1/6
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1/w).^(1/6)
V_al=@(x1) ((Ew-E0).*(x1/w).^(1/6))/(Ew-E0);
V_cer=@(x1) 1-((Ew-E0).*(x1/w).^(1/6))/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w).^(1/6);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w).^(1/6);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

%       n=1/3
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1/w).^(1/3)
V_al=@(x1) ((Ew-E0).*(x1/w).^(1/3))/(Ew-E0);
V_cer=@(x1) 1-((Ew-E0).*(x1/w).^(1/3))/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w).^(1/3);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w).^(1/3);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

%       n=1/4
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1/w).^(1/4)
V_al=@(x1) ((Ew-E0).*(x1/w).^(1/4))/(Ew-E0);
V_cer=@(x1) 1-((Ew-E0).*(x1/w).^(1/4))/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w).^(1/4);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w).^(1/4);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

%     n=3/4
E=@(x1)  E0+(Ew-E0).*(x1/w).^(3/4)
V_al=@(x1) ((Ew-E0).*(x1/w).^(3/4))/(Ew-E0);
V_cer=@(x1) 1-((Ew-E0).*(x1/w).^(3/4))/(Ew-E0);
v=@(x1) (v_al*V_al(x1)*E0+ v_cer*V_cer(x1)*Ew)/(V_al(x1)*E0+V_cer(x1)*Ew);
c=@(x1)  c_cer+(c_al-c_cer).*(x1./w).^(3/4);
m=@(x1)  m_cer+(m_al-m_cer).*(x1./w).^(3/4);
KIc=@(x1) (KIc_al+KIc_cer)/2+(KIc_al-KIc_cer)/2*(sqrt(V_al(x1))-sqrt(V_cer(x1)));

x=[0 0.5 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15 20 25 30 35 40 45 50] %% pour décrire le matériau au ANSYS.
```

```
for i=(1:1:length(x))
   p1(i)=T(x(i));
   p2(i)=E(x(i));
   p3(i)=v(x(i));
   p4(i)=KIc(x(i));
   p5(i)=c(x(i));
   p6(i)=m(x(i));
   i=i+1;
end ;

%% Fonction de forme
for i=(1:1:length(af))%% af c'est le vecteur qui contient les valeurs de a la taille de fissure et que le facteur d'intensité de contraint a été calculer.(par simulation).

  f_n1(i)=KI_n1f(i)./(20000000.*sqrt(af(i).*pi*0.001));
%la tension appliqué à une mesure de 20MPa.
  i=i+1;
end;

%%la fonction de forme pour les matériaux homogènes.
F_EXP=@(a)
(sqrt(2.*tan((pi.*a)./(2*w))).*(0.752+2.02.*(a./w)+0.37.*(1-
sin(pi.*a./(2*w))).^3);

% fonction des moindres carrés
p=polyfit(x,y,n);        % 'n' c'est le degrée de courbe d'approximation«lineare pour ce model » .
y_fit=polyval(p,x);       %polyval pour l' évaluation de valeur de p pour chaque valeur x
plot(x,y,'ro',x,y_fit);
%p=ax+b;
%a= -0.152284651956601;
%b=0.606587163232964;
```