REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA



FACULTE DE TECHNOLOGIE

Département de Génie des procèdes de l'environnement
Projet de fin d'étude en vue de l'obtention du Diplôme de Master
Filière : Génie des Procédés et science de l'environnement

OPTION : Génie des procèdes et environnement

Thème :

Étude numérique des transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux

Présenté par :
SAHIRI Salima
TIGHRINI Fathia

Dirigé par : **Dr. HADIDI.N**
Codirigé par : **Dr. REBHI .R**

Promotion : 2017/2018

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier le Bon Dieu qui nous a orientés au chemin du savoir et a donné la santé, la patience et le courage d'accomplir ce modeste travail.

Nous remerciements sont destinés également à nos chers parents, pour leur amour,

leurs sacrifices et leur patience et leur suivi de tous étapes de notre vie .

Nous tenons à remercier vivement Notre promoteur Mr HADIDI .N et Mr. REBHI. R pour avoir accepté la charge d'encadrer ce travail, et pour tous ses conseils, ses observations et ses orientations.

Nos remerciements les plus sincères sont adressés à nos enseignants, qui ont contribué durant nos études à notre formation et tous les enseignants de l'Université DR.YAHIA FARES de Médéa

Enfin, nos agréables remerciements aux personnes qui nous ont aidées de prés ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

Fathia et Salima

Dédicaces

Je dédie ce travail

A mes très chers parents "que Dieu te garde pour nous",

dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience,

le soutien, l'aide et les encouragements sont le

secret de ma réussite

A mes très chères sœurs : Leila et Nadia ;

A mes très chers frères : Hichem et Sid Ali ;

Ames neveu : Abd Elraouf et Amine

A mon binôme TIGHRINI Fathia

A mes sœurs et frères de l'Union Générale Etudiant Libre

pour leurs encouragements et leur attachement et surtout pour

leur patience et leur disponibilité et leur soutien dans les moments

les plus difficiles de ma vie.

A mes très chères sœurs de Mossala Mariem Bint Omran

A ceux qui ont veillé pour mon bien-être

A ceux que j'aime et je respecte infiniment Le jour est venu pour leur dire merci…

A tous mes amis, qui ont toujours été présents pour moi.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans

l'élaboration de ce modeste travail ;

A toute la promotion de génie des procédés

de l'environnement2017/2018.

SAHIRI Salima

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A ma très chère mère et mon très chèr père

A mes très chers frère : Mohamed et Foudil

A mes très chères sœurs :Samiha,Imen,Fadila,Abir ,Nesrine et Sarah

A mes neveu : Mohamed ,Tasnim et Ranim

A ma tante maternelle Khadidja

A mon amie et binôme SAHIRI Salima

A tous mes amis , qui ont toujours été présents pour moi

A tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin

A toute la promotion de génie des procédes de l'environement 2017-2018

TIGHRINI Fathia

الملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الانتشار الحراري والكتلي في تجويف مربع الشكل ومائل يحتوي على وسط مماسي ومتجانس مشبع بنفس المحلول. بحيث تخضع الحواف الناشطة لشروط حرارة وتركيز ثابتين وباقي الحواف تكون كظومه وغير نفوذه. كل المعادلات الأساسية المسيرة لهذه الظاهرة الفيزيائية تحل رقميا بواسطة الفرق المتناهي هذه النتائج تحلل على شكل خطوط السيل خطوط تساوي الحرارة والتركيز وكذا متوسط ثابتين Nusselt et Sherwood

كلمات مفتاحية : تجويف مائل، وسط مسامي، وسط يسهل اختراق الحرارة والكتلة بتركيز محدود

Résumé

Ce travail présente une étude des transferts de chaleur et de masse générée dans une cavité carrée inclinée contenant un milieu poreux saturé par un fluide ou mélange de fluide. La couche poreuse est considérée homogène et isotrope et saturée par le même fluide. Les parois actives de la cavité sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes. Les autres parois sont considérée comme adiabatiques et imperméables. Le milieu poreux est modélisé à l'aide du modèle de Dupuit-Darcy, qui comporte l'effet de l'inertie. Les équations de bases décrivant la convection double diffusion au sein de l'enceinte sont résolues numériquement par la méthode de différence finis. Les résultats numériques sont analysés en termes de lignes de courant, des isothermes, des isoconcentrations et des nombre de Nusselt et Sherwood moyens.

Mots clés : double diffusion, milieux poreux, effet de l'inertie, Dupuit-Darcy, différence finis.

Abstract

In this study, the numerical study of heat and mass transfer in an inclined square enclosure containing a porous medium saturated by a fluid. The porous layer is considered homogeneous, isotropic and saturated with the same fluid. The upper and bottom walls are maintained to constant fluxes of heat and mass whereas the left and right walls are assumed to be adiabatic and impermeable. The porous medium considered here is modeled according to the Dupuit-Darcy formulation, which includes the parameter of inertia. The set of equations governing the double diffusive convection in the porous enclosure are solved numerically using the classical finite difference method. The numerical results are presented and analyzed in terms of streamlines, isotherms, isoconcentrations lines and average Nusselt and Sherwood numbers.

Keywords: Double diffusive, porous media, inertia effect, Dupuit-Darcy, finite difference.

Nomenclature

A rapport d'aspect

A_s La surface spécifique ($m^2\ m^{-3}$)

C, N Constantes empiriques

Da Le nombre de Darcy

d_p Diamètre des particules (m)

j' Flux de masse ($kg\ m^{-2}s^{-1}$)

H' Hauteur de la cavité carrée (m)

G paramètre d'inertie (ms^{-2})

K Perméabilité du milieu poreux (m^2)

ks conductivités thermiques du fluide ($w\ m^{-1}\ K^{-1}$)

Ke conductivité thermique effective

L' Longueur de la cavité carrée (m)

L la longueur du milieu poreux(m)

Le Le nombre de Lewis ($\frac{\alpha}{D}$)

N Le rapport des forces de volume

Nu_m le nombre de Nusselt, Eq. (II.30)

P' La pression hydrodynamique ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$)

P_r Le nombre de Prandtl ($\frac{\nu}{\alpha}$)

P_{rf} Le nombre de Prandtl de fluide

q' Flux de chaleur ($w\ m^{-2}$)

Q Débit s'écoulant à travers le milieu poreux

R_T Nombre de Rayleigh thermique

Ra_f Nombre de Rayleigh de fluide

S' La concentration de fluide en un point du système (kg m^{-3})

S_0' La concentration de référence en x=y=0

Sh_m le nombre de Sherwood, Eq. (II.31)

t temps adimensionnelle

T' La température de fluide en un point du système

T_0' Température de référence en x=y=0

u Vitesse axiale, (m/s)

v Vitesse transversale, [m/s]

$\vec{V}'$ Le vecteur de vitesse

V_a La vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide,

V_P Volume des espèces vides (m^3)

V_{PU} Volume des pores accessibles ou utiles (m^3)

V_T Volume total (m^3)

x, y cordonnés cartésiennes x=y=0

Symboles Grecs

α Diffusivité thermique, ($m^2 .s^{-1}$)

βs Coefficient d'expansion solutale, ($m^3 kg^{-1}$)

β_T Coefficient d'expansion thermique, (k^{-1})

ε Porosité du milieu poreux, (Ø/σ)

μ Viscosité dynamique, (kg $m^{-1}s^{-1}$)

ν Viscosité cinématique, (m^2s^{-1})

ρ Densité du flux, (kg m^{-3})

$(\rho C)_f$ Capacité calorifique du fluide, (J $m^{-3} K^{-1}$)

$(\rho C)_p$ Capacité calorifique du milieu poreux saturé,(J $m^{-3} K^{-1}$)

σ Rapport de capacité calorifique, $(\rho C)_p/ (\rho C)_f$

Ψ Fonction de courant adimensionnelle

Ψ_0 Fonction de courant au centre de la cavité

τ La tortuosité

ω Facteur de sur-relaxations

Φ l'angle d'inclinaison

Superscripts

‘ Variable dimensionnelle

Sous Régime souscritique

Sup Régime supercritique

Souscripts

0 Valeur a l'origine

f Milieu fluide

p milieu poreux

Autres symboles

∇ Gradient

$\nabla^2 = \Delta$ Laplacien

Liste des figures

Figure I.1 : représentation d'un milieu poreux……5

Figure I.2 : milieux poreux non consolidés……...…...6

Figure I.3 : milieux poreux consolidés……..…6

Figure I.4 : Milieu poreux et volume élémentaire représentatif (VER)…….....7

Figure I.5 : Définition schématique de la tortuosité……12

Figure I.6 : Modèle série de la conductivité thermique effective…….....13

Figure I.7 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective….....……14

Figure. I.8 : Isotropie (a) et anisotropie (b, c, d). Homogénéité (b, c) et hétérogénéité (d)……15

Figure II.1 : Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées……..20

Figure III.1 : Maillage du domaine de calcul en (i, j)……28

Figure IV.1 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $\Phi = 0°$ et $\varepsilon = 1$……...…….43

Figure IV.2 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $G = 10$ et $\varepsilon = 1$……..……..44

Figure IV.3 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $\Phi = 60°$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $G = 10$ et $\varepsilon = 1$…….....……...45

Figure IV.4 : Profils de l'intensité de courant, Ψ, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane (x=0) pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $\Phi = 0°$, $\varepsilon = 1$ et versus G……46

Figure IV.5 : (a)-(c) Diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0,Nu_met Sh_m en fonction de $R_T$et G pour $N = -1$, $\Phi = 0°$, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$, (a) $G = 0$ (Darcy) à 1……49

Figure IV.6 : Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et le paramètre de l'inertie, G, pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$ et $\varepsilon = 1$…….. ……51

Figure IV.7 : Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur,Nu_m et de masse, Sh_m,pour $R_T = 500$, $Le = 2$, $\Phi = 90°$, $\varepsilon = 1$ et différentes valeurs de G……..……...…….53

Figure IV.8 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 500$, Le=2,$\Phi = 90°$, $\varepsilon = 1$ et différentes valeurs de G……54

Figure IV.9 : Solutions multiples stables pour $R_T = 500$, $G = 0$, $Le = 5$, $\Phi = 0°$, $N = -0.1$et $\varepsilon = 1$: (a) une cellule, (b) trois cellules et (c) quatre solutions…...……55

Liste des tableaux

Tableau I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux…….4

Tableau I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux. ……..**....**9

Tableau I.3 : Ordre de grandeur de la perméabilité d'après Girard philiponnant……..11

Tableau IV.1 : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max}et le nombre de Nusselt moyen Nu_m avec les résultats donnés par Saeid et Pop ……..…….40

Tableau IV.2 : Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt Nu_m avec les résultats donnés par Prasad et Tuntomo ……..……..…40

Tableau IV.3 : Comparaison des données expérimentales Kladias et Prasad avec les résultats numériques prédits dans les conditions aux limites de température constante……...41

Le tableau IV.4 : présente la sensibilité du maillage pour A=1, R_T =500,Φ=0° ,N=-0.1,L_e=5et G=0…….……41

SOMMAIRE

Introduction Générale……...……..1

Chapitre I : Généralité et définition sur les milieux Poreux

I.1. Généralité……..……3

I.2. Définition d'un milieu poreux…….....……....5

I.2.1. Milieu poreux non consolidé……..6

I.2.2. Milieu poreux consolidé…….6

I.3. Volume élémentaire représentatif……..7

I.4. Changement d'échelle en milieu poreux…….……...7

I.5. Propriétés du milieu poreux……...8

I.5.1.La porosité……..…….8

I.5.2. La variation de la porosité……..…...10

I.5.3.La perméabilité……..……11

I.5.4. La tortuosité……..12

I.5.5. La surface spécifique…….……..…….12

I.5.6. Conductivité thermique effective……...……..13

I.6. Caractéristiques physiques d'un milieu poreux……..…….14

I.7. Model d'écoulement utilisé en milieu poreux……...……..15

I.7.1. Model de Darcy……..……..15

I.7.2. Loi de Darcy- Forchheimer……..17

I.7.3. Modèle de Brinkman……....18

I.7.4. Model général……..….18

I.8.Conclusion……..……19

Chapitre II : Modèle physique et formulation mathématique

II.1. Description du problème ……...20

II.2. Hypothèses simplificatrices……...……21

II.3. Formulation mathématique……...……22

II.3.1. Équation de continuité……...….22

II.3.2. Équation de mouvement : Loi de Dupuit Darcy……22

II.3.3. Équation de conservation de l'énergie ……..….23

II.3.4. Équation de conservation de masse…….23
II.4. Équation de fonction de courant……...….25
II.5. Conditions aux limites……...…...….26
II.5.1. Conditions aux frontières hydrodynamiques……..…….26
II.5.2. Conditions aux frontières thermiques et massiques……....26
II.5.3. Conditions aux frontières thermiques adimensionnelles…….....26
II.6. Transfert thermique et massique……....27
II.7. Conclusion…….……27

Chapitre III : méthode numérique

III.1. Discrétisation des conditions aux frontières thermiques……...28
III.2. Discrétisation de l'équation d'énergie……..30
III.3. Discrétisation de l'équation de concentration……...32
III.4. Discrétisation de l'équation du mouvement …….33
III.4.1. Milieu poreux Darcy……..……...…….33
III.4.2. Milieux poreux Dupuit-Darcy……...34
III.5. Discrétisation des champs de vitesse……...…….35
III.6. Discrétisation des conditions aux frontières des vitesses……..35
III.7. Algorithme de calcul…….36
III.8. Conclusion ……..…….38

Chapitre IV : Résultats et Discussion

IV.1 Validation de code numérique.....39
Conclusion et perspective……..56
Références bibliographique……..….57

Introduction Générale

Introduction Générale

L'importance des milieux poreux dans les phénomènes et processus industriels et technologique est aujourd'hui bien démontrée. Cependant et malgré la montée en puissance des moyens d'étude, des lacunes subsistent encore sur le plan des connaissances fondamentales, principalement la compréhension des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans des systèmes comportent des milieux poreux.

De ce fait, les études de la convection thermosolutale en présence d'un milieu poreux font actuellement l'objet d'un intérêt sans cesse accru. Cet intérêt est dû aux nombreuses applications pratiques qui s'y rapportent, et cela dans divers domaines tels que : (La filtration massique, La dispersion des polluants dans les aquifères, La séparation d'espèces chimique, Le stockage de déchets toxiques ou radioactif et des gaz liquides, Le séchage, Dans le domaine médical où on utilise des membranes poreuses pour concevoir des reins artificiels pour les processus de dialyse, L'isolation thermique, L'extraction dans les gisements d'hydrocarbures ,Le refroidissement des circuits électronique et des réacteurs nucléaires)

La présente investigation a pour but l'étude de la convection double diffusive dans une enceinte carrée inclinée par rapport à l'horizontale, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois actives de la cavité sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes. Les autres parois sont considérée comme adiabatiques et imperméables. Le modèle mathématique décrivant le présent problème a été développé en se basant sur l'équation de Depuit-Darcy, qui comporte l'effet du paramètre d'inertie.

Notre étude porte essentiellement sur la mise en évidence de l'influence des paramètres adimensionnelles ; le nombre de Rayleigh R_T, le nombre de Lewis Le, le rapport des forces de volume, N, le paramètre d'inertie G, l'angle d'inclinaison de la cavité, Φ, par rapport à l'axe horizontale, sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse dans le système. Cette mémoire est structurée comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les milieux poreux. **Le deuxième chapitre** de la thèse est consacré à la définition de la géométrie étudiée, et La formulation mathématique du problème où les équations de bases gouvernant le système et les conditions aux frontières associées seront présentées. Toutes les étapes de la démarche numérique (méthode des différences finies) ainsi que

l'algorithme de calcul utilisé sont présentés dans **le troisième chapitre.** Le quatrième chapitre porte sur les différents résultats obtenus dans ce travail et leurs discussions. Finalement on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I :

Généralité

sur les milieux poreux

Chapitre I

Généralité et définition sur les milieux Poreux

I.1. Généralité :

Durant les dernières années, les écoulements dans les milieux poreux n'ont cessé d'avoir une importance de plus en plus grandissante jusqu'à devenir un pôle d'attraction durant la dernière décennie .En effet un grand nombre de chercheurs ont porté un intérêt particulier aux milieux poreux. Ceci est dû au fait que le transfert massiques et thermique dans ces milieux occupe une place de plus en plus importante dans plusieurs secteurs de l'industrie et des technologies avancées.

Les premières recherches qui ont été menées dans ce domaine ont toutes portées sur des écoulements monophasiques, pour ensuite englober les écoulements polyphasiques durant ces dernières années.

Les phénomènes de transfert massiques et thermiques dans les milieux poreux (en monophasiques où en polyphasiques) interviennent dans de nombreuses applications et touches à des domaines multiples tel que représenté ci-dessous :

Domaine d'utilisation	**Application**
Mécanique	-Isolement thermique -Capacité de séchage -Récupération de l'énergie géométrique -Accroissement du transfert de chaleur par modification de surface -Lubrification -Réacteurs nucléaires utilisant des gaz de refroidissement s'écoulant à travers des particules radioactives -Fusion et solidification des alliages binaires -Déshumidification -Pré chauffeurs et stabilisateurs de flamme poreux

	-Stockage de l'énergie solaire -Pots catalytiques dans le domaine de l'automobile
Génie-chimique	-Réacteurs chimiques -Filtration -Adsorption -L'échange d'ion -Les réactions catalytiques sur une surface solide -Séchage -Réacteurs chromatographiques -Convertisseurs catalytiques pour la réduction de la pollution de l'air des produits de combustion -Transfert de masse à travers les membranes
Environnement	-Ecoulement des eaux souterraines -contamination des eaux souterraines -Ecoulement d'eau, de vapeur d'eau et d'air à travers des matériaux de construction -Recyclage de déchets nucléaires -Irrigation -Nettoyage des sols par injection de vapeur
Géologie	-Migration des eaux et minéraux -Exploitation de l'énergie géothermique
Pétrole	-Ecoulement de gaz et pétrole dans les réservoirs -Accroissement de la production de gaz naturel
Médecine	-Stimulation du transport des gaz dans l'organisme, H.P.C.Darcy [1].

Tableau I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux [1].

Un exemple concret, d'application des écoulements polyphasiques en milieux poreux, est l'exploitation des gisements d'hydrocarbures qui fait appel à différents procédés, parmi

lesquels on trouve des méthodes thermiques qui consistent à injecter un fluide chaud (eau chaude, vapeur chaude, gaz….) au sein du gisement. Ces méthodes tendent à faciliter l'écoulement des fluides dans le réservoir en réduisant la viscosité dans l'huile brute. Actuellement, l'injection de vapeur est la plus utilisée. En 1988 par exemple, aux états unis, 72%de la production par l'application des méthodes améliorées était faite de vapeur par A.E.Scheidegger [2].

Autre exemple le cas d'un écoulement dans un milieu poreux avec changement de phase (ébullition). Phénomène qui se rencontre entre autres lors de la stimulation d'accidents nucléaires (désintégration du cœur radioactif en débris poreux, particulièrement ou entièrement saturés en liquide de refroidissement**,** I. F.Macdonald et al [3].

I.2. Définition d'un milieu poreux

Un milieu poreux est un solide contenant les espaces vides (pores), reliés ou non, dispersé dans lui d'une façon régulière ou aléatoire. Ces soi-disant pores peuvent contenir une série de fluides tels que l'air, l'eau, le pétrole etc. Si les pores représentent une certaine partie du volume en bloc, on peut former un réseau complexe qui peut porter des fluides. Seulement ces milieux perméables et poreux sont pris en compte en ce volume [4].

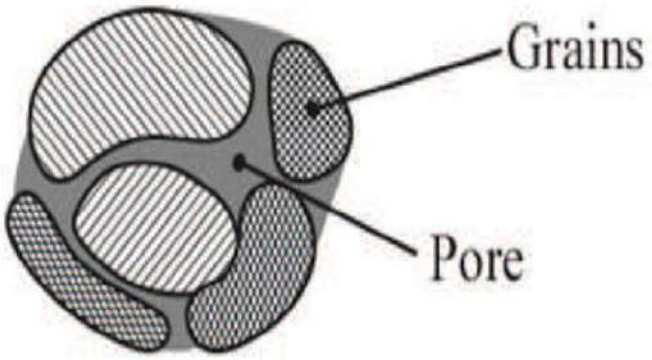


Figure I.1 : représentation d'un milieu poreux.

La phase solide d'un milieu poreux (matrice) ou squelette peut se présenter sous deux formes :

I.2.1. Milieu poreux non consolidé : la phase solide est faite de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sables, limons, billes de verre ...). Les billes de verre sont très couramment utilisées pour réaliser les appareils destinés à étudier les lois qui régissent les écoulements et les phénomènes de transfert. Quant aux fibres, nous pouvons rencontrer soit les fibres minérales (amiante, laine de verre), ou les fibres organiques (coton...).

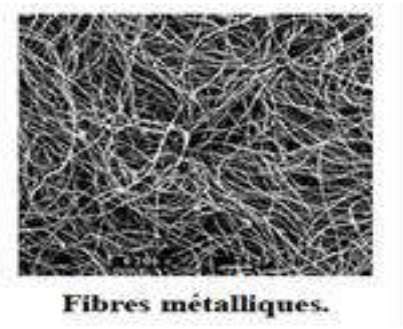
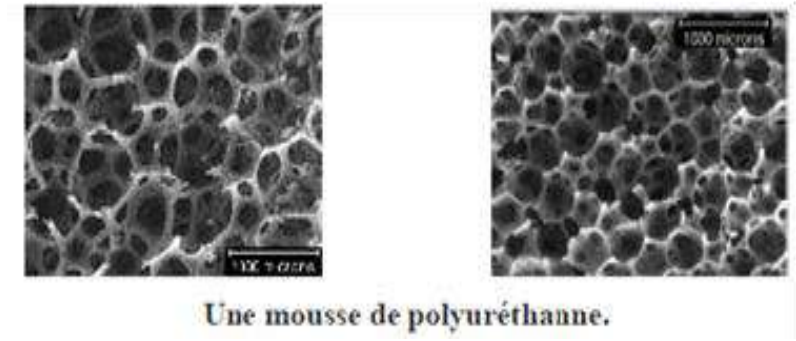


Figure I.2 : milieux poreux non consolidés.

I.2.2. Milieu poreux consolidé : dans ce genre de milieu, la matière solide est compactée ne peut se diviser en grains ou en fibres. À titre d'exemple, les roches calcaires qui présentent des séries de fissures reliées entre elles ou encore les grés qui sont des roches constituées par des grains de sable soudés entrent eux par un ciment et des argiles [5].



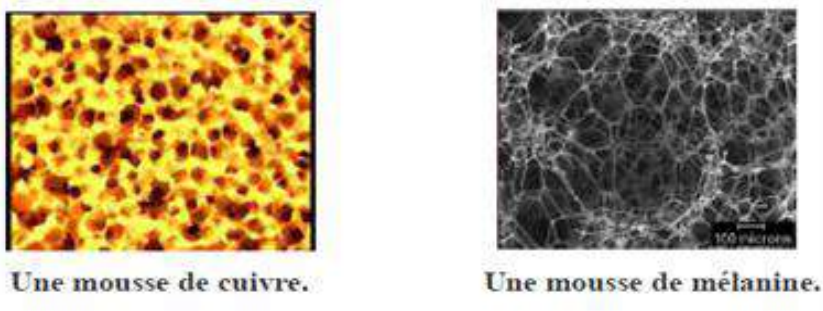


Figure I.3 : milieux poreux consolidés.

1.3. Volume élémentaire représentatif

Le volume élémentaire représentatif (VER) réfère à l'ensemble de volumes élémentaires du matériau qui produisent, en moyenne, les propriétés effectives du composite. En effet, les grandeurs macroscopiques caractérisant un milieu poreux peuvent être assimilés à des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, prises sur un domaine dont la taille est grande devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques, mais petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique. Plusieurs définitions quantitatives du VER, détaillant les méthodes de sa détermination, ont été proposées dans la littérature dont la méthode de prise de moyenne Whitaker et la méthode d'homogénéisation périodique Keller, Millet et al [6].

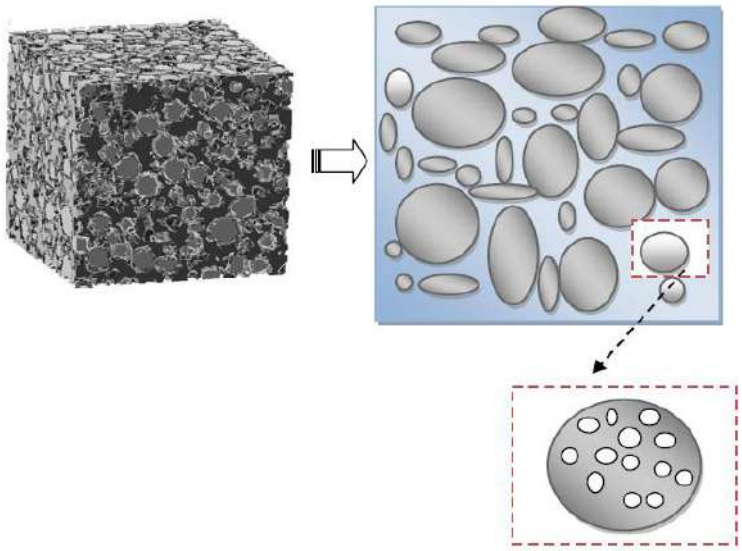


Figure I.4 : Milieu poreux et volume élémentaire représentatif (VER).

I.4. Changement d'échelle en milieu poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les méthodes qui sont traditionnellement utilisées en mécanique des milieux continus pour les expressions locales des lois de conservation, ne peuvent toutefois être mise en pratique qu'après un changement d'échelle. Par opposition avec l'échelle du milieu continu classique, dite microscopique, telle qu'elle est proposée en mécanique des milieux continus, l'échelle du milieu continu fictif équivalent au milieu poreux réel est dite macroscopique. En général, l'établissement des équations, auxquelles obéissent les phénomènes à l'échelle macroscopique, est formellement

obtenu à partir des équations microscopiques de la thermodynamique des milieux continus auxquelles sont appliquées des procédures spécifiques de changement d'échelle, telles que l'homogénéisation et les moyennes volumiques. Parmi ces dernières, l'une des plus classiquement utilisées consiste à obtenir la description macroscopique par prise de moyenne volumique des équations microscopiques sur un volume élémentaire représentatif (VER). Une fois établi, le système d'équations macroscopiques ne nécessite, pour sa résolution, que la connaissance des conditions aux limites sur les frontières du milieu poreux. Et, en effet, la complexité géométrique de la matrice et de l'espace se trouve incluse dans les coefficients des équations macroscopiques traduisant, au sein du VER, les interactions entre phases. Pour fermer le système, ces coefficients doivent être préalablement déterminés par voie expérimentale, numérique ou théorique [7].

I.5. Propriétés du milieu poreux

Différentes grandeurs géométriques et thermo-physiques sont utilisées pour caractériser l'écoulement et le transfert de chaleur se produisant dans un milieu poreux, nous pouvons citer :

I.5.1. La porosité :

La porosité totale (ε_T) dans un milieu poreux est définie comme étant le rapport du volume occupé par les espèces vides au volume total (matrice + vide) correspondant :

$$\varepsilon_T = \frac{V_p}{V_T} \tag{I.1}$$

Où

V_p : Volume des espèces vides

V_T : Volume total

En général, la porosité totale ne présente pas d'intérêt, car seuls les pores accessibles jouent un rôle actif. On définit donc la porosité effective ou utile :

$$\varepsilon_e = \frac{V_{PU}}{V_T} \tag{I.2}$$

Où :

V_{PU} : Volume des pores accessibles ou utiles (c'est à dire communiquant entre eux).

Le tableau (I.2) nous donne quelques valeurs de la porosité de certains matériaux d'après les résultats expérimentaux d'A.E.Scheidrgger [8].

SUBSTANCE	**POROSITE**
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 – 0,93
Fil à tisser	0,68 – 0,76
Grain de silice	0,65
Poudre d'ardoise noire	0, 57 – 0,66
Cuir	0,56 – 0,59
Terre	0,43 – 0,54
Sable	0,37 – 0,70
Empilement de sphères	0,36 – 0,43
Filtre à cigarette	0,17 – 0,49
Brique	0,16 – 0,34

Tableau I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux [8].

I.5.2. La variation de la porosité :

La variation de la porosité apparaît significativement sur le champ de vitesse, et cela en modifiant localement le profil des vitesses, ceci est associé à la nature du contact entre le matériau poreux et la paroi au voisinage de cette dernière, l'assemblage des particules formant le milieu poreux défait.

Le milieu poreux devient ainsi perméable, cette perméabilité est associée à la présence de contraintes de compressions, fracture, etc.

La vitesse du fluide atteint presque deux (02) fois le diamètre des particules.

La majorité des travaux de recherches supposent une variation de la porosité (valeur moyenne) au voisinage de la paroi et peut être approximée pour un lit de particules par :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty}\left[1 + C\exp\left(\frac{-NR}{dp}\right)\right] \qquad \text{(I.3)}$$

Où :

ε : Porosité au centre du lit poreux ;

ε_{∞} : Porosité de la paroi ;

R : Distance à partir de la paroi solide ;

d_p : Diamètre des particules ;

C et N : Constantes empiriques, déterminées d'après de récentes recherches par les conditions suivantes :

$$R = 0 \rightarrow \varepsilon = 1$$
$$R \approx 4d_p à 5d_p \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{\infty}$$

C=1,4

$\rightarrow$Pour $\varepsilon_{\infty} = 4$

N= 5, à, 6

I.5.3. La perméabilité :

Les mouvements de l'eau dans le sol ont été étudiés par darcy. Ce dernier a montré que la vitesse d'écoulement était proportionnelle au gradient hydraulique (une fonction de la pression et de la profondeur). Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de perméabilité ; il traduit la capacité à laisser plus ou moins facilement de passage à l'écoulement de l'eau. La vitesse des tassements varie selon certaines théories, avec le carré de la perméabilité.

Ainsi les sols argileux tasseront très lentement après construction des ouvrages, alors que les sols sableux se tasseront au fur et à mesure de leur mise en charge. Le coefficient de perméabilité K est exprimé en m/s. Il est de 10^{-2} à 10^{-3} pour les graviers et gravillons et 10^{-10} à 10^{-11} pour les argiles. Ce qui traduit bien les différences de comportement, Gérard Philiponnat [9].

Nature	Ordre de grandeur de k en m/s	Degré de perméabilité
Gravier moyen à gros	10^{-1}_ 10^{-3}	Très élevé
Petit gravier, sable	10^{-3}_ 10^{-5}	Assez élevé
Sable très fin, sable limoneux	10^{-5}_ 10^{-7}	Faible
Limon compacté, Argile siliceuse	10^{-7}_ 10^{-9}	Très faible
Argile franche	10^{-9}_ 10^{-12}	Pratiquement imperméable

Tableau I .3 : Ordre de grandeur de la perméabilité d'après Gérard Philiponnat [9].

I.5.4. La tortuosité :

Dans un milieu poreux formé d'un empilement de grains solides, la vitesse réelle locale du fluide n'est pas tout à fait parallèle à la direction moyenne de l'écoulement du fait des obstacles constitués par la phase solide. Le fluide contourne les différentes particules s'opposant à son passage.

Le trajet suivi par un filet fluide est $L_m > L$ où L'est la longueur du milieu poreux

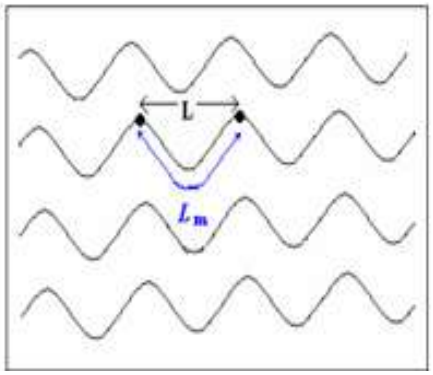


Figure I.5 : Définition schématique de la tortuosité.

On appelle tortuosité le rapport entre la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide et la longueur de l'échantillon.

$$\tau = \frac{L_m}{L} \qquad \text{(I.4)}$$

Dans le cas des milieux poreux constitués d'empilement de particules sphériques, la tortuosité varie peu et reste sensiblement égale à $\pi/2$ [3].

I.5.5. La surface spécifique :

La surface spécifique d'un milieu poreux est le rapport de la surface totale des grains soit à l'unité de volume de l'échantillon (surface volumique), soit à l'unité de masse (surface massique) du solide. Elle s'exprime respectivement en L^2/ L^3 ou en L^2/ M. C'est un des principaux facteurs des actions physicochimiques d'interface fluide/grain (phénomènes d'adsorption). La surface spécifique croit fortement lorsque le diamètre des grains diminue [10].

I.5.6. Conductivité thermique effective :

Vu la complexité de la structure des milieux poreux ainsi que la présence des différentes phases (solide et fluide), la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective ke. En effet, les phases solides et fluide présentes dans le milieu poreux contribuent généralement avec des proportions différentes au mode de conduction (le plus souvent $k_{solide} > k_{Fluide}$).

Cette conductivité effective dépend de la porosité et des conductivités thermiques des phases solides k_s et fluide k_f.

De manière générale, il n'existe pas de modèles exacts de conductivité thermique effective qui peuvent être appliquées aux cas pratiques d'écoulement dans les milieux poreux. Les modèles existants sont plutôt des modèles approchés construits pour des géométries simples en utilisant des hypothèses simplificatrices et en se basant sur des données expérimentales. Les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles série et parallèles basés sur l'analogie électrique.

- Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du milieu est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases ; (Fig. I.5).

$$\frac{1}{k_c} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{1-\varepsilon}{k_s} \qquad \text{(I.5)}$$

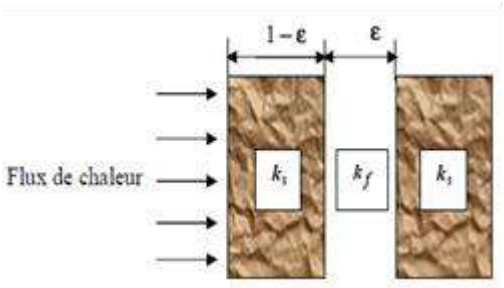


Figure I.6 : Modèle série de la conductivité thermique effective.

- Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse en même temps les deux phases qui sont parallèles. La conductivité effective est égale à la somme des conductivités thermiques dans chacune des phases ; (Fig. I.6).

$$k_e = (1-\varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \quad \text{(I.6)}$$

La conductivité thermique effective est toujours comprise entre celle du fluide et celle du solide.

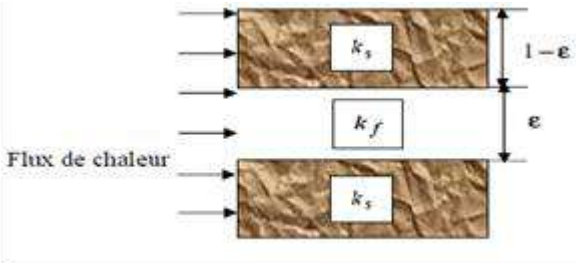


Figure I.7 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective.

❖ Conductivité thermique équivalente

La conductivité équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent. Pour plus de détail sur l'évaluation de la conductivité, nous pouvons citer les travaux de, Tobbal et Bennacer [11], Beji [12].

I.6. Caractéristiques physiques d'un milieu poreux

Le milieu poreux présent deux couples de caractéristiques physiques :

– isotropie ou anisotropie ;

– homogénéité ou hétérogénéité.

– Isotropie ou anisotropie :

Un milieu est dit isotrope lorsque ses caractéristiques physiques (granulométrie en particulier) sont constantes dans les trois directions de l'espace. Dans le cas, contraire, il est anisotrope.

– Homogénéité ou hétérogénéité :

Un milieu est homogène lorsqu'il présente, en tous points dans le sens de l'écoulement, des caractéristiques physiques constantes. Dans le cas contraire, le milieu est hétérogène.

Un milieu poreux homogène peut être isotrope ou anisotrope. Un milieu poreux hétérogène est toujours anisotrope (Fig I.6.) [10].

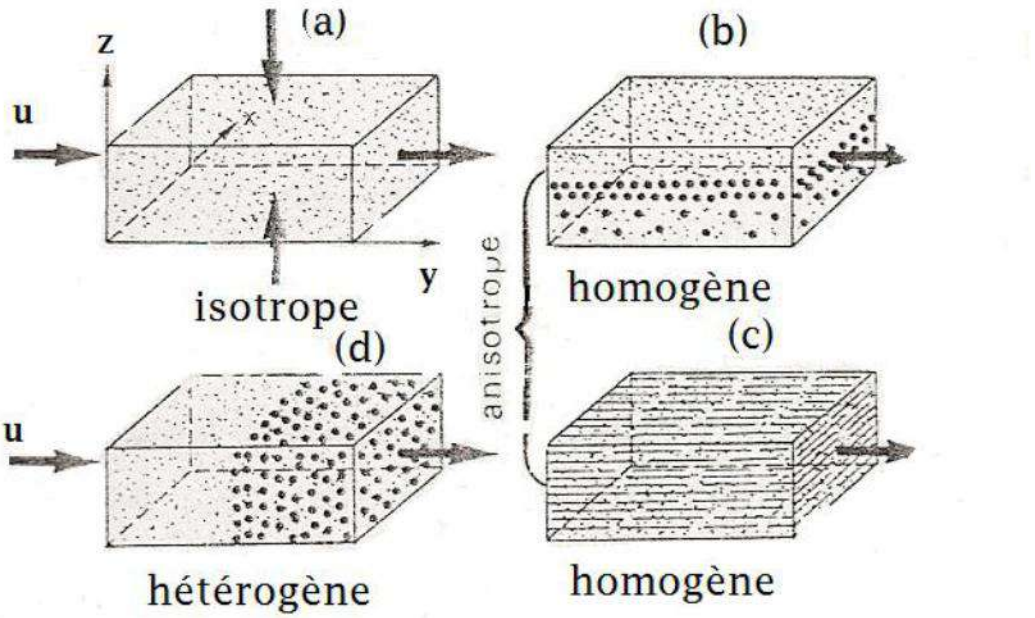


Figure. I.8 : Isotropie (a) et anisotropie (b, c, d). Homogénéité (b, c) et hétérogénéité(d).

I.7. Model d'écoulement utilisé en milieu poreux

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations.

On s'intéresse en général qu'au phénomène à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées, la plus importante est la loi de Darcy, dans le but d'élargir son domaine de validité, des corrections ont été proposées pour tenir compte des effets des parois, les autres lois sont en majorité des extensions de cette loi. (Extension de Brinkman), et des effets d'inertie (extension de Forchheimer).

I.7.1. Model de Darcy

Pour l'étude de la convection en milieu poreux, la grande majorité des études utilise la formulation classique de Darcy(1856). L'auteur donne une loi sur les écoulements isothermes dans un milieu poreux, qui exprime la proportionnalité entre les variations de

pression ΔP et le débit Q lié à la vitesse de filtration V_{fil}. Ceci se traduit pour un échantillon de longueur L et de section A par la relation suivante.

$$Q = \frac{k}{\mu_f}\frac{\Delta P}{L}A \tag{I.7}$$

Où μ_f : viscosité dynamique du fluide. K : perméabilité, ce paramètre étant indépendant de la nature du fluide et ne dépend que de la géométrie du milieu (Coux, 1997). On3 peut généraliser cette loi par :

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu_f}\vec{\nabla}P \tag{I.8}$$

Dans le cas de la présence de la pesanteur, l'équation précédente devient :

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu}\left[\vec{\nabla}P - \rho\vec{g}\right] \tag{I.9}$$

$\vec{V}$: Vecteur vitesse d'infiltration. K : perméabilité. μ : viscosité dynamique du fluide.

$\vec{\nabla}P$: Gradient de pression. ρ : Masse volumique. g : Vecteur d'accélération gravitationnel.

Le modèle de Darcy, qui néglige les forces d'inertie et visqueuses est valide lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.

$$\begin{cases} \varepsilon < 0 \\ Da \le 10^{-6} \\ \mathrm{Re}_p < 1\varepsilon \end{cases} \tag{I.10}$$

Dans lesquelles : ε est la porosité du milieu poreux

$D_a = \dfrac{k}{L^2}$ Est le nombre de darcy.

$\mathrm{Re}_p = \frac{d.\mathrm{V}_P}{\nu}$ Est le nombre de Reynolds.

$\mathrm{V_p}$: vitesse du pore.

d : Diamètre du pore.

$\nu = \frac{\mu_f}{\rho}$: viscosité cinématique du fluide.

Il existe trois types de régimes d'écoulement en fonction de Rep :

❖ Il existe trois types de régimes d'écoulement en fonction de Rep :

- Pour Rep < 1, le régime est laminaire, les forces de viscosité sont grandes devant les forces d'inertie, la loi de Darcy est valable.
- Pour 1<Rep<150, des couches limites se développent au niveau des parois solides. En dehors de cette couche limite, il n'y'à plus proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire persiste jusqu' à Rep=150.

Pour 150< Rep<300, un régime d'écoulement instationnaire prend place. Et pour Rep>300 on est en présence d'un écoulement turbulent.

Terme convectif :

Wooding [13] a proposé une extension de l'équation de Darcy en introduisant un terme convectif par analogie avec les équations de Navier-Stokes.

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V} = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{k}\vec{V} \qquad \text{(I.11)}$$

Le terme de gauche de l'équation (I.17) est le terme de convection qui tient compte des effets inertiels quand les vitesses sont importantes

I.7.2. Loi de Darcy- Forchheimer

Lorsque la vitesse débitante augmente, les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Dans ce cas, on montre expérimentalement que pour un gradient de pression fixé, le débit mesuré est plus petit qu'il ne le serait avec la loi de Darcy. Forchheimer a proposé une modification empirique de la loi de Darcy en rajoutant une relation non linéaire du second ordre entre le gradient de pression et la vitesse de filtration. Cette formulation appelée de Darcy-Forchheimer :

$$\vec{\nabla}P = \rho_f.\vec{g} - \frac{\mu_f}{k}.\vec{V}_{fil} - F\frac{\rho_f C_f}{\sqrt{k}}\left|\vec{V}_{fil}\right|.\vec{V}_{fil} \qquad \text{(I.12)}$$

C_f : Coefficient de Forchheimer, F : est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, généralement appelé paramètre de Forchheimer.

I.7.3. Modèle de Brinkman

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois (Delache, 2005). Pour cette situation Brinkman(1947) propose de modifier l'équation de Darcy de la façon suivante :

$$\vec{\nabla}P = \rho_f.\vec{g} - \frac{\mu_f}{k}.\vec{V}_{fil} + \mu_{eff}.\nabla^2\vec{V}_{fil} \qquad \text{(I.13)}$$

Où

$\mu_{eff} = \mu\left[1+2.5(1-\varepsilon)\right]$, représente la viscosité effective du milieu poreux. En général

μ_{eff} est considéré équivalente à la viscosité dynamique μ donc on peut donner la vitesse de filtration comme suit :

$$\vec{V}_{fil} = -\frac{k}{\mu}\left[\vec{\nabla}P - \rho_f\,\vec{g}\right] + k\nabla^2\vec{V}_{fil} \qquad \text{(I.14)}$$

Adoptant le modèle de Brinkman et introduisant l'approximation de Boussinesq, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$V_{fil} = -\frac{K}{\mu}\left[\vec{\nabla}P - \rho_0\vec{g}\left(\beta\left(T - T_0\right)\right)\right] + K\nabla^2\vec{V}_{fil} \qquad \text{(I.15)}$$

$\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)$: Le coefficient d'expansion volumique thermique du fluide, T_0 : la température de référence.

I.7.4. Model général :

On généralise les trois modèles en introduisant un terme transitoire et le terme

Convectif $(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$, ce qui conduire à l'équation suivante :

$$\underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon}\frac{\overrightarrow{\partial V}}{\partial t}+\frac{\rho_f}{\varepsilon}\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}}_{a}=\underbrace{-\vec{\nabla}P}_{b}+\underbrace{\rho\vec{g}}_{c}-\underbrace{\frac{\mu}{K}\vec{V}}_{d}+\underbrace{\frac{c_f\rho_f}{\sqrt{k}}\left|\vec{V}\right|\vec{V}}_{e}+\underbrace{\mu_{eff}\nabla^2\vec{V}}_{f} \qquad \text{(I.16)}$$

$\vec{V}$: Une quantité moyennée à travers un volume élémentaire.

(a) : Forces inertielles macroscopiques.

(b) : Gradient de pression.

(c) : Forces de volumes.

(d) : Terme de Darcy.

(e) : Terme de Forchheimer (Forces inertielles microscopiques).

(f) : Terme visqueux de Brinkman [10].

I.8.Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base et les principales caractéristiques qui se rapportant aux milieux poreux, les modèles d'équations ainsi que les régimes d'écoulement ont été examinés.

Dans le prochain chapitre nous avons présenté les équations régissant le problème physique posé, avec les conditions aux limites associées.

Chapitre II :

Méthode numérique

Chapitre II

Modèle physique et formulation mathématique

II.1. Description du problème

On se propose d'étudier le phénomène de la convection double-diffusive dans un espace confiné. La configuration géométrique bidimensionnelle de notre écoulement est représentée sur la Fig II .1. Nous considérons le cas d'une cavité carrée de dimensions géométriques suivantes : longueur L'et hauteur H', inclinée d'un angle Φ par rapport au plan horizontal, contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois actives de la cavité sont soumises à des flux de chaleur, q', et de masse, j', uniformes. Les autres parois sont considérées comme adiabatiques et imperméables.

Dans la présente étude, la cavité est placée dans un champ de pesanteur uniforme constant $\vec{g}$. L'interaction entre la gravité et les gradients de température et de soluté donnent naissance à des mouvements convectifs naturels. Ces derniers sont dus essentiellement à la distribution non uniforme de la densité du fluide engendrée par les facteurs cités ci-dessus. La problématique de cette étude est la détermination des nombres de Rayleigh critiques marquant différents seuils de convection. En régime de convection à amplitude finie, on déterminera les transferts de chaleur et de masse induits par les mouvements de convection naturelle. Dans cette étude quelques hypothèses simplificatrices seront adoptées afin d'alléger la complexité du problème.

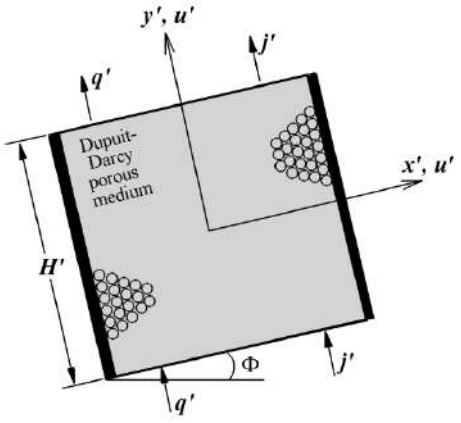


Figure II.1 : Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées.

II.2. Hypothèses simplificatrices

Lors de notre étude plusieurs approximations ont été adoptées afin de simplifier la formulation du modèle mathématique :

- La largeur de l'enceinte, *W′*, est supposée suffisamment grande par rapport aux autres dimensions (*W′/L′* et *W′/H′*>> 1) de façon à ce que les effets tridimensionnel deviennent négligeables. Ceci nous amène alors à un problème bidimensionnel comme le montre la Fig II.1.

- la solution est un fluide newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est supposé laminaire et transitoire.
- La matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène.
- Il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur ou de masse.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- L'effet de Dufour de diffusion de chaleur est négligé.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence. Cependant, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température. Celle-ci est donnée par la relation suivante de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T \left(T' - T'_0 \right) - \beta_S \left(S' - S'_0 \right) \right] \qquad \text{(II.1)}$$

où : T' et S' représentent respectivement, la température et la concentration de fluide en un point du système, T_0', S_0' et ρ_0 représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence, β_T et β_S sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutale du fluide. Ils sont définis par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T'}\right)_{P',S'}, \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial S'}\right)_{P',T'} \qquad \text{(II.2)}$$

Pour la plupart des fluides, β_T est positif sauf l'eau qui représente une densité maximale au voisinage de 4°C, par contre β_S peut être négatif ou positif en fonction de la contribution des composantes de diffusion à la densité du fluide. La relation (II.1) est d'une bonne approximation tant que la condition $(\Delta\rho / \rho) \leq 0.1$ est vérifiée par l'approximation de Boussinesq décrite dans Gray et Giorgini (1976, [14]).

II.3. Formulation mathématique

En tenant compte de toutes les hypothèses considérées, le système d'équations différentielles aux dérivées partielles décrivant ce problème est composé de l'équation de continuité, des équations de la conservation de la quantité de mouvement et des équations de la conservation de l'énergie et de la matière dans un milieu poreux.

Pour tenir compte des effets de l'inertie en grands nombre de *Re*, le terme non linéaire de Dupuit est pris en considération. Le modèle ainsi formé est connu sous le nom du modèle de Dupuit-Darcy ou de loi de Darcy étendue.

Le modèle de Dupuit-Darcy, tenant compte l'effet de l'inertie, est pris en considération. Pour que la validation de la loi de Dupuit-Darcy soit effective, les conditions suivantes doivent être satisfaites

$$\varepsilon' < 0.8 \qquad Da = \frac{K}{H'^2} \leq 10^{-6} \qquad 0 < Re = \frac{V_a \sqrt{K}}{\upsilon} < \infty \tag{II.3}$$

où : V_a est la vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide, K la perméabilité du milieu poreux, υ la viscosité cinématique du fluide et $\sqrt{K}$ est la longueur représentative du diamètre des pores.

Pour que les résultats obtenus soient valides, il faut que la porosité du milieu poreux soit inférieure à 0.8. Dans le cas contraire, les forces visqueuses (connues sous le nom de termes de Brinkman) doivent être prises en considération.

Pour une cavité remplie par un fluide binaire les équations de base régissant l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse sont données respectivement par :

II.3.1.Équation de continuité

L'équation de continuité exprimant le principe de conservation de masse d'un fluide en mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \tag{II.4}$$

II.3.2.Équation de mouvement : Loi de Dupuit-Darcy

La formulation locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$-\frac{K}{\mu}\left[\frac{\partial P'}{\partial x'}+\rho_0 g\left[\beta_T\left(T'-T'_0\right)+\beta_S\left(S'-S'_0\right)\right]\cos\Phi\right]=\left(1+\frac{\tilde{K}}{\mu}\rho\left|\overrightarrow{V'}\right|\right)u' \qquad \text{(II.5)}$$

$$\frac{K}{\mu}\left[-\frac{\partial P'}{\partial y'}+\rho_0 g\left[\beta_T\left(T'-T'_0\right)+\beta_S\left(S'-S'_0\right)\right]\sin\Phi\right]=\left(1+\frac{\tilde{K}}{\mu}\rho\left|\overrightarrow{V'}\right|\right)v' \qquad \text{(II.6)}$$

II.3.3. Équation de conservation de l'énergie

La première loi de thermodynamique permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergie mises en jeu dans les milieux poreux. L'équation de l'énergie, dans laquelle les termes de dissipation visqueuse sont négligés, s'écrit comme suit :

$$\left(\rho C\right)_P\frac{\partial T'}{\partial t'}+\left(\rho C\right)_f\left(u'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)=k_P\nabla^2 T' \qquad \text{(II.7)}$$

II.3.4.Équation de conservation de masse

Le principe de conservation de la masse mène à l'équation de concentration suivante :

$$\phi\frac{\partial S'}{\partial t'}+\left(u'\frac{\partial S'}{\partial x'}+v'\frac{\partial S'}{\partial y'}\right)=D\nabla^2 S' \qquad \text{(II.8)}$$

où $\overrightarrow{V}'$ est le vecteur de vitesse dont les composantes sont u' et v' dans les directions x' et y', respectivement, μ est la viscosité dynamique, k_p est la conductivité thermique du milieu poreux, ε' est la porosité du milieu poreux et P' est la pression hydrodynamique. Les paramètres $\left(\rho C\right)_p$ et $\left(\rho C\right)_f$ sont la capacité calorifique thermique du milieu poreux saturé et la capacité calorifique thermique du fluide respectivement.

Il est à noter qu'à partir des équations (II.5) et (II.6) la loi de Darcy peut être obtenue quand $\tilde{K}=0$. Pour illustrer comment le terme non linéaire supplémentaire entre en jeu lorsque la porosité ε est élevée, on peut citer Ergun's (1952, [15]) pour les relations K et $\tilde{K}$.

$$K=\frac{d^2\varepsilon^2}{150(1-\varepsilon)^2}, \qquad \tilde{K}=\frac{1.75d}{150(1-\varepsilon)} \qquad \text{(II.9)}$$

où d, est la longueur caractéristique des pores ou le diamètre des particules.

De tout évidence, pour les milieux poreux avec une porosité élevée $\varepsilon>>1$ le diamètre des pores est assez grand et on peut aboutir à une situation avec des grandes valeurs de $\tilde{K}$. Dans ce cas le terme non linéaire représentant les effets de l'inertie devient important.

La hauteur H' entre les deux parois horizontales actives de la cavité a été choisie comme longueur de référence pour adimensionnaliser les équations gouvernantes (II.4)-(II.8). La vitesse est adimensionnalisée par rapport à la diffusivité thermique. Par ailleurs la température et la concentration sont adimensionnalisée par rapport à l'écart de température et de concentration entre les deux parois horizontales de la cavité.

Les variables adimensionnelles sont données par :

$$\begin{gathered}(x,y)=\left(\frac{x'}{\ell^*},\frac{y'}{\ell^*}\right),\quad (u,v)=\left(\frac{u'}{U^*},\frac{v'}{U^*}\right),\quad t=t'/t^*,\quad P=P'/P^*\\ \Psi=\Psi'/k_p,\quad T=\frac{(T'-T'_0)}{\Delta T^*},\quad S=\frac{(S'-S'_0)}{\Delta S^*},\quad \varepsilon=\phi/\sigma\end{gathered} \tag{II.10}$$

où ℓ^*, P^*, t^*, U^* sont respectivement la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristiques. Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$P^*=\frac{Pr}{Da}\rho_0 U^{*2},\quad t^*=\sigma\frac{\ell^*}{U^*},\quad U^*=\frac{\alpha}{\ell^*} \tag{II.11}$$

où α_P et σ désignent la diffusivité thermique du milieu poreux saturé et le rapport des chaleurs massiques respectivement. Ils sont définis par :

$$\alpha_P=\frac{k_P}{(\rho C)_f},\quad \sigma=\frac{(\rho C)_P}{(\rho C)_f} \tag{II.12}$$

Dans notre cas la longueur caractéristique ℓ^* est définie comme :

$$\ell^*=H' \tag{II.13}$$

En introduisant les variables sans dimensions (II.10) dans les équations (II.4)-(II.8), nous obtenons les équations gouvernantes adimensionnelles suivantes décrivant respectivement, la conservation du mouvement, de l'énergie et de masse.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{II.14}$$

$$-\frac{Da}{\Pr}\frac{\partial P}{\partial x}=u+\frac{\tilde{K}}{\Pr\,\ell^*}\left|\vec{V}\right|u-R_T\left(T+NS\right)\cos\Phi \tag{II.15}$$

$$-\frac{Da}{\Pr}\frac{\partial P}{\partial y}=v+\frac{\tilde{K}}{\Pr\,\ell^*}\left|\vec{V}\right|v-R_T\left(T+NS\right)\sin\Phi \tag{II.16}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\nabla^2 T \tag{II.17}$$

$$\varepsilon\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}=Le^{-1}\nabla^2 S \tag{II.18}$$

À partir de ces équations, cinq groupements adimensionnels émergent dans les équations ci-dessus, à savoir le nombre de Rayleigh thermique R_T , le rapport des forces de volume N , le nombre de Prandtl P_r , le nombre de Darcy Da , le nombre de Lewis Le et le paramètre d'inertie, G ,qui sont définis par :

$$R_T=\frac{gK\beta_T\Delta T^*\ell^*}{\alpha\nu},\qquad N=\frac{\beta_S\Delta S^*}{\beta_T\Delta T^*},\qquad Pr=\frac{\nu}{\alpha}$$
$$Da=\frac{K}{H'^2},\qquad Le=\frac{\alpha}{D},\qquad G=\frac{\tilde{K}}{P_r H'} \tag{II.19}$$

II.4. Équation de fonction de courant

Etant donné que l'écoulement est considéré bidimensionnel, il existe alors une fonction de courant $\Psi(x,y)$ définie par :

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{II.20}$$

Après l'élimination de la pression dans les équations (II.15) et (II.16), les équations de mouvement, se réduisent à :

$$(1+GV_a)\nabla^2\Psi+GV_a^{-1}\left[v^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+u^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-2uv\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right]=-R_T\left[\frac{\partial}{\partial x}(T+NS)\cos\Phi-\frac{\partial}{\partial y}(T+NS)\sin\Phi\right] \tag{II.21}$$

avec : $V_a=\sqrt{u^2+v^2}$

II.5. Conditions aux limites

II.5.1. Conditions aux frontières hydrodynamiques

Ces conditions expriment l'imperméabilité des parois de la cavité, elles sont données par :

$$\left.\begin{aligned} u' = 0, \quad \Psi' = 0, \quad \text{à} \quad x' = \pm\frac{L'}{2} \\ v' = 0, \quad \Psi' = 0, \quad \text{à} \quad y' = \pm\frac{H'}{2} \end{aligned}\right\} \tag{II.22}$$

Dans un milieu poreux de Darcy, le glissement des particules fluides sur les parois est permis.

II.5.2 .Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières sur les parois adiabatiques et imperméables de la cavité sont exprimées par :

$$x' = \pm\frac{L'}{2}, \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial S'}{\partial x'} = 0 \tag{II.23}$$

Par ailleurs, les conditions thermiques sur les parois actives sont :

$$y' = \pm\frac{H'}{2}, \quad -k_P \frac{\partial T'}{\partial y'} = q', \quad -\rho D \frac{\partial S'}{\partial y'} = j' \tag{II.24}$$

II.5.3 .Conditions aux frontières thermiques adimensionnelles

$$\left.\begin{aligned} u = 0, \quad \Psi = 0 \quad \text{à} \quad x = \pm\frac{1}{2} \\ v = 0, \quad \Psi = 0 \quad \text{à} \quad y = \pm\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{II.25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = \pm\frac{1}{2} \tag{II.26}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -1 \quad \text{à} \quad y = \pm\frac{1}{2} \tag{II.27}$$

II.6 .Transfert thermique et massique

Dans la présente étude, nous nous intéressons particulièrement aux calculs du taux de transfert de chaleur et de masse à une position x donnée, qui sont exprimés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood définis par :

$$Nu_x = \frac{q'}{k_P \dfrac{\Delta T'}{H'}} = \frac{1}{T(x,-1/2) - T(x,1/2)} \tag{II.28}$$

$$Sh_x = \frac{j'}{D \dfrac{\Delta S'}{H'}} = \frac{1}{S(x,-1/2) - S(x,1/2)} \tag{II.29}$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood sur les parois actives sont exprimées par :

$$Nu_m = \int_{-1/2}^{1/2} Nu_x dx \tag{II.30}$$

$$Sh_m = \int_{-1/2}^{1/2} Sh_x dx \tag{II.31}$$

II.7.Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les équations régissant le problème physique posé, avec les conditions aux limites associées, sont mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme des équations aux dérivées partielles qui ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique. Celle-ci permettra de transformer les équations aux dérivées en équations algébriques. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III :

Méthode Numérique

Chapitre III

Méthode numérique

METHODE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous utilisons une méthode numérique pour la résolution du système d'équations différentielles non-linéaires telles que présentées dans la solution analytique. La méthode proposée est basée sur la technique des différences finies. Cette méthode est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18eme siècle par Euler, elle s'avère la plus adaptée et la plus facile à utiliser pour les problèmes à géométrie simple. Cette méthode consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini (voir Fig. III.1).

Dans un repère cartésien, chaque nœud est désigné par le couple d'indices (i, j) désignant les lignes d'intersection du maillage. Les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire.

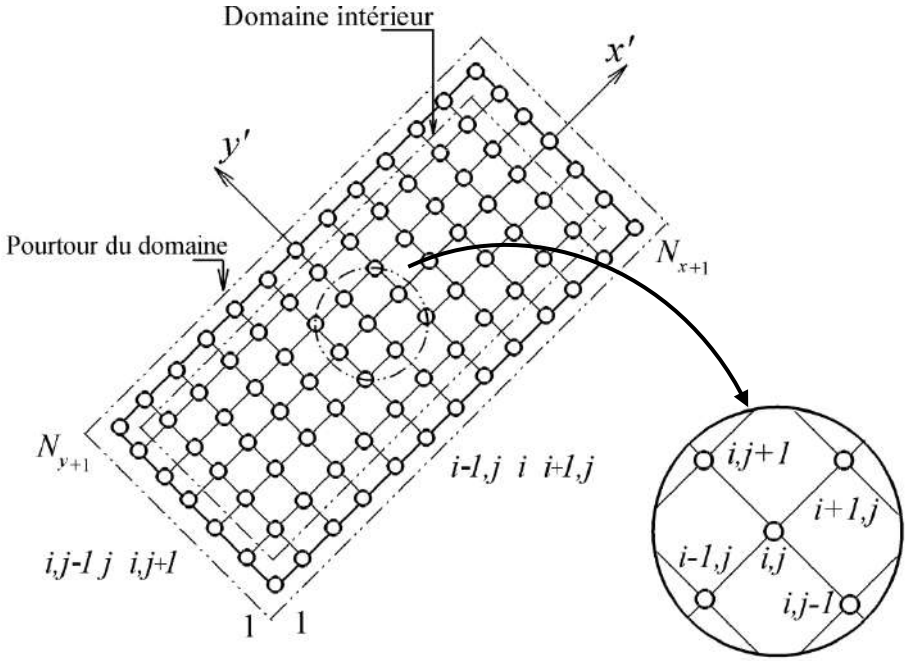


Figure III.1 : Maillage du domaine de calcul en (*i*, *j*).

Les équations de l'énergie (II.17) et de la concentration (II.18) sont discrétisées avec un schéma centré de deuxième ordre et en utilisant la forme conservatrice pour les termes convectifs. Pour chaque pas de temps la méthode implicite aux directions alternées (ADI) donne lieu à deux systèmes matriciels tri-diagonaux à résoudre, l'un résultant de la discrétisation implicite en *x*et l'autre de la discrétisation implicite en*y*. la méthode (ADI)

divise le pas de temps en deux parties égales, dans le premier demi-pas de temps, le système est implicitement en*x*mais explicitement en *y* et dans le deuxième demi-pas de temps, le système est implicitement en*y*et explicitement en*x*.Pour chaque étape de temps, la solution est obtenue en balayant le domaine de calcul dans la direction des *x* puis dans celle des*y*. Connaissant les champs de la température et de la concentration à l'instant $(n+1)\Delta t$, l'étape suivante consiste à déterminer le champ de la fonction de courant à partir de l'équation (II.21), une fois discrétisée avec un schéma centré classique et résolue avec la méthode de sur-relaxation successive (SOR) par points proposée par Frankel (1950), qui est une méthode explicite donnant directement la valeur de Ψ à l'instant $(n+1)\Delta t$, au nœud considéré, moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.

III.1. Discrétisation des conditions aux frontières thermiques

Les conditions aux frontières (II.26) et (II.27) sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche dudeuxième ordre selon la paroi considérée :

Selon les parois adiabatiques et imperméables : $\dfrac{\partial T}{\partial x}=\dfrac{\partial S}{\partial x}=0$

$$T_{1,j}=\frac{4T_{2,j}-T_{3,j}}{3}, \qquad S_{1,j}=\frac{4S_{2,j}-S_{3,j}}{3} \qquad \text{à} \qquad x=-\frac{1}{2} \qquad \text{(III.1)}$$

$$T_{Nx+1,j}=\frac{4T_{Nx,j}-T_{Nx-1,j}}{3}, \qquad S_{Nx+1,j}=\frac{4S_{Nx,j}-S_{Nx-1,j}}{3} \qquad \text{à} \qquad x=\frac{1}{2} \qquad \text{(III.2)}$$

Selon les parois actives : $\dfrac{\partial T}{\partial y}=-1$**,** $\dfrac{\partial S}{\partial y}=-1$

$$T_{i,1}=\frac{4T_{i,2}-T_{i,3}+2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y=-\frac{1}{2} \qquad \text{(III.3)}$$

$$T_{i,Ny+1}=\frac{4T_{i,Ny}-T_{i,Ny-1}-2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y=\frac{1}{2} \qquad \text{(III.4)}$$

$$S_{i,1}=\frac{4S_{i,2}-S_{i,3}-2\Delta y\,(S_r-1)}{3} \qquad \text{à} \qquad y=-\frac{1}{2} \qquad \text{(III.5)}$$

$$S_{i,Ny+1}=\frac{4S_{i,Ny}-S_{i,Ny-1}-2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y=\frac{1}{2} \qquad \text{(III.6)}$$

III.2. Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie étant parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions alternées ADI est choisie comme outil de résolution. Compte tenu de l'équation de l'énergie (II.17) cette dernière se réécrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial (uT)}{\partial x}+\frac{\partial (vT)}{\partial y}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{(III.7)}$$

Schéma implicite en *x* et explicite en *y*

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps n pour les dérivées en*y*, chaque terme de l'équation (III.7) est discrétisé comme suit :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{T_{i+1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j}=\frac{T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \qquad \text{(III.8)}$$

$$\left.\frac{\partial (uT)}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}^{n}T_{i+1,j}^{n+1/2}-u_{i-1,j}^{n}T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial (vT)}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{v_{i,j+1}^{n}T_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \qquad \text{(III.9)}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j}=2\frac{T_{i,j}^{n+1/2}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \qquad \text{(III.10)}$$

En substituanles équations (III.8)-(III.10) dans l'équation (III.7), on obtient un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$A_i T_{i+1,j}^{n+1/2}+B_i T_{i,j}^{n+1/2}+C_i T_{i-1,j}^{n+1/2}=D_i \qquad \text{(III.11)}$$

avec :

$$A_i=\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right], \qquad B_i=2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right], \qquad C_i=-\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]$$

$$D_i=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j+1}^{n}+2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j}^{n}+\left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j-1}^{n}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.1)-(III.4) dans l'équation (III.11) on obtient la forme discrète implicite en *x*sous la forme suivant :

Pour : $i=2$ $$\left[A_2-\frac{1}{3}C_2\right]T_{3,j}^{n+1/2}+\left[B_2+\frac{4}{3}C_2\right]T_{2,j}^{n+1/2}=D_2 \qquad \text{(III.11a)}$$

Pour : $i = N_x \left[\frac{4}{3}A_{Nx} - B_{Nx}\right]T_{Nx,j}^{n+1/2} + \left[C_{Nx} - \frac{1}{3}A_{Nx}\right]T_{Nx-1,j}^{n+1/2} = D_{Nx}$ (III.11b)

Schéma implicite en *y* et explicite en *x*

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n+1/2) pour les dérivées en $x$et au temps (n+1) pour les dérivées en$y$. La discrétisation des dérivées partielles est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \tag{III.12}$$

$$\left.\frac{\partial(uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial(vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n} T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n} T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \tag{III.13}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{III.14}$$

En substituant les équations (III.12)-(III.14) dans l'équation (III.7), on obtient un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$A_i^{'} T_{i,j+1}^{n+1} + B_i^{'} T_{i,j}^{n+1} + C_i^{'} T_{i,j-1}^{n+1} = D_i^{'} \tag{III.15}$$

$$A_i^{'} = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right], \quad B_i^{'} = 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right], \quad C_i = -\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right]$$

$$D_i^{'} = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right]T_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right]T_{i,j}^{n+1/2} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right]T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.1)-(III.4) dans l'équation (III.15) on obtient la forme discrète implicite en $y$sous la forme suivant :

Pour : $j = 2\left[A_2^{'} - \frac{1}{3}C_2^{'}\right]T_{i,3}^{n+1} + \left[B_2^{'} + \frac{4}{3}C_2^{'}\right]T_{i,2}^{n+1} = D_2^{'} - \frac{2}{3}C_2^{'}\Delta y$ (III.15a)

Pour: $j = N_y \left[\frac{4}{3}A_{Ny}^{'} - B_{Ny}^{'}\right]T_{i,Ny}^{n+1} + \left[C_{Ny}^{'} - \frac{1}{3}A_{Ny}^{'}\right]T_{i,Ny-1}^{n+1} = D_{Ny}^{'} + \frac{2}{3}A_{Ny}^{'}\Delta y$ (III.15b)

III.3.Discrétisation de l'équation de concentration

De même pour l'équation de concentration (II.18), nous exposons dans ce qui suit sa discrétisation en suivant exactement les mêmes démarches que le paragraphe précédent.

L'équation de concentration (II.18) se réécrit de la façon suivante :

$$\varepsilon\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(uS)}{\partial x}+\frac{\partial(vS)}{\partial y}=Le^{-1}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right] \qquad \text{(III.16)}$$

Schéma implicite en *x* et explicite en *y*

Similairement aux démarches précédentes, l'équation algébrique correspondant à la discrétisation de l'équation de concentration donne :

$$A_i S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+B_i S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+C_i S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}=D_i \qquad \text{(III.17)}$$

avec :

$$A_i=\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2 Le}\right],\qquad B_i=2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x^2 Le}\right],\qquad C_i=-\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{1}{\Delta x^2 Le}\right]$$

$$D_i=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]S_{i,j+1}^{n}+2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]S_{i,j}^{n}+\left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]S_{i,j-1}^{n}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.1)-(III.6) dans l'équation (III.17) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivant :

Pour : $i=2$ $$\left[A_2-\frac{1}{3}C_2\right]S_{3,j}^{n+1/2}+\left[B_2+\frac{4}{3}C_2\right]S_{2,j}^{n+1/2}=D_2 \qquad \text{(III.17a)}$$

Pour : $i=N_x$ $$\left[\frac{4}{3}A_{Nx}-B_{Nx}\right]S_{Nx,j}^{n+1/2}+\left[C_{Nx}-\frac{1}{3}A_{Nx}\right]S_{Nx-1,j}^{n+1/2}=D_{Nx} \qquad \text{(III.17b)}$$

Schéma implicite en *y* et explicite en *x*

$$A_i^{'}S_{i,j+1}^{n+1}+B_i^{'}S_{i,j}^{n+1}+C_i^{'}S_{i,j-1}^{n+1}=D_i^{'} \qquad \text{(III.18)}$$

$$A_i^{'}=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right],\qquad B_i^{'}=2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right],\qquad C_i=-\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}-\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]$$

$$D_i^{'} = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^{2} Le} \right] S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^{2} Le} \right] S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^{2} Le} \right] S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

En remplaçant les conditions aux limites (III.1)-(III.6) dans l'équation (III.18) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivant :

$$\text{Pour : } j = 2\left[A_2^{'} - \frac{1}{3} C_2^{'} \right] S_{i,3}^{n+1} + \left[B_2^{'} + \frac{4}{3} C_2^{'} \right] S_{i,2}^{n+1} = D_2^{'} - \frac{2}{3} C_2^{'} \Delta y \qquad \text{(III.18a)}$$

$$\text{Pour : } j = N_y \left[\frac{4}{3} A_{Ny}^{'} - B_{Ny}^{'} \right] S_{i,Ny}^{n+1} + \left[C_{Ny}^{'} - \frac{1}{3} A_{Ny}^{'} \right] S_{i,Ny-1}^{n+1} = D_{Ny}^{'} + \frac{2}{3} A_{Ny}^{'} \Delta y \qquad \text{(III.18b)}$$

III.4.Discrétisation de l'équation du mouvement

III.4.1.Milieu poreux Darcy

L'équation de mouvement du milieu poreux basée sur le modèle de Darcy peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\nabla^2 \Psi = R_T \left[\frac{\partial}{\partial x} (T + NS) \cos\Phi - \frac{\partial}{\partial y} (T + NS) \sin\Phi \right] \qquad \text{(III.19)}$$

Chaque terme de l'équation de mouvement (III.19) est discrétisé selon un schéma centré classique.

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}, \qquad \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \qquad \text{(III.20)}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \qquad \text{(III.21)}$$

En remplaçant les expressions (III.20) et (III.21) dans l'équation (III.19) on obtient l'expression générale de la fonction suivante

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = (1-\omega) \Psi_{i,j}^{(n+1),k} + \omega \{ & a_1 \left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k} + \Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)} \right) + a_2 \left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k} + \Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)} \right) + \\ & a_3 \left[\left(T_{i+1,j}^{(n+1)} - T_{i-1,j}^{(n+1)} \right) + N \left(S_{i+1,j}^{(n+1)} - S_{i-1,j}^{(n+1)} \right) \right] + a_4 \left[\left(T_{i,j+1}^{(n+1)} - T_{i,j-1}^{(n+1)} \right) + N \left(S_{i,j+1}^{(n+1)} - S_{i,j-1}^{(n+1)} \right) \right] \} \end{aligned} \qquad \text{(III.22)}$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des constantes définies par :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta y^{\,2}}{2\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)}, \qquad a_3 = R_T\cos\Phi\,\frac{\Delta x\,\Delta y^{\,2}}{4\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)} \\ a_2 &= \frac{\Delta x^{\,2}}{2\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)}, \qquad a_4 = -R_T\sin\Phi\,\frac{\Delta x^{\,2}\Delta y}{4\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.23)}$$

Le paramètre ω est le facteur de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, pour accélérer la convergence. Sa valeur optimale, ω_{opt} dépend de la forme du domaine, du maillage et du type des conditions aux limites.

Pour un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, ω_{opt} est donnée par :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\zeta^2}\left[1-\sqrt{1-\zeta^2}\right] \quad \text{(III.24)}$$

où :

$$\zeta = \left[\frac{\cos\left(\pi / N_{x+1}\right)+\left(\Delta x^{\,2}/\Delta y^{\,2}\right)\cos\left(\pi / N_{y+1}\right)}{1+\left(\Delta x^{\,2}/\Delta y^{\,2}\right)}\right]$$

où N_{x+1} et N_{y+1} désignent les nombres des nœuds suivant les directions horizontales et verticales, respectivement.

III.4.2.Milieux poreux Dupuit-Darcy

L'équation de mouvement pour le cas général est réécrite sous la forme suivante :

$$\left(1+GV_a\right)\nabla^2\Psi+\frac{G}{V_a}\left[v^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+u^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-2uv\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right]=R_T\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(T+NS\right)\cos\Phi-\frac{\partial}{\partial x}\left(T+NS\right)\sin\Phi\right) \quad \text{(III.25)}$$

avec : $V_a=\sqrt{\left(\partial\Psi/\partial x\right)^2+\left(\partial\Psi/\partial y\right)^2}$

Avant la discrétisation de l'équation (III.25), on suppose que les variables V_a, u et v sont déjà connues.

On applique une discrétisation centrée de chaque terme de l'équation et on applique une discrétisation croisée pour le terme suivant :

$$\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right|_{i,j}=\frac{1}{4\Delta x\,\Delta y}\left[\Psi^{n+1}_{i+1,j+1}-\Psi^{n+1}_{i-1,j+1}-\Psi^{n+1}_{i-1,j-1}+\Psi^{n+1}_{i+1,j-1}\right] \quad \text{(III.26)}$$

Après la discrétisation, l'équation générale de la fonction de courant devient :

$$\Psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = \Psi_{i,j}^{(n+1),k} + \omega\left\{a_x\left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k} + \Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)}\right) + a_y\left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k} + \Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)}\right) + a_{xy}\right.$$
$$\left(\Psi_{i+1,j+1}^{(n+1),k} - \Psi_{i-1,j+1}^{(n+1),k} - \Psi_{i-1,j-1}^{(n+1),(k+1)} + \Psi_{i+1,j+1}^{(n+1),k}\right) + a_{TSx}\left[\left(T_{i+1,j}^{(n+1)} - T_{i-1,j}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i+1,j}^{(n+1)} - S_{i-1,j}^{(n+1)}\right)\right] +$$
$$\left. a_{TSy}\left[\left(T_{i,j+1}^{(n+1)} - T_{i,j-1}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i,j+1}^{(n+1)} - S_{i,j-1}^{(n+1)}\right)\right]\right\} \quad \text{(III.27)}$$

avec :

$$a_p = \frac{G\left[2\left(P_r^* + V_a\right)\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)V_a + 2\left(v^2\Delta y^2 + u^2\Delta x^2\right)\right]}{V_a\Delta x^2\Delta y^2}, \qquad a_x = G\left[\frac{\left(P_r^* + V_a\right)V_a + v^2}{V_a\Delta x^2}\right] / a_p$$
$$a_y = G\left[\frac{\left(P_r^* + V_a\right)V_a + u^2}{V_a\Delta y^2}\right] / a_p, \qquad a_{xy} = -\left[\frac{Guv}{2V_a\Delta x\Delta y}\right] / a_p$$
$$a_{TSx} = \frac{R_T\cos\Phi}{2\Delta x a_p}, \qquad a_{TSy} = -\frac{R_T\sin\Phi}{2\Delta y a_p} \quad \text{(III.28)}$$

III.5. Discrétisation des champs de vitesse

Les composantes du champ de vitesse sont obtenues à partir de la fonction de courant selon les relations (II.20). La discrétisation de ces équations par un schéma de différence finies centré du premier ordre donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad \text{(III.29)}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad \text{(III.30)}$$

III.6.Discrétisation des conditions aux frontières des vitesses

Les conditions aux frontières des vitesses sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche dutroisièmeordre :

$$\left.\begin{array}{llll} u_{1,j} = 0, \quad , & v_{i,1} = -\dfrac{18\Psi_{2,j} - 9\Psi_{3,j} + 2\Psi_{4,j}}{6\Delta x} & \text{à} & x = -\dfrac{1}{2} \\ u_{Nx+1,j} = 0, & v_{i,Ny+1} = \dfrac{18\Psi_{Nx,j} - 9\Psi_{Nx-1,j} + 2\Psi_{Nx-2,j}}{6\Delta x} & \text{à} & x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{(III.31)}$$

$$\left.\begin{array}{llll} v_{i,1} = 0, & u_{1,j} = \dfrac{18\Psi_{i,2} - 9\Psi_{i,3} + 2\Psi_{i,4}}{6\Delta y} & \text{à} & y = -\dfrac{1}{2} \\ v_{i,Ny+1} = 0, & u_{Ny+1,j} = -\dfrac{18\Psi_{i,Ny} - 9\Psi_{i,Ny-1} + 2\Psi_{i,Ny-2}}{6\Delta y} & \text{à} & y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{(III.32)}$$

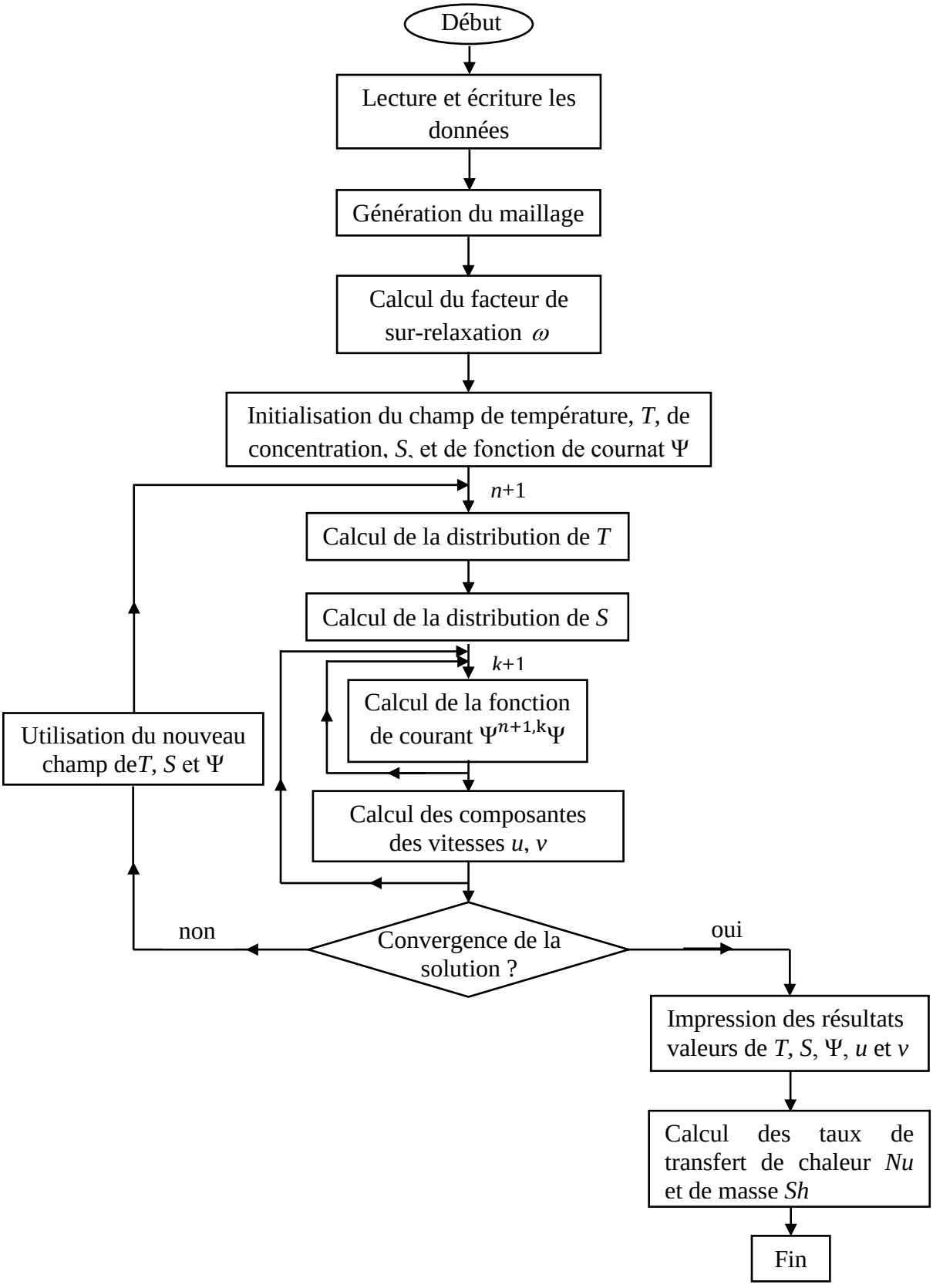
III.7. Algorithme de calcul

Les principales étapes de notre algorithme de calcul sont :

1. Génération du maillage.
2. Initialisation et lecture des données.
3. Calcul du facteur de sur-relaxation.
4. Introduction des conditions initiales sur la température, *T*, sur la concentration, *S*, et sur la fonction de courant, Ψ.
5. Evaluation du champ de vitesse initiale $u_{i,j}$ et$v_{i,j}$.
6. Début de la boucle dans le temps.
   6.1. Résolution de l'équation de l'énergie (III.11) et (III.15) par la méthode ADI et calcul du champ de température$T_{i,j}$.
   6.2. Résolution de l'équation de concentration (III.17) et (III.18) par la méthode ADI et calcul le champ de concentration$S_{i,j}$.
   6.3. Résolution de l'équation de mouvement (III.22) et (III.27) par la méthode SOR et calcul du champ de la fonction du courant $\Psi_{i,j}$.
   6.4. Détermination du champ de vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
   6.5. Refaire l'étape (6.1) jusqu'à l'obtention de la convergence de la solution vers une solution permanent ou oscillante.
7. Impression des résultats.
8. Fin du programme.

Le critère de convergence lors de la résolution des équations (III.22) et (III.27) est donné par :

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^{k}\right|}{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k}\right|} \leq 10^{-6} \quad \text{(III.33)}$$


Début
Lecture et écriture les données
Génération du maillage
Calcul du facteur de sur-relaxation ω
Initialisation du champ de température, T, de concentration, S, et de fonction de cournat Ψ
n+1
Calcul de la distribution de T
Calcul de la distribution de S
k+1
Calcul de la fonction de courant $\Psi^{n+1,k}\Psi$
Utilisation du nouveau champ de$T$, S et Ψ
Calcul des composantes des vitesses u, v
non
Convergence de la solution ?
oui
Impression des résultats valeurs de T, S, Ψ, u et v
Calcul des taux de transfert de chaleur Nu et de masse Sh
Fin

III.8.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la procédure numérique choisie afin de calculer les transferts de chaleur et de soluté dans la cavité. Pour cela, on exploite la méthode de différence finis, pour transformer les equationsaux dérivées partielles en équations algébriques, L'algorithme de calcul est adopté pour résoudre le système d'équations.

Dans le prochain chapitre nous présentons la validation du code némérique ainsi que les résultats obtenus avec leurs descriptions et leurs discussions.

Chapitre IV :

Résultats et Discussion

CHAPITRE IV

Résultats et Discussion

Ce chapitre s'intéresse à la présentation des résultats numériques dans le cas d'une cavité carrée inclinée contenant un milieu poreux saturé par un fluide ou mélange de fluide. Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont pilotés par des conditions aux frontières thermiques et solutale de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse). Ce problème est gouverné par les nombres sans dimensions suivant : le rapport de la force de volume, N, le paramètre d'inertie G, la porosité normalisée ε, le nombre de Rayleigh R_T, l'angle d'inclinaison Φ, et le nombre de Lewis Le.

IV.1 Validation de code numérique

Afin de vérifier l'exactitude du programme développé dans le présent travail, on a comparé les calculs numériques avec les résultats numériques disponibles dans la littérature en se basant sur la détermination des trois paramètres souvent traités dans l'étude des écoulements convectifs, à savoir les nombres de Nusselt, Nu, et de Sherwood, Sh, caractérisant respectivement les taux de transfert de chaleur et de masse au sein de la cavité, et l'intensité de l'écoulement exprimée par la fonction de courant, Ψ. D'abord, nous présentons quelques comparaisons en convection naturelle dans le cas d'une cavité vertical, dont les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et imperméables et les parois verticales sont chauffées à une température constante comme illustré dans les tableaux (IV.1) et (IV.2).

Le programme élaboré pour résoudre les équations de base a été validé en se référant aux différentes études numériques disponibles dans la littérature. Les tableaux (IV.1) et (IV.2) comparent nos résultats avec ceux de Saeid et Pop [16], Prasad et Tuntomo [17]. Ces études ont été réalisées pour le cas d'une cavité verticale chauffée par les cotés à une température constante où $A = 1, \Phi = 90°$, $R_T = 10^3, N = 0, G = 10$ et $A = 1, \Phi = 90°, R_T = 500, N = 0, G = 0.1$. La comparaison des champs de la fonction de courant, ainsi que les taux de transfert de chaleur et de masse sont en excellente concordance. Des erreurs variant entre 0.0% et 3.05%ont été observées.

Tableau IV.1 : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max}et le nombre de Nusselt moyen Nu_mavec les résultats donnés par Saeid et Pop [16] pour $A = 1, \Phi = 90°, R_T = 10^3, N = 0$ et $G = 10$.

	Saeid et Pop [16]	Présent étude	Erreur (%)
Ψ_{max}	1.6520	1.7040	3.05
Nu_m	1.2940	1.3083	1.09

Tableau IV.2 : Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt Nu_mavec les résultats donnés par Prasad et Tuntomo [17] pour$A = 1, \Phi = 90°, R_T = 500, N = 0, G = 0.1$.

	Prasad et Tuntomo [17]	Présent étude	Erreur (%)
Nu_m	3.8700	3.7942	1.95

D'autres validations ont été réalisées en comparant les résultats numériques avec les données expérimentales obtenues par Kladias et Prasad [18]. Pour une couche poreuse d'un rapport d'aspect $A = 5$ chauffée par le bas à une température constante, une comparaison a été effectuée entre les prédictions numériques actuels et les résultats expérimentaux pour le cas du nombre de Darcy faible, où le régime Dupuit-Darcy était valide. Deux points des données, définis N°. 1 et 9, respectivement, ont été considérés, où la cavité est remplie avec des billes de verre à 3mm de diamètre saturées d'eau **(GW)** et du glycérol**(GIG)**, respectivement. Les résultats en termes du nombre de Nusselt moyen Nu_m, sont présentés dans le tableau IV.3. Dans le tableau les paramètres, ε, P_{rf}, et Ra_f sont définis dans Kladias et Prasad [18],comme la porosité de la matrice poreuse, le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh de fluide, respectivement. Pour les deux points de données, les solutions numériques sont obtenues selon le rapport d'aspect de $A = 1$(une cellule de convection) et $A = 5$(cinq cellules de convection). Pour le point des données N°.1 avec $A = 1$, la forme de l'écoulement est constituée par une cellule symétrique instable (oscillante). Toutefois, pour $A = 5$, la forme de l'écoulement est constituée par cinq cellules de convection asymétriques. En raison de l'instabilité des différents comportements, les résultats montrent une très légère différence entre les deux cas $A = 1$et 5. Pour le point de données N°.9, la solution est stable et symétrique et les deux cas (A=1 et 5) donnent la même valeur du nombre de Nusselt moyen Nu_m. Pour les deux points de données, nos résultats sont en bonne comparaison avec l'expérience.

Tableau IV.3 : Comparaison des données expérimentales Kladias et Prasad [18] avec les résultats numériques prédits dans les conditions aux limites de température constante.

				Nu_m			
Fluide/Solide	ε	$Da \times 10^6$	P_{rf}/G	$R_{af} \times 10^{-7}/R_T$	Kladias et Prasad [18]	Solution numérique $A = 1/5$	Erreur (%)
WG (N°. 1)	0.375	1.16	5.5/5443.4	55.5/565.2	6.4094	$6.3424^{\tau}/6.4048^{\tau}$	1.04/0.07
GlG (N°. 9)	0.400	1.53	112.86/64868	13.7/110.7	2.7368	2.8148/2.8146	2.85/2.84

Le tableau IV.4 : présente la sensibilité du maillage de la solution numérique pour$A = 1$, $R_T = 500$, $\Phi = 0°$, N=-0.1, $Le = 5$et$G = 0$. Les résultats sont donnés en termes de, Ψ_0, Nu_metSh_m. Le tableau montre que les valeurs numériques de Ψ_0, Nu_m et Sh_m (évalués au centre de la couche poreuse) tendent vers des valeurs constantes à partir d'un maillage de 100×100.

Tableau IV.4 : Étude de la sensibilité du maillage pour $A = 1$, $R_T = 500$, $\Phi = 0°$, N=-0.1, $Le = 5$et$G = 0$.

$N_x \times N_y$	25×25	50× 50	100× 100	150 ×150	200× 200
Ψ_0	7.211	7.249	7.251	7.251	7.251
Nu_m	4.396	4.592	4.598	4.598	4.598
Sh_m	9.073	9.950	10.023	10.023	10.021

Les effets du paramètre d'inertie, G, de l'angle d'inclinaison, Φ, et du nombre de Rayleigh, R_T, sont illustrés sur les Figs. IV.1- IV.3 pour $Le = 5$, $N = -0.1$ et $\varepsilon = 1$. Les Figs. IV.1-IV.3 correspondent aux lignes de courant, Ψ, aux isothermes, T, et aux isoconcentrations, S, dans le cas d'une cavité de rapport de forme $A = 1$. Les résultats ont été obtenus à partir du programme numérique décrit dans le chapitre précédent. Les lignes de courant sont espacées de façon équidistante$(\Delta\Psi = \Psi/12)$. Pour les isothermes et les isoconcentrations, on a pris $\Delta T = (T_{max} - T_{min})/16$ et $\Delta S = (S_{max} - S_{min})/16$. Il est bon de mentionner à ce stade que les code numérique utilisé est évolutif dans le temps. Les cas d'une cavité chauffée et salée par le bas donnent naissance au début de la convection à des cellules classiques de Bénard. Cependant, avec le temps, ces cellules se réorganisent pour donner lieu à un écoulement monocellulaire. Ceci est dû aux conditions de flux imposées sur le système. De façon à minimiser le temps de calcul, les simulations numériques ont été réalisées en imposant une solution initiale monocellulaire. L'effet de paramètre de l'inertie, G, est représenté sur les Figs. IV.1(a) et (b). La structure de l'écoulement est monocellulaire, elle remplit toute la cavité. Il est bien connu que la circulation de l'écoulement dans la couche peut être

indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. L'effet de l'augmentation du paramètre d'inertie sur la structure d'écoulement est démontré sur la Figs. IV.1(a) et (b) pour $G = 0$ et 50, respectivement. Une augmentation du paramètre d'inertie réduit considérablement la force du mouvement convectif dans la couche comme indiqué par la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité :$\psi_0 = 7.251$pour$G = 0.1$et $\psi_0 = 0\ .091$pour$G = 50$, les isothermes et les isoconcentrations sont moins déformées, ce qui indique que le transfert de chaleur et de masse tend vers la conduction. En conséquence, comme on peut l'observer sur la Fig. IV.1(b), les gradients de température et de concentration sont considérablement inhibés avec une augmentation de G, tendent à avoir des lignes de température et de concentration constantes et parallèles, où : $Nu_m = 4.598$ et $Sh_m = 10.023$ pour $G = 0.1$ et $Nu_m = 1.001$ et $Sh_m = 1.038$ pour $G = 50$. Figs.IV.2(a) et (b) représentent les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour versus l'angle d'inclinaison, Φ. Il est évident à partir de cette figure que l'effet de convection augmente pour$\Phi = 30°$, où : $\Psi_0 = 1.131$,$Nu_m = 1.234$ et $Sh_m = 3.450$ et diminue pour Φ=150°, où : $\Psi_0 =$, $Nu_m =$et $Sh_m =$.Pour $\Phi > 150°$, c'est-à-dire lorsque Φ s'approche de ±180°, le transfert de chaleur se fait par conduction pure ($\Psi_0 = 0$, $Nu(Sh) = 1$)lorsque Φ s'approche de ±180°. Dans cette situation, le fluide avoisinant la paroi supérieure est plus chaud, tandis que le fluide qui se trouve au voisinage de la paroi inférieure est moins chaud, ce phénomène sera discuté plus tard. Figs.IV.3(a) et (b) présentent les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations différentes valeurs du nombre de Rayleigh, R_T, pour $R_T = 100$ et 5×10^4. Comme illustré dans la Figs. IV.3(a) et (b), en augmentant le nombre de Rayleigh thermique, R_T, les lignes de courant deviennent plus forte et les isothermes et les isoconcentrations sont plus déformées, où : $\Psi_0 = 0.534$, $Nu_m = 1.058$,et $Sh_m = 2.049$ pour $R_T = 100$ et $\Psi_0 = 5.286$, $Nu_m = 4.366$et $Sh_m = 11.124$ pour $R_T = 5 \times 10^4$.

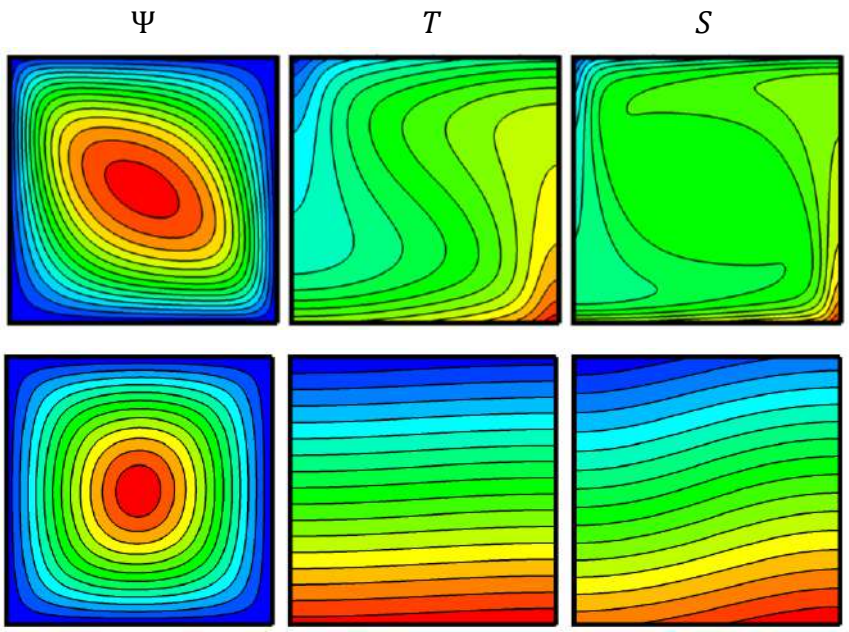


Figure IV.1 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $\Phi = 0°$ et $\varepsilon = 1$: (a) $G = 0$, $\Psi_0 = 7.251$, $Nu = 5.098$,$Nu_m = 4.598$,$Sh = 10.623$ et $Sh_m = 10.023$, (b) $G = 50$, $\Psi_0 = 0\ .091$, $Nu = 1.001$,$Nu_m = 1.001$,$Sh = 1.044$ et $Sh_m = 1.038$.

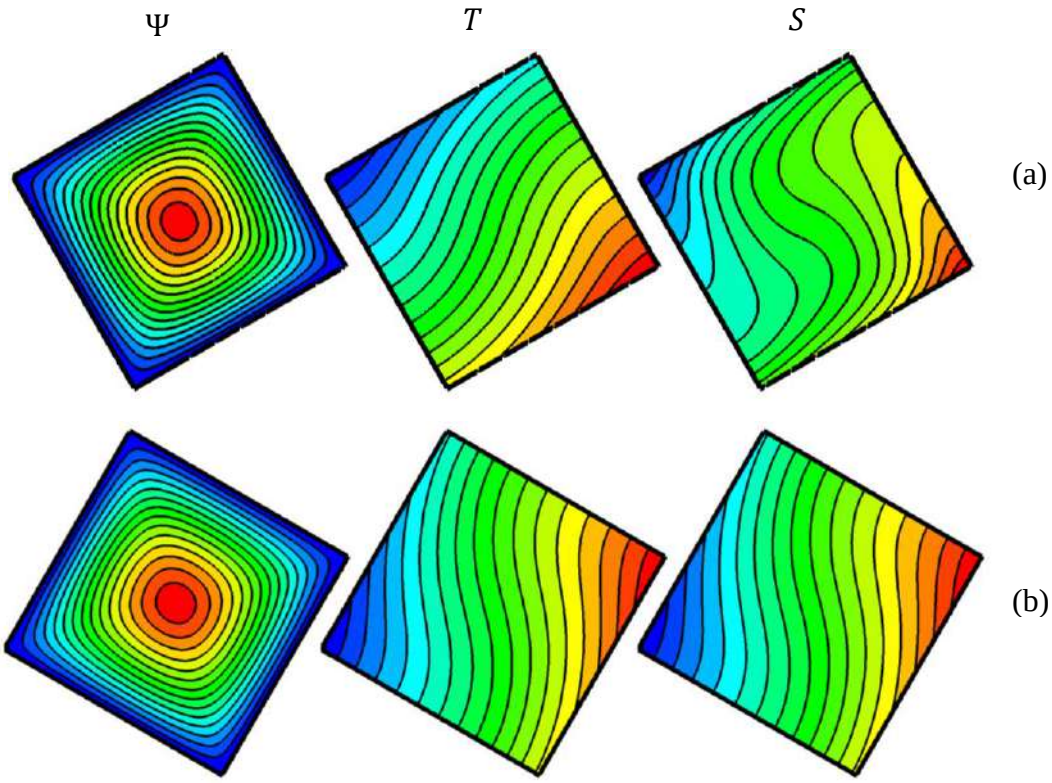


Figure IV.2 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $G = 10$ et $\varepsilon = 1$: (a) $\Phi = 30°$, $\Psi_0 = 1.131$, $Nu = 1.273$,$Nu_m = 1.234$,$Sh = 4.040$ et $Sh_m = 3.450$, (b) $\Phi = 60°$, $\Psi_0 = 1.196$, $Nu = 1.312$,$Nu_m = 1.269$,$Sh = 4.268$et $Sh_m = 3.675$.

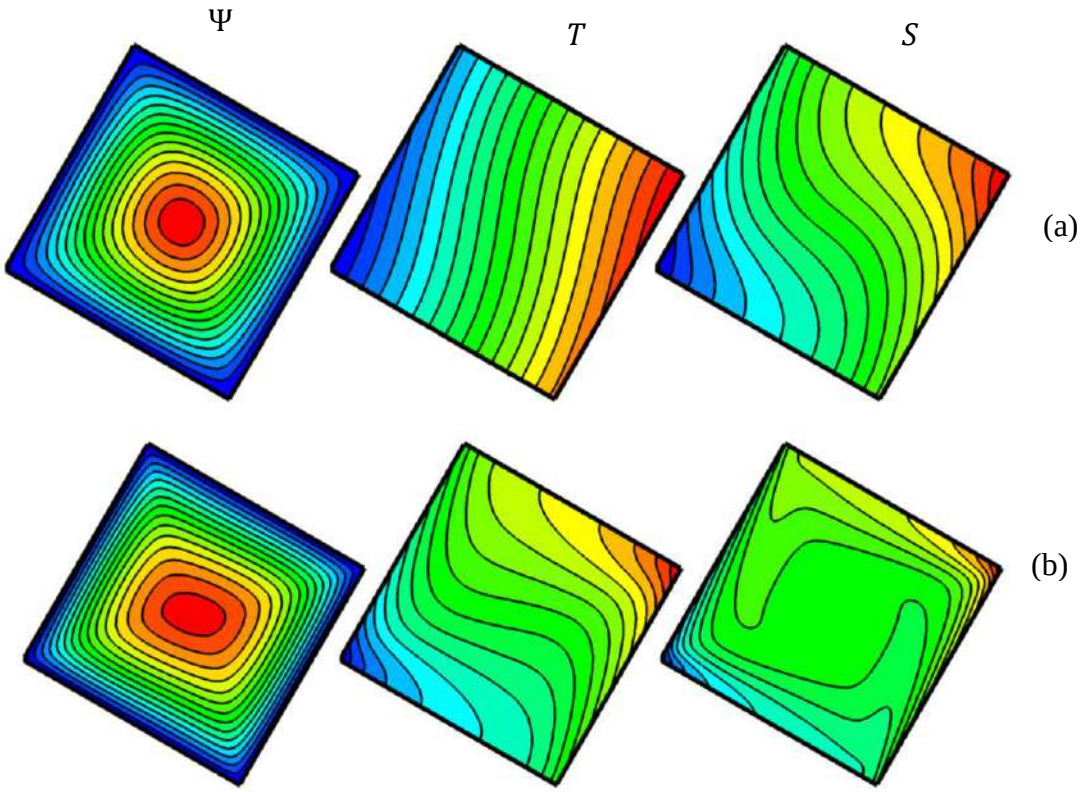


Figure IV.3 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $\Phi = 60°$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $G = 10$ et $\varepsilon = 1$: (a) $R_T = 100$, $\Psi_0 = 0.534$, $Nu = 1.066$,$Nu_m = 1.058$,$Sh = 2.279$ et $Sh_m = 2.049$, (b) $R_T = 50000$, $\Psi_0 = 5.286$, $Nu = 4.935$,$Nu_m = 4.366$,$Sh = 11.368$ et $Sh_m = 11.124$.

Les Figures IV.4(a)-(d) montrent l'effet du paramètre de l'inertie, G, sur les profils de l'intensité de courant, Ψ,de vitesse, u, de température, T, et de concentration, S, dans le plan médian de la couche poreuse (x=0) pour$R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $\Phi = 0°$, $\varepsilon = 1$ et versus G. Ces profils sont antisymétriques par rapport à y. Puisque le milieu poreux est modélisé selon la loi de Dupuit-Darcy, il est observé à partir de la Fig.IV.4(b) que la vitesse est maximale sur les parois c'est-à-dire$y = \pm 0.5$ où le cisaillement est annulé car les forces de flottabilité sont opposées. De plus, ceci résulte du fait que, selon ce modèle le fluide est autorisé à glisser sur les frontières de la cavité. Les profils de vitesse, de température et de concentration obtenus pour $G = 0$ sont ceux qui correspondent à un milieu poreux modélisé selon la loi de Darcy. Lors de l'augmentation de la valeur du paramètre de l'inertie$G$on voit que la vitesse au voisinage des parois est considérablement réduite. On peut comprendre qu'une augmentation du G provoque une augmentation de la force de la trainée de forme

microscopique, ce qui affaiblit le mouvement du fluide. L'effet de$G$ sur le profile de la température est illustré sur les Fig. IV.4(c). Une augmentation de$G$ réduit l'intensité de la convection résultante et cause une augmentation de la température sur les parois de telle sorte que le même flux de chaleur peut être maintenu dans le système. Concernant le profile de concentration, on peut voir dans la Fig.IV.4(d) que, dans le cas de convection induite par double diffusion, similaire aux profile de température, la concentration prés des parois solides est promue avec une augmentation du paramètre de l'inertie.

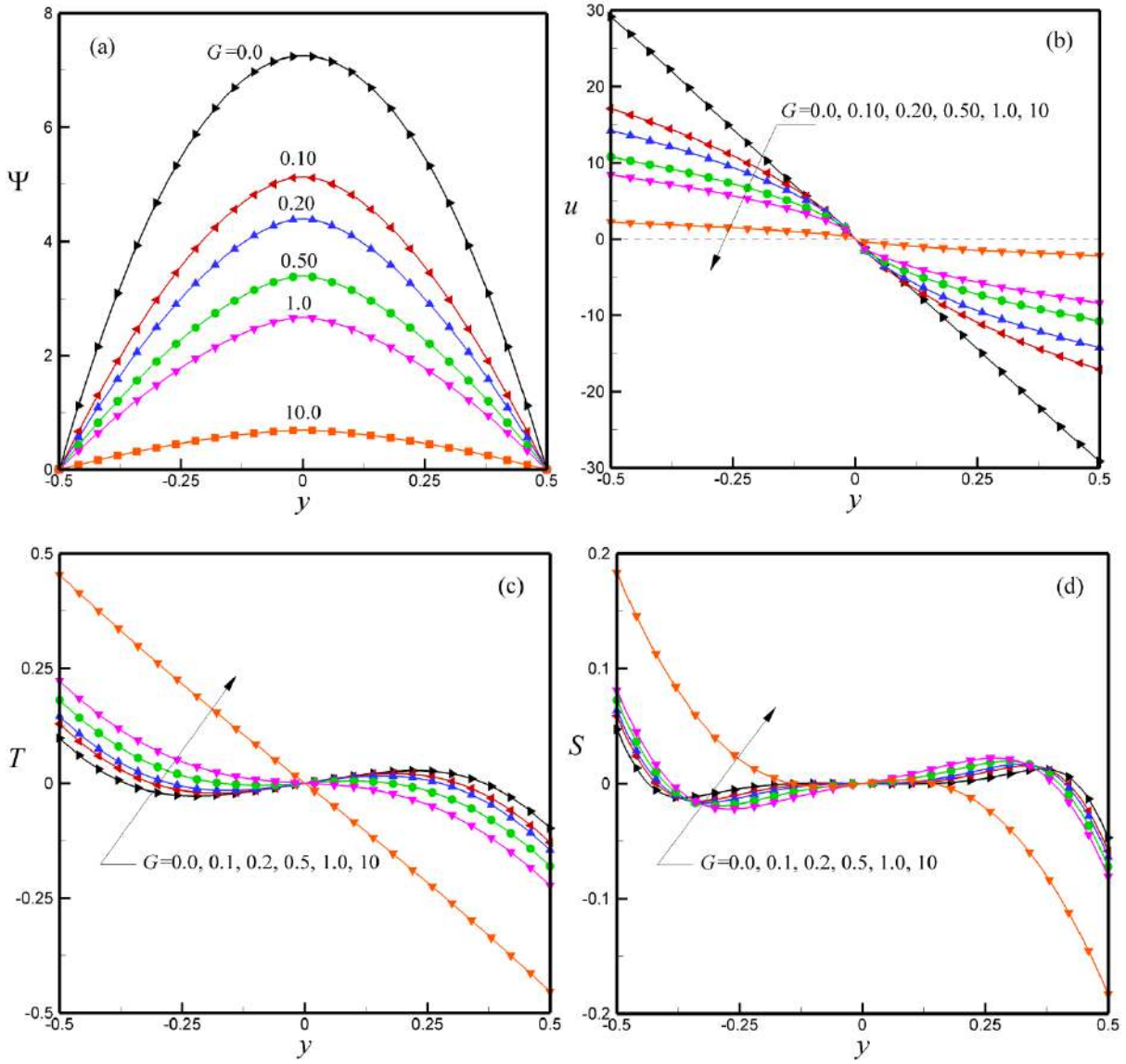
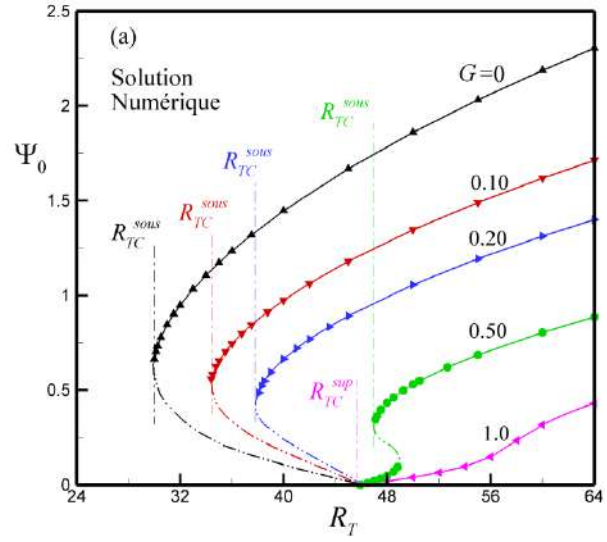
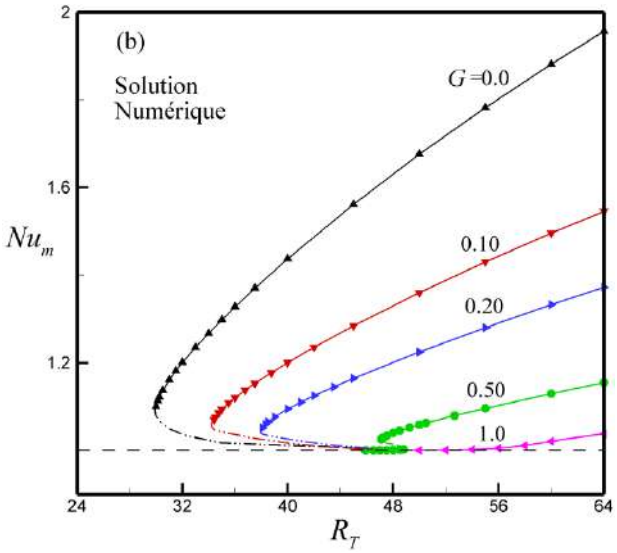
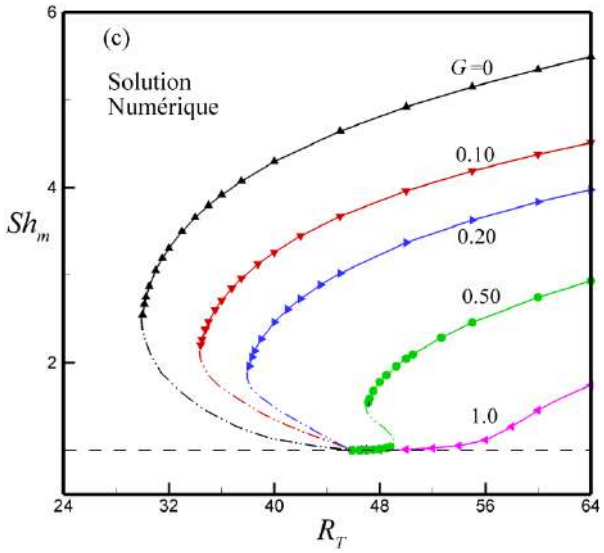


Figure IV.4 : Profils de l'intensité de courant Ψde la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration$S$dans le plan médiane (x=0) pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $\Phi = 0°$, $\varepsilon = 1$ et versus G.

Les figures IV.5 montrent des résultats typiques obtenus pour le cas d'une cavité carrée chauffée et salée par le bas par des flux constants. La Fig.IV.5(a)-(c) illustre les effets du nombre de Rayleigh, R_T, et le nombre de paramètre d'inertie, G, sur la courbe de bifurcation en terme de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, du nombre de Nusselt moyen, Nu_m, et du Sherwood moyen, Sh_m pour le cas$\Phi = 0°$, $N = -0.1$, $Le = 5$et $\varepsilon = 1$. Les traits pleins sur le graphe sont obtenus par un ajustement de courbe des données numériques, tandis que les lignes en pointillées sont des prédictions basées sur les résultats obtenus pour la couche infinie. La figure indique que lors de l'augmentation de la valeur d'inertie de$G = 0$(Darcy) à 1, on voit que les courbes de bifurcation évoluent à partir d'un comportement souscritique, R_{TC}^{sous} (caractérisant le début de la convection d'amplitude finie unicellulaire, $\Psi_0 \neq 0$) à supercritique, R_{TC}^{sup}(caractérisant le début de la convection d'amplitude nul, $\Psi_0 = 0$). Nous constatons qu'à partir du seuil de convection supercritique, l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone avec le nombre de Rayleigh, c'est-à-dire l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone avec le nombre de Rayleigh et en plus de la solution triviale de la conduction pure, Ψ_0=0, $Nu_m(Sh_m) = 1$, qui de fait est instable. Pour les valeurs intermédiaires de paramètre d'inertie, les courbes de bifurcation indiquent l'apparition des branches stables supercritique et souscritique connectées par une branche instable. Ce point est illustré par la courbe pour $G = 0.5$ représentée dans la Fig.IV.5(a). Pour cette situation, pour un certain nombre de Rayleigh donné, des solutions bi-stables sont possibles pour une gamme du nombre de Rayleigh donné qui dépend des paramètres régissant du problème. Ce point est illustré dans les Figs.IV.5(d) et (e) qui montrent les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenus pour$R_T = 48$. La solution présentée dans la Fig IV.5(d), correspond à la branche inférieure et elle est obtenue à partir des calculs numériques en utilisant l'état de repos comme conditions initiales. Cependant, la solution correspondant à la branche supérieure. En général, la figure IV.5(a) illustre clairement le fait que l'augmentation de paramètre d'inertie, G, pour un nombre de Rayleigh donné, permet de réduire considérablement la force de mouvement de convection dans la couche. Cela est dû au fait que la diminution de, G, entraîne une augmentation de la force de la trainée de forme microscopique. Par conséquent, comme on peut l'observer à partir des Figs.IV.5(b) et (c), les transferts de chaleur et de masse sont à la fois considérablement inhibés avec une augmentation de paramètre d'inertie.


(a)
Solution
Numérique
G=0
0.10
0.20
0.50
1.0
R_{TC}^{sous}
R_{TC}^{sup}
Ψ_0
R_T


(b)
Solution
Numérique
G=0.0
0.10
0.20
0.50
1.0
Nu_m
R_T


(c)
Solution
Numérique
G=0
0.10
0.20
0.50
1.0
Sh_m
R_T

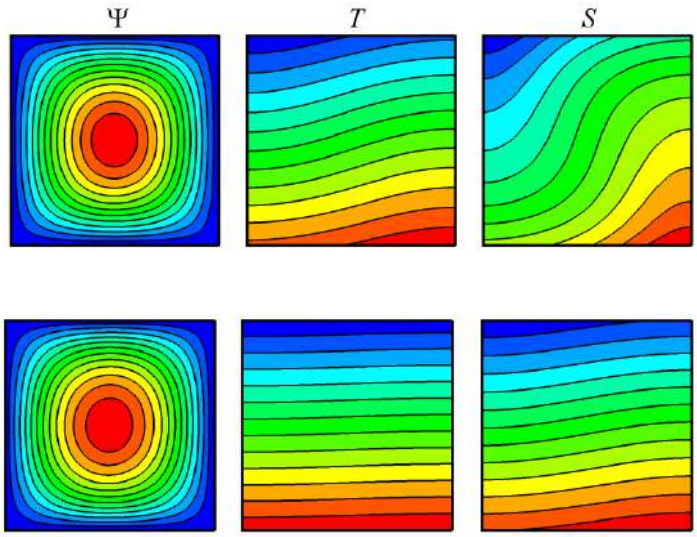
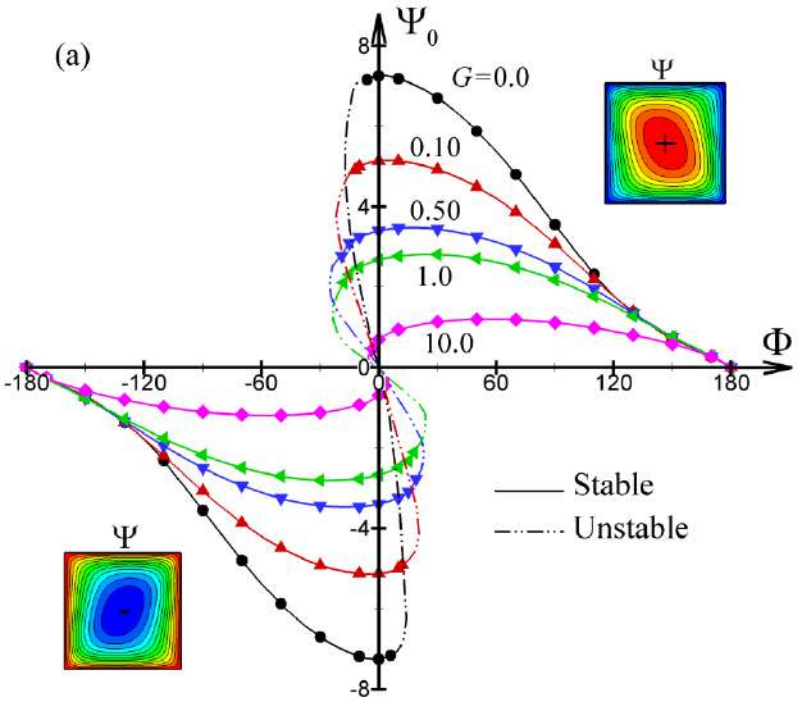


Figure IV.5 :(a)-(c) Diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0, Nu_m et Sh_m en fonction de $R_T$et G pour $N = -1$, $\Phi = 0°$, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$, (a) $G = 0$ (Darcy) à 1, (d) Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T = 48$ et $G = 0.5$: $\Psi_0 = 0.433$, $Nu_m = 1.040$, $Sh_m = 1.779$(solution supérieur),(e) lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T = 48$ et $G = 0.5$: $\Psi_0 = 0.047$, $Nu_m = 1.000$, $Sh_m = 1.013$(solution inférieur).

Dans ce cas, l'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, de la cavité par rapport au plan horizontal est discuté. Les Figs.IV.6(a)-(c) montrent la variation de Ψ_0, Nu_m et Sh_m respectivement en fonction de l'inclinaison de l'enceinte Φ (variant de Φ=180° à -180°) pour$R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $\varepsilon = 1$et différentes valeurs de$G$. Les traits pleins avec des symboles pleins sur le graphe sont obtenus par un ajustement de courbe des données numériques. Le transfert de chaleur et de masse se fait par conduction pure ($\Psi_0 = 0$, $Nu_m(Sh_m) = 1$) lorsque Φ s'approche de $\pm$180°. Dans cette situation, le fluide avoisinant la paroi supérieure est plus chaud, tandis que le fluide qui se trouve au voisinage de la paroi inférieure est moins chaud. Dans ce dernier cas, le gradient de densité est stable. Pour cette situation, l'effet de Gsur Ψ_0, Nu_metSh_m, comme prévu, est petit. En absence d'effet du paramètre de l'inertie($G = 0$)les courbes obtenues sont les mêmes que celles déjà obtenues par Sen et al. [19], qu'ils ont considéré le problème de la convection naturelle dans une couche poreuse inclinée modélisée selon la loi de Darcy. Les figures illustrent clairement l'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, sur la force de la convection et le taux de transfert de chaleur et de masse résultant. On observe que, lorsque l'angle d'inclinaison diminue de Φ=180°à -6°, le taux de transfert de chaleurNu_m et de masseSh_m augmente au début, il atteint son maximum à Φ=50° (Nu_m) etΦ=60° (Sh_m)et puis diminue. Pour de petit angle d'inclinaison Φ (au voisinage de Φ=0°),

des solutions multiples existent, parmi lesquelles certaines sont instables ; elles sont indiquées sur les figures par des lignes discontinues. Dans le graphique, les lignes pleines positives (négatives) correspondent à la solution naturelle (antinaturelle). Dans le cas de la convection naturelle, l'écoulement résultant circule dans le sens antihoraire en accord avec les conditions aux limites thermiques et massiques imposées sur l'enceinte. D'autre part, dans le cas de la convection antinaturelle l'écoulement circule dans le sens horaire. Mathématiquement cette multiplicité de solutions, pour un ensemble donné de paramètres régissant, est due à la non-linéarité des équations de base.



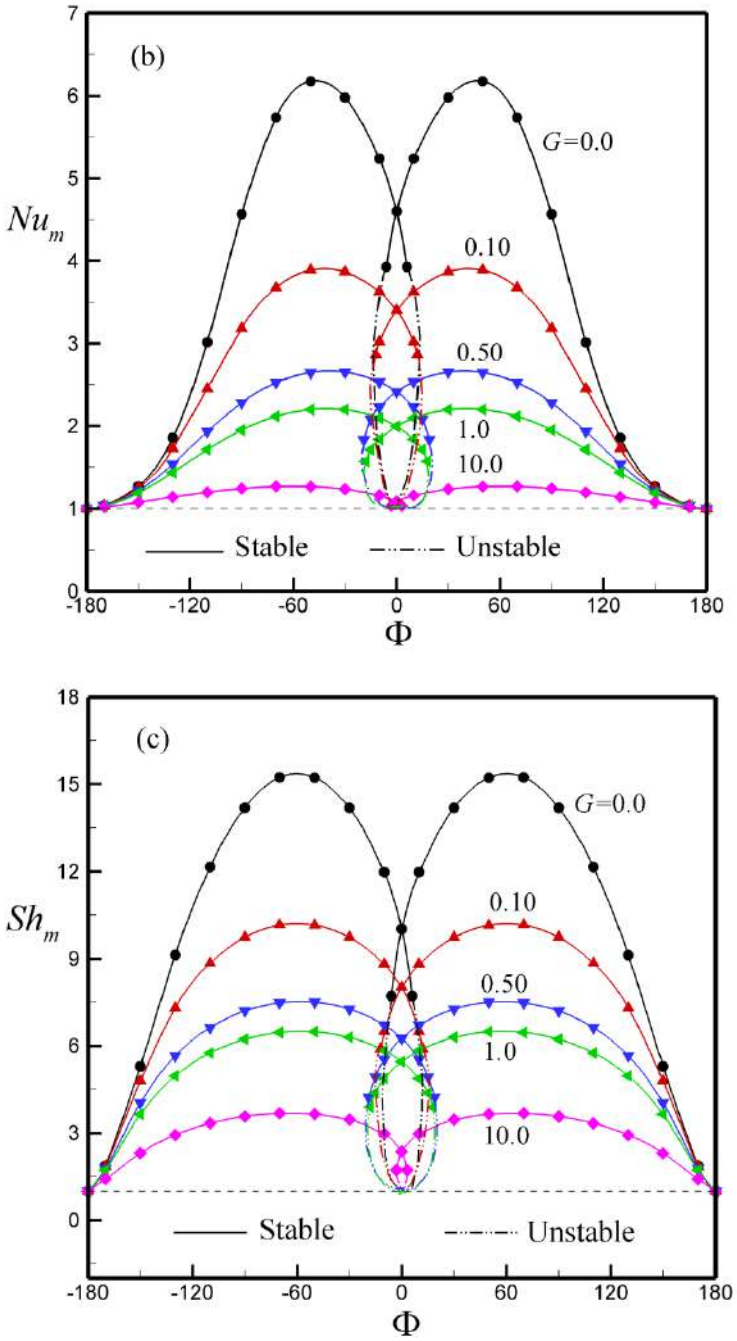


Figure IV.6 : Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et le paramètre de l'inertie, G, pour $R_T = 500$, $Le = 5$, $N = -0.1$ et $\varepsilon = 1$sur :(a) l'intensité de l'écoulement Ψ_0, (b) le nombre de Nusselt, Nu_m, et le nombre de Sherwood, Sh_m.

Le effets de rapport des forces de volume, N, et de paramter d'inertie, G, sur les taux de transfer de chaleur, Nu_m, et de mass, Sh_m, sont présentés sur la Figs. IV.7(a) et (b) pour $R_T = 500$, $Le = 2$, $\Phi = 90°$, $\varepsilon = 1$ et différentes valeurs de$G$. Dans le cas de la convection opposée $(N < 0)$ les résultats indiquent que, pour $N = -5$, Sh_m est relativement plus élevé que Nu_m à cause de la grande valeur de Le. En augmentant le paramètre N jusqu'à -1.22,

l'écoulement reste entièrement dominé par les effets solutaux. On observe que Nu_m et Sh_m décroîts légèrement vers l'unité. Dans le cas de la convection coopérante($N > 0$), on peut voir que Nu_m et Sh_m augmentes d'une façon monotone lorsque N passe de -1.22 à 5. En général, les résultats indiquent que Nu et Sh sont beaucoup plus importants dans la convection coopérante que dans le cas de la convection opposée. En effet, l'évolution des courbes de bifurcation avec l'effet de paramètre d'inertie, G, est tout à fait semblable à celle décrite dans les figures IV.5(a)-(c).Lorsque$N = 0$ (c'est-a dire, en l'absence d'effet de concentration) le mouvement de convection n'est induit que pas une température constante, donnant lieu à une circulation thermique dans le sens antihoraire ($\Psi > 0$), voir les lignes de courant, température et de concentration dans la Fig.IV.8(a). Au-dessous de $N < -1.22$, les résultats numériques convergent vers la circulation dans le sens horaire ($\Psi < 0$), voir les lignes de courant sur Fig. IV.8(b).

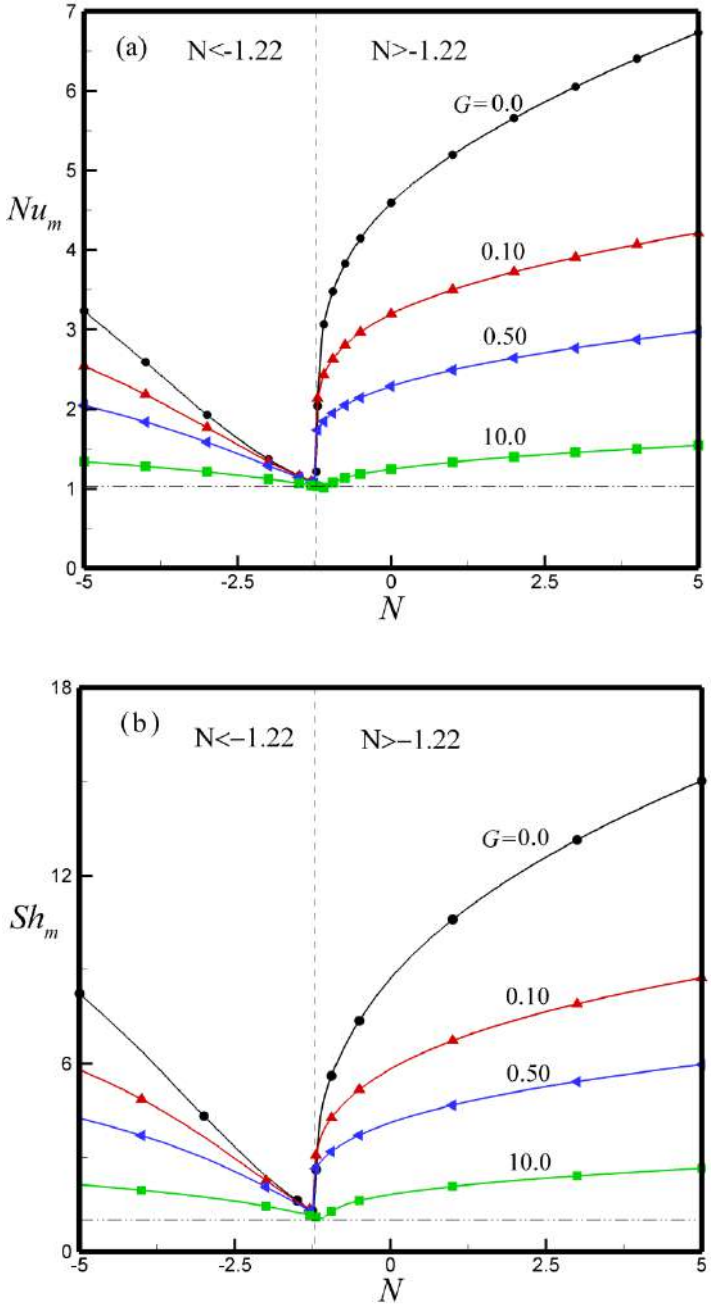


Figure IV.7 : Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur, Nu_m, et de masse, Sh_m, pour $R_T = 500$, $Le = 2$, $\Phi = 90°$, $\varepsilon = 1$ et différentes valeurs de$G$.

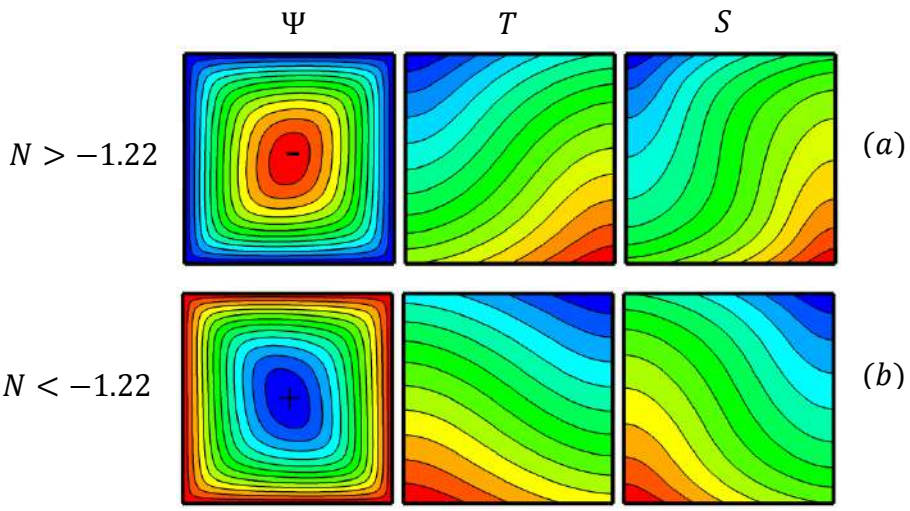


Figure IV.8 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 500$, $Le = 2$, $\Phi = 90°$, $\varepsilon = 1$ et différentes valeurs de$G$: (a) $N = 3$, $\Psi_0 = 1.425$, $Nu = 1.526$,$Nu_m = 1.454$,$Sh = 2.714$et $Sh_m = 2.415$, (b) $N = -3$, $\Psi_0 = -0.914$, $Nu = 1.235$,$Nu_m = 1.209$,$Sh = 1.869$ et $Sh_m = 1.739$.

En complément des résultats présents ci-dessus, l'existence des solutions multiples est démontrée. Comme indiqué par Kimura et al. [20], l'écoulement de convection unicellulaire est le mode préféré dans une couche poreuse de Darcy avec les parois horizontales chauffées par le bas par un flux de chaleur constant. Cela est vrai à proximité du début de la convection ; toutefois, pour un grand nombre de Rayleigh, divers modes de convection à différents nombres de cellules de convection sont possibles, ce qui est indépendant du rapport d'aspect de l'enceinte. Dans la présente étude, pour la convection Dupuit-Darcy, la multiplicité des solutions convectives est démontrée pour une couche poreuse ayant un rapport d'aspect de $A = 4$. Pour$R_T = 500$, $G = 0$, $Le = 5$, $\Phi = 0°$, $N = -0.1$et ε=1, au moins trois modes de convection stables sont constatés, comme indiqué dans les Figs.IV.9. Une cellule, trois cellules et quatre cellules sont calculées en utilisant la même distribution du maillage 200×100. Quel que soit le rapport d'aspect de l'enceinte. Comme le nombre de Rayleigh augmente encore, deux autres cellules, trois cellules, etc..., de convection émergent et deviennent instables, mais avec différentes valeurs du taux de croissance. Ainsi, dans une enceinte confinée, comme illustré dans lesFigs.IV.9 pour une grande valeur du nombre de Rayleigh, plusieurs modes convectifs avec le nombre de cellules différentes coexistent. Naturellement, pour obtenir les différentes solutions possibles, les simulations numériques sont effectuées en utilisant la convection monocellulaire, avec deux cellules, etc…, comme conditions initiales.

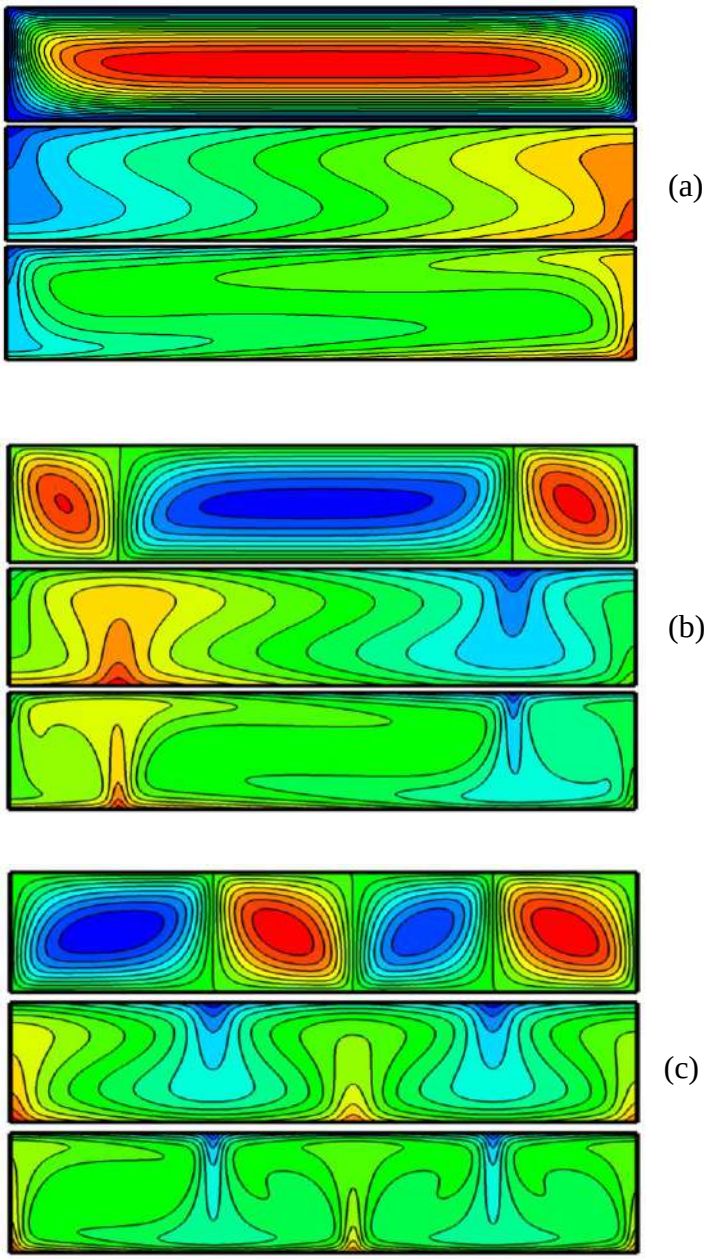


Figure IV.9 : Solutions multiples stables pour $R_T = 500$, $G = 0$, $Le = 5$, $\Phi = 0°$, $N = -0.1$ et $\varepsilon = 1$: (a) une cellule, (b) trois cellules et (c) quatre cellules.

Conclusion et Perspective

Conclusion et perspectives

Dans le présent travail, une étude numérique de la convection double diffusive dans une enceinte carrée inclinée par rapport à l'horizontale, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois latérales sont soumises à des flux de chaleur et de masse constante et uniformes tant dis que les autres parois sont adiabatiques et imperméable.

Grâce à l'approximation de Boussinesq, nous avons développé un modèle mathématique décrivant l'écoulement convectif et les transferts de chaleur et de masse.

En premier lieu, les notions de base et les principales caractéristiques qui se rapportant aux milieux poreux et leurs applications dans divers domaines.

En second lieu, Les conditions aux limite de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse) ont été considérées. La loi de Dupuit-Darcy, tenant compte des effets de l'inertie pour des écoulements à haut nombre de Reynolds, a été utilisée pour établir les équations gouvernantes du système.

Ainsi, une méthode numérique proposée est basée sur la technique des différences finies. Le code de calcul a été validé en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature.

Notre étude porte essentiellement sur la mise en évidence de l'influence des paramètres adimensionnelles ; le nombre de Rayleigh thermique, R_T, le nombre de Lewis Le, le rapport de la force de volume, N, le paramètre d'inertie G, l'angle d'inclinaison de la cavité, Φ, par rapport à l'axe horizontale, surl'intensité de l'écoulement et le taux du transfert de chaleur dans le système.

- Quand le paramètre d'inertie, G, augmente, les lignes de courant deviennent plus fortes et les isothermes et les isoconcentration sont plus déformées.
- Une augmentation du paramètre d'inertie réduit considérablement la force du mouvement convectif dans la couche poreuse, les isothermes et les isococentrations sont moins déformés, ce qui indique que le transfert de chaleur et de masse tend vers la conduction (i.e. $\Psi_0 = 0$ et $Nu_m = Sh_m = 1$).
- Les effets des nombre de Rayleigh thermique, R_T, et du paramètre d'inertie, G,sur l'intensité de l'écoulement convectif et les transferts de chaleur (Nu_m) et de masse (Sh_m) ont été mis en évidence.
- L'augmentation de l'effet de l'inertie affaiblit à la fois la force de convection et le taux de transfert de chaleur et de masse.

- L'effet de l'inertie n'a pas affecté le seuil du déclanchement de convection stationnaire R_{TC}^{sup}. Cependant, il y avait une forte influence sur l'apparition de la bifurcation souscritique, R_{TC}^{sous}.
- Pour les nombres de Rayleigh, R_T, relativement élevés, des solutions convectives, stables, multiples et multicellulaires avec différents modes de convection ont été trouvées.
- Pour un ensemble donné de paramètres de contrôle, R_T et Φ, il a été constaté que la force de convection (Ψ_0) et les transfert de chaleur (Nu_m) et de masse (Sh_m) résultants diminuent quand la valeur du paramètre d'inertie, G,augment.
- L'orientation de l'enceinte comporte, pour des valeurs données de R_T et G un grand effet sur le transfert de chaleur et de masse par convection. Indépendamment de la valeur du paramètre d'inertie, le transfert de chaleur et de masse maximum se produit lorsque la couche est chauffée par le bas $(0° \leq \Phi \leq 90°)$. Pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh, les maximums du nombre Nusselt et de Sherwood se produisent à des angles données Φ_m qui dépend considérablement de G.

Dans la présente étude, on a considéré un cas simple. Ainsi, pour approfondir les connaissances dans ce domaine très intéressant, de nombreux points nécessitent encore une étude plus approfondie. En l'occurrence, il est intéressant de reprendre la même étude pour un milieu poreux anisotrope, en perméabilité et en conductivité thermique. Il est aussi possible de généraliser le modèle utilisé par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes et d'autres conditions aux frontières.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1] H.P.C Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon (Victor Dalmont, Paris, 1856).

[2] A.E Scheidegger. The Physics of Trough Porous Media; University Of Toronto (1960).

[3] I.F Macdonald, M.S El-Sayed, K. Mow and F.A.L Dullien, Flow through Porous Media-the Ergun Equation Revisited. Ind. Eng. Chem. Fundamentals, 6, 393, (1979).

[4] N BERNI, Y. Y ELHACEN, Etude numérique d'un écoulement dans un milieu poreux, mémoire master professionnel, Université Kasdi Merbah Ouargla (2011).

[5] Z BELMIHOUB, R MEKHNACHE, Effet de la dispersion thermique dans un milieu poreux non Darcéen en convection mixte et de masse simultanée, mémoire du diplôme de master Université Abderrahmane mira Bejaia (2016).

[6] F MNACERI, Étude du transfert de chaleur et de masse dans les milieux complexes : application aux milieux fibreux et à l'isolation des bâtiments. Matériaux composites et construction. Université de Lorraine, Français (2016).

[7] F BENKAFADA, Contribution à l'étude de transfert de masse et de chaleur dans un canal poreux, Université Mentouri Constantine (2008).

[8] A.E Scheidrgger, The physics of flow through porous media, University of Toronto Press, 3rd Edition (1974).

[9] R Sedik, Caractérisation de la perméabilité des matériaux à l'écrasement, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, (2011).

[10] O Saoul, Simulation du transport de solutés réactifs en milieux poreux hétérogènes, Thèse Doctorat, Université Mentouri, constantine.

[11] A Tobbal, R Bennacer et R Cabrillac, Effet de l'anisotropie des matériaux poreux sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse, Proceedings du 13ème Congrès Français de Mécanique, Vol. II, pp. 457-460, (1997).

[12] H Beji, Etude Numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé : Modélisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynmique, thèse de Doctorat, Université Paris 6, (1989).

[13]Ramdane Younsi. Docteur d'état en physique, simulation numerique du transfert de chaleur et de masse en milieu fluides et poreux, Sciences de la Terre. Universite des Sciences et la Technologie Houari Boumediene, 2002. Français. <tel-00148969>

[14] D.D Gray and A Giorgini. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 19, pp. 545-551, (1976).

[15] S Ergun, Fluid flow through packed columns. Chem. Eng. Prog. 48, 89-94, (1952).

[16] H.S Nawaf and I Pop. Non-Darcy natural convection in a square cavity filled with a porous medium. Fluid Dynamics Research. 36, 35-43, (2005).

[17] A Prasad and A Tuntomo. Inertia effects on natural convection in a vertical porous cavity. Numerical Heat Transfer .Vol. 11, pp. 295-320, (1987).

[18] N Kladias and V Prasad. Experimental verification of Darcy-Brinkman-Forchheimer flow model for natural convection in porous media. J. Thermophysics 5 No. 4, 560-575, (1990).

[19] M Sen, P Vasseur and L Robillard. Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer. Int. J. Heat and Mass Transfer, 3, 587-598, (1987).

[20] S Kimura, M Vynnycky and F Alavyoon. Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux. J. Fluid Mech, 294, 231-248, (1995).