جامعة المدية

كلية العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير

قسم علوم التسيير

دروس وتمارين محلولة في مقياس الرياضيات المالية

مطبوعة بيداغوجية موجهة إلى:

طلبة السنة الثانية ليسانس علوم التسيير

إعداد الأستاذ: روبحي فيسة عمر

السنة الجامعية 2026/2025



*

﴿يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَذَرُوا مَا بَقِيَ مِنَ الرِّبَا إِن كُنتُم مُّؤْمِنِينَ (278)فَإِن لَّمْ تَفْعَلُوا فَأْذَنُوا بِحَرْبٍ مِّنَ اللَّهِ وَرَسُولِهِوَإِن تُبْتُمْ فَلَكُمْ رُءُوسُ أَمْوَالِكُمْ لَا تَظْلِمُونَ وَلَا تُظْلَمُونَ (279) وَإِن كَانَ ذُو عُسْرَةٍ فَنَظِرَةٌ إِلَى مَيْسَرَةٍ وَأَن تَصَدَّقُوا خَيْرٌ لَّكُمْ إِن كُنتُمْ تَعْلَمُونَ (280) وَاتَّقُوا يَوْمًا تُرْجَعُونَ فِيهِ إِلَى اللَّهِ ثُمَّ تُوَفَّىٰ كُلُّ نَفْسٍ مَّا كَسَبَتْ وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ(281).﴾

الآيات(281-278)من سورة البقـرة

فهرس المحتويات

المحتويات	الصفحة
مقدمة	**07**
الفصل الأول العمليات المالية قصيرة الأجل	08
أولا- الفائدة البسيطة	08
1. تعريف الفائدة	08
1.1 تعريف الفائدة البسيطة	08
2.1 عناصر الفائدة البسيطة	08
1.3 قانون الفائدة البسيطة	08
4.1 حساب الفائدة البسيطة بطريقة القاسم الثابت	10
5.1 جملة الفائدة البسيطة	12
6.1 أنواع الفائدة البسيطة	13
7.1 المعدل الوسطي لعدة توظيفات	15
ثانيا- الخصم بالفائدة البسيطة	17
1. الخصم التجاري	18
1.1 حساب الخصم التجاري	18
2.1 القيمة الحالية لورقة تجارية	18
2. الآجيو **AGIO**	19
1.2 المعدل الاسمي والمعدل الحقيقي للخصم	19
3. الخصم الحقيقي (الصحيح)	22
1.3 القيمة الحالية الصحيحة	22
2.3 العلاقة بين االقيمة الاسمية والقيمة الحالية الصحيحة والخصم الحقيقي	23
ثالثا- التكافؤ بالفائدة البسيطة	25

1. تعريف تكافؤ الأوراق التجارية	25
2. حالات التكافؤ	25
1.2 تكافؤ ورقتين تجاريتين	25
2.2 تكافؤ ورقة تجارية وعدة أوراق تجارية	26
أ. تاريخ الاستحقاق المشترك	26
ب. تاريخ الاستحقاق المتوسط	26
3.2 تكافؤ عدة اوراق تجارية	27
تمارين حول العمليات المالية قصيرة الأجل	29
الحلول	32
الفصل الثاني: العمليات المالية طويلة الأجل	46
أولا- الفائدة المركبة	46
1. تعريف الفائدة المركبة	46
1.1 القيمة المحصلة لرأسمال موظف بفائدة المركبة	46
2.1 عناصر الفائدة المركبة	47
3.1 عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة	49
2. حساب القيمة المحصلة بالحل العقلاني والحل التجاري	51
1.2 الحل العقلاني	51
2.2 الحل التجاري	51
3. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة	52
1.3 المعدلات المتناسبة	52
2.3 المعدل المتكافئ	53
ثانيا- الخصم بالفائدة المركبة	53
ثالثا- التكافؤ بالفائدة المركبة	55

1. تكافؤ ورقتين تجاريتين	55
2. تكافؤ ورقة تجارية وعدة أوراق تجارية	56
1.2 تاريخ الاستحقاق المشترك	56
2.2 تاريخ الاستحقاق المتوسط	58
3. تكافؤ عدة اوراق تجارية	59
تمارين حول العمليات المالية طويلة الأجل	60
الحلول	63
الفصل الثالث: الدفعات المالية	76
أولا- تعريف الدفعات	76
ثانيا- أنواع الدفعات	76
1. دفعات نهاية المدة	76
1.1 القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة	76
2.1 تطبيقات على قانون القيمة المكتسبة نهاية المدة	78
3.1 القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة	80
2. دفعات بداية مدة	81
1.2 القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة	81
2.2 تطبيقات على قانون القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة	82
3.2 القيمة الحالية لدفعات بداية المدة	85
تمارين حول الدفعات	87
الحلول	90
الفصل الرابع: استهلاك القروض	98
أولا- طريقة استهلاك القرض بدفعات ثابتة	98
1. حساب القسط المتساوي (قيمة الدفعة)	98

2. جدول استهلاك القرض	98
3. العلاقة العامة من جدول الاستهلاك	100
1.3 العلاقة بين الدفعات واصل القرض	100
2.3 العلاقة بين الاستهلاكات	100
3.3 العلاقة بين الاستهلاكات واصل القرض	100
4.3 العلاقة بين الفوائد والاستهلاكات	101
ثانيا- استهلاك القروض بطريقة القسط المتناقص (الاستهلاك الثابت)	102
1. حساب قسط الاستهلاك الثابت	102
2. جدول استهلاك القرض	103
3. العلاقات العامة من جدول الاستهلاك	104
1.3 أصل القرض	104
2.3 علاقة الدفعات فيما بينها	104
3.3 مجموع الدفعات	105
تمارين حول استهلاك القروض	105
الحلول	108
قائمة المراجع	126
الملاحق	128

مقدمة:

تُعدّ الرياضيات المالية من المقاييس الأساسية في تكوين طلبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، لما لها من دور محوري في فهم وتحليل الظواهر المالية واتخاذ القرارات الاستثمارية الرشيدة. فهي تمثل حلقة وصل بين المفاهيم النظرية للتمويل والتطبيقات الكمية التي تسمح بقياس القيم المالية عبر الزمن وتقييم البدائل المختلفة على أسس علمية دقيقة.

وقد أصبحت الحاجة إلى التحكم في أدوات الرياضيات المالية أكثر إلحاحًا في ظل التطورات المتسارعة التي يشهدها القطاع المالي، سواء من حيث تنوع المنتجات المالية أو تعقّد عمليات الاستثمار والتمويل. إذ لم يعد كافيًا الإلمام بالجوانب الوصفية، بل أصبح من الضروري توظيف النماذج الرياضية لفهم مفاهيم أساسية مثل الفائدة البسيطة والمركبة، القيمة الحالية والمستقبلية، تكافؤ رؤوس الأموال، والخصم بمختلف أشكاله.

تهدف هذه المطبوعة إلى تقديم عرض مبسّط ومنهجي لمفاهيم وتقنيات الرياضيات المالية، مع التركيز على الجانب التطبيقي الذي يساعد الطالب على اكتساب مهارات التحليل والحساب واتخاذ القرار. كما تسعى إلى ربط الجانب النظري بأمثلة وتمارين مستمدة من الواقع الاقتصادي، بما يعزّز قدرة الطالب على توظيف هذه الأدوات في حياته المهنية مستقبلًا.

وقد روعي في إعداد هذه المطبوعة التدرّج في عرض المفاهيم، بدءًا من الأساسيات وصولًا إلى التطبيقات الأكثر تعقيدًا، مع الحرص على تبسيط الصيغ الرياضية وشرحها بأسلوب واضح ومدعّم بالأمثلة. كما تم إدراج مجموعة من التمارين التطبيقية التي تهدف إلى ترسيخ الفهم وتنمية القدرة على حل المشكلات المالية.

وفي الأخير، نأمل أن تُسهم هذه المطبوعة في تيسير استيعاب هذا المقياس، وأن تكون مرجعًا مفيدًا للطلبة في مسارهم الدراسي والمهني والله ولي التوفيق.

الفصل الأول: العمليات المالية قصيرة الأجل

من خلال هذا الفصل سنتطرق إلى مختلف العمليات المالية قصيرة الأجل، بداية بالفائدة البسيطة وكيفية حسابها إلى غاية استخدامها في عمليات أخرى كالخصم والتكافؤ.

أولا– الفائدة البسيطة:

1. **تعريف الفائدة:** تُعرف الفائدة على أنها الثمن الذي يدفعه المدين(المقترض)إلى الدائن(المقرض)نظير استخدامه لأموال المقرض خلال فترة زمنية معينة؛

1.1 تعريف الفائدة البسيطة: تعرف الفائدة البسيطة بأنها العائد المالي الذي يتحصل عليه الشخص (المستمر) مقابل توظيف مبلغ من المال (رأس المال) خلال مدة زمنية محددة، بحي يتم حساب الفائدة البسيطة على أساس رأس المال الأصلي طول فترة التوظيف أو الاستثمار، أي أنها تبقى ثابتة في كل فترة زمنية، لأنها دائما تحسب على أساس رأس المال الأصلي.

2.1 عناصر الفائدة البسيطة: هناك مجموعة من العوامل والعناصر الداخلة في كيفية حساب الفائدة البسيطة، وتتمثل هذه العناصر فيما يلي:

- ✓ **رأس المال (Capital):** وهو مبلغ من المال أو المبلغ المودع أو المبلغ المقترض أو المبلغ المستثمر أو أي مبلغ آخر، وهو الأصل في الحساب، بحيث يتم تحويله من الشخص الأول (المقرض) إلى الشخص الثاني (المقترض)، ويُطلق عليه(المبلغ الأصلي)، ويُرمز له بالرمز. **C**
- ✓ **المدة (الزمنDurée):** وهي تُمثل المدة الزمنية التي يتم يقوم فيها الدائن (المقرض)بتحويل المبلغ إلى المدين (المقترض)، أي من تاريخ ابتداء العملية الاستثمارية حتى نهايتها.وقد تكون هذه المدة محددة إما بالأيام، أو بالأشهر أو بالسنوات .ويُرمز للمدة بالرمز. **n**
- ✓ **معدل الفائدة Taux d'intérêt:** ويُسمى أيضا بسعر الفائدة، وهو معدل العائد على رأس المال المقترض، والذي يمنحه المدين إلى الدائن نظير منح الدائن(المقرض)مبلغ الاستثمار إلى المدين(المقترض)، ويُعبر عنه سنوياً أو سداسياً أو شهرياً، و يُرمز له بالرمز **t**.

3.1 القانون الأساسي للفائدة البسيطة: كما ذكرنا سابقا فإن حساب الفائدة البسيطة والتي يرمز لها بالرمز **I** يتم على أساس ثلاثة عناصر أساسية هي رأس المال الموظف C_0، معدل التوظيف t ومدة التوظيف n .

وتحسب الفائدة البسيطة وفق العلاقة التالية[1]: $$I = C_0 * t * n$$

هناك بعض الاختلاف في علاقة حساب الفائدة البسيطة وهذا نتيجة لاختلاف المدة والتي يمكن أن تكون كالآتي:

✓ إذا كانت المدة بالسنوات تُصبح العلاقة الرياضية لحساب الفائدة البسيطة كما يلي:

$$\mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{C_0} * \mathbf{t} * \mathbf{n}}{\mathbf{100}}$$

✓ إذا كانت المدة بالأشهر تُصبح العلاقة الرياضية لحساب الفائدة البسيطة كما يلي:

$$\mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{C_0} * \mathbf{t} * \mathbf{n}}{\mathbf{1200}}$$

✓ إذا كانت المدة بالأيام تُصبح العلاقة الرياضية لحساب الفائدة البسيطة كما يلي:

$$\mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{C_0} * \mathbf{t} * \mathbf{n}}{\mathbf{36000}}$$

مثال: أودع شخص مبلغ مالي في البنك قدره 30000دج بفائدة بسيطة قدرها 8% سنويا،

- ما هي قيمة الفائدة خلال سنة من التوظيف؟
- ما هي قيمة الفائدة لمدة 6 أشهر؟
- ما هي قيمة الفائدة بعد 40 يوما؟

الحل:

أولا حساب قيمة الفائدة خلال سنة من التوظيف:

لدينا: $C_0 = 30000, \qquad \mathrm{t} = 8\%, \qquad \mathrm{n} = 2ans$

$$\mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{C_0} * \mathbf{t} * \mathbf{n}}{\mathbf{100}}$$

ومنه:

$$\mathrm{I} = \frac{30000 * 8 * 1}{100}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I = 2400}^{\boldsymbol{DA}}$$

ثانيا حساب قيمة الفائدة خلال 6 أشهر:

لدينا: $C_0 = 30000, \quad t = 8\% \quad n = 6MOIS$

في هذه الحالة المدة شهرية، نحتاج إلى تحويلها إلى سنوية، لذا نقوم بقسمة المدة على عدد الأشهر في السنة.

$$\mathbf{I = \frac{C_0 * t * n}{1200}}$$

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$I = \frac{30000 * 8 * 6}{1200}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I = 1200^{DA}}$$

ثالثا حساب قيمة الفائدة بعد 40 يوما:

لدينا: $C_0 = 30000, \quad t = 8\%, \quad n = 40jours$

في هذه الحالة المدة يومية، لذا نحتاج إلى تحويلها إلى سنوية، لذا نقوم بقسمة المدة على عدد الأيام في السنة.

و منه:

$$\mathbf{I = \frac{C_0 * t * n}{36000}}$$

$$I = \frac{30000 * 8 * 40}{36000}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I = 266.66^{DA}}$$

4.1 حساب الفائدة البسيطة بطريقة القاسم الثابت: تتنوع وتتعدد طرق حساب الفائدة البسيطة، ولكن تبقى الطريقة السريعة هي الأكثر استعمالا وشهرة من بين الطرق الأخرى، وهنالك طريقة أخرى تسمى بطريقة القاسم الثابت D، بحي تقوم على تحويل معدل الفائدة إلى عدد ثابت، يستخدم لتبسيط العلاقة الأساسية للفائدة، بحيث يتم استبدال الضرب في المعدل بعملية قسمة وهذا بقسمة البسط و المقام على المعدل**t** تصبح العلاقة التالية:[2]

$$\mathbf{I = \frac{C_0 * t * n}{36000}}$$

بوضع:

$$\mathbf{D = \frac{36000}{t}}$$

نجد:

$$\mathbf{I = \frac{C_0 * n}{D}}$$

مثال: مبلغ من المال قدره 9000دج، وظف لمدة 30يوم بمعدل 6%، أوجد الفائدة المحققة وهذا باستخدام طريقة القاسم الثابت.

الحل:

$$C_0 = 9000, \qquad t = 6\%, \qquad n = 30\text{jrs}$$

لدينا:

$$\mathbf{D = \frac{36000}{t}}$$

بالتعويض في العلاقة:

$$D = \frac{36000}{6} = 6000$$

$$I = \frac{C_0 * n}{D} = \frac{9000 * 30}{6000}$$

ومنه:

$$\mathbf{I = 45^{DA}}$$

5.1 جملة الفائدة البسيطة: عبارة عن المبلغ المودع أو الموظف مضافا إليه الفائدة الناتجة عن التوظيف، ويرمز لها بالرمز A وتتمثل علاقة الجملة فيما يلي:[3]

$$\boldsymbol{A = C_0 + I}$$

مثال: لتكن لديك المعلومات التالية عن مجموعة من التوظيفات:

مبلغ قيمته 10000دج موظف بمعدل 4% لمدة 8 أشهر، أوجد القيمة المكتسبة؟

تم توظيف مبلغ معين لمدة سنة بمعدل فائدة بسيطة 6% فأنتج في نهاية الفترة جملة تقدر ب 1500دج، أوجد المبلغ الموظف؟

تم توظيف مبلغ قدره 1000دج بفائدة بسيطة، لمدة سنتين فأعطى قيمة محصلة تقدر بـ 2000، ما هو معدل التوظيف؟

الحل:

إيجاد القيمة المكتسبة $\boldsymbol{A}$:

لدينا: $C_0 = 10000, \quad t = 4, \quad n = 8mois$

$$\boldsymbol{A = C_0 + I}$$

وبتعويض قيمة I في المعادلة نجد:

$$\boldsymbol{A} = C_0 + \left(\frac{C_0 * t * n}{1200}\right)$$

$$\boldsymbol{A} = C_0\left(1 + \frac{t * n}{1200}\right)$$

$$A = 10000\left(1 + \frac{4 * 8}{1200}\right)$$

$$.\Rightarrow \mathbf{A = 10266.66^{DA}}$$

إيجاد المبلغ الموظف $\boldsymbol{C_0}$:

لدينا: $\boldsymbol{A} = 1500, \qquad t = 6\%, \qquad n = 1ans$

$$\boldsymbol{A = C_0(1 + t * n)}$$

نقوم باستخراج معادلة حساب رأس المال من خلال علاقة القيمة المكتسبة:

$$\boldsymbol{C_0 = \frac{A}{(1 + t * n)}}$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$C_0 = \frac{1500}{(1 + 0.06 * 1)}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{C_0 = 1415^{DA}}$$

حساب معدل التوظيف t :

لدينا: $\boldsymbol{A} = 2000, \qquad C_0 = 1000, \qquad n = 02ans$

$$\boldsymbol{A = C_0 + (C_0 * t * n)}$$

من خلال علاقة القيمة المكتسبة يمكن استخراج طريقة حساب المعدل:

$$\boldsymbol{t = \frac{A - C_0}{(C_0 * n)}}$$

وبالتعويض نجد:

$$t = \frac{2000 - 1000}{(1000 * 2)}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{t = 50\%}$$

6.1 أنواع الفائدة البسيطة: تتمثل أنواع الفائدة البسيطة في الفائدة الحقيقية والتي تحسب على أساس أيام السنة المدنية، أما الفائدة التجارية فتحسب على أساس أيام السنة التجارية كما يلي:[4]

أ- الفائدة الحقيقية: تحسب الفائدة الحقيقية على أساس أيام السنة الفعلية والتي تقدر بـ 365 يوم ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{r}$ وعلاقتها:

$$\boldsymbol{I_r = \frac{C_0 * t * n}{36500}}$$

ملاحظة: يمكن أن يكون تعداد أيام السنة الفعلية أو الحقيقية 366 يوما وهو ما يسمى بالسنة الكبيسة والتي تحدث مرة كل أربع سنوات. ولكن كيف يمكن التفرقة بين السنة البسيطة والسنة الكبيسة؟

تتم التفرقة من خلال قسمة السنة على أربعة فإذا كانت تقبل القسمة نقول أن السنة كبيسة ومنه تعداد أيام السنة هو 366 يوما ومنه تصبح العلاقة:

$$\mathbf{I}_r = \frac{\boldsymbol{C_0} * \mathbf{t} * \boldsymbol{n}}{\mathbf{36600}}$$

أما إذا كانت السنة لا تقبل القسمة فنقول عنها سنة بسيطة وتعداد أيامها 365 يوما وتحسب وفق العلاقة الأولى.

ب– الفائدة التجارية: أما الفائدة التجارية فتحسب على أساس 360 يوم ونرمز لها بالرمز C وعلاقتها:

$$\mathbf{I}_c = \frac{\boldsymbol{C_0} * \mathbf{t} * \boldsymbol{n}}{\mathbf{36000}}$$

ت– العلاقة بينهما: أما عن العلاقة بينهما فنجدها من خلال قسمة علاقة الفائدة التجارية على علاقة الفائدة الحقيقية، فنجد:

$$\frac{I_{\mathrm{C}}}{\mathrm{I_R}} = \frac{\frac{C_0 * \mathrm{t} * n}{36000}}{\frac{C_0 * \mathrm{t} * n}{36500}}$$

$$\frac{\boldsymbol{I_C}}{\mathbf{I_R}} = \frac{\mathbf{73}}{\mathbf{72}}$$

و عليه فان:

$$\boldsymbol{I_C} > \mathbf{I_R}$$

مثال 01: إذا كانت الفائدة التجارية لمبلغ ما و بمعدل ما و لمدة ما تقدر 40دج، اوجد الفائدة الصحيحة لنفس المبلغ وبنفس المعدل و لنفس المدة.

الحل: لدينا:

$$I_{\mathrm{C}} = 40^{DA}$$

$$\frac{\boldsymbol{I_C}}{\mathbf{I_R}} = \frac{\mathbf{73}}{\mathbf{72}}$$

$$\Longrightarrow I_{\mathrm{R}} = \frac{72}{73}\mathrm{I_C}$$

$$\Longrightarrow I_{\mathrm{R}} = \frac{72}{73}40$$

$$\boldsymbol{I_{\mathrm{R}} = 39.45^{\mathrm{DA}}}$$

مثال 02: الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية لمبلغ يوظف بمعدل فائدة بسيط 4% لمدة 40 يوم كان 0.1دج ، اوجد قيمة هذا المبلغ؟

الحل:

لدينا: $I_c - I_r = 0.1 \qquad t = 4\% \qquad n = 40jrs$

$$I_c - I_r = \left(\frac{\boldsymbol{C_0 * \mathrm{t} * n}}{\boldsymbol{36000}}\right) - \left(\frac{\boldsymbol{C_0 * \mathrm{t} * n}}{\boldsymbol{36500}}\right)$$

$$= C_0\left(\frac{\mathrm{t} * \mathrm{n}}{360} - \frac{\mathrm{t} * \mathrm{n}}{365}\right)$$

$$0.1 = (C_0)\left(\frac{0.04 * 40}{360} - \frac{0.04 * 40}{365}\right)$$

$$C_0 = \frac{0.1}{0.0001}$$

$$\boldsymbol{C_0 = 1000}$$

7.1 المعدل الوسطي لعدة توظيفات: هو المعدل الذي يمكن الحصول عليه من خلال القيام بعدة توظيفات لنفس المدة للحصول على نفس الفائدة. ويعطى بالعلاقة التالية:[5]

$$\boldsymbol{C_1 \longrightarrow \mathrm{n_1} \longrightarrow \mathrm{t_1} \Longrightarrow I_1 = \frac{C_1 * \mathrm{n_1} * \mathrm{t_1}}{36000}}$$

$$\boldsymbol{C_2 \longrightarrow \mathrm{n_2} \longrightarrow \mathrm{t_2} \Longrightarrow I_2 = \frac{C_2 * \mathrm{n_2} * \mathrm{t_2}}{36000}}$$

$$\boldsymbol{C_3 \longrightarrow \mathrm{n_3} \longrightarrow \mathrm{t_3} \Longrightarrow I_3 = \frac{C_3 * \mathrm{n_3} * \mathrm{t_3}}{36000}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{C_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathrm{n_k} \longrightarrow \mathrm{t_k} \Longrightarrow I_k = \frac{C_{\mathrm{k}} * \mathrm{n_k} * \mathrm{t_k}}{36000}}.$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_k = \\ = \frac{C_1 * n_1 * t_1}{36000} + \frac{C_2 * n_2 * t_2}{36000} + \frac{C_3 * n_3 * t_3}{36000} + \cdots + \frac{C_k * n_k * t_k}{36000}$$

إذا تم تعويض توظيفات بتوظيفات أخرى لها نفس المعدل، والتي تؤدي إلى نفس الفائدة الإجمالية، فان المعدل المشترك لهذه التوظيفات هو **المعدل الوسطي** لتلك التوظيفات و ويرمز له بالرمز t^*.

لدينا:

$$\frac{C_1 * n_1 * t_1}{36000} + \frac{C_2 * n_2 * t_2}{36000} + \frac{C_3 * n_3 * t_3}{36000} + \cdots + \frac{C_k * n_k * t_k}{36000} \\ = \frac{C_1 * n_1 * t^*}{36000} + \frac{C_2 * n_2 * t^*}{36000} + \frac{C_3 * n_3 * t^*}{36000} + \cdots + \frac{C_k * n_k * t^*}{36000}$$

$$C_1 * n_1 * t_1 + C_2 * n_2 * t_2 + C_3 * n_3 * t_3 + \cdots + C_k * n_k * t_k = C_1 * n_1 * t^* + C_2 * n_2 * t^* + C_3 * n_3 * t^* + \cdots + C_k * n_k * t^*$$

ومنه:

$$C_1 * n_1 * t_1 + C_2 * n_2 * t_2 + C_3 * n_3 * t_3 + \cdots + C_k * n_k * t_k = t^* (C_1 * n_1 * + C_2 * n_2 + C_3 * n_3 + \cdots + C_k * n_k)$$

و عليه نجد: $$t^* = \frac{C_1 * n_1 * t_1 + C_2 * n_2 * t_2 + C_3 * n_3 * t_3 + \cdots + C_k * n_k * t_k}{C_1 * n_1 * + C_2 * n_2 + C_3 * n_3 + \cdots + C_k * n_k}$$

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i * t_k}{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i}$$

مثال: تم توظيف مبلغين الاول يقدر ب 2000دج بمعدل 6 % لمدة 70يوما و الثاني يقدر ب 1500دج بمعدل 6.5% لمدة 120يوم، ما هو المعدل المتوسط؟

الحل:

لدينا:

$$t^* = \frac{\sum_{i=}^{k} c_i * n_i * t_k}{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i}$$

حساب المعدل المتوسط للتوظيف:

و منه:

$$t^* = \frac{(2000 * 70 * 6) + (1500 * 120 * 6.5)}{(2000 * 70) + (1500 * 120)} = 6.281$$

$$\boldsymbol{t^* = 6.3\%}$$

ثانيا– الخصم بالفائدة البسيطة:

على غرار وسائل الدفع المعتادة التي يستعملها المتعاملون الاقتصاديون مثل النقود والشيكات البنكية، هناك وسائل دفع أخرى على سبيل المثال الأوراق التجارية أو ما يطلق عليها الكمبيالات أو السفتجة، وسند الأمر، وعند تحرير المتعاملون فيما بينهم للأوراق التجارية فإن صاحب الدين ملزم قانونيا بدفع القيمة الاسمية الكمبيالة إلى صاحب الحق أو المستفيد وذلك في التاريخ أو الأجل المحدد على الورقة التجارية والذي يسمى بتاريخ الاستحقاق، لكن لظروف ما قد يلجأ صاحب الحق أو المستفيد إلى تحصيل هذا الدين قبل ميعاد استحقاقه، وهذا ما يسمى بخصم الدين أو خصم الأوراق التجارية.

1. الخصم التجاري: يعرف الخصم كعملية بأنه الأجراء الذي يسمح لحامل الورقة التجارية بتحويلها إلى سيولة قبل تاريخ استحقاقها؛ أما تعريفه كقيمة فهو المبلغ الذي يقتطعه البنك أو الجهة التي قبلت الخصم على أساس معدل فائدة معين، والمدة التي تفصل بين تاريخ الخصم وتاريخ استحقاق الورقة التجارية.

1.1 حساب الخصم التجاري: يتم احتساب الخصم التجاري $\boldsymbol{EC}$ على أساس ثلاثة عناصر أساسية هي:

- ✓ **القيمة الاسمية** $\boldsymbol{VN}$: وهي قيمة الدين المدون على الورقة التجارية.
- ✓ **معدل الخصم** $\boldsymbol{t}$: النسبة المئوية التي على أساسها حساب الخصم والمقتطع من القيمة الاسمية للورقة التجارية.
- ✓ **و مدة الخصم** $\boldsymbol{n}$: تمثل الفترة الزمنية التي تفصل تاريخ الاستحقاق و تاريخ الخصم.

ويتم حساب الخصم التجاري وفق العلاقة التالية:[6]

$$\boldsymbol{EC = \frac{VN * t * n}{36000}}$$

مثال: بتاريخ 2018/04/31 اشترى أحد التجار بضاعة بقيمة 6000دج وبدل أن يسدده نقدا قام بتحرير ورقة تجارية سلما للبائع تستحق في تاريخ 2018/07/10، وبتاريخ 2018/06/01 خصم البائع الورقة لدى البنك بمعدل 4%.

اوجد قيمة الخصم.

الحل: $\boldsymbol{VN = 6000^{DA} \quad t = 4\% \quad n = (30 - 1) + 10 = 39jrs}$



وبتطبيق علاقة الخصم نجد:

$$\boldsymbol{EC = \frac{VN * t * n}{36000}}$$

$$EC = \frac{6000 * 4 * 39}{36000}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{EC = 26^{DA}}$$

2.1 القيمة الحالية لورقة تجارية: هي القيمة الناتجة عن طرح قيمة الخصم من القيمة الاسمية للورقة، وهي القيمة التي يتحصل عليها حامل الورقة التجارية، ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{A}$ وتحسب وفق العلاقة التالية:[7]

$$\boldsymbol{.VA = VN - EC}$$

وبتعويض علاقة الخصم التجاري في علاقة القيمة الحالية نجد:

$$\boldsymbol{VA = VN - \frac{VN * t * n}{36000}}$$

مثال: بالعودة إلى المثال السابق اوجد القيمة الحالية؟

الحل: لدينا:

$$\boldsymbol{VA = VN - \frac{VN * t * n}{36000}}$$

بالتعويض نجد:

$$VA = 6000 - \frac{6000 * 4 * 39}{36000}$$

$$^{DA}VA = 5974$$

2. الآجيو AGIO: عندما يقوم البنك بخصم الورق التجارية، فإنه لا يحصل على قيمة الخصم فقط وإنما أيضا يقوم بخصم مجموعة من العمولات، وتسمى هذه العملية **بالآجيو**.

إذا الأجيو يمثل الخصم التجاري مضافا إليه العمولات التي يحصلها البنك، وبالتالي يشمل العناصر التالية:[8]

- ✓ **الخصم التجاري**: يحسب وفق العلاقة أعلاه EC
- ✓ **عمولة التظهير**: أو عمولة مرتبطة بالزمن، و تحسب وفق العلاقة التالية: $\boldsymbol{Com1 = \frac{VN*t'*n}{36000}}$
- ✓ **عمولة تغيير المكان**: أو عمولة غير مرتبطة بالزمن، هذه العمولة مرتبطة أساسا بالقيمة الاسمية للورقة وبمعدل العمولة فقط، وتعطى بالعلاقة التالية: $\boldsymbol{Com2 = \frac{VN*t''}{100}}$
- ✓ **عمولة ثابتة**: تعطى عادة بالدينار، و يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Com3}$.
- ✓ **الرسم على القيمة المضافة TVA**: يطبق هذا الرسم على الخصم التجاري مضافا إليه العمولات المذكورة أعلاه.

وبالتالي فإن قيمة الأجيو تساوي:

$$\mathbf{AGIO} = \boldsymbol{EC + Com1 + Com2 + Com3 + TVA}$$

إن هذه العمولات ومعدل الخصم التجاري تشكل في مجموعها معدل الخصم وهو المعدل الذي يطبق فعليا على القيمة الاسمية للورقة التجارية وهو ما يعرف ب**المعدل** الحقيقي للخصم، هذا المعدل أكبر من معدل الخصم التجاري والمعروف بالمعدل الاسمي.

ويتم حساب معدل الخصم الإجمالي أو المعدل الحقيقي للخصم انطلاقا من علاقة الخصم التجاري وبتعويض عبارة الآجيو مكان عبارة الخصم التجاري نجد ما يلي:

$$\mathbf{AGIO} = \frac{\boldsymbol{VN * \theta * n}}{\mathbf{36000}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{AGIO * 36000}}{\boldsymbol{VN * n}}$$

حيث: θ المعدل الحقيقي للخصم.

1.2 المعدل الاسمي والمعدل الحقيقي للخصم: بعبارة بسيطة المعدل الاسمي للخصم أو معدل الخصم التجاري هو المعدل الذي طبق على القيمة الاسمية للورقة التجارية (معدل الخصم التجاري)، أما بالنسبة للمعدل الحقيقي للخصم أو

ما يعرف أيضا بالخصم الحقيقي فهو يتضمن الخصم التجاري والعمولات ومصاريف أخرى (الآجيو)، الأمر الذي ينتج معدل حقيقي ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{\theta}$. بمعنى أن المعدل الحقيقي للخصم هو المعدل الذي ينتج قيمة الآجيو.

مثال: سند تجاري قيمته الاسمية 6600دج، خصم 30يوم قبل استحقاقه، وهذا وفقا للشروط التالية:

- ✓ معدل الخصم 5%
- ✓ عمولة التظهير0.6%
- ✓ عمولة تحويل المكان 1/2 %
- ✓ عمولة ثابتة 20دج.
- ✓ الرسم على القيمة المضافة: 19%.

اوجد:

- ✓ الآجيو والقيمة الحالية الصافية.
- ✓ المعدل الحقيقي للخصم.

الحل:

حساب الآجيو:

لدينا:

$$\mathbf{AGIO} = \boldsymbol{EC} + \boldsymbol{Com1} + \boldsymbol{Com2} + \boldsymbol{Com3} + \boldsymbol{TVA}$$

الخصم التجاري:

$$\boldsymbol{EC} = \frac{\boldsymbol{VN} * \boldsymbol{t} * \boldsymbol{n}}{\mathbf{36000}}$$

$$EC = \frac{6600 * 5 * 30}{36000} = \mathbf{27.5}^{\boldsymbol{DA}}$$

عمولة التظهير:

$$\boldsymbol{Com1} = \frac{\boldsymbol{VN} * \boldsymbol{t'} * \boldsymbol{n}}{\mathbf{36000}}$$

$$\frac{6600 * 0.6 * 30}{36000}$$

$$Com1 = 3.3^{DA}$$

عمولة تحويل المكان:

$$Com2 = \frac{VN * t"}{100}$$

$$\frac{6600 * 1/2}{100}$$

$$Com2 = 33^{DA}$$

عمولة ثابتة:

$$Com3 = 20^{DA}$$

الرسم على القيمة المضافة:

$$TVA = (EC + Com1 + Com2 + Com3) * 0.19$$

$$TVA = (27.5 + 3.3 + 33 + 20) * 0.19$$

$$TVA = 15.922^{DA}$$

و عليه:

$$AGIO = 27.5 + 3.3 + 33 + 20 + 15.922$$

$$AGIO = 99.722$$

حساب القيمة الحالية الصافية:

$$VA = VN - AGIO$$

$$6600-99.722VA =$$

$$^{DA}VA = 6500.278$$

حساب المعدل الحقيقي للخصم:

$$\mathbf{AGIO} = \frac{\boldsymbol{VN} * \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{n}}{\mathbf{36000}}$$

$$99.722 = \frac{6600 * \theta * 30}{36000}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{36000 * 99.722}{6600 * 30} = \mathbf{18.13\%}$$

3. الخصم الحقيقي (الصحيح):وأيضا يسمى بالخصم العقلاني هو الخصم الذي يحسب على أساس معطيات حقيقية وبالتحديد على أساس القيمة الحالية الصحيحة أو الحقيقية للورقة التجارية وليس على أساس القيمة الاسمية، ويرمز له بالرمز: $\mathbf{EC_r}$

ويحسب الخصم الحقيقي وفق العلاقة التالية (القيمة الحالية الحقيقية):

$$\boldsymbol{EC_r} = \mathbf{VA_r} * \mathbf{t} * \mathbf{n}$$

1.3 القيمة الحالية الصحيحة: هي الفرق بين القيمة الاسمية للدين أو الورقة التجارية وبين قيمة الخصم الصحيح المتنازل عنه في تاريخ سابق لتاريخ الاستحقاق.

حيث أن القيمة الحالية الحقيقية:

$$\boldsymbol{VA_r} = \mathbf{VN} - \boldsymbol{EC_r}$$

و بتعويض معادلة الخصم الصحيح في معادلة القيمة الحالية الصحيحة نجد:

$$\boldsymbol{VA_r} = \mathbf{VN} - (\mathbf{VA_r} * \mathbf{t} * \mathbf{n})$$

$$\mathrm{VN} = VA_r + \mathrm{VA_r} * \mathrm{t} * \mathrm{n}$$

$$\mathbf{VN} = \boldsymbol{VA_r}(\mathbf{1} + \mathbf{t} * \mathbf{n})$$

وعليه:

$$\mathbf{VA_r} = \frac{\mathbf{VN}}{\mathbf{1} + \mathbf{t} * \mathbf{n}}$$

وأيضا:

$$\boldsymbol{VN} = \boldsymbol{VA_r}(\mathbf{1} + \boldsymbol{t} * \boldsymbol{n})$$

حيث:

$\boldsymbol{VA_r}$ هي القيمة الحالية الصحيحة

مثال: شخص مدين بمبلغ معين يسدد بعد 4اشهر، فأراد أن يسدده فورا بدفع 10000دج، بمعدل خصم 8% سنويا، اوجد قيمة الدين.

الحل:

لدينا: $VA_R = 100000^{DA}$ t=8% n=4mois

$$\boldsymbol{VN = VA_R(1 + t * n)}$$

$$VN = 100000(1 + \frac{8 * 4}{1200}$$

$$\boldsymbol{VN = 102666.66^{DA}}$$

2.3 العلاقة بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية الصحيحة والخصم الحقيقي:

لدينا:

$$\boldsymbol{EC_r = \frac{VA_r * t * n}{36000}}$$

ولدينا أيضا:

$$\boldsymbol{VA_r = \frac{VN}{(1 + t *)}}$$

وبتعويض قيمة $\boldsymbol{r}$ في معادلة $\boldsymbol{EC_r}$ نجد علاقة $\boldsymbol{EC_r}$ بدلالة $\boldsymbol{VN}$ كما يلي:

$$\boldsymbol{EC_r = \frac{VA_r * t * n}{36000} \Longrightarrow EC_r = \frac{\frac{VN}{(1 + t * n)} \times t \times n}{36000}}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{EC_r = \frac{VN * t * n}{36000(1 + t * n)}}$$

و بتعويض قيمة D في المعادلة السابقة نحصل على:

$$\boldsymbol{EC_{\mathrm{r}} = \frac{VN * \mathrm{n}}{D + n}}$$

ومن اجل إيجاد العلاقة بين القيمة الاسمية و الخصم الصحيح و الخصم الحقيقي نجد:

$$\boldsymbol{VN = \frac{\mathrm{EC} * EC_{\mathrm{r}}}{\mathrm{EC} - EC_{\mathrm{r}}}}$$

مثال: أوجد القيمة الحالية الصحيحة لورقة تجارية قيمتها الاسمية 20000دج، وقيمتها الحالية التجارية19000دج؟

الحل:

لدينا: $\boldsymbol{VA = 9000}$ $\boldsymbol{VN = 10000}$ $\boldsymbol{VA_r = ؟}$

لدينا:

$$\boldsymbol{\mathrm{EC} = VN - VA} \Longrightarrow \mathrm{EC} = 20000 - 19000 = \boldsymbol{1000^{DA}}$$

ولدينا:

$$\boldsymbol{VN = \frac{\mathrm{EC} * EC_{\mathrm{r}}}{\mathrm{EC} - EC_{\mathrm{r}}}}$$

$$\Longrightarrow 20000 = \frac{1000 * EC_{\mathrm{r}}}{1000 - EC_{\mathrm{r}}}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{EC_{\mathrm{r}} = 909.09^{DA}}$$

وعليه:

$$VA_{\mathrm{r}} = \mathrm{VN} - EC_{\mathrm{r}} \Longrightarrow VA_{\mathrm{r}} = 20000 - 909.09$$

$$\boldsymbol{VA_{\mathrm{r}} = 19090.91^{DA}}$$

ثالثا– التكافؤ بالفائدة البسيطة:

أحياناً لا يتمكن المدين أو المقترض من الوفاء بالتزاماته المتمثلة في تسديد ديونه في تاريخ الاستحقاق، وهنا يتفاوض مع دائنه من أجل تسوية ديونه عن طريق استبدال عدة أوراق تجارية بورقة واحدة جديدة، أو استبدال عدة أو راق تجارية بعدة أوراق تجارية أخرى، وتسوية الديون بين الطرفين(الدائن والمدين)تتم وفق قاعدة أن قيمة الديون القديمة في تاريخ استبدالها يجب أن تتساوى مع قيمة الديون الجديدة في ذلك التاريخ.

1. تعريف تكافؤ الأوراق التجارية: تسوية الديون تعني تعديل طريقة سدادها أي استبدال ديون قديمة بديون أخرى جديدة قد تكون بقيم أخرى جديدة أو تواريخ استحقاق جديدة أو الاثنتين معا.

2. حالات التكافؤ: إن تسوية الديون أو استبدالها يكون بإحدى الأشكال التالية:

1.2 تكافؤ ورقتين تجاريتين: تتكافأ ورقتين تجاريتين قيمتهما الاسمية VN_1، VN_2 إذا خصمت هاتين الورقتين بنفس المعدل وفي تاريخ ما، وكانت لهما نفس القيمة الحالية.

إذا القيمة الحالية للورقة التجارية الأولى تساوي القيمة الحالية للورقة التجارية الثانية ويمكن توضيح هذا في العلاقة التالية:[9]

$$VA_1 = VA_2$$
$$\Longrightarrow VN_1 - EC_1 = VN_2 - EC_2$$
$$\Longrightarrow VN_1 - \frac{VN_1 * t * n_1}{36000} = VN_2 - \frac{VN_2 * t * n_2}{36000}$$

مثال : يريد شخص استبدال ورقة تجارية تقدر ب 100000دج، تستحق بعد 30يوما، بورقة أخرى تستحق بعد 60 يوما، إذا علمت أن معدل الخصم هو 6% سنويا، اوجد القيمة الاسمية للدين الجديد؟

الحل:

لدينا:

$$\%VN_1 = 100000، \quad n_2 = 60jrs \quad n_1 = 30jrs \quad t = 6$$

$$VA_1 = VA_2 \Longrightarrow VN_1 - EC_1 = VN_2 - EC_2$$

$$\Rightarrow 100000 - \frac{100000 * 6 * 30}{36000} = VN_2 - \frac{VN_2 * 6 * 60}{36000}$$

$$\Rightarrow VN_2(1 - \frac{6 * 60}{36000}) = 100000 - \frac{100000 * 6 * 30}{36000}$$

$$\Rightarrow \mathbf{VN_2 = 100505.05^{DA}}$$

2.2 تكافؤ ورقة تجارية وعدة أوراق تجارية: أي استبدال ورقة وحيدة بمجموعة من الأوراق أو العكس، وهنا يمكن التمييز بين حالتين:[10]

الحالة1: في هذه الحالة القيمة الاسمية للورقة الوحيدة لا تساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق الأخرى المكافئة، وبالتالي نقول أن هنالك تاريخ استحقاق مشترك بين هذه الورقة والأوراق الأخرى يجب حسابه، أي:

$$VN \neq VN_1 + VN_2 + \cdots + VN_k$$

ويتم حساب هذا التاريخ وفق العلاقة التالية:

$$VA = VA_1 + VA_2 + \cdots + VA_k$$
$$VN - EC = VN_1 - EC_1 + VN_2 - EC_2 + \cdots + VN_k - EC_k$$

مثال 01: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 16004.4 دج، يريد حاملها استبدالها بثلاث أوراق أخرى كما يلي:

الورقة الأولى: قيمته الاسمية 2000دج يستحق بعد 20يوما

الورقة الثانية: قيمته الاسمية 6000دج يستحق بعد 40يوما

الورقة الثالثة: قيمته الاسمية 8000دج يستحق بعد 80يوما

اذا كان معدل الخصم 4% ما هو تاريخ استحقاق الورقة الوحيدة؟

الحل:

لدينا:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3$$
$$VN - EC = VN_1 - EC_1 + VN_2 - EC_2 + VN_3 - EC_3$$

$$VN - \frac{VN * t * n}{36000} = VN_1 - \frac{VN_1 * t * n_1}{36000} + VN_2 - \frac{VN_2 * t * n_2}{36000} + VN_3 - \frac{VN_3 * t * n_3}{36000}$$

و بالتعويض نجد:

$$16004.4\left(1 - \frac{4 * n}{36000}\right) = 2000\left(1 - \frac{4 * 20}{36000}\right) + 6000\left(1 - \frac{4 * 40}{36000}\right) + 8000\left(1 - \frac{4 * 80}{36000}\right)$$

$$\mathbf{n = 60\ jrs}$$

الحالة2: القيمة الاسمية للورقة الوحيدة تساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق الأخرى، هذه وبالتالي نقول أن هنالك تاريخ استحقاق متوسط بين هذه الورقة والأوراق الأخرى يجب حسابه، أي:

$$VN = VN_1 + VN_2 + \cdots + VN_k$$

وتحسب كالآتي:

$$VA = VA_1 + VA_2 + \cdots + VA_k$$
$$VN - EC = VN_1 - EC_1 + VN_2 - EC_2 + \cdots + VN_k - EC_k$$

$$-\frac{VN * t * n}{36000} = -\frac{VN_1 * t * n_1}{36000} - \frac{VN_2 * t * n_2}{36000} - \cdots - \frac{VN_k * t * n_k}{36000}$$

و منه:

$$VN * n = VN_1 * n_1 + VN_2 * n_2 + \cdots + VN_k * n_k$$

ومنه n هي تاريخ الاستحقاق المتوسط، و يعبر عليها بالعلاقة التالية:

$$n = \frac{VN_1 * n_1 + VN_2 * n_2 + \cdots + VN_k * n_k}{VN}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{\sum VN_i * n_i}{VN}}$$

مثال 02:تم تعويض سند تجاري قيمته الاسمية 80000دج بثلاث أوراق تجارية كالآتي:

الورقة الأولى: قيمتها الاسمية 18000دج يوم الاستبدال.

الورقة الثانية: قيمتها الاسمية 40000دج يستحق بعد 20يوما

الورقة الثالثة: قيمتها الاسمية 50000دج يستحق بعد 40يوما

اوجد تاريخ الاستحقاق المتوسط للسند؟

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{n = \frac{\sum VN_i * n_i}{VN}}$$

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$n = \frac{18000 * 0 + 40000 * 20 + 50000 * 40}{80000}$$

$$\boldsymbol{n = 35jrs}$$

و بالتالي فان تاريخ الاستحقاق المتوسط يكون بعد تاريخ التكافؤ ب 35يوما.

3.2 تكافؤ عدة أوراق تجارية: في هذه الحالة تتساوى القيم الحالية للأوراق التجارية القديمة مع القيم الحالية للأوراق التجارية الجديدة ويمكن توضيح ذلك من خلال العلاقة التالية:[11]

$$\mathrm{VA} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} VA_i \Longrightarrow \mathrm{VN} - \mathrm{EC}$$
$$= \mathrm{VN}_1 - \mathrm{EC}_1 + \mathrm{VN}_2 - \mathrm{EC}_2 + \cdots + \mathrm{VN}_\mathrm{k} - \mathrm{EC}_\mathrm{k}$$
$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} VA_i = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} VA_j' \Longrightarrow$$
$$\mathrm{VN}_1 - \mathrm{EC}_1 + \mathrm{VN}_2 - \mathrm{EC}_2 + \cdots + \mathrm{VN}_\mathrm{k} - \mathrm{EC}_\mathrm{k}$$
$$= \mathrm{VN'}_1 - \mathrm{EC'}_1 + \mathrm{VN'}_2 - \mathrm{EC'}_2 + \cdots + \mathrm{VN'}_\mathrm{k} - \mathrm{EC'}_\mathrm{k}$$

مثال: لدينا شخص مدين بالمبالغ التالية:

30000 دج تستحق بعد سنة

60000 دج تستحق بعد 4اشهر

35000 دج تستحق بعد 6 أشهر

أراد هذا الشخص تعويض هذه الديون بدينين متساويين في القيمة الاسمية، يستحق الأول بعد 5 أشهر، والثاني بعد سنة، فإذا كان معدل الفائدة المستخدم 9% سنويا.

اوجد القيمة الاسمية لكل دين.

الحل:

لدينا:

$$\mathrm{VN}_1 = 30000;\ \mathrm{VN}_2 = 60000\ ;\quad \mathrm{VN}_3 = 35000;$$
$$n_1 = 1\ \mathrm{ans} \qquad \mathrm{n}_2 = 4\mathrm{mois} \qquad \mathrm{n}_3 = 6\mathrm{mois} \qquad \mathrm{t} = 9\%$$
$$n_1' = 5\mathrm{mois}\ ;\quad n_2' = 1\mathrm{ans}$$

ولدينا:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} VA_i = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} VA_j'$$
$$\Longrightarrow \mathbf{VN_1 - EC_1 + VN_2 - EC_2 + VN_3 - EC_3 = VN'_1 - EC'_1 + VN'_2 - EC'_2}$$

$$\Longrightarrow 30000\left(1 - \frac{9}{100}\right) + 60000\left(1 - \frac{9 \times 4}{1200}\right) + 35000\left(1 - \frac{9 \times 6}{1200}\right)$$
$$= \mathrm{VN}\left(1 - \frac{9 \times 5}{1200}\right) + \mathrm{VN}\left(1 - \frac{9}{100}\right)$$

$$\Longrightarrow 30000\left(\frac{91}{100}\right) + 60000\left(\frac{1164}{1200}\right) + 35000\left(\frac{1146}{1200}\right) = \mathrm{VN}\left(\frac{1155}{1200}\right) + \mathrm{VN}\left(\frac{91}{100}\right)$$

$$\Longrightarrow 27300 + 58200 + 33425 = 1.8725\text{VN}$$
$$\Longrightarrow \text{VN} = \frac{118925}{1.8725}$$

$$\overset{DA}{\Longrightarrow} \mathbf{VN = 63511.34}$$

ومنه القيمة الاسمية لكل دين هي: 63511.34دج

تمارين حول العمليات المالية قصيرة الأجل:

التمرين الأول: وظف شخص مبلغين، الفرق بينهما 24900دج، الأول لمدة 8 أشهر، بمعدل فائدة 5%، والثاني لمدة 6 أشهر بمعدل فائدة 4%، فإذا كانت فائدة المبلغ الأول ضعف فائدة المبلغ الثاني.

احسب قيمة كل مبلغ ؟ وقيمة كل فائدة؟

التمرين الثاني: الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية لمبلغ يوظف بمعدل فائدة بسيط 4% لمدة 40 يوم كان 0.1دج ، اوجد قيمة هذا المبلغ؟

التمرين الثالث: خصم تاجر ورقتين تجاريتين بمعدل 4.5%، الورقة الأولى تستحق بعد 34يوم والثانية بعد 52 يوم علما أن القيمة الاسمية للورقة الأولى تساوي 2/3 من القيمة الاسمية للورقة الثانية ومجموع الخصمين هو 224دج.

احسب القيمة الاسمية لكل ورقة؟

التمرين الرابع: خصم سند لدى بنك قيمته 16000دج، يستحق الدفع بعد 60 يوما، بمعدل خصم 4.5%، عمولة التظهير 4%، عمولة ثابته 150دج.

احسب القيمة الصافية بعد الخصم.

احسب المعدل الحقيقي للخصم.

التمرين الخامس: كمبيالة قيمتها الاسمية 6900دج، تستحق في 30ديسمبر، و في 7سبتمبر اتفق الطرفان على تسديد مبلغ نقدي 1022.25دج و يحرر له سند بالباقي يستحق بعد 6 أشهر من تاريخ الاتفاق.

إيجاد القيمة الاسمية للسند علما أن معدل الخصم هو 15%.

التمرين السادس: احسب المعدل المتوسط لجمة رؤوس الأموال التالية:

رأس المال الموظف	المدة (بالأيام)	المعدل
8540	58	%4
2690	77	%6.5
9248	116	%10
7364	115	%8.5

التمرين السابع: وظف شخص ثلاث مبالغ لمدة سنتين بمعدلات فائدة سنوية 5%، 6%، 4%، على التوالي، جملة المبالغ الثلاثة 698348دج، إذا علمت ان المبلغ الأول يساوي 4/8 المبلغ الثاني والمبلغ الثالث يساوي 6/8 المبلغ الثاني.

احسب القيمة الاسمية لكل مبلغ.

التمرين الثامن: تم إيداع مبلغ 65700دج لمدة 150يوم فبلغ مجموع الفائدة التجارية و الحقيقية 7612.5دج.

احسب معدل الفائدة المطبق على المبلغ، و كذا الفائدة التجارية و الفائدة الحقيقية.

نفس المبلغ طبقت عليه فائدة بمعدل يزيد عن المعدل السابق ب 2%، و لنفس المدة احسب الجملة بالفائدة الحقيقية.

احسب المبلغ الذي يعطي فائدة تجارية تساوي الفائدة الحقيقية للسؤال1، بإيداعه 150يوم و بمعدل فائدة 18%سنويا.

التمرين التاسع: أودعت مؤسسة ثلاث مبالغ تتناسب فوائدها فيما بينها مع الأرقام: 7.5 و 5.5 و 2 على الترتيب، بمعدل فائدة بسيطة لمدة معينة ، فبلغت مجموع فوائدها 9000دج.

احسب فائدة كل مبلغ.

احسب المدة المشتركة للإيداع إذا كان المبلغ الأول 112500 دج و المعدل المطبق 12%.

احسب المبلغين الآخرين.

التمرين العاشر: بتاريخ 2010/07/15 قدمت ورقة تجارية قيمتها الاسمية 86000دج للخصم، حيث أنها تستحق في 2010/10/01 وفق الشروط التالية:

معدل الخصم 8%، عمولة التظهير 0.5%، عمولة تحويل المكان 1/8%، مصاريف التحصيل 0.5% بحد ادنى 200دج، الرسم على القيمة المضافة 19% يطبق على عمولة تحويل المكان ومصاريف التحصيل. يقدم البنك مهلة يومين للسداد.

احسب ما يلي:

مصاريف الخصم الإجمالي (agio) .

القيمة الصافية للورقة التجارية.

معدل الخصم الإجمالي.

معدل تكلفة العملية بالنسبة للبنك والزبون.

التمرين الحادي عشر: بتاريخ 2020/05/12 أرسلت مؤسسة إلى البنك سندي أمر، يستحق الأول في 2020/08/07، والثاني يستحق بتاريخ 2020/09/14 إذا علمت أن:

$Ec_1 + Ec_2 = 54^{DA}$ $Ec_1 . Ec_2 = 329^{DA}$

أوجد قيمة خصم السندين، مع العلم أن معدل الخصم 7%.

أوجد القيمة الاسمية للسندين.

التمرين الثاني عشر:يريد شخص استبدال ثلاثة أوراق تجارية الأولى قيمتها الاسمية 50000دج تستحق بتاريخ 2018/03/21، الثانية قيمتها الاسمية 30000دج تستحق بتاريخ 2018/05/30، الثالثة قيمتها الاسمية 20000دج تستحق بتاريخ 2018/06/24.

وبتاريخ 2018/03/1 تفاوض هذا الشخص على أوراقه، واتفق على أن يستبدلهما بورقتين متساويتين في القيمة الاسمية وتستحق الأولى بتاريخ2018/04/20، أما الثانية فتستحق بتاريخ 2018/05/16.

اوجد القيمة الاسمية للورقتين الجديدتين إذا كان المعدل المطبق هو 9%.

التمرين الثالث عشر: مبلغان مجموعهما 34000دج متناسبين مع الأعداد 8و9 احسب المبلغين؟

المبلغان وظفا في البنك الأول بمعدل t% والثاني بمعدل t'% العائد السنوي للمبلغ الأول يزيد عن العائد السنوي للمبلغ الثاني ب 200دج، للعلم أن مجموع المبلغين إذا وظفا بمعدل $\frac{t+t'}{2}$ لمدة سنة فان الفائدة السنوية الناتجة تقدر ب 2380دج احسب المعدلين؟

عبر عن القيمة المكتسبة بدلالة مدة التوظيف n.

التمرين الرابع عشر: القيمة الحالية لورقة تجارية بتاريخ 02/15 بمعدل خصم 4% هي 4467دج، لو خصمت هذه الورقة قبل استحقاقها لكان الخصم الثاني اصغر من الأول ب 18دج.

احسب القيمة الاسمية وتاريخ الاستحقاق.

التمرين الخامس عشر: يريد شخص استبدال الورقتين التاليتين: الأولى قيمتها الاسمية 1800دج تستحق خلال 60يوم الورقة الثانية مجهولة القيمة الاسمية وتاريخ الاستحقاق، بورقتين جديدتين هما: الأولى قيمتها 1500دج تستحق خلال 180يوم، والثانية مجهولة القيمة الاسمية واستحقاقها خلال 27 يوم.

إذا علمت أن معدل الخصم 3%، وان مجموع القيم الاسمية للورقتين القديمتين يساوي مجموع القيم الاسمية للورقتين الجديدتين، وكذا مجموع القيم الحالية للورقتين الجديدتين بلغ 4470.75دج.

اوجد القيمة الاسمية للورقتين المجهولتين، وتاريخ استحقاق الورقة المجهول.

الحلول:

حل التمرين الأول:

$C_1 - C_2 = 24900$; $n_1 = 8$ mois; $n_2 = 6$ mois; $t_1 = 5\%$; $t_2 = 4\%$

$$I_1 = 2I_2$$

$$\frac{C_1 * t1 * n1}{1200} = 2\frac{C_2 * t2 * n2}{1200}$$

$$\frac{C_1 * 5 * 8}{1200} = 2\frac{C_2 * 4 * 6}{1200}$$

$$\frac{C_1 40}{1200} = \frac{C_2 48}{1200}$$

$$C_1 = 1.2C_2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$C_1 - C_2 = 24900 \ldots\ldots(2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد قيمة المبلغين

$$1.2C_2 - C_2 = 24900$$

$$C_2 = 124500 \text{ DA}$$

$$C_1 = 149400 \text{ DA}$$

إيجاد قيمة الفائدة للمبلغ الأول والثاني

$$I_1 = \frac{C_1 40}{1200}$$

$$I_1 = \frac{149400 * 40}{1200} = 4980 \text{ DA}$$

$$I_2 = \frac{C_2 48}{1200}$$

$$I_2 = \frac{124500 * 24}{1200} = 2490 \text{ DA}$$

حل التمرين الثاني:

لدينا:

$$I_c - I_r = 0.1 \qquad t = 4\% \qquad n = 40jrs$$

$$I_c - I_r = \left(\frac{C_0 * t * n}{36000}\right) - \left(\frac{C_0 * t * n}{36500}\right)$$

$$= C_0\left(\frac{t * n}{360} - \frac{t * n}{365}\right)$$

$$0.1 = (C_0)\left(\frac{0.04 * 40}{360} - \frac{0.04 * 40}{365}\right)$$

$$C_0 = \frac{0.1}{0.0001}$$

$$^{DA}\boldsymbol{C_0 = 1000}$$

حل التمرين الثالث:

لدينا:

$n_1= 34; n_2= 52 ; t_1=t_2= 4.5\% ; C_1= 2/3\ C_2$

$$\mathbf{Ec_1+Ec_2= 224}$$

حساب القيمة الاسمية للورقة الثانية:

$$Ec_1+Ec_2= 224$$

$$C_1*t_1*n_1/36000+ C_2*t_2*n_2/36000= 224$$

$$C_1*4.5*34/36000+ C_2*4.5*52/36000= 224$$

ولدينا:

$$\mathbf{C_1= 2/3\ C_2}$$

ومنه:

$\mathbf{C_2= 24000^{DA}}$ $\mathbf{C_1= 16000^{DA}}$

حساب الخصم التجاري:

$$Ec_1= C_1*t_1*n_1/36000$$

$$\mathbf{Ec_1=68\ ^{DA}}$$

$$Ec2= C_2*t_2*n_2/36000$$

$$\mathbf{Ec_2= 156\ ^{DA}}$$

حل التمرين الرابع:

$$\mathbf{AGIO} = \boldsymbol{EC + Com1 + Com2 + Com3 + TVA}$$

الخصم التجاري:

$$EC = \frac{VN * t * n}{36000}$$

$$EC = \frac{16000 * 60 * 4.5}{36000} = 120^{DA}$$

عمولة متعلقة بالزمن:

$$Com1 = \frac{VN * t' * n}{36000} = \frac{16000 * 60 * 4}{36000}$$

$$\boldsymbol{Com1 = 106.66^{DA}}$$

الرسم على القيمة المضافة:

$$TVA = (EC + Com1 + Com2) * 0.19$$

$$TVA = (120 + 106.66 + 150) * 0.19$$

$$\boldsymbol{TVA = 71.56^{DA}}$$

و عليه:

$$\text{AGIO} = 120 + 106.66 + 150 + 71.56$$

$$\mathbf{AGIO = 447.56^{DA}}$$

حساب المبلغ الصافي للمفاوضة:

$$\mathbf{VA = VN - AGIO}$$

$$\text{VA} = \text{16000-447.56} = \mathbf{15552.44}\ ^{\mathbf{DA}}$$

حساب المعدل الحقيقي للخصم:

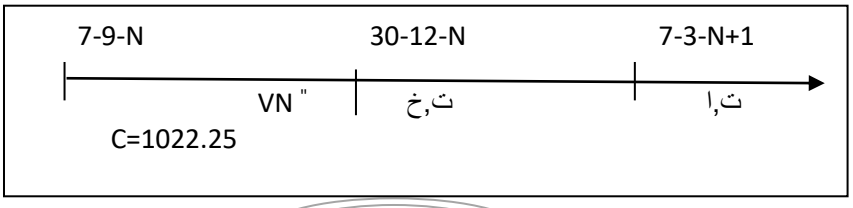
$$\mathbf{AGIO} = \frac{\boldsymbol{VN * \theta * n}}{\mathbf{36000}}$$

$$447.56 = \frac{16000 * \theta * 60}{36000}$$

$$\theta = \frac{36000 * 447.56}{16000 * 60} = \mathbf{16.78\%}$$

حل التمرين الخامس:

$\text{VN} = 6900$، $n_2 = 6\text{mois}$ $\text{n}_1 = (30 - 7 + 31 + 30 + 30) = 114\text{jrs}$ $\text{t} = 15\%$



$$\mathbf{VA} = \mathbf{VA_1} + \boldsymbol{c}$$

$$6900 - \frac{6900 \times 0.15 \times 114}{36000} = 1022.25 + V\grave{N} - \frac{V\grave{N} \times 0.15 \times 6}{1200}$$

$$6900 - \frac{117990}{36000} = 1022.25 + V\grave{N} - \frac{V\grave{N} \times 0.9}{1200}$$

$$6900 - 1022.25 - \frac{117990}{36000} = V\grave{N}\left(1 - \frac{0.9}{1200}\right)$$

$$\frac{211481010}{36000} = V\grave{N}\left(\frac{1200 - 0.9}{1200}\right)$$

$$V\grave{N} = \frac{211481010}{36000}\left(\frac{1200}{1199.1}\right)$$

$$\boldsymbol{V\grave{N} = 5878.88DA}$$

حل التمرين السادس:

حساب المعدل المتوسط للتوظيف:

لدينا:

$$\boldsymbol{t^* = \frac{\sum_{i=}^{k} c_i * n_i * t_k}{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i}}$$

$$t^* = \frac{(8450 * 0.04 * 58) + (2960 * 0.065 * 77) + (9248 * 0.1 * 116) + (7364 * 0.085 * 115)}{(8450 * 58) + (2960 * 77) + (9248 * 116) + (7364 * 115)}$$

$$\boldsymbol{t^* = 8\%}$$

حل التمرين السابع:

لدينا:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 698348^{DA}$$

$$C_1 = 4/8\ C_2$$

$$C_3 = 6/8\ C_2$$

حساب القيمة الاسمية لكل مبلغ:

$$\mathbf{A_1 + A_2 + A_3 = 698348\ ^{DA}}$$

$$C_1\ (1+t_1*n/100) + C_2\ (1+t_2*n/100) + C_3\ (1+t_3*n/100) = 698348$$

$4/8\ C_2\ (1+5*2/100) + C_2\ (1+6*2/100) + 6/8\ C_2\ (1+4*2/100) = 698348$

$4/8\ C_2\ (1+10/100) + C_2\ (1+12/100) + 6/8\ C_2\ (1+8/100) = 698348$

$0.55\ C_2 + 1.12\ C_2 + 0.81\ C_2 = 698348$

$$\mathbf{C_2 = 281592\ DA}$$

$$\mathbf{C_1 = 4/8\ C_2 \rightarrow C_1 = 140796\ DA}$$

$$\mathbf{C_3 = 6/8\ C_2 \rightarrow C_3 = 211194\ DA}$$

حل التمرين الثامن:

لدينا:

$$C = 65700\ DA$$

$$n = 150\ j$$

$$I_c + I_r = 7612.5\ DA$$

حساب معدل الفائدة:

$$\mathbf{I_c + I_r = 7612.5}$$

$$C*t*n/36000 + C*t*n/36500 = 7612.5$$

$$65700*t*150/36000 + 65700*t*150/36500 = 7612.5$$

$$27375t + 27000t = 7612.5$$

$$t = 7612.5/54375$$

$$\mathbf{t = 14\%}$$

حساب الفائدة التجارية والحقيقية

$$I_c = 27375t \rightarrow 27375(14/100) = \mathbf{3832.5\ DA}$$

$$I_r = 27000t \rightarrow 27000(14/100) = \mathbf{3780\ DA}$$

حساب الجملة بالفائدة الحقيقة:

$$\mathbf{A = C + I_r}$$

$$C = 65700\ ;\ t = 16\%\ ;\ n = 150\ j$$

$$A = C + I_r \rightarrow C + C*t*n/36500 \rightarrow 65700 + 65700*16*150/36500$$

$$\mathbf{A = 70020\ DA}$$

حساب المبلغ :

$$I_r = I_c = 3780\ ;\ t = 18\%\ ;\ n = 150j$$

$$I_c = C*t*n/36000 \rightarrow 3780 = C*18*150/36000$$

$$C = 3780*36000/18*150$$

$$\mathbf{C = 50400\ DA}$$

حل التمرين التاسع:

حساب فائدة كل مبلغ:

$$\frac{C1}{7.5} = \frac{C2}{5.5} = \frac{C3}{2} = \frac{C1+c2+c3}{15} \dots\dots (1)$$

$$I_1 = C_1 * t * n / 36000 \Rightarrow C_1 = 36000 * I_1 / t * n$$

$$I_2 = C_2 * t * n / 36000 \Rightarrow C_2 = 36000 * I_2 / t * n$$

$$I_3 = C_3 * t * n / 36000 \Rightarrow C_3 = 36000 * I_3 / t * n$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$\frac{36000*I1/t*n}{7.5} = \frac{36000*I2/t*n}{5.5} = \frac{36000*I3/t*n}{2}$$

بضرب كل كسر في $t*n/36000$ نجد:

$$\frac{I1}{7.5} = \frac{I2}{5.5} = \frac{I3}{2} = \frac{I1+I2+I3}{15} = \frac{9000}{15} = 600$$

$$\frac{I1}{7.5} = 600 \Rightarrow \mathbf{I_1 = 4500^{DA}}$$

$$\frac{I2}{5.5} = 600 \Rightarrow \mathbf{I_2 = 3300^{DA}}$$

$$\frac{I3}{2} = 600 \Rightarrow \mathbf{I_3 = 1200^{DA}}$$

حساب المدة المشتركة للإيداع، إذا كان المبلغ الأول 112500 دج و المعدل المطبق 12% :

$$I_1 = C_1 * t * n / 36000 \Rightarrow n = 36000 * I_1 / C_1 * t$$

$$n = 36000 * 4500 / 112500 * 12$$

$$\mathbf{n = 120j}$$

حساب المبلغين الأخرين:

$$I_2 = C_2 * t * n / 36000 \Rightarrow C_2 = 36000 * I_2 / t * n$$

$$C_2 = 36000 * 3300 / 12 * 120$$

$$\mathbf{C_2 = 82500^{DA}}$$

$$I_3 = C_3 * t * n / 36000 \Rightarrow C_3 = 36000 * I_3 / t * n$$

$$C_3 = 36000 * 1200 / 12 * 120$$

$$\mathbf{C_3 = 30000^{DA}}$$

حل التمرين العاشر:

لدينا:

$$\mathbf{V_n = 86000^{DA}}$$

n= (31−15) + 31+30+1+(يومين مهلة السداد)

n= 80 j

حساب مصاريف الخصم الإجمالي:

$$\mathbf{AGIO} = \boldsymbol{EC} + \boldsymbol{Com1} + \boldsymbol{Com2} + \boldsymbol{Com3} + \boldsymbol{TVA}$$

الخصم التجاري:

$$EC = \frac{VN * t * n}{36000} \rightarrow EC = \frac{86000 * 8 * 80}{36000} = \mathbf{1528.88^{DA}}$$

عمولة التظهير:

$$Com1 = \frac{VN * t' * n}{36000} = \frac{86000 * 0.5 * 80}{36000} = \mathbf{95.55^{DA}}$$

عمولة تحويل المكان:

$$Com2 = \frac{VN * t''}{100} = \frac{86000 * 1/8}{100} = \mathbf{107.5^{DA}}$$

مصاريف التحصيل:

$$Com3 = \frac{VN * t''}{100} = \frac{86000 * 0.5}{100} = \mathbf{430^{DA}}$$

الرسم على القيمة المضافة:

$$TVA = (Com2 + Com3) * 0.19$$

$$TVA = (107.5 + 430) * 0.19$$

$$\boldsymbol{TVA} = \mathbf{102.125^{DA}}$$

و عليه:

$$\text{AGIO} = 1528.88 + 95.55 + 107.5 + 430 + 102.125$$

$$\mathbf{AGIO} = \mathbf{2264.055^{DA}}$$

حساب القيمة الصافية للورقة التجارية:

$$\mathbf{VA} = \mathbf{VN} - \mathbf{AGIO}$$

$$\text{VA} = 86000 - 2264.055 = \mathbf{83735.905}\ \text{DA}$$

حساب معدل الخصم الإجمالي:

$$\text{AGIO} = \frac{VN * \theta * n}{36000}$$

$$2264.055 = \frac{86000 * \theta * 80}{36000}$$

$$\theta = \frac{36000 * 2264.055}{86000 * 80} = \mathbf{11.84\%}$$

وهو معدل التكلفة الذي يتحمله الزبون لأنه شامل لكل مصاريف الخصم ومتضمن الرسم (**TTC**)

أما بالنسبة للبنك فمعدل التكلفة فهو الآجيو غير متضمن الرسم

$$\text{AGIO(HT)} = \frac{VN * \theta * n}{36000}$$

$$\theta = \frac{\text{AGIO(HT)} * 36000}{VN * n}$$

$$\theta = \frac{(2264.055 - 102.125) * 36000}{86000 * 80} = \mathbf{11.31\%}$$

حل التمرين الحادي عشر:

حساب قيمة الخصمين:

$n_1 = 12/05 \rightarrow 07/08 \rightarrow 87j$

$n_2 = 12/05 \rightarrow 14/09 \rightarrow 125j$

لدينا:

$Ec_1 . Ec_2 = 329 \ldots\ldots (1)$

$Ec_1 + Ec_2 = 54 \rightarrow Ec_1 = 54 - Ec_2 \ldots\ldots (2)$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$(54 - Ec_2) . Ec_2 = 329$

$54 * Ec_2 - Ec_2 * Ec_2 = 329$

$Ec_2^2 - 54\ Ec_2 + 329 = 0 \Rightarrow \mathbf{Ec_2 = 47^{DA}}$

$\mathbf{Ec_1 = 7^{DA}}$

حساب القيمة الاسمية للسندين:

$Ec_2= VN_2*t*n_2/36000 \Rightarrow C_2= 36000*47/7*125$

$VN_2=1933.71^{DA}$

$Ec_1= VN_1*t*n_1/36000 \Rightarrow C_1= 36000*7/7*87$

$VN_1= 413.79^{DA}$

حل التمرين الثاني عشر:

$$VN_1 = 50000;\ VN_2 = 30000;\quad VN_3 = 20000;$$
$$n_1 = 20\,j \qquad n_2 = 90\,j \qquad n_3 = 115\,j \qquad t = 9\%$$
$$VN'_1 = ?;\ VN'_2 = ?$$
$$n_1' = 50j;\quad n_2' = 76j$$

ولدينا:

$$\sum_{i=1}^{k} VA_i = \sum_{j=1}^{k} VA_j' \Rightarrow VN_1 - EC_1 + VN_2 - EC_2 + VN_3 - EC_3$$
$$= VN'_1 - EC'_1 + VN'_2 - EC'_2$$
$$\Rightarrow 50000\left(1 - \frac{9\times 20}{36000}\right) + 30000\left(1 - \frac{9\times 90}{36000}\right) + 20000\left(1 - \frac{9\times 115}{36000}\right)$$
$$= VN\left(1 - \frac{9\times 50}{36000}\right) + VN\left(1 - \frac{9\times 76}{36000}\right)$$
$$\Rightarrow 49750 + 29325 + 19425 = VN\left(\frac{35550}{36000}\right) + VN\left(\frac{35316}{36000}\right)$$
$$\Rightarrow 98500 = VN\frac{70866}{36000}\ VN$$
$$\Rightarrow \mathbf{VN = 50038.089DA}$$

حل التمرين الثالث عشر:

حساب المبلغين:

$$C_1+C_2= 34000.....(1)$$

ولدينا:

$$.....(2)\frac{C1}{8} = \frac{C2}{9} \rightarrow \boldsymbol{C2 = \frac{9}{8}\ C1}$$

وبتعويض (2) في (1) نجد:

$$C_1+\frac{9}{8}\ C1 = 34000$$
$$= 34000\ \frac{17}{8}\ C1$$

ومنه:

$$\mathbf{C_1 = 16000^{DA}}$$
$$\mathbf{C_2 = 18000^{DA}}$$

حساب المعدلين:

لدينا:

$$\mathbf{I_1 = I_2 + 200}$$

$C_1 = 16000 \rightarrow t$

$C_2 = 18000 \rightarrow t'$

$I_1 + I_2 = I^* = 2380$

$n=1$ ans

$$I^* = (C_1+C_2) * \frac{t+t'}{2*100} *1$$

$$2380 = (34000) * \frac{t+t'}{200}$$

$$t + t' = \frac{2380*200}{34000}$$

$$\boldsymbol{t + t' = 14 \ldots\ldots(1)}$$

$\mathbf{I_1 = I_2 + 200} \rightarrow I_1 = C_1*t*n \rightarrow 16000*\frac{t}{100}$

$$\mathbf{I_1 = 160t}$$

$I_2 = C_2*t'*n \rightarrow 18000*\frac{t'}{100}$

$$\mathbf{I_2 = 180t'}$$

$\mathbf{I_1 = I_2 + 200} \rightarrow I_1 - I_2 = 200 \rightarrow 160t - 180t' = 200$

$$\mathbf{8t - 9t' = 10 \ldots\ldots(2)}$$

نقوم بحل جملة معادلتين:

$$\begin{cases} t + t' = 14 \ldots\ldots(1) \\ 8t - 9t' = 10 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد:

$$\mathbf{= 14 - t't}$$

وبتعويضها في المعادلة (2) نجد:

$$8t - 9t' = 10$$

$$8(14- t') - 9t' = 10$$
$$112- 8t' - 9t' = 10$$
$$102 = 17\ t'$$
$$\mathbf{t' = 6\%}$$
$$= 14- 6t$$
$$\boldsymbol{t = 8\%}$$

القيمة المكتسبة بدلالة مدة التوظيف n:

$$\mathbf{A} = C_1 + I_1 + C_2 + I_2$$
$$\mathbf{A} = 34000 + (16000 * \frac{8}{100} * n) + (18000 * \frac{6}{100} * n)$$
$$\mathbf{A} = 34000 + 1280\ n + 1080\ n$$
$$\mathbf{A = 34000 + 2360n}$$

حل التمرين الرابع عشر:

حساب القيمة الاسمية:

لدينا:

$$VA_1 = 4467;\ t = 4\%\ ;\ n_1 = ?;\ n_2 = 30$$

$$\mathbf{Ec_2 = Ec_1 - 18 \ldots\ldots\ldots(1)}$$
$$\mathbf{EC_1 = VN - VA_1 \ldots\ldots\ldots(2)}$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$Ec_2 = (VN - VA_1) - 18$$
$$VN * t * n_2/36000 = (VN - VA_1) - 18$$
$$VN * 4 * 30/36000 = (VN - 4467) - 18$$
$$120\ VN\ /36000 = VN - 4485$$
$$VN\ /300 = VN - 4485$$
$$4485 = VN - VN\ /300$$
$$4485 = 299\ VN\ /300$$
$$VN = 4485 * 299/\ 300$$
$$\mathbf{VN = 4500\ ^{DA}}$$

تاريخ الاستحقاق:

$$EC_1 = VN * t * n /36000$$

$$EC_1 = VN - VA_1$$

$$EC_1 = 4500 - 4467$$

$$\mathbf{EC_1 = 33\ DA}$$

$$EC_1 = VN * t * n /36000$$

$$33 = 4500 * 4* n /36000$$

$$n = 33*36000/4500*4$$

$$n \sim 66 \text{ يوما}$$

$$n = (28\text{-}15) + (31) +(22)$$

ومنه:

تاريخ استحقاق الورقة هو 22 أفريل.

حل التمرين الخامس عشر:

لدينا:

$$VN_1 = 1800;\ VN_2 =?\ ;$$
$$n_1 = 60\ j \qquad n_2 =? \qquad t = 3\%$$
$$VN'_1 = 1500;\ VN'_2 =?$$
$$n_1' = 180j\ ;\quad n_2' = 27j$$

$$VN_1 + VN_2 = VN'_1 + VN'_2$$

$$\boldsymbol{VA_1' + VA_2' = 4470.75}$$

حساب القيمة الاسمية للمبالغ:

$$\boldsymbol{VA_1' + VA_2' = VA_1 + VA_2 = 4470.75}$$

$$\boldsymbol{VA_1' + VA_2' = 4470.75}$$

$$\mathrm{VN'_1} - \mathrm{EC'_1} + \mathrm{VN'_2} - \mathrm{EC'_2} = 4470.75$$

$$\mathrm{VN'_1}\left(1 - \frac{\mathrm{t} \times \mathrm{n1'}}{36000}\right) + \mathrm{VN'_2}\left(1 - \frac{\mathrm{t} \times \mathrm{n2'}}{36000}\right) = 4470.75$$

$$1500\left(1 - \frac{3 \times 180}{36000}\right) + \mathrm{VN'_2}\left(1 - \frac{3 \times 27'}{36000}\right) = 4470.75$$

$$1477.5 + \mathrm{VN'_2}(0.99775) = 4470.75$$

$$\mathrm{VN'_2}(0.99775) = 4470.75 - 1477.5$$

$$\boldsymbol{^{DA}VN'_2 = 3000}$$

$$\boldsymbol{VN_1 + VN_2 = VN'_1 + VN'_2}$$

$$1800 + \mathrm{VN_2} = 1500 + 3000$$

$$\mathrm{VN_2} = 4500 - 1800$$

$$\boldsymbol{^{DA}VN_2 = 2700}$$

حساب تاريخ استحقاق الورقة الثانية:

$$\boldsymbol{VA_1 + VA_2 = 4470.75}$$

$$\mathrm{VN_1} - \mathrm{EC_1} + \mathrm{VN_2} - \mathrm{EC_2} = 4470.75$$

$$\mathrm{VN_1}\left(1 - \frac{\mathrm{t} \times \mathrm{n1}}{36000}\right)$$

$$1800\left(1 - \frac{3 \times 60}{36000}\right)$$

$$\boldsymbol{^{DA}VA_1 = 1791}$$

$$VA_2 = 4470.75 - 1791$$

$$\boldsymbol{^{DA}VA_2 = 2679.75}$$

$$\mathrm{EC_2} = \mathrm{VN_2} - VA_2$$

$$\mathrm{EC}_2 = 2700 - 2679.75$$

$$^{\mathrm{DA}}\mathbf{EC_2 = 20.25}$$

$$\mathrm{EC}_2 = \frac{\mathrm{VN}_2 * t * n2}{36000}$$

$$20.25 = \frac{2700 * 3 * n2}{36000}$$

$$n2 = \frac{20.25 * 36000}{2700 * 3}$$

$$\boldsymbol{n2 = 90\ j}$$

هوامش الفصل الأول:

[1] ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء الأول، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص9.

[2] نفس المرجع السابق، ص 16.

[3] شقيري موسى نوري وآخرون، الرياضيات المالية، دار اهل المعرفة، ط1، الجزائر، 2016، ص 15.

[4] فتحي خليل حمدان، الرياضيات المالية مع تطبيقات في الحاسوب، دار وائل للنشر والتوزيع، ط 1، عمان، 2010، ص 22.

[5] صليحة بن طلحة، الرياضيات المالية، منشورات الدار الجزائرية، الطبعة 1 ، 2015، الجزائر، ص 18.

[6] Voir: Benjamin Lagros, Mini Mannel de Mathématique financières, Edition Dunod, France, 2011, p:44

[7] ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص30.

[8] صليحة بن طلحة، مرجع سبق ذكره، ص49.

[9] خيرة بلحمري، محاضرات في مادة الرياضيات المالية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المدية، 2023، ص22.

[10] نفس المرجع السابق، ص ص 23-24.

[11] نفس المرجع السابق، ص25.

الفصل الثاني: العمليات المالية طويلة الأجل

من خلال هذا الفصل سنتطرق إلى مختلف العمليات المالية طويلة الأجل، انطلاقا من الفائدة المركبة ومختلف العناصر المرتبطة بها، بالإضافة إلى الخصم والتكافؤ باستخدام الفائدة المركبة.

أولا– الفائدة المركبة:

يعتمد مفهوم الفائدة المركبة على حساب الفائدة لوحدة زمنية معينة، ثم إضافة الفائدة الناتجة في نهاية تلك الوحدة الزمنية إلى أصل المبلغ في نهاية الوحدة الزمنية، حيث خلال الفترة الزمنية اللاحقة نحصل على رأس مال جديد مركب من رأس مال الفترة السابقة زائد فائدة الفترة السابقة، وهذا رأس المال الجديد يكون دوماً أكبر من رأس المال للفترة السابقة بمقدار فائدة الفترة السابقة، وهذا ما يُسمى برسملة الفوائد.

1. **تعريف الفائدة المركبة:** الفائدة المركبة هي تطبيق معدل الفائدة البسيطة على مدة مركبة من عدة فترات زمنية .في نهاية كل فترة زمنية، الفائدة البسيطة الناتجة تُضاف إلى رأس المال لإنتاج فائدة بسيطة على رأس المال الجديد خلال الفترة الزمنية اللاحقة .ونسميها رسملة الفوائد .الفوائد المركبة تُستخدم في العمليات المالية متوسطة وطويلة الأجل.

1.1 القيمة المحصلة لرأسمال موظف بفائدة المركبة: للحصول على قانون للفائدة المركبة ننطلق من القانون الأساسي للفائدة البسيطة:

$$A_n = C_0 + I$$

الجدول رقم (01): القيمة المحصلة لرأسمال موظف بفائدة المركبة

السنة	رأسمال الفترة	فائدة الفترة	القيمة المحصلة في نهاية الفترة (رأسمال الفترة +فائدة الفترة)
1	C_0	$C_0 * i$	$C_0 + C_0 * i = C_0(1+i)$
2	$C_0(1+i)$	$C_0(1+i) * i$	$C_0(1+i) + C_0(1+i) * i = C_0(1+i)^2$
3	$C_0(1+i)^2$	$C_0(1+i)^2 * i$	$C_0(1+i)^2 + C_0(1+i)^2 * i = C_0(1+i)^3$
4	$C_0(1+i)^3$	$C_0(1+i)^3 * i$	$C_0(1+i)^3 + C_0(1+i)^3 * i = C_0(1+i)^4$
.			.
.			.

n-1	$C_0(1+i)^{n-2}$	$C_0(1+i)^{n-2} * i$	$C_0(1+i)^{n-2} + C_0(1+i)^{n-2} * i = C_0(1+i)^{n-1}$
N	$C_0(1+i)^{n-1}$	$C_0(1+i)^{n-1} * i$	$C_0(1+i)^{n-1} + C_0(1+i)^{n-1} * i = C_0(1+i)^{n}$

إذا يتضح لنا من خلال الجدول أعلاه أن القيمة المحصلة (الجملة) n لرأس مال موظف C_0 بمعدل سنوي i تعطى بالعلاقة التالية: [1]

$$A_n = C_0(1+i)^n$$

2.1 عناصر الفائدة المركبة: تتكون الفائدة المركبة من مجموعة من العناصر تتمثل فيما يلي:

- ✓ C_0: رأسمال الموظف وهو الأساس في حساب الفائدة.
- ✓ i: معدل الفائدة المطبق على رأس المال المودع.
- ✓ n: المدة الزمنية لتوظيف مبلغ معين.
- ✓ A_n: الجملة المحصل عليها عند نهاية مدة التوظيف

ملاحظات:

- ✓ إن القانون الأساسي المقدم أعلاه يصلح في حالة كون معدل الفائدة ومدة الرسملة متطابقين، لأننا افترضنا أن معدل الفائدة سنوي وأن مدة الرسملة هي كذلك السنة، فإذا اتفق أن تتم رسملة الفوائد كل شهر، يجب أن يكون سعر الفائدة شهريا؛
- ✓ القيم المحصلة نهاية السنوات المتتالية تشكل هي الأخرى متوالية هندسية لها نفس الأساس $(1 + i)$ ؛
- ✓ يتم احتساب القيمة $(1 + i)^n$ بالاعتماد على الجدول المالي رقم (1).
- ✓ قانون الفائدة المركبة يعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف، بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة، ولحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له، أي:[2]

$$I = A_n - C_0$$
$$I = C_0(1+i)^n - C_0$$
$$I = C_0[(1+i)^n - 1]$$

مثال 01: مبلغ قدره 1000دج وظف بفائدة مركبة 5% لمدة 3 سنوات، ما هي الفائدة المحصل عليها في نهاية كل سنة؟

الحل: بتطبيق علاقة الفائدة البسيطة نجد:

الفائدة في نهاية السنة الأولى:

$$^{DA}I_1 = C_0 * i = 6000 * \frac{6}{100} = \mathbf{360}$$

الجملة المحصل عليها في نهاية السنة الأولى:

$$A_1 = C_0 + I$$

$$^{DA}= 6000 + 360 = \mathbf{6360}$$

الفائدة في نهاية السنة الثانية:

$$^{DA}I_2 = A_1 * i = 6360 * \frac{6}{100} = \mathbf{381.60}$$

الجملة في نهاية السنة الثانية:

$$A_2 = A_1 + I_2$$

$$^{DA}= 6360 + 381.60 = \mathbf{6741.6}$$

الفائدة في نهاية السنة الثالثة:

$$^{\mathbf{DA}}I_3 = A_2 * i = 6741.6 * \frac{6}{100} = \mathbf{404.5}$$

الجملة في نهاية السنة الثالثة:

$$A_3 = A_2 + I_3$$

$$^{DA}= 6741.6 + 404.5 = 7146.1$$

إذن الجملة المحصل عليها عند نهاية السنة الثالثة هي 1157.625دج.

مثال 02: اوجد القيمة المكتسبة وقيمة الفائدة المركبة لمبلغ قدر ب 20000دج لمدة 4سنوات بمعدل فائدة مركب 6% سنويا.

الحل:

لدينا:

$$C_0 = 20000، \qquad i = 6\%، \qquad n = 4ans$$

$$A_n = C_0(1+i)^n$$

$$A_5 = 20000(1.06)^4 = \mathbf{25249.54^{DA}}$$

$$I = A_n - C_0$$

$$^{\boldsymbol{DA}}I = 25249.54 - 20000 = \mathbf{5249.54}$$

3.1 عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:

أ. **حساب المبلغ الأصلي C_0**: يمكن استخراج طريقة حساب المبلغ انطلاقا من علاقة القيمة المكتسبة للفائدة المركبة كما يلي:

$$A_n = C_0(1+i)^n \Longrightarrow C_0 = \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

$$\boldsymbol{A_n(1+i)^{-n}}$$

مثال: وظف شخص مبلغ معين لمدة **5** سنوات بمعدل فائدة مركبة 4% فبلغت قيمته المكتسبة في نهاية مدة التوظيف مبلغ: **35262.5 دج**.

الحل:

$$A_n = 35262.5، \quad \boldsymbol{i = 4\%}، \quad n = 5ans$$

$$C_0 = \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{35262.5}{(1.04)^5}$$

$$\boldsymbol{C_0 = 28983.20}$$

ب. **حساب معدل التوظيف i** : انطلاقا من علاقة القيمة المكتسبة تعطى علاقة المعدل كما يلي:

$$A_n = C_0(1+i)^n \Longrightarrow (1+i)^n = \frac{A_n}{C_0}$$

$$\Longrightarrow 1+i = \sqrt[n]{\frac{A_n}{C_0}}$$

$$\Longrightarrow i = \sqrt[n]{\frac{A_n}{C_0}} - 1$$

مثال: وظف شخص مبلغ 40000دج لمدة 4 سنوات بمعدل فائدة مركبة فبلغت قيمته المكتسبة في نهاية مدة التوظيف مبلغ: 58432.22 دج.

اوجد معدل التوظيف؟

الحل:

لدينا:

$$A_n = 58432.22، \quad C_0 = 40000، \quad n = 4ans$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{i = \sqrt[n]{\frac{A_n}{C_0}} - 1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{i} = \sqrt[4]{\frac{58432.22}{40000}} - 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{i} = \left(\frac{58432.22}{40000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{i} + 1 = (1.4608055)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{i} + 1 = 1.099$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{i} = 0.099$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{i} = \mathbf{10\%}$$

ج. حساب المدة n :

$$A_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow (1+i)^n = \frac{A_n}{C_0}$$

$$\Rightarrow ln(1+i)^n = ln\frac{A_n}{C_0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n} = \frac{\mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{A_n}}{\boldsymbol{C_0}}\right)}{\boldsymbol{ln(1+i)}}$$

مثال: وظف مبلغ قدره 100000دج بمعدل 8% لمدة زمنية معينة فنتج في نهاية المدة مبلغ قيمته 230000 دج.

أوجد مدة توظيف هذا المبلغ.

الحل:

لدينا:

$$A_n = 230000 \quad C_0 = 10000 \quad i = 8\%$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{A_n}}{\boldsymbol{C_0}}\right)}{\boldsymbol{ln(1+i)}}$$

$$\Longrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{230000}{100000}\right)}{ln(1.08)}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{n \sim 11\ ans}$$

2. حساب القيمة المكتسبة بالحل العقلاني والحل التجاري: إذا كانت مدة توظيف مبلغ ما غير صحيحة، أي أنها تتكون من وحدات زمنية مختلفة، مثلا مدة التوظيف 4 سنوات و26 أشهر، في هذه الحالة لا يمكن تطبيق علاقة القيمة المكتسبة، وإنما هنالك طريقة أخرى أو بالأخرى طريقتين: الحل العقلاني والحل التجاري.

1.2 الحل العقلاني: يقوم هذا الحل على حساب الجملة بالفائدة المركبة للمدة التي تكون بالسنوات، وعلى استخدام طريقة الفائدة البسيطة في حساب الجزء الذي يتعلق بالأيام أو الشهور، ففي حالة المدة مثلا 5سنوات و 3 أشهر، نضع:

$$\boldsymbol{n = k + \frac{p}{q}}.$$

نجد أن القيمة المكتسبة هي:[3]

$$\boldsymbol{A_k = C_0(1+i)^k}$$

$$A_{\frac{p}{q}} = C_k * i * \frac{p}{q} = C_0(1+i)^k * i * \frac{p}{q}$$

$$A_n = C_0(1+i)^k + C_0(1+i)^k * i * \frac{p}{q}$$

$$\boldsymbol{A_n = C_0(1+i)^k\left[1 + \left(i * \frac{p}{q}\right)\right]}$$

2.2 الحل التجاري: في هذه الحالة يتم استخدام صيغة الفائدة المركبة لكل الفترات الزمنية مهما اختلفت فتصبح علاقة الجملة كالآتي:[4]

$$\boldsymbol{A_n = C_0(1+i)^k(1+i)^{\frac{p}{q}}}$$

مثال: مبلغ قيمته 30000دج موظف بفائدة مركبة بمعدل 4% لمدة 3 سنوات و6 أشهر. اوجد القيمة المكتسبة، باستخدام الحل العقلاني والحل التجاري.

الحل:

القيمة المكتسبة بالحل العقلاني هي:

$$\boldsymbol{A_n = C_0(1+i)^k\left[1 + \left(i * \frac{p}{q}\right)\right]}$$

$$\boldsymbol{A_n = 30000(1.04)^3\left[1 + \left(0.04 * \frac{6}{12}\right)\right] = 34420.83^{DA}}$$

القيمة المكتسبة بالحل التجاري هي:

$$A_n = C_0(1+i)^n(1+i)^{\frac{p}{q}}$$

$$A_n = 30000(1.04)^3(1.04)^{\frac{6}{12}} = 34414.22^{DA}$$

3. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة: ان معدل الفائدة في معظم الأحيان يكون سنويا، أي تحسب الفائدة على المبلغ مرة واحدة في كل نهاية سنة، إلا أن هناك تطبيق لمعدل الفائدة كل ستة أشهر أو 3 أو أقل، وفي هذه الحالة تصبح المدة للإيداع n ليست بالسنوات بل عدد الفترات الجزئية من السنة حسب الحالة، وفي حالة تطبيق معدلات فائدة غير سنوية أو جزئية من السنة، يمكن أن نتحدث عن معدلات متناسبة أو معدلات مكافئة.

1.3 المعدلات المتناسبة: نقول عن معدلين أنهما متناسبين عندما تكون نسبتهما تساوي إلى النسبة بين وحداتهما الزمنية المقابلة، ويحققان نفس القيمة المحصلة خلال نفس المدة بفترة رسملة مختلفة .

مثال: أوجد المعدلات المتناسبة مع المعدل السنوي $a = 24\%$ هو:

- المعدل السداسي المتناسب مع المعدل السنوي: $i_s = \frac{i_a}{2} = \frac{24}{2} = 12\%$
- المعدل الرباعي المتناسب مع المعدل السنوي: $i_q = \frac{i_a}{3} = \frac{24}{3} = 8\%$
- المعدل الثلاثي المتناسب مع المعدل السنوي: $i_t = \frac{i_a}{4} = \frac{24}{4} = 6\%$
- المعدل الشهري المتناسب مع المعدل السنوي $i_m = \frac{i_a}{12} = \frac{24}{12} = 2\%$

ملاحظة: إن المعدل المتناسب يعطي قيمة محصلة اكبر من القيمة المحصلة التي يعطيها المعدل السنوي.

مثال: رأسمال قدره: 41000دج وظف بفائدة مركبة بمعدل شهري 0.5% وعند نهاية مدة التوظيف بلغت القيمة المحصلة 44185دج.

اوجد مدة التوظيف؟

الحل:

$$i_m = 0.5\% \qquad A_n = 44185 \qquad C_0 = 41000$$

لدينا:

$$i_m = \frac{i_a}{12}$$

$$i_a = 12 \times i_m = 6\%$$

ولدينا:

$$A_n = C_0(1+i)$$

$$44185 = 41000(1.06)^n$$

$$(1.06)^n = \frac{44185}{41000}$$

$$n \sim 15Mois$$

2.3 المعدل المتكافئ: هو المعدل المكافئ للمعدل السنوي الذي ينتج نفس القيمة المحصلة، لنفس المبلغ الموظف بمعدل سنوي، و يعطى بالعلاقة التالية:[5]

$$\boldsymbol{C_n = C_0(1+i)^n = C_0(1+i_k)^k}$$

حيث:

$\boldsymbol{i_k}$: معدل التوظيف لمدة اقل من سنة.

$\boldsymbol{k}$: هو المدة جزء من السنة كأن يكون سداسي أو رباعي أو...

تصبح العلاقة السابقة من اجل استخراج المعدل الجزئي المكافئ $\boldsymbol{i_k}$ كما يلي:

$$C_0(1+i) = C_0(1+i_k)^k$$
$$\Rightarrow (1+i) = (1+i_k)^k$$
$$\Rightarrow (1+i_k) = (1+i)^{1/k}$$

و منه:

$$\boldsymbol{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$

مثال:ما هو المعدل المكافئ مع المعدل السنوي $i_a = 8\%$ هو:

- المعدل السداسي المكافئ للمعدل السنوي:

$$i_2 = (1+i)^{1/k} - 1 = (1.08)^{1/2} - 1 = 4\%$$

- المعدل الرباعي المكافئ للمعدل السنوي:

$$i_3 = (1+i)^{1/k} - 1 = (1.08)^{1/3} - 1 = 2.5\%$$

- المعدل الثلاثي المكافئ للمعدل السنوي:

$$i_4 = (1+i)^{1/k} - 1 = (1.08)^{1/4} - 1 = 2\%$$

- المعدل الشهري المكافئ للمعدل السنوي:

$$i_{12} = (1+i)^{1/k} - 1 = (1.08)^{1/12} - 1 = 0.6\%$$

ثانيا– الخصم بالفائدة المركبة:

يشترك خصم الديون طويلة الأجل مع خصم الديون قصية الأجل في المفهوم مع اختلاف بسيط في طريقة الحساب، إلا أن العلاقة التي تجمعهما في حساب الخصم هي طرح القيمة الحالية من القيمة

الاسمية، أما الاختلاف فهو يتعلق في طريقة حساب القيمة الحالية، التي تحسب بتطبيق الفائدة المركبة، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{E = V_n - V_a}$$

حيث: V_n: القيمة الاسمية لرأس المال.

V_a: القيمة الحالية لرأس المال.

E: قيمة الخصم

وبتعويض V_a في علاقة الخصم تصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$E = V_n - V_n(1+i)^{-n}$$
$$\Rightarrow E = V_n - V_n(1+i)^{-n}$$

و منه:[6]

$$\boldsymbol{E = V_n[1-(1+i)^{-n}]}$$

مثال 01: مبلغ مالي قيمته 5000دج، خصم بمعدل فائدة مركبة 4%، يستحق بعد 3سنوات، اوجد مبلغ الخصم؟

الحل:

لدينا:

$$n = 3ans، \qquad i = \%4، \qquad V_n = 5000$$
$$\boldsymbol{E = V_n[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$\boldsymbol{V_a = V_n(1+i)^{-n}}$$

$$V_a = 5000(1.04)^{-3}$$
$$= \boldsymbol{4444.98^{DA}}$$

$$\boldsymbol{E = V_n - V_n(1+i)^{-n}}$$

$$\boldsymbol{E = 5000 - 4444.98}$$

$$\boldsymbol{E = 555.018}$$

مثال 02: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 120000 دج تستحق الدفع بعد 6 سنوات، أراد حامل هذه الورقة الحصول على مبلغ نقدي فقدمها للبنك لخصمها بمعدل 4%.

إيجاد القيمة الحالية للورقة التجارية.

إيجاد قيمة الخصم.

الحل:

لدينا:

$$n = 6ans، \qquad i = 4\%، \qquad V_n = 120000$$

إيجاد القيمة الحالية للورقة التجارية:

$$\boldsymbol{V_a = V_n(1+i)^{-n}}$$

$$V_a = 120000(1.04)^{-6} = \mathbf{94837.74^{DA}}$$

إيجاد قيمة الخصم:

$$\boldsymbol{E = V_n - V_a}$$

$$E = 120000 - 94837.74 = \mathbf{25162.25}$$

أو يمكن إيجادها مباشرة من علاقة الخصم

$$\boldsymbol{E = V_n[1-(1+i)^{-n}]}$$
$$\boldsymbol{E} = 120000[1-(1.04)^{-6}] = \mathbf{25162.25}$$

ثالثا– التكافؤ بالفائدة المركبة:

تسوية الديون تعني تعديل طريقة سدادها أي استبدال ديون قديمة بديون أخرى جديدة قد تكون بقيم أخرى جديدة أو تواريخ استحقاق جديدة أو الاثنتين معا. ويقوم على أساس تساوي القيم الحالية لمجموع الديون القديمة والجديدة بنفس المعدل، وفي تاريخ معين يسمى **تاريخ التكافؤ**.

1. **تكافؤ ورقتين تجاريتين:** يتكافأ دينين إذا كان لهما نفس القيمة الحالية في تاريخ التكافؤ، أي:

$$\boldsymbol{V_{a1} = V_{a2} \Longrightarrow\ V_{n1}(1+i)^{-n1} = V_{n2}(1+i)^{-n2}}$$

مثال: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 30000دج تستحق بعد 3 سنوات، استبدلت بورقة أخرى تستحق بعد 5 سنوات. أوجد قيمة الورقة الجديدة إذا علمت أن معدل الخصم 4%.

اوجد قيمة المبلغ؟

الحل:

لدينا :

$$n_1 = 3ans،\ n_2 = 5ans،\quad i = 4\%،\quad V_{n1} = 30000،\quad V_{n2} = ?$$

$$\boldsymbol{V_{a1} = V_{a1} \Longrightarrow\ V_{n1}(1+i)^{-n1} = V_{n2}(1+i)^{-n2}}$$

$$\Longrightarrow\ 30000(1.04)^{-3} = V_{n2}(1.04)^{-5}$$

$$\Longrightarrow V_{n2} = \frac{30000(1.04)^{-3}}{(1.04)^{-5}}$$

$$\overset{DA}{\Longrightarrow} \boldsymbol{V_{n2} = 32448}$$

2. **تكافؤ ورقة تجارية مع عدة أوراق تجارية:** نقول عن ورقة تجارية أنها تكافئ مجموعة من الأوراق أو العكس، إذا تساوت القيمة الحالية للورقة الوحيدة مع القيم الحالية للأوراق الأخرى في تاريخ التكافؤ:

$$\boldsymbol{V_{a1} = V'_{a1} + V'_{a2} + V'_{a3} + \cdots + V'_{ai}}$$

1.2 تاريخ الاستحقاق المشترك: هو التاريخ المشترك الذي تتم فيه تبديل الأوراق القديمة بورقة وحيدة جديدة أو العكس (ويقصد به أيضا تاريخ استحقاق الورقة الوحيدة)، شرط أن تكون القيمة الاسمية للورقة الجديدة لا تساوي مجموع القيم الاسمية للديون القديمة.

$$\boldsymbol{V_{n1} \neq V'_{n1} + V'_{n2} + V'_{n3} + \cdots + V'_{ni}}$$

$$\boldsymbol{V_{a1} = V'_{a1} + V'_{a2} + V'_{a3} + \cdots + V'_{ai}}$$

$$\boldsymbol{V_n(1+i)^{-n} = V'_{n1}(1+i)^{-n1} + V'_{n2}(1+i)^{-n2} + V'_{n3}(1+}$$
$$\boldsymbol{+\ldots\ldots\ldots V'_{ni}(1+i)^{-ni}i)^{-n3}}$$

مثال: مؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

4000دج ، 6000دج ، تستحق بعد سنتين و3سنوات على الترتيب، عوضت هذه الديون بدين وحيد قيمته الاسمية 12000دج

اوجد تاريخ الاستحقاق المشترك، إذا علمت أن معدل الفائدة هو 6%.

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 2ans،\ \ n_2 = 3ans;\ \ ń =?\quad i = 7\%،$$
$$V_{n1} = 4000،\quad V_{n2} = 6000،\quad V'_n = 12000$$

إيجاد تاريخ الاستحقاق المشترك:

$$\boldsymbol{V_{a1} + V_{a2} = V'_a \ \Rightarrow}$$
$$\boldsymbol{V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2} = V'_n(1+i)^{-n}}$$

$$\boldsymbol{(1+i)^{-n} = \frac{V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2}}{V'_n}}$$

$$\boldsymbol{(1.07)^{-n} = \frac{4000(1.07)^{-2} + 6000(1.07)^{-3}}{12000}}$$

$$\boldsymbol{(1.07)^{-n}} = 0.699294166 \Rightarrow \frac{1}{\boldsymbol{(1.07)^n}} = 0.699294166$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(1.07)^n} = \frac{1}{0.699294166}$$

$$\Longrightarrow \ln\boldsymbol{(1.07)^n} = \ln\frac{1}{0.699294166}$$

$$\Rightarrow \mathrm{n}\ln\boldsymbol{(1.07)} = \ln\frac{1}{0.699294166}$$

$$\Rightarrow \mathrm{n} = \frac{\ln\frac{1}{0.699294166}}{\ln\boldsymbol{(1.07)}} = \boldsymbol{5.29}$$

ومنه n هي 5سنوات و 3أشهر حيث: 12×0.29 = 3أشهر.

2.2 **تاريخ الاستحقاق المتوسط:** هو عكس تاريخ الاستحقاق المشترك، ويقصد به التاريخ الذي يتم فيه تبديل الأوراق القديمة بورقة وحيدة جديدة أو العكس، شرط أن تكون القيمة الاسمية للورقة الجديدة تساوي مجموع القيم الاسمية للديون القديمة.

$$V_{n1} = V'_{n1} + V'_{n2} + V'_{n3} + \cdots + V'_{ni} \quad 2.3$$

$$V_{a1} = V'_{a1} + V'_{a2} + V'_{a3} + \cdots + V'_{ai}$$

$$V_n(1+i)^{-n} = V'_{n1}(1+i)^{-n1} + V'_{n2}(1+i)^{-n2} + V'_{n3}(1+$$
$$+\ldots\ldots V'_{ni}(1+i)^{-ni}i)^{-n3}$$

بالرجوع إلى المثال السابق، وبأخذ نفس المعطيات، ولكن الاختلاف يكمن فقط في قيمة ، V'_n لأنه في حالة تاريخ الاستحقاق المتوسط فإن:

$$V'_n = V_{n1} + V_{n2}$$

وبالتالي تصبح قيمة V'_n تساوي:

$$V'_n = 4000 + 6000 = 10000$$

وبنفس خطوات تاريخ الاستحقاق المشترك يمكن إيجاد قيمة تاريخ الاستحقاق المتوسط:

$$(1+i)^{-n} = \frac{V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2}}{V'_n}$$

$$(1.07)^{-n} = \frac{4000(1.07)^{-2} + 6000(1.07)^{-3}}{10000}$$

$$(1.07)^{-n} = 0.8391542174 \Rightarrow \frac{1}{(1.07)^n} = 0.8391542174$$

$$\Longrightarrow (1.07)^n = \frac{1}{0.8391542174}$$

$$\Longrightarrow \ln(1.07)^n = \ln\frac{1}{0.8391542174}$$

$$\Rightarrow \mathrm{n}\ln(1.07) = \ln\frac{1}{0.8391542174}$$

$$\Rightarrow \mathrm{n} = \frac{\ln\frac{1}{0.8391542174}}{\ln(1.07)} = \mathbf{2.86}$$

ومنه n هي سنتين و 10 اشهر حيث: 12×0.86= 10 أشهر.

3.تكافؤ مجموعة من الأوراق التجارية: نقول عن مجموعة من الأوراق أنها متكافئة، إذا خصمت بنفس المعدل وكان لها نفس القيمة الحالة في تاريخ التكافؤ.

$$V_{a1} + V_{a1} + V_{a1} + \ldots\ldots + V_{ai} = V'_{a1} + V'_{a2} + V'_{a3} + \cdots + V'_{ai}$$

$$V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2} + V_{n3}(1+i)^{-n3} + \ldots\ldots V_{ni}(1+i)^{-ni} = V'_{n1}(1+i)^{-n1} + V'_{n2}(1+i)^{-n2} + V'_{n3}(1+ +\ldots\ldots\ldots V'_{ni}(1+i)^{-ni}i)^{-n3}$$

مثال: مؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

الدين الأول قيمته 80000 يستحق بعد 3 سنوات

الدين الثاني قيمته 120000 يستحق بعد 5 سنوات

الدين الثالث قيمته 30000 يستحق بعد 6 سنوات

عوضت هذه الديون بدينين متساويي القيمة الاسمية يستحقان بعد 4 و7 سنوات على الترتيب.

أوجد القيمة الاسمية للدينين الجديدين إذا علمت أن معدل الفائدة هو 4%.

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 3ans,\ \ n_2 = 5ans, n_3 = 6ans, \acute{n}_1 = 4ans, \acute{n}_2 = 7ans \quad i = 4\%،$$

$$V_{n1} = 80000, \quad V_{n2} = 120000,$$

$$V_{n2} = 30000,\ \ V'_{n1} = ?, \quad V'_{n2} = ?,$$

$$V_{a1} + V_{a1} + V_{a1} = V'_{a1} + V'_{a2}$$

$$V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2} + V_{n3}(1+i)^{-n3} = V'_{n1}(1+i)^{-n1} + V'_{n2}(1+i)^{-n2}$$

$$80000(1.04)^{-3} + 120000(1.04)^{-5} + 30000(1.04)^{-6} = V'_{n1}(1.04)^{-4} + V'_{n2}(1.04)^{-7}$$

$$71119.70 + 98631.25 + 23709.43$$

$$= 0.854804V'_n + 0.759917V'_n$$

$$193460.38 = 1.614721V'_n$$

$$V'_n = \frac{193460.38}{1.614721} = \mathbf{119810.48}$$

تمارين حول العمليات المالية طويلة الأجل :

التمرين الأول: وظف شخص مبلغان مجموعهما 10000دج الأول بفائدة بسيطة 5% والثاني بفائدة مركبة بمعدل 4%، بعد 20 سنة من التوظيف كان لهما نفس القيمة المكتسبة. اوجد قيمة كل مبلغ؟

التمرين الثاني: لديك مبلغ مالي قيمته 100000دج، وتريد توظيفه بفائدة مركبة لمدة 12 سنة، وأمامك ثلاث اختيارات كما يلي:

الخيار الأول: توظف كل المبلغ بمعدل سنوي 6% لمدة 12 سنة.

الخيار الثاني: توظف مبلغ 40000دج بمعدل سنوي 5.5% لمدة 12 سنة، وفي بداية السنة 6 توظف 60000دج بمعدل فائدة 8% إلى غاية نهاية المدة.

الخيار الثالث: توظف كامل المبلغ بمعدل فائدة مركبة متزايدة 5% لمدة 4سنوات الأولى، و 6% لمدة 4سنوات الثانية، و7% لمدة 4سنوات الثالثة.

ما هي الطريقة التي تختارها، و على أي أساس قمت بهذا الاختيار؟

ما هي القيمة المحصلة الصافية في نهاية مدة التوظيف التي اخترتها، إذا علمت أن هناك ضريبة تفرض على الفائدة مقدارها 25%.

التمرين الثالث: يوزع أب مبلغ مالي قيمته 352688.9دج على 3 أطفال أعمارهم على الترتيب 12،14،16سنة، حيث تتساوى القيمة المكتسبة عند بلوغهم 19سنة، بمعدل فائدة 8% ، اوجد نصيب كل واحد منهم.

التمرين الرابع: مبلغ قدره 20000 دج وظف بمعدل ثلاثي لمدة 5 ثلاثيات ، فبلغت القيمة المكتسبة 21465.68 دج، اوجد معدل التوظيف الثلاثي.

التمرين الخامس: وظفت مؤسسة مبلغ قدره:300000دج لمدة 8سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوي10%

احسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

احسب قيمة الفائدة.

احسب قيمة الفائدة لسنة الخامسة فقط.

اذا تم سحب مبلغ300000دج في نهاية السنة الرابعة ووضع في بنك اخر بمعدل فائدة 4% سداسيا، احسب ما يجمع هذا الشخص بعد نهاية المدة (8سنوات) للمبلغين

التمرين السادس: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 750000دج سددت بمبلغ 667497.33دج قبل تاريخ استحقاقها بسنتين، ما هو معدل الخصم المطبق ؟

التمرين السابع: تم تعويض 3 ديون التالية بدين وحيد يستحق بعد اربع سنوات.

10000دج يستحق بعد سنتين

20000دج يستحق بعد 3 سنوات

15000دج يستحق بعد 4 سنوات

اوجد قيمة الدين الوحيد اذا كان معدل الخصم 9%

التمرين الثامن: مؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

المبلغ الاول قيمته الاسمية 50000دج يستحق بعد 4سنوات

المبلغ الثاني قيمته 100000دج يستحق بعد 5سنوات

واتفقت المؤسسة مع دائنيها على ان تدفع نقدا مبلغ 4932.9دج في اليوم نفسه، ويحرر للباقي كمبيالة قيمتها الاسمية 134983.68دج.

حدد معدل الفائدة الذي على أساسه تمت التسوية، علما ان القيمة الحالية للدين الثاني قد بلغت 82192.7دج

حدد تاريخ استحقاق الكمبيالة الجديدة.

التمرين التاسع: مبلغان مجموعهما 82000 دج أودعا في بنك وفق الشروط التالية:

المبلغ الأول وظف بفائدة بسيطة خلال 120 يوما بمعدل فائدة سنوي 6%، حيث أنتج الفائدة I_1

المبلغ الثاني وظف بفائدة مركبة خلال سنتين بمعدل فائدة سنوي 5%، حيث أنتج الفائدة I_2

في نهاية فترة التوظيف، بلغ الفرق بين الفائدة البسيطة والمركبة 415 دج، أوجد قيمة المبلغين.

التمرين العاشر: شخص مدين له الخيار بين ثلاث طرق لتسديد دينه:

أولا: الدفع الفوري لمبلغ 101500دج

ثانيا: التسديد بورقتين تجاريتين القيمة الاسمية لكل منهما 68000دج تستحق الأولى بعد 5سنوات والثانية بعد 10سنوات

ثالثا:التسديد ب 10 أوراق تجارية قيمة كل منها 12500دج تسدد سنويا.

ما هي أفضل طريقة دفع بالنسبة للمدين إذا كان معدل الخصم فائدة 4% سنويا.

التمرين الحادي عشر: يُشكل مجموع أربعة مبالغ مالية مجموع متتالية عددية، ذات الأساس 2000 حيث:

$$C1+C2+C3+C4=48000^{DA}$$

بإيداع المبلغ الثاني لمدة 5 سنوات بمعدل معين بلغت الفائدة المستحقة على هذا المبلغ 8385,762 دج. أحسب قيمة المبالغ الأربعة ومعدل الإيداع.

التمرين الثاني عشر: شخص مدين بالمبالغ التالية:

الدين الأول قيمته 30000 دج يستحق الدفع بعد 3 سنوات؛

الدين الثاني قيمته يستحق الدفع بعد 4 سنوات؛

الدين الثالث قيمته 50000 دج يستحق الدفع بعد 5 سنوات.

و قد تم خصم هذه الديون فبلغ مجموع قيمها الحالية 97999.52 دج منها 39176.3 دج تخص الدين الثالث فقط. أوجد معدل الخصم وقيمة الدين الثاني.

التمرين الثالث عشر: مبلغين وظفا لمدة 3 سنوات، الأول بفائدة بسيطة بمعدل سنوي 7% والثاني وظف بفائدة مركبة بمعدل سنوي 10% مبلغ رأس المال الأول يزيد عن المبلغ الثاني بقيمة 500 دج، القيمة المكتسبة المتحصل عليها من المبلغين خلال مدة التوظيف متساوية.

أوجد قيمة المبلغين.

التمرين الرابع عشر: مبلغان أودعا في نفس اليوم ولمدة 6 سنوات بفائدة مركبة مجموعهما 80000 دج، بحيث أودع المبلغ الأول بمعدل 8% سنويا برسملة سنوية للفوائد، أما المبلغ الثاني أودع بمعدل سداسي 3.75%، برسملة سداسية للفوائد، بعد 6 سنوات بلغ مجموع الفوائد للمبلغين 46007.32 دج.

أوجد قيمة المبلغين.

الحلول:

حل التمرين الأول:

$$\mathbf{C_1+C_2=10000;\ t_1=5\%;\ i_2=4\ \%;\ n=20\ ans}$$

بعد مرور 20 سنة كانت لهما نفس القيمة المكتسبة

أي

$$\mathbf{A=A_n}$$

$$C_1(1+t_1*n) = C_2(1+i)^n$$

$$C_1(1+\frac{5}{100}*20) = C_2(1+\frac{4}{100})^{20}$$

$$2C_1 = 2.19112C_2$$

$$C_1 = 1.09556C_2 \ldots\ldots(1)$$

لدينا:

$$C_1+C_2=10000\ldots\ldots..(2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد:

$$1.09556C_2 +C_2=10000$$

$$\mathbf{C_2=4772^{DA}}$$

$$\mathbf{C_1=5228\ ^{DA}}$$

حل التمرين الثاني:

إيجاد أفضل خيار:

لدينا:

$$C_0 = 100000; \qquad n = 12ans;$$

القيمة الحالية للخيار الأول:

$$\boldsymbol{A_n} = C_0(1+i)^n = 100000(1.06)^{12}$$

و منه:

$$\boldsymbol{A_n = 201219.64^{DA}}$$

القيمة الحالية للخيار الثاني:

$$\boldsymbol{A_n} = C_0(1+i)^n + \grave{C}_0(1+\grave{\imath})^{\acute{n}}$$
$$= 40000(1.055)^{12} + 60000(1.08)^7$$

و منه:

$$\boldsymbol{A_n} = 76048.3 + 102829.4 = \mathbf{178877.75^{DA}}$$

القيمة الحالية للخيار الثالث:

$$\boldsymbol{A_n} = C_0(1+i_1)^n(1+i_2)^n(1+i_3)^n$$

$$\boldsymbol{A_n} = 100000(1.05)^4(1.06)^4(1.07)^4$$

$$\boldsymbol{A_n} = \mathbf{201148.02^{DA}}$$

أفضل طريقة هي الطريقة الأولى باعتبارها تحقق اكبر قيمة محصلة.

حساب الفائدة:

$$\boldsymbol{I_n} = A_n - C_0$$

$$\mathbf{I_n} = 201219.64 - 100000$$

$$\boldsymbol{I_n} = \mathbf{101219.64^{DA}}$$

حساب الضريبة:

$$\mathbf{Imp} = \mathrm{I_n} * 0.25$$

$$\mathbf{Imp} = 101219.64 * 0.25 = \mathbf{25304.91^{DA}}$$

حساب القيمة الصافية:

$$\boldsymbol{AN} = A_n - imp$$

$$\boldsymbol{CN} = 201219.64 - 25304.91 = \mathbf{175914.73^{DA}}$$

حل التمرين الثالث:

$$\mathbf{C = C_1 + C_2 + C_3 = 352688.9}$$

3 أطفال أعمارهم 16،14،12سنة، حيث تتساوى القيمة المكتسبة عند بلوغهم 19سنة، أي:

$A_1 = A_2 = A_3$; $n_1 = 7$ ans ; $n_2 = 5$ ans ; $n_3 = 3$ ans ; $i = 8\%$

إيجاد المبالغ:

$$\mathbf{A_1 = A_2 = A_3}$$

$$C_1(1+i)^{n1} = C_2(1+i)^{n2} = C_3(1+i)^{n3}$$

$C_1(1+i)^{n1} = C_2(1+i)^{n2} \rightarrow C_2 = C_1(1.08)^7/(1.08)^5 =$ **$(1.08)^2 C_1$ (1)**

$C_1(1+i)^{n1} = C_3(1+i)^{n3} \rightarrow C_3 = C_1(1.08)^7/(1.08)^3 =$ **$(1.08)^4 C_1$ (2)**

$C_1+C_2+C_3 = 352688.9$ (3)

بتعويض (1) و(2) في (3) نجد:

$C_1+(1.08)^2 C_1 +(1.08)^4 C_1= 352688.9$

$C_1= 100000^{DA}$ $C_2= 116640^{DA}$ $C_3= 136048.9^{DA}$

حل التمرين الرابع:

$C_0 = 20000$ $A_n = 21465.68$ $n = 5$ ثلاثيات

$$A_n = C_0(1+i)^n$$

$$(1+i)^n = \frac{A_n}{C_0}$$

$$(1+i)^5 = \frac{A_n}{C_0}$$

$$(1+i)^5 = \frac{21465.68}{20000}$$

$$1+i = \left(\frac{21465.68}{20000}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$i = \left(\frac{21465.68}{20000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$\boldsymbol{i = 1.42\%}$$

حل التمرين الخامس:

$C_0 = 300000$، $i = 10$، $n = 8ans$

$$\boldsymbol{A_n = C_0(1+i)^n}$$

حساب جملة المبلغ في نهاية المدة:

$A_n = C_0(1+i)^n$
$A_n = 300000(1{,}1)^8$

$\boldsymbol{A_n = 643076.64^{DA}}$

حساب قيمة الفائدة:

$I = A_n - C_0$

$I = 643076.64 - 300000$

$\boldsymbol{I = 343076.64^{DA}}$

حساب فائدة السنة الخامسة فقط:

$I_5 = C_0(1+i)^{5-1} * i$
$I_5 = 300000(1.1)^4 * 0.1$
$\boldsymbol{I_5 = 43923^{DA}}$

حساب ما تجمع للمؤسسة بعد نهاية السنة الثامنة:

$A_1 = [300000(1.1)^4 - 300000]\ (1.1)^4$
$\boldsymbol{A_1 = 203846.64^{DA}}$

1سنة ← سداسيين

4سنوات ← x

X= 8

$A_2 = 300000(1.1)^4$

$\boldsymbol{A_2 = 410570.71^{DA}}$

$A = A_1 + A_2$

$A = 203846.64 + 410570.71 = \boldsymbol{614417.35^{DA}}$

حل التمرين السادس:

$$V_n = 750000, \quad V_a = 667497.33, \quad n = 2ans$$

$$V_a = V_n(1+i)^{-n}$$

$$667497.33 = 750000(1+i)^{-2}$$

$$\frac{667497.33}{750000} = (1+i)^{-2}$$

$$1+i = \left(\frac{667497.33}{750000}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$i = \left(\frac{667497.33}{750000}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$\boldsymbol{i = 6\ \%}$$

حل التمرين السابع:

لدينا:

$$n_1 = 2ans,\ \ n_2 = 3ans, n_3 = 4ans, \acute{n} = 4ans,\quad i = 9\%،$$

$$V_{n1} = 10000,\quad V_{n2} = 20000,\qquad V_{n2} = 15000,\ \ V'_n = ?,$$

$$V_{a1} + V_{a1} + V_{a1} = V'_a$$

$$V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2} + V_{n3}(1+i)^{-n3} = V'_n(1+i)^{-n}$$

$$10000(1.09)^{-2} + 20000(1.09)^{-3} + 15000(1.09)^{-4} = V'_n(1.09)^{-4}$$

$$8416.8 + 15443.7 + 10626.4 = V'_n(1.09)^{-4}$$

$$= 34486.9V'_n(1.09)^{-4}$$

$$\boldsymbol{= 48681.07^{DA} V'_n}$$

حل التمرين الثامن:

$$n_1 = 4ans,\ \ n_2 = 5ans, \acute{n} = ?,\quad i = ?،$$

$$V_{n1} = 50000,\quad V_{n2} = 100000,\qquad C = 4932.9,\ \ V'_n = 134983.68,$$

$$V_{a2} = 82192.7$$

إيجاد معدل الفائدة:

$$V_{a2} = V_{n2}(1+i)^{-n2}$$

$$82192.7 = 100000(1+i)^{-5}$$

$$\frac{82192.7}{100000} = (1+i)^{-5}$$

$$1+i = \left(\frac{82192.7}{100000}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

$$i = \left(\frac{82192.7}{100000}\right)^{-\frac{1}{5}} - 1$$

$$\boldsymbol{i = 4\,\%}$$

تاريخ استحقاق الكمبيالة الجديدة:

$$V_{a1} + V_{a1} = V'_{a1} + C$$

$$V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2} = V'_{n}(1+i)^{-n} + C$$

$$50000(1.04)^{-4} + 82192.7 = 134983.68(1.04)^{-n} + 4932.9$$

$$42740.20955 + 82192.7 - 4932.9 = 134983.68(1.04)^{-n}$$

$$120000 = 134983.68(1.04)^{-n1}$$

$$(1.04)^{-n} = \frac{120000}{134983.68}$$

$$(1.04)^{-n} = 0.888996358 \Rightarrow \frac{1}{(1.04)^{n}} = 0.888996358$$

$$\Longrightarrow (1.04)^{n} = \frac{1}{0.888996358}$$

$$\Longrightarrow \ln(1.04)^{n} = \ln\frac{1}{0.888996358}$$

$$\Rightarrow n\ln(1.04) = \ln\frac{1}{0.888996358}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln \frac{1}{0.888996358}}{\ln(1.04)} = 3$$

ومنه تاريخ استحقاق الورقة الجديدة هو 3 سنوات.

حل التمرين التاسع:

لدينا:

$$C_1 + C_2 = 82000 \ldots\ldots(1)$$
$$I_1 - I_2 = 415 \ldots\ldots(2)$$
$$C_1 = ?;\ n_1 = 120j;\ t = 6\%$$

$I_1 = C_1.t.n_1/36000$

$I_1 = C_1.6.120/36000$

$I_1 = 0.02C_1 \ldots\ldots(3)$

$$C_2 = ?;\ n_2 = 2\ ans;\ i = 5\%$$

$I_2 = A - C_2$

$I_2 = C_2(1+i)^{n2} - C_2$

$I_2 = C_2(1.05)^2 - C_2$

$I_2 = 0.1025C_2 \ldots\ldots(4)$

من (1) نجد:

$$C_1 = 82000 - C_2 \ldots\ldots(5)$$

نعوض (3)، (4) و(5) في (2) نجد:

$0.02C_1 - 0.1025C_2 = 415$

$0.02(82000 - C_2) - 0.1025C_2 = 415$

$1640 - 0.02C_2 - 0.1025C_2 = 415$

$1225 = 0.1225C_2$

$$\mathbf{C_2 = 10000^{DA}}$$
$$\mathbf{C_1 = 72000^{DA}}$$

حل التمرين العاشر:

أفضل طريقة هي التي تحقق أقل قيمة

الطريقة الأولى: الدفع الفوري لمبلغ 101500دج

الطريقة الثانية: التسديد عن طريق ورقتين كالآتي:

$n_1 = 5,\ n_2 = 10,\quad i = 4\%$،

$V_{n1} = 68000,\quad V_{n2} = 68000$

$V_{a1} + V_{a1} = V_{n1}\,(1+i)^{-n1} + V_{n2}\,(1+i)^{-n2}$

$V_{a1} + V_{a1} = 68000(1.04)^{-5} + 68000(1.04)^{-10}$

$V_{a1} + V_{a1} = 55828 + 45900$

$\boldsymbol{V_{a1} + V_{a1} = 101728^{DA}}$

الطريقة الثالثة: التسديد عن طريق 10 أوراق تجارية كالآتي:

$n_1 = 1,\ n_2 = 1 \dots\dots\dots n_{10} = 10\quad i = 4\%$،

$V_{n1} = 12500,\quad V_{n2} = 12500 \dots\dots\dots\dots\dots V_{n10} = 12500$

$V_A = V_{a1} + V_{a2} + V_{a3} + \cdots + V_{10}$

$V_A = 12500(1.04)^{-1*10}$

$\boldsymbol{V_A = 84445.52^{DA}}$

إذا أفضل طريقة هي الطريقة الثالثة لأنها تحقق أقل قيمة حالية.

حل التمرين الحادي عشر:

حساب قيمة المبالغ الأربعة:

$$C_1+C_2+C_3+C_4=48000^{DA}$$

r=2000 (الأساس)

يشكل مجموع المبالغ الأربعة متتالية عددية والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{nombre des termes (عدد الحدود)}}{2}(1er\ terme \text{ الحد الأول} + \text{dernire terme (الحد الأخير})$$

عدد الحدود هو 4 بحيث:

C_1 يمثل الحد الأول للمتتالية

C_4 يمثل الحد الأخير للمتتالية

عبارة الحد العام لمتتالية عددية تعطى بالعلاقة التالية:

$\mu = \mu_1 + (n-1).r$

$C_2 = C_1$+ (2-1).r=$C_1 + 2000$

C_3= C_1+ 2r=C_1+ 4000

C_4= C_1+ 3r=C_1+ 6000

C_1+C_2+C_3+C_4=48000

⇨C_1+C_1+ 2000+C_1+ 4000+C_1+ 6000=48000

⇨4C_1+ 12000=48000

⇨4C_1=36000

⇨$\boldsymbol{C_1}$**=9000** ***DA***

⇨C_2=9000+2000**=11000*DA***

⇨C_3=9000+4000=**13000*DA***

⇨C4=9000+6000=**15000** ***DA***

حساب معدل الإيداع:

$C_2 = 11000$ n^2=5 ans I_2= 8385,762

$I = C_2(1 + i)^n - C_2$

$8385.762 = 11000(1 + i)^5 - 11000$

$19385.762 = 11000(1 + i)^5$

$\frac{19385.762}{11000} = (1 + i)^5$

$1 + i = \left(\frac{19385.762}{11000}\right)^{\frac{1}{5}}$

$i = \left(\frac{19385.762}{11000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$

$\boldsymbol{i = 12\ \%}$

حل التمرين الثاني عشر:

لدينا:

$$\boldsymbol{V_{a1} + V_{a2} + V_{a3} = 97999.52}$$

$$V_{a3} = 39176.3$$

$$n_1 = 3ans,\ \ n_2 = 4ans, n_3 = 5ans,\ \ \ i = ?$$

$$V_{n1} = 30000,\ \ \ V_{n2} = ?, V_{n3} = 50000$$

حساب معدل الخصم:

$$V_{a3} = V_{n3}(1+i)^{-n3}$$

$$39176.3 = 50000(1+i)^{-5}$$

$$\frac{39176.3}{50000} = (1+i)^{-5}$$

$$1 + i = \left(\frac{39176.3}{50000}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

$$i = \left(\frac{39176.3.7}{50000}\right)^{-\frac{1}{5}} - 1$$

$$\boldsymbol{i = 5\ \%}$$

حساب قيمة الدين الثاني:

$$V_{a1} + V_{a1} + V_{a1}$$

$$V_{n1}(1+i)^{-n1} + V_{n2}(1+i)^{-n2} + V_{n3}(1+i)^{-n3} = 97999.52$$

$$30000(1.05)^{-3} + V_{n2}(1.05)^{-4} + 39176.3 = 97999.52$$

$$25915.2796 + V_{n2}(1.05)^{-4} = 97999.52 - 39176.3$$

$$V_{n2}(1.05)^{-4} = 58823.22 - 25915.1279$$

$V_{n2} = \frac{32908.0921}{(1.05)^{-4}}$

$\boldsymbol{V_{n2} = 40000^{DA}}$

حل التمرين الثالث عشر:

حساب قيمة المبلغين:

لدينا:

$n_1=n_2=3ans$; $t_1=7\%$; $i_2=10\%$

$$\boldsymbol{C_1=C_2+500.....(1)}$$

$$\boldsymbol{A_1=A_2}$$

$$\Rightarrow C_1+I_1 =C_2(1+ i_2)^{n2}$$

$$\Rightarrow C_1+C_1\frac{t1}{100}n_1=C_2(1+ i_2)^{n2}$$

$$\Rightarrow C_1+C_1\frac{7}{100}\,3=C_2(1,1)^3$$

$$\Rightarrow C_1+0,21C_1=1,331C_2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{1,21C_1= 1,331C_2.....(2)}$$

بتعويض (1) في (2) نجد:

$$\Rightarrow 1,21\ (C_2+500)= 1,331C_2$$

$$\Rightarrow 1,21C_2+ 605 = 1,331C_2$$

$$\Rightarrow 0,121C_2=605$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_2=5000\ ^{DA}}$$

$$C_1 = 5500^{DA}$$

حل التمرين الرابع عشر:

حساب قيمة المبلغين:

لدينا:

n_1= 6 ans ; n_2=2*6= 12 ; i_1=8%; i_2=3.75%; $C_1 + C_2 = 80000$

$$I = C_0[(1+i)^n - 1]$$

$$\mathbf{I_1 + I_2 = 46007.32}$$

$$C_1[(1+i1)^{n1} - 1] + C_2[(1+i2)^{n2} - 1] = 46007.32$$

$$C_1[(1.08)^6 - 1] + C_2[(1.0375)^{12} - 1] = 46007.32$$

$$C_1[0.58687432] + C_2[0.55545433] = 46007.32 \ldots\ldots(1)$$

$$C_1 + C_2 = 80000 \Rightarrow C_1 = 80000 - C_2 \ldots\ldots\ldots(2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$80000 - C2\,[0.58687432] + C_2[0.55545433] = 46007.32 \ldots\ldots(1)$$

$$\mathbf{C_2 = 30000^{DA}}$$

$$\mathbf{C_1 = 50000^{DA}}$$

هوامش الفصل الثاني:

[1] صليحة شامي، محاضرات في الرياضيات المالية دروس وتمارين محلولة، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة الجزائر 03، 2022، ص57.

[2] سناء مرابطي، محاضرات في مقياس الرياضيات المالية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة أم البواقي، 2019، ص36.

[3] خيرة بلحمري، مرجع سبق ذكره، ص38.

[4] نفس المرجع السابق.

[5] فوزي آيت سعيد، مطبوعة بيداغوجية في مقياس الرياضيات المالية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة الجزائر 03، 2023، ص64.

[6] خيرة بلحمري، مرجع سبق ذكره، ص 47.

الفصل الثالث: الدفعات المالية

إن الأسر والمؤسسات تسدد دوريا مستحقات فواتير الكهرباء والمياه وكذا أقساط الإيجار، كما أن العمال والموظفين وغيرهم يتلقون شهريا أجرتهم ويدفعون بعض الاشتراكات الاجتماعية والضرائب وغيرها من المتطلبات ذات الصيغة الدورية، وبالتالي تنتج عن كل هذه العمليات تعاملات دورية بمبالغ وقيم تنتقل أو تتدفق من جانب إلى آخر وهي ما يطلق عليها بالدفعات المالية.

أولا– تعريف الدفعات:

"مبالغ مالية تدفع دوريا في فترات متساوية، تسمى بفترة السداد وقد تكون هذه الفترة (سنة، سداسي، ثلاثي أو شهر)، وتتميز هذه الدفعات بما يلي:

- ✓ قيمة الدفعات متساوية؛
- ✓ المدة الفاصلة بين الدفعات متساوية؛
- ✓ معدل فائدة متساوي؛
- ✓ تحديد تاريخ أول دفعة وآخر دفعة؛
- ✓ عدد الدفعات.

ثانيا– أنواع الدفعات:

هناك عدة أنواع من الدفعات حسب معيار التصنيف، إلا أننا سنتطرق في دراستنا إلى دفعات نهاية المدة ودفعات بداية المدة، خلال فترات متساوية.

1. دفعات نهاية المدة (الدفعات العادية): تدفع عادة لتسديد الديون ولذلك تسمى بدفعات الاستهلاك وتسدد نهاية كل فترة أي عند تقديم آخر دفعة يكون قد تكون رأسمال وهو هدف العملية، في حين يمكن تحديد قيمة مجموع هذه الدفعات في نقطة الصفر، أو بداية الفترة الأولى التي تتطابق مع بداية مدة الدفع الكلية وهذه القيمة تعد قيمة حالية للدفعات.

1.1 القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة: تمثل ما تجمع للشخص المسدد في نهاية عدد الدفعات،ويمكن إبراز كيفية حسابها من خلال الجدول الموالي:

الجدول رقم (02): القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة

الفترة	القيمة المحصلة
الدفعة الأولى: ستدفع في نهاية الوحدة الزمنية الأولى، أي أنها ستوظف لمدة $n-1$	$a(1+t)^{n-1}$
الدفعة الثانية: ستدفع في نهاية الوحدة الزمنية الثانية، أي أنها ستوظف لمدة $n-2$	$a(1+t)^{n-2}$
الدفعة الثالثة: ستدفع في نهاية الوحدة الزمنية الثالثة، أي أنها ستوظف لمدة $n-3$	$a(1+t)^{n-3}$
.	.
.	

.	.
.	.
$a(1+t)^{n-(n-1)}$	الدفعة ما قبل الأخيرة: ستدفع قبل نهاية المدة بفترة واحدة
$a(1+t)^{n-n}$	الدفعة الأخيرة: ستدفع في نهاية المدة أي لا توظف نهائيا

المصدر: ناصر دادي عدون ، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص 79.

من اجل حساب الجملة نجمع القيم المحصلة في الجدول السابق لكل الفترات، حسب العلاقة التالية[1]:

$$A = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + a(1+t)^3 + \cdots + a(1+t)^{n-1}$$
$$A = a[1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \cdots + (1+t)^{n-1}]$$

حيث:A: جملة الدفعات

من علاقة الجملة نلاحظ أنها حدود لمتتالية هندسية متزايدة حدها الأول a واساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n، يعطى مجموعها بالشكل التالي:[2]

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{t}$$

بحيث:

A: جملة دفعات نهاية المدة.

a: قيمة الدفعة.

i: معدل الفائدة.

n: عدد الدفعات.

ملاحظة: يتم حساب قيمة $\frac{(1+i)\ -1}{t}$ من الجدول المالي رقم 3.

مثال: قام شخص بتسديد دين له بخمس دفعات متساوية لنهاية السنة، فإذا كانت قيمة الدفعة 2000دج ومعدل الفائدة المركبة5 %، اوجد الجملة في نهاية المدة؟

الحل:

لدينا:

$$a = 2000 \quad i = 5\% \qquad n = 5ans$$
$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{t}$$
$$A = 2000\frac{(1.05)^5 - 1}{0.05}$$

$$A = 11851.2 \text{ DA}$$

2.1 تطبيقات على قانون القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة: باستخدام علاقة القيمة المكتسبة، يمكن استخراج مجموعة من العلاقات:

أ. حساب قيمة الدفعة: من القانون الأساسي لجملة الدفعات يمكننا استخلاص قانون قيمة الدفعة كما يلي:

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{\text{t}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = A\ \frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

مثال: قام أحد الأشخاص بتسديد دين قيمته 3152.5 دج بواسطة 3 دفعات ثابتة وبمعدل 5 % سنويا، أوجد قيمة الدفعة؟

الحل:

لدينا:

$$A = 3152.5 \quad n = 3 \quad t = 5\%$$

$$\boldsymbol{a = A\ \frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

$$a = 3152.5\ \frac{0.05}{(1.05)^3 - 1}$$

$$\boldsymbol{a = 1000\ \text{DA}}$$

ب. حساب عدد الدفعات: تحسب المدة كما يلي:

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{\text{i}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n = \frac{ln\left(\frac{A * i}{a} + 1\right)}{ln(1+i)}}$$

مثال: يدفع شخص نهاية كل فترة دفعة ثابتة قيمتها 5000 دج فبلغت القيمة المكتسبة في نهاية 22530.56 دج إذا كان معدل الفائدة 8%، احسب عدد الدفعات اللازمة لتسديد هذا الدين.

الحل:

لدينا:

$$A = 22530.56 \quad a = 5000 \quad i = 8\%$$

$$\boldsymbol{n = \frac{ln\left(\frac{A * i}{a} + 1\right)}{ln(1+i)}}$$

$$\Longrightarrow \frac{ln\left(\frac{22530.56 * 0.08}{5000} + 1\right)}{ln(1.08)}$$

$$\boldsymbol{n = 4ans}$$

ج. **حساب معدل الدفعة:** يحسب المعدل كما يلي:

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{\text{i}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

مثال: ما هو معدل الفائدة المطبق الذي يسمح بتكوين رأسمال قدره 755750. دج بـ 5 دفعات ثابتة لنهاية المدة ، قيمة الدفعة 1000 دج .

الحل:

لدينا:

$$A = 5750.75 \quad a = 1000 \quad n = 5ans$$

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{\text{i}} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$\Longrightarrow \frac{5750.75}{1000} = \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$\Longrightarrow 5.75075 = \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

من الجدول المالي رقم 20 وعند القيمة 5.75075 وعند n = 5 نجد i = 7 %

3.1 القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة: يقصد بالقيمة الحالية لدفعات نهاية المدة قيمة الدفعات في بداية أول دفعة يعني في بداية مدة أول دفعة (في الزمن 0)، ونرمز لها بالرمز V، نلخصها في الجدول التالي:

الجدول رقم (03): القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة

الفترة	القيمة الحالية
الدفعة الأولى	$V_1 = a(1+t)^{-1}$
الدفعة الثانية	$V_2 = a(1+t)^{-2}$
الدفعة الثالثة	$V_3 = a(1+t)^{-3}$
.	.
.	.
.	.
الدفعة ما قبل الأخيرة	$V_{n-1} = a(1+t)^{-(n-1)}$
الدفعة الأخيرة	$V_n = a(1+t)^{-n}$

المصدر: ناصر دادي عدون ، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص 79.

القيمة الحالية الكلية هي: $V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{n-1} + V_n$

ومنه: $V = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-3} + \cdots + a(1+t)^{-(n-1)} + a(1+t)^{-n}$

$$V = a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + \cdots + a(1+t)^{-3} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$$

من علاقة القيمة الحالية نلاحظ أنها حدود لمتتالية هندسية متناقصة حدها الأول $a(1+t)^{-n}$ واساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n، يعطى مجموعها بالشكل التالي:[3]

$$V = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ملاحظة: يتم حساب القيمة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ من الجدول المالي رقم 4.

مثال: اشترت شخص آلة إنتاجية، يسدد قيمتها على ست دفعات نهاية كل سنة قيمة كل دفعة 4000دج، بمعدل فائدة 10%، اوجد سعر الشراء؟

الحل:

لدينا:

$$a = 4000 \quad n = 5 \quad i = 10\%$$

حساب سعر الشراء (القيمة الحالية لخمس دفعات):

$$V = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\text{i}}$$

$$= 8000\frac{1-(1.1)^{-5}}{0.1}$$

$$^{DA}V = 30326.4$$

2. دفعات بداية مدة (دفعات الاستثمار): تدفع عادة لتكوين رأسمال وتكون في بداية كل فترة، أو لسداد دين إن نص العقد على ذلك.

1.2 القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة: القيمة المحصلة أو المكتسبة والتي تحسب في نهاية مدة السداد للقرض أو تكوين رأس المال، أي بعد القسط الأخير بفترة زمنية واحدة، ويرمز لها بالرمز A، نلخصها في الجدول التالي:

الجدول رقم (04): القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة

الفترة	القيمة المحصلة
الدفعة الأولى: ستدفع في بداية الوحدة الزمنية الأولى، أي أنها ستوظف لمدة n	$a(1+t)^n$
الدفعة الثانية: ستدفع في بداية الوحدة الزمنية الثانية، أي أنها ستوظف لمدة $n-1$	$a(1+t)^{n-2}$
الدفعة الثالثة: ستدفع في بداية الوحدة الزمنية الثالثة، أي أنها ستوظف لمدة $n-2$	$a(1+t)^{n-3}$
.	.
.	.
.	.
الدفعة الأخيرة: ستدفع في بداية المدة الأخيرة أي توظف سنة واحدة	$a(1+t)^1$

المصدر: ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص 79.

من اجل حساب الجملة نجمع القيم المحصلة في الجدول السابق لكل الفترات، حسب العلاقة التالية:

$$A' = a(1+t) + a(1+t)^2 + a(1+t)^3 + \cdots + a(1+t)^n$$
$$A' = a[(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \cdots + (1+t)^n]$$

حيث: A: جملة الدفعات

من علاقة الجملة نلاحظ أنها حدود لمتتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+t)$ واساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n، يعطى مجموعها بالشكل التالي:[4]

حيث:

$\boldsymbol{A}$: جملة الدفعات

$$\boldsymbol{A = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

مثال: أودع شخص مبلغ 12000 دج بداية كل شهر، ولمدة 8 سنوات، بمعدل فائدة مركبة10 %، اوجد جملتها في نهاية المدة؟

الحل:

لدينا:

$$a = 12000 \quad i = 10\% \quad n = 8$$

$$\boldsymbol{A = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

$$\Longrightarrow 12000\left[\frac{(1.1)^{9}-1}{0.1}-1\right]$$

$$\overset{DA}{\Longrightarrow} \boldsymbol{A = 150954}$$

2.2 تطبيقات على قانون القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة: انطلاقا من القانون الأساسي للقيمة المكتسبة لدفعات الاستثمار يمكننا إيجاد ما يلي:

أ. **حساب قيمة الدفعة:** يمكننا إيجاد علاقة الدفعة كما يلي:

$$\boldsymbol{A = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{a = \frac{A}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}}$$

مثال: ما هي قيمة الدفعة التي يجب توظيفها بداية كل سنة ولمدة 6 سنوات للحصول على رأسمال قيمته 159625دج، بمعدل فائدة 8%؟

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{A} = 159625 \quad i = 8\% \quad n = 6$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{A}}{\left[\frac{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n+1}}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{1}\right]}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{159625}{\left[\frac{(1.08)^{6+1}-1}{0.08} - 1\right]}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{159625}{\left[\frac{(1.08)^{7}-1}{0.08} - 1\right]}$$

$$\overset{\text{DA}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{a = 20148}$$

ب. حساب عدد الدفعات: يمكننا إيجاد علاقة عدد الدفعات كما يلي:

$$\boldsymbol{A} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{1} = \frac{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n+1}}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{i}}$$

مثال: ما هي عدد الدفعات التي قيمتها 6000دج التي يجب توظيفها للحصول على رأسمال قيمته 32810.5 دج، بمعدل فائدة 3%؟

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{A} = 32810.5 \quad i = 3\% \quad a = 6000$$

$$\boldsymbol{A} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \Longrightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{1} = \frac{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n+1}}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{i}}$$

$$\Longrightarrow \frac{32810.5}{6000} + 1 = \frac{(1.03)^{n+1}-1}{0.03}$$

$$6.4684 = \frac{(1.03)^{n+1}-1}{0.03}$$

بالرجوع إلى الجدول المالي نلاحظ أن عدد الدفعات هو 5.

ج. حساب معدل الدفعة: من القانون الأساسي لعلاقة القيمة المكتسبة لدفعات الاستثمار، يمكننا إيجاد علاقة معدل الدفعة كما يلي:

$$\boldsymbol{A} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} + \mathbf{1} = \frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n+1}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}$$

مثال 01: لتكوين رأسمال قيمته 22548.4 دج ، تم توظيفه لمدة أربع سنوات ، قيمة الدفعة الواحدة منها: 4000دج ، ما هو المعدل اللازم لذلك ؟

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{A} = 22548.4 \quad n = 4 \quad a = 4000$$

لدينا:

$$\boldsymbol{A} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{a} + 1 = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

$$\Rightarrow \frac{22548.4}{4000} + 1 = \frac{(1+i)^{4+1}-1}{i}$$

$$\Rightarrow \frac{22548.4}{4000} + 1 = \frac{(1+i)^{5}-1}{i}$$

$$6.6371 = \frac{(1+i)^{5}-1}{i}$$

نلاحظ ان القيمة 6.6371 غير موجودة في الجدول المالي وهي محصورة بين القيمتين $6.6101 < 6.6371 < 6.7424$ ما يقابل المعدلات التالية:

$$14\% < i < 15\%$$

وبالتالي يمكن استخراج المعدل انطلاقا من علاقة الاستيفاء، بحيث:

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i_1} + \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}}(\boldsymbol{i_2} - \boldsymbol{i_1})$$

بالرجوع إلى المثال يمكن إيجاد المعدل كما يلي:

$$\boldsymbol{i} = \mathbf{0.14} + \frac{6.6371 - 6.6101}{6.7424 - 6.6101}(\mathbf{0.15} - \mathbf{0.14})$$

$$\boldsymbol{i} = \mathbf{14.20\%}$$

مثـال 02: تم دفـع 8 دفعـات ثابتـة ومتسـاوية لتكـوين مبلـغ 320000دج قيمـة الدفعـة الواحـدة 29000دج، اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{A} = 320000 \quad n = 8 \qquad a = 29000$$

لدينا:

$$\boldsymbol{A} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \Rightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{a} + 1 = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

$$\Rightarrow \frac{320000}{29000} + 1 = \frac{(1+i)^{8+1}-1}{i}$$

$$\Rightarrow \frac{320000}{29000} + 1 = \frac{(1+i)^{8+1}-1}{i}$$

$$\Rightarrow 12.034482 = \frac{(1+i)^{9}-1}{i}$$

القيمة 12.034482 غير موجودة في الجدول المالي وهي محصورة بين القيمتين $11.977989 < 12.034482 < 12.103195$ ما يقابل المعدلات التالية: $7\% < i < 7.25\%$

$$i = 7.25\% - X$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(1{,}0725)^{9}-1}{0{,}0725} = 12.103195 \\ \dfrac{(1{,}07)^{9}-1}{0{,}07} = 11.977989\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle = 0.125206$$

$$\left\{\begin{array}{l}0.125206 \longrightarrow 0.25\% \\ 0.068713 \longrightarrow \mathrm{X}\%\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} = 0{,}137199$$

لدينا:

$$i = 7.25\% - X$$
$$i = 7.25\% - 0.13\%$$
$$\boldsymbol{i = 7.11\%}$$

3.2 القيمة الحالية لدفعات بداية المدة: تعرف القيمة الحالية بأنها مجموع القيم الحالية لعدد الدفعات الثابتة المتساوية في الزمن (0)، أي عند أول دفعة، يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{V'}$، نلخصها في الجدول التالي:

الجدول رقم (05): القيمة الحالية لدفعات بداية المدة

الفترة	القيمة الحالية
الدفعة الأولى	$\boldsymbol{V'_1 = a}$
الدفعة الثانية	$\boldsymbol{V'_2 = a(1+t)^{-1}}$

الدفعة الثالثة	$V'_3 = a(1+t)^{-2}$
.	.
.	.
.	.
الدفعة ما قبل الأخيرة	$V'_{n-1} = a(1+t)^{-(n-2)}$
الدفعة الأخيرة	$V'_n = a(1+t)^{-(n-1)}$

المصدر: ناصر دادي عدون ، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص 79.

القيمة الحالية الكلية هي:

$$V' = V'_1 + V'_2 + V'_3 + \cdots + V'_{n-1} + V'_n$$

ومنه: $V' = a + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \cdots + a(1+t)^{-(n-2)} + a(1+t)^{-(n-1)}$

$$V' = a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + \cdots + a(1+t)^{-3} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$$

من علاقة القيمة الحالية نلاحظ أنها حدود لمتتالية هندسية حدها الأول a واساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n، يعطى مجموعها بالشكل التالي بعد التبسيط: [5]

$$V' = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال: أراد شخص تكوين رأس مال لمدة 5 سنوات، حيث قام بإيداع بداية كل سنة مبلغ قيمته 12500 بمعدل فائدة 8%، اوجد القيمة الحالية؟

الحل:

لدينا:

$$a = 12500 \quad n = 5 \quad i = 8\%$$

$$V' = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{t}$$

$$\Longrightarrow 12500(1.08)\frac{1-(1.08)^{-5}}{0.08}$$

$$\overset{DA}{\Longrightarrow} V' = 53901.58$$

تمارين حول الدفعات المالية :

التمرين الأول: من أجل تكوين رأس مال يقدر بـ 268633.806 دج وبدفعات نهاية المدة قيمة كل منها 14000 دج وعددها 13 دفعة.

أوجد معدل الفائدة المركبة المطبق عليها.

أحسب معدل الفائدة الواجب تطبيقه على 10 دفعات لنهاية المدة قيمة كل منها 8000 دج حتى تتكون جملة قدرها 125216 دج في نهاية المدة.

تسدد مؤسسة في نهاية كل سداسي 58000 دج لمدة 6 سنوات. أحسب جملة ما تدفعه هذه المؤسسة في نهاية السنة السادسة إذا كان المعدل السداسي هو 8.5 %.

التمرين الثاني: اشترى شخص جهاز في 2009/12/31 والتسديد يتم بـ 6 دفعات، تقدر كل واحدة بـ 10000 دج، الأولى تسدد سنة بعد الشراء، معدل الفائدة 8%.

ما هو ثمن الجهاز؟

ما هو المبلغ الإجمالي (ثمن الجهاز+ الفوائد) الذي دفعه هذا الشخص؟

مباشرة بعد تسديد الدفعة 3 تغيرت شروط العقد كالآتي:

الباقي من الدين يسدد بدفعة واحدة سنة بعد تسديد الدفعة الثالثة، ما هو مبلغ هذه الدفعة؟

التمرين الثالث: في نهاية كل سنة يودع شخص في أحد البنوك مبلغا ثابتا، بمعدل فائدة معينة سنويا، وفي نهاية السنة الخامسة بلغ رصيده 115014.78 دج، وشخص آخر يودع في نفس البنك نصف مبلغ الشخص الأول في بداية كل سداسي لمدة 5 سنوات، معدل فائدة مركبة 1% سداسيا، وفي نهاية المدة حصل على جملة تقدر بـ 105668.34 دج.

أحسب قيمة الدفعة لكل واحد ومعدل الفائدة.

التمرين الرابع: يودع شخص في بداية كل فترة زمنية مبلغ 500 دج بمعدل فائدة مركبة 9 % ولمدة 8 سنوات.

أوجد جملة ما يستحقه هذا الشخص إذا كانت الفائدة تضاف كل شهرين.

التمرين الخامس: وظف شخص مبلغ 1000دج لمدة أربع سنوات، ابتداء من 2010/01/01 إلى غاية 2014/01/01 ، ومن 2015/01/01 إلى غاية 2017/01/01 وظف مبلغ 2000دج، بمعدل توظيف 10%.

احسب القيمة المحصلة في 2017/01/01 ؟

احسب القيمة الحالية في 2010/01/01 ؟

التمرين السادس: في 2017/01/01 اشترى تاجر محل تجاري قيمته 500000دج، بمعدل فائدة مركبة 3.5%، على أن يسدده كما يلي:

يدفع 100000دج نقدا والباقي يدفع على 8 دفعات، الأولى قابلة للدفع في 2017/12/31.

ما مقدار هذه الدفعة؟

إذا سدد هذا التاجر الدفعة الأولى والثانية، ثم قرر تسديد دينه، ما هو المبلغ الذي يجب على التاجر دفعه في تاريخ 2019/01/01.

التمرين السابع: ما هي القيمة التي يجب استثمارها كل 6 أشهر لمدة 10 سنوات حتى نحصل في الأخير على مبلغ 1000000دج بمعدل سنوي 6%.

التمرين الثامن: سلسلة دفعات لآخر السنة عددها 12 دفعة، تم إيداعها كالآتي:

أربع دفعات للسنوات الأربع الأولى بمبلغ 2500 دج للدفعة.

أربع دفعات للسنوات الأربع التالية بمبلغ 3000 دج للدفعة.

أربع دفعات للسنوات الأربع الأخيرة بمبلغ 3500 دج للدفعة.

أحسب الجملة والقيمة الحالية لهذه السلسة من الدفعات إذا كان معدل الفائدة 9%.

التمرين التاسع: اقترض شخص مبلغا ماليا من احد البنوك وأمامه ثلاثة عروض لتسديد هذا الدين :

العرض الأول : تسديد في نهاية كل سنة ولمدة 10 سنوات مبلغ 100000 دج.

العرض الثاني : تسديد كل الدين في نهاية السنة السادسة.

العرض الثالث: تأجيل التسديد إلى نهاية السنة الثانية عشر.

إذا كان معدل الفائدة السنوي هو 10 % .

احسب:

قيمة الدين يوم إمضاء العقد.

قيمة الدين في نهاية السنة السادسة.

قيمة الدين المسدد في نهاية السنة الثانية عشر.

التمرين العاشر: اشترى تاجر بضاعة وأمامه 3 طرق للتسديد:

96500دج تدفع عند تاريخ الشراء.

111500دج تدفع بعد 5 سنوات.

دفعات متساوية مبلغ الواحدة 5350 دج ،في آخر كل سنة لمدة 15 سنة.

اختيار أحسن طريقة للتسديد مع العلم أن معدل الفائدة 6%

التمرين الحادي عشر:قام أحد الأشخاص بشراء سيارة ثمنها الفوري 120000دج منها 60000 دج نقدا في الحال، واتفق على سداد الباقي على 10 دفعات سنوية.

فما هي قيمة الدفعة السنوية إذا كان معدل الفائدة 7% وتسدد نهاية كل سنة.

التمرين الثاني عشر: تودع مؤسسة من أرباحها سنويا قيمة 4000 دج بمعدل فائدة معين. فبلغت القيمة الحالية لعدد منها 10125.18 دج في حالة اعتبارها دفعات سداد (عادية) أما في حالة اعتبارها دفعات استثمار (غير عادية) فقد بلغت قيمتها الحالية 11036.4462 دج.

أحسب معدل الفائدة المطبق على هذه الدفعات وعدد الدفعات السنوية.

التمرين الثالث عشر: اشترى تاجر محلا تجاريا يدفع قيمته بـ 15 دفعة متساوية عادية بمعدل 6 % سنويا، مبلغ الدفعة الواحدة25000 دج، أحسب قيمة المحل.

إذا افترضنا أن ثمن المحل 250000 دج وتم تسديد ⅕ القيمة في الحين والبقية بـ 5 دفعات سنوية متساوية. أحسب مبلغ الدفعة الجديدة.

الحلول:

حل التمرين الأول:

حساب معدل الفائدة للحالة الأولى:

$$\mathrm{A} = 268633.806;\ \mathrm{n} = 13;\ a = 14000$$

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{\mathrm{i}} \Longrightarrow \frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{268633.806}{14000} = \frac{(1+i)^{13} - 1}{i}$$

$$19.1881 = \frac{(1+i)^{13} - 1}{i}$$

من الجدول المالي رقم 3، في السطر الموافق للمدة 3 سنوات وعند القيمة 19.188129 نجد:

i=6.25%

حساب معدل الفائدة للحالة الثانية:

$$\mathrm{A} = 125216;\ \mathrm{n} = 10;\ a = 8000$$

$$\Longrightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{(1+i)^n - 1}}{\boldsymbol{i}}$$

$$\frac{125216}{8000} = \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

$$15.652 = \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

نلاحظ ان القيمة 15.652 غير موجودة في الجدول المالي رقم 3 وهي محصورة بين القيمتين $15.193 < 15.652 < 15.937$ ما يقابل المعدلات التالية:

$$10\% < i < 9\%$$

وبالتالي يمكن استخراج المعدل انطلاقا من علاقة الاستيفاء، بحيث:

$$\boldsymbol{i = i_1 + \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}(i_2 - i_1)}$$

بالرجوع إلى المثال يمكن إيجاد المعدل كما يلي:

$$\boldsymbol{i = 0.09 + \frac{15.652 - 15.193}{15.937 - 15.193}(0.1 - 0.09)}$$

$$\boldsymbol{i = 9.62\%}$$

حساب الجملة:

$$\mathrm{n} = 6 * 2 = 12;\ a = 58000;\ i = 8.5$$

$$\boldsymbol{A = a\frac{(1+i)^n - 1}{\mathrm{i}}}$$

$$A = 58000\frac{(1.085)^{12}-1}{0.085}$$
$$A = \mathbf{1136365^{DA}}$$

حل التمرين الثاني:

حساب ثمن الجهاز

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}$$
$$\boldsymbol{V} = 10000\frac{1-(1.08)^{-6}}{0.08}$$
$$^{\mathbf{DA}}\boldsymbol{V} = \mathbf{46228.8}$$

حساب القيمة الإجمالية المدفوعة (القيمة المحصلة)

$$\boldsymbol{A} = a\frac{(1+i)^{n}-1}{\mathrm{t}}$$
$$\boldsymbol{A} = 10000\frac{(1.08)^{6}-1}{0.08}$$
$$\boldsymbol{A} = \mathbf{73359.29^{DA}}$$

حساب قيمة الدفعة الوحيدة (القيمة الحالية للدفعات الثلاث الأخيرة)

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}(1+i)$$
$$\boldsymbol{V} = 10000\frac{1-(1.08)^{-3}}{0.08}(1.08)$$
$$^{\mathbf{DA}}\boldsymbol{V} = \mathbf{27832.64}$$

حل التمرين الثالث:

حساب قيمة الدفعة للشخص الأول والثاني: بما أن البيانات حول توظيف الشخص الأول ليست كلها متوفرة، فيمكن استخراجها من خلال حساب مبلغ الدفعة للشخص الثاني. لماذا؟ لأن قيمة الدفعة للشخص الثاني هي نصف قيمة الدفعة للشخص الأول، أي:

$$a_{2=\frac{1}{2}}\ a_1$$

حساب قيمة الدفعة للشخص الثاني:

$$\mathrm{A} = 105668.34;\ \ \mathrm{n} = 5*2 = 10;\ i = 1\%$$
$$A = \ a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Longrightarrow$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{A}}{\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}-\mathbf{1}\right]}$$

$$105668.34 = a\left[\frac{(1.01)^{10+1}-1}{0.01}-1\right] \Rightarrow a = \frac{105668.34}{\left[\frac{(1.01)^{10+1}-1}{0.01}-1\right]}$$

$$\boldsymbol{a_2 = 10000^{DA}}$$

ومنه فإن قيمة الدفعة للشخص الأول تساوي:

$$a_1 = a_2 * 2 \Longrightarrow 10000 * 2$$

$$\boldsymbol{a_1 = 20000^{DA}}$$

إيجاد معدل الفائدة:

$$\mathrm{A} = 115014.78;\ \mathrm{n} = 5;\ a = 20000$$

$$A = a\frac{(1+i)^n-1}{\mathrm{i}} \Longrightarrow \frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{115014.78}{20000} = \frac{(1+i)^5-1}{i}$$

$$5.7507 = \frac{(1+i)^5-1}{i}$$

من الجدول المالي رقم 3، في السطر الموافق للمدة 5 سنوات وعند القيمة 5.7507 نجد: **i=7%**

حل التمرين الرابع:

$$\mathrm{n} = 8 * 6 = 48;\ a = 500;\ i = 9\%$$

وبما أن إضافة الفائدة تتم كل شهرين فلابد أن يتناسب المعدل السنوي مع الفترة والمقدرة ب6 مرات أي عدد المرات التي يتكرر فيها الشهرين سنويا وهي 6 ومنه:

$$i_{\text{شهرين}} = \frac{i_a}{6} = \frac{9}{6} = 1.5\%$$

حساب الجملة:

$$A = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

$$A = 500\left[\frac{(1.015)^{48+1}-1}{0.015}-1\right]$$

$$\boldsymbol{A = 35304.3488^{DA}}$$

حل التمرين الخامس:

لدينا:

$$a_1 = 1000\,;\ a_2 = 2000\,;\ n_1 = 4\ ;\ n_2 = 2\,;\ i = 10\%$$

حساب القيمة المحصلة في 2017/01/01

$$\boldsymbol{A} = a_1\left[\frac{(1+i)^{n1+1}-1}{i}-1\right] + a_2\left[\frac{(1+i)^{n2+1}-1}{i}-1\right]$$

$$\boldsymbol{A} = 1000\left[\frac{(1.1)^{4+1}-1}{0.1}-1\right]+2000\left[\frac{(1.1)^{2+1}-1}{0.1}-1\right]$$

$$A = 5105.1 + 4620$$

$$^{\mathrm{DA}}\boldsymbol{A} = \mathbf{9725.1}$$

حساب القيمة الحالية في 2010/01/01:

$$V' = \mathrm{a}(1+\mathrm{i})\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{t}}$$

$$V' = a_1\,(1+\mathrm{i})\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-n_1}}{\mathrm{i}} + a_2(1+\mathrm{i})^{-5}\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-n_2}}{\mathrm{i}}$$

$$V' = 1000\,(1.1)\,\frac{1-(1.1)^{-3}}{0.1} + 2000(1.1)\,\frac{1-(1.1)^{-5}}{0.1}$$

$$V' = 2735.53 + 8339.73$$

$$^{\mathrm{DA}}\boldsymbol{V'} = \mathbf{11075.26}$$

حل التمرين السادس:

لدينا:

$$C = 100000\,;\; V = 400000\,;\;\; n = 8\;\;;\;\; i = 3.5\%$$

حساب قيمة الدفعة:

الباقي من الدين: 500000-100000=400000دج

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{t}} \Longrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{v}\frac{\mathrm{i}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\boldsymbol{a} = 400000\frac{0.035}{1-(1.035)^{-8}}$$

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{58190.65}\ ^{\mathrm{DA}}$$

حساب المبلغ الواجب دفعه:

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}$$

$$\boldsymbol{V} = 58190.65\frac{1-(1.035)^{-6}}{0.035}$$

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{310071.96}\ ^{\mathrm{DA}}$$

حل التمرين السابع:

لدينا:

$$V = 1000000\,;\;\; n = 10\;\;;\;\; i = 6\%$$

حساب القيمة الواجب استثمارها:

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}} \Longrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{v}\frac{\mathrm{i}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Longrightarrow a = 1000000\frac{0.06}{1-(1.06)^{-20}}$$

$$^{DA}\mathbf{a = 87108.1}$$

حل التمرين الثامن:

حساب جملة الدفعات الثلاث

$$\boldsymbol{A1 + A2 + A3}$$

$$= a1\frac{(1+i)^{n1}-1}{i} + a2\frac{(1+i)^{n2}-1}{i} + a3\frac{(1+i)^{n3}-1}{i}$$

$$= 2500\frac{(1.09)^4-1}{0.09} + 3000\frac{(1.09)^4-1}{0.09} + 3500\frac{(1.09)^4-1}{0.09}$$

$$\boldsymbol{A1 + A2 + A3 = 58152.59^{DA}}$$

حساب القيمة الحالية

$$\boldsymbol{V1 + V2 + V3}$$

$$= a1\frac{1-(1+i)^{-n1}}{i} + a2\frac{1-(1+i)^{-n2}}{i} + a3\frac{1-(1+i)^{-n3}}{i}$$

$$= 2500\frac{1-(1.09)^{-4}}{0.09} + 3000\frac{1-(1.09)^{-4}}{0.09} + 3500\frac{1-(1.09)^{-4}}{0.09}$$

$$\boldsymbol{V1 + V2 + V3 = 20675.19^{DA}}$$

حل التمرين التاسع:

قيمة الدين يوم إمضاء العقد :

$$\mathbf{V_0 =} \ 100000\ \frac{1-(1,1)^{-10}}{0,1}$$

$$= 100000 \times 6,144567 = \mathbf{614456,71^{DA}}$$

. قيمة الدين في نهاية السنة السادسة: هناك عدة طرق لحساب هذا الدين:

الطريقة الأولى: استعمال القيمة المحصلة بالفائدة المركبة:

$$A_6 = V_0\ (1+i)^n = 614456,71\ (1,1)^6 = 614456,71 \times 1,771561 =$$

$$\mathbf{1088547,54^{DA}}$$

الطريقة الثانية: استعمال القيمة المحصلة لـ 10 دفعات ثم القيمة الحالية لهذه القيمة المحصلة عند نهاية السنة السادسة بتطبيق القيمة الحالية بالفائدة المركبة :

$$A_6 = 100000\ \frac{(1,1)^{10}-1}{0,1}\ (1,1)^{-4}$$

$$A_6 = 100000 \times 15,9374246 \times 0,6830134 = \mathbf{1088547,54^{DA}}$$

الطريقة الثالثة: الدين في هذا التاريخ يساوي القيمة المحصلة لـ 6 دفعات الأولى مضافا إليها القيمة الحالية لـ 4 دفعات الباقية:

$$A_6 = 100000\,\frac{(1{,}1)^6 - 1}{0{,}1} + 100000\,\frac{1-(1{,}1)^{-4}}{0{,}1}$$

$$A_6 = 100000 \times 7{,}715610 + 100000 \times 3{,}169865$$

$$A_6 = 771561 + 316986{,}5 = \mathbf{1088547{,}54^{DA}}$$

قيمة الدين المسدد في نهاية السنة الثانية عشر: يمكن حسابه بثلاث طرق:

الطريقة الأولى:

$$A_{12} = 100000\,\frac{(1{,}1)^{10} - 1}{0{,}1}(1{,}1)^2 = 1593742{,}4 \times 1{,}210000 = \mathbf{1928428{,}30^{DA}}$$

الطريقة الثانية:

$$A_{12} = V_0\,(1{,}1)^{12} = 614456{,}71 \times 3{,}138428 = \mathbf{1928428{,}30^{DA}}$$

الطريقة الثالثة:

$$A_{12} = A_6\,(1{,}1)^6 = 1088547{,}54 \times 1{,}771561 = \mathbf{1928428{,}30^{DA}}$$

حل التمرين العاشر:

طريقة التسديد الأولى:

$$\boldsymbol{V = 96500\ ^{DA}}$$

طريقة التسديد الثانية:

$$V = A(1+i)^{-n}$$

$$V = 111500(1.06)^{-5}$$

$$\boldsymbol{V = 83319.29^{DA}}$$

طريقة التسديد الثالثة:

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}$$

$$\boldsymbol{V} = 5350\frac{1-(1.06)^{-15}}{0.06}$$

$$\boldsymbol{V = 51960.53^{DA}}$$

حل التمرين الحادي عشر:

$$\mathrm{V} = 120000 - 60000 = 60000;\ \ \mathrm{n} = 10;\ i = 7\%$$

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{t}} \Longrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{V}\frac{\mathrm{i}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\boldsymbol{a} = 60000\frac{0.07}{1-(1.07)^{-10}}$$

$$\boldsymbol{a = 8542.56^{DA}}$$

حل التمرين الثاني عشر:

حساب المعدل:

$$V' = V\,(1+i)$$

$$11036.4462 = 10125.18\,(1+i)$$

$$\frac{11036.4462}{10125.18} = (1+i)$$

$$1.09 - 1 = i$$

$$\boldsymbol{i = 9\%}$$

حساب عدد الدفعات:

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}$$

$$\frac{\boldsymbol{V}}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}$$

$$\frac{10125.18}{4000} = \frac{1-(1.09)^{-n}}{0.09}$$

$$2.5313 = \frac{1-(1.09)^{-n}}{0.09}$$

من الجدول المالي رقم 4، في السطر الموافق للمعدل 9% وعند القيمة 2.5313 نجد: n=3 ans

حل التمرين الثالث عشر:

حساب قيمة المحل:

$$\boldsymbol{V} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}$$

$$\boldsymbol{V} = 25000\frac{1-(1.06)^{-15}}{0.06}$$

$$\boldsymbol{V = 24280}\ ^{\boldsymbol{DA}}$$

حساب قيمة الدفعة الجديدة:

لتكن V_1 القيمة الحالية للدفعات الخمس:

$$V_1 = 250000 - 250000/5 \Longrightarrow \boldsymbol{V_1 = 20000}$$

$$\boldsymbol{V1} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}} \Longrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{V1}\ \frac{1}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{\mathrm{i}}}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{a} = 20000\ \frac{1}{\frac{1-(1.06)^{-5}}{0.06}}$$

$$\mathbf{a = 47479.28}^{\boldsymbol{DA}}$$

هوامش الفصل الثالث:

[1] ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص 79.
[2] صليحة بن عميروش، الرياضيات المالية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة الجزائر 3، 2023، ص 60
[3] نفس المرجع السابق.
[4] نفس المرجع السابق.
[5] صليحة بن طلحة، الرياضيات المالية ، مرجع سبق ذكره، ص 132.

الفصل الرابع: استهلاك القروض

تعتبر القروض أحد أهم مصادر التمويل التي تعتمد عليها المؤسسات والأفراد لتمويل مختلف الاحتياجات المالية، إلا أن هذه القروض لديها تاريخ استحقاق ومدة معينة تسدد فيها، ويشمل سداد القرض على مبلغ القرض بالإضافة إلى الفوائد، وتختلف طريقة سداد القرض باختلاف نوع القرض، قيمة القرض، مدة السداد وغيرها من العناصر الأخرى، إلا أن الطرق الأكثر شيوعا في سداد القروض تتمثل في:

- طريقة استهلاك القروض بدفعات ثابتة (القسط المتساوي)

طريقة استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة (القسط المتناقص)

أولا– طريقة استهلاك القروض بدفعات ثابتة (القسط المتساوي):

قبل التطرق إلى تحديد مفهوم طريقة القسط المتساوي لابد من معرفة ما المقصود باستهلاك القرض؟ يمكن القول أن استهلاك القرض هو قسط يسدد من أصل القرض، وعند بلوغ أقساط استهلاك القرض المبلغ الأصلي للقرض يكون المدين قد أوفى بالتزاماته اتجاه الدائن، أما فيما يخص طريقة القسط المتساوي فهي تقوم على فكرة أساسية وهي أن القرض يسدد بشكل دوري عن طريق دفعات ثابتة بعدد معين وتشمل الدفعة على جزئين:

الاستهلاك ونرمز له بالرمز **M**

الفائدة ونرمز لها بالرمز **I**

الدفعة = الاستهلاك + الفائدة

$$\mathbf{a = M + I}$$

1. حساب القسط المتساوي (قيمة الدفعة): تعتبر الأقساط في هذه الحالة دفعات عادية، حيث دائما ما يسدد القرض في نهاية كل فترة زمنية، وتعطى قيمة الدفعة بالعلاقة التالية:[1]

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

حيث:

V_0 : قيمة أصل القرض

a: القسط المتساوي وهو يتكون من الاستهلاك والفائدة

n : عدد الفترات الزمنية لاستهلاك القرض

I_i: الفائدة السنوية وهي تتناقص حسب السنوات إذ تطبق على أصل القرض كل سنة.

$$I_1 = V_0 * i$$

2. جدول استهلاك القرض

الجدول رقم (06): جدول استهلاك القرض

n	أصل القرض في بداية السنة V_0	الفائدة I	القسط المتساوي a	الاستهلاك M	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1 2 . . n_i	V_0 $V_1 = V_0 - M_1$ $V_2 = V_1 - M_2$ $V_n = V_{n-1} - M_n$.	$I_1 = V_0 * i$ $I_2 = V_1 * i$ $I_3 = V_2 * i$ . . $I_n = V_{n-1} * i$	a a a . . a_n	$M_1 = a - I_1$ $M_2 = a - I_2$ $M_3 = a - I_3$. M_n	M_1 $M_1 + M_2$ $M_1 +$ $M_2 + M_3$ V_n	$V_1 = V_0 - M_1$ $V_2 = V_1 - M_2$ $V_3 = V_2 - M_3$ 0
		$\sum I$	$\sum a$	$\sum M$		

مثال: تحصل شخص على قرض بقيمة 120000 دج يسدد خلال 3 سنوات بدفعات ثابتة سنوية، فاذا علمت ان معدل الفائدة هو 10% سنويا، احسب قيمة الدفعة الثابته؟ ثم اوجد جدول استهلاك القرض.

الحل:

لدينا:

$$V_0 = 120000 \quad i = 10\% \quad n = 3$$

حساب قيمة الدفعة:

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 120000 \frac{0.1}{1-(1.1)^{-3}}$$

$$\boldsymbol{a = 48253.78} \ \textbf{DA}$$

إعداد جدول القرض:

n	أصل القرض في بداية السنة V_0	الفائدة I	القسط المتساوي a	الاستهلاك M	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1 2 3	120000 83746.25 43867.095	12000 8374.625 4386.7095	48253.78 48253.78 48253.78	36253.75 39879.155 43867.0705	36253.75 76132.905 120000	83746.25 43867.095 0

		120000	144761.34	24761.33		

3. **العلاقة العامة من جدول الاستهلاك:** من جدول القرض يمكننا استخراج علاقات تربط مختلف عناصره على النحو التالي:[2]

1.3 العلاقة بين الدفعات واصل القرض: أصل القرض تساوي القيمة الحالية للدفعات:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مجموع الدفعات= أصل القرض + مجموع الفوائد:

$$\sum \boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{I} + \boldsymbol{V_0} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\sum \boldsymbol{I}+\boldsymbol{V_0}}{\boldsymbol{n}}$$

2.3 العلاقة بين الاستهلاكات:

$$V_0 = \sum M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

من السطر الأول لجدول القرض نجد:

$$\left.\begin{matrix} I_1 = V_0 * i \\ M_1 = a - I_1 \end{matrix}\right] \Rightarrow M_1 = a - (V_0 * i) \dots (1)$$

ولدينا:

$$\left.\begin{matrix} I_2 = V_1 * i \\ M_2 = a - I_2 \\ V_1 = V_0 - M_1 \end{matrix}\right] \Rightarrow M_2 = a - (V_1 * i) = a - \big((V_0 - M_1) * i\big)$$

$$\Rightarrow M_2 = a - V_0 * i + M_1 * i$$
$$\Rightarrow M_2 = M_1 + M_1 * i$$
$$\Rightarrow M_2 = M_1(1+i) \dots (2)$$

وبالمثل في استهلاكات السنوات اللاحقة نجد أن:

$$M_3 = M_2(1+i) = M_1(1+i)^2$$
$$M_n = M_1(1+i)^{n-1}$$

وبدلالة الفترة السابقة نجد

$$\boldsymbol{M_n = M_{n-1}(1+i)}$$

3.3 العلاقة بين الاستهلاكات واصل القرض: نعلم أن مجموع الاستهلاكات يساوي أصل القرض..

ولدينا:

$$V_0 = \sum M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

وبتعويض المعادلة العلاقة بين الاهتلاكات نجد:

$$V_0 = M_1 + M_1(1+i) + \cdots M_1(1+i)^{n-1}$$

هذه المتتالية تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ يعطى مجموعها بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{V_0 = M_1\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

4.3 العلاقة بين الفوائد والاستهلاكات:

بما أن القرض يسدد بواسطة دفعات ثابتة، فإن:

$$a = I_n + M_n$$

وكذلك في الفترة الموالية:

$$a = I_{n+1} + M_{n+1}$$

وبما أن الدفعة ثابتة:

$$I_n + M_n = I_{n+1} + M_{n+1}$$

ننقل الحدود، فتصبح العلاقة النهائية:

$$\boldsymbol{I_n - I_{n+1} = M_{n+1} - M_n}$$

مثال: تحصل شخص على قرض يسدد عن طريق دفعات ثابتة، فإذا توفرت لديك المعلومات التالية:

القرض المتبقي في نهاية السنة الأولى 85298.26 دج.

فائدة السنة الأولى 5000 دج.

فائدة السنة الثانية 4264.91 دج.

المطلوب: إيجاد معدل الفائدة، القسط المستهلك خلال السنة الأولى، أصل القرض، قيمة الدفعة، قيمة القرض المتبقي في نهاية السنة الثانية.

الحل:

$$\boldsymbol{V_{1=}\ 85298.26\ \ I_1 = 5000\ \ I_2 = 4264.91}$$

حساب المعدل: لدينا العلاقة التالية: $\boldsymbol{I_2 = V_1 *}$

$$\Rightarrow \mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{I_2}}{\boldsymbol{V_1}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} = \frac{\mathbf{4264.91}}{\mathbf{85298.26}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{5\%}$$

حساب استهلاك السنة الأولى:

$$I_n - I_{n+1} = M_{n+1} - M_n$$
$$I_1 - I_2 = M_2 - M_1$$
$$5000 - 4264.91 = M_1(1.05) - M_1$$
$$735.09 = 0.05M_1 \Rightarrow M_1 = 14701.8$$

حساب أصل القرض:

$$\boldsymbol{I_1 = V_0 * i \Rightarrow V_0 = \frac{I_1}{i} \Rightarrow \frac{5000}{0.05}}$$
$$\boldsymbol{= 100000DA}$$

حساب قيمة الدفعة:

$$\boldsymbol{M_1 = a - I_1}$$

$$\Rightarrow\ a = M_1 + I_1$$

$$\Rightarrow\ a = 14701.8 + 5000$$

$$\boldsymbol{^{DA}a = 19701.8}$$

حساب قيمة القرض المتبقي نهاية السنة الثانية:

$$V_2 = V_1 - M_2$$

$$V_2 = 85298.26 - 14701.8\ (1.05)$$

$$\boldsymbol{^{DA}V_2 = 69861.37}$$

ثانيا– طريقة استهلاك القروض بالقسط المتناقص (الاستهلاك الثابت):

تقوم هذه الطريقة على مبدأ تسديد القروض بشكل دوري(سنويا، شهريا ...إلخ)، وذلك بدفع المقترض دفعات تشمل جزء ثابت من أصل القرض وجزء ثاني متغير يتمثل في الفائدة على القرض المتبقي في كل فترة. حيث تتحدد قيمة الجزء الثابت من خلال قسمة أصل القرض على عدد الدفعات، ويؤدي تناقص أصل القرض عبر الفترات إلى تناقص قيمة الفائدة المدفوعة في كل مرة وهو بدوره يؤدي إلى تناقص قيمة الدفعات.

1. حساب قسط الاستهلاك الثابت: ويحسب بقسمة أصل القرض على عدد الأقساط التي تتوافق مع الفترات الزمنية التي تسدد فيها، فإذا اعتبرنا:

V_0 : قيمة أصل القرض

M : الاستهلاك

a: القسط المتناقص

n : عدد الفترات الزمنية لاستهلاك القرض

I_i: الفائدة السنوية المتناقصة

تصبح علاقة القسط المتساوي تعطى بالعلاقة التالية:

$$M = \frac{c_0}{n}$$

2. **جدول استهلاك القرض:** إن العنصر الأساسي في جدول استهلاك القرض وفق هذه الطريقة هو ان الاستهلاك ثابت، بينما نجد أن الدفعة المتساوية هي أهم عنصر وفق طريقة استهلاك القروض بدفعات ثابتة، كما أن جدول استهلاك القرض يأخذ وفق هذه الطريقة نفس الشكل الخاص بجدول استهلاك القرض بدفعات ثابتة، إلا أنه يجب الأخذ بعين الاعتبار الاختلافات القائمة في العمليات الحسابية.

الجدول رقم (07): جدول استهلاك القرض

N	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	a القسط المتناقص	الاهتلاك المتساوي	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)
1 2 3 n_i	V_0 $V_1 = V_0 - M$ $V_2 = V_1 - M$ $V_n = V_{n-1} - M.$	$I_1 = V_0 * i$ $I_2 = V_1 * i$ $I_3 = V_2 * i$ . . $I_n = V_{n-1} * i$	$a_1 = V_0 * i + M$ $a_2 = V_1 * i + M$ $a_3 = V_2 * i + M$ . . a_n	M M . M M	$V_1 = V_0 - M$ $V_2 = V_1 - 2M$ $V_3 = V_2 - 3M$. V_n
		$\sum I$	$\sum a$	V_0	

حيث:

$$\sum a = nM + \sum I \quad V_1 = V_0 - M$$
$$V_2 = V_1 - 2M \qquad V_n = V_{n-1} - M_n$$
$$I_1 = V_0 * \mathrm{i} \qquad \mathrm{M_1 = a - I_1}$$
$$. I_2 = V_1 * \mathrm{i} \qquad \mathrm{M_2 = a - I_2 = M_1(1 + i)}$$
$$I_n = V_{n-1} * \mathrm{i} \; ; \; M_n = \mathrm{a - I_n = M_{n-1}(1 + i) = M_1(1 + i)^{n-1}}$$

مثال: اقترض شخص مبلغا من المال قيمته 80000دج، واتفق على تسديده بطريقة الأقساط المتساوية والثابتة بمعدل فائدة 10 % لمدة4 سنوات.

أنجز جدول استهلاك القرض؟

الحل:

حساب قسط الاستهلاك السنوي الثابت:

$$M = \frac{V_0}{n} = \frac{80000}{4} = 20000$$

حساب الفوائد المستحقة سنويا:

$$I_1 = V_0 * \mathrm{i} \implies I_1 = 8000$$
$$I_2 = V_1 * \mathrm{i} \implies I_2 = V_0 - M \Rightarrow 80000 - 20000$$
$$I_2 = 60000$$

الأقساط الواجب سدادها سنويا:

$$a_1 = V_0 * i + M$$
$$a_1 = 80000 * 0{,}1 + 20000$$
$$a_1 = 28000$$
$$a_2 = 60000 * 0{,}1 + 20000$$
$$a_2 = \mathbf{26000}$$

إعداد جدول القرض:

n	V_0 أصل القرض	I الفائدة	aالقسط المتناقص	الاهتلاك المتساوي	المبلغ في نهاية السنة
1	80000	8000	28000	20000	60000
2	60000	.6000	26000	20000	40000
3	40000	4000	24000	20000	20000
4	20000	2000	22000	20000	0

3. العلاقات العامة من جدول الاستهلاك:

1.3 أصل القرض: يعطى بالعلاقة التالية:

$$V_0 = \mathrm{M} * \mathrm{n}$$

2.3 علاقة الدفعات فيما بينها:

$$a_1 = \mathrm{M} + \mathrm{I}_1 = \frac{V_0}{n} + V_0 * \mathrm{i}$$
$$a_2 = \mathrm{M} + \mathrm{I}_2 = \frac{V_0}{n} + V_1 * \mathrm{i}$$
$$a_n = \mathrm{M} + \mathrm{I}_\mathrm{n} = \frac{V_0}{n} + V_{\mathrm{n}-1} * \mathrm{i}$$
$$a_{n+1} = \mathrm{M} + \mathrm{I}_{\mathrm{n}+1} = \frac{V_0}{n} + V_\mathrm{n} * \mathrm{i}$$

ولدينا:

$$V_n = V_{n-1} - \frac{V_0}{n}$$

ومنه:

$$a_{n+1} = \frac{V_0}{n} + \left(V_{n-1} - \frac{V_0}{n}\right) * \mathrm{i}$$

$$a_{n+1} = \frac{V_0}{n} + V_{n-1} * \mathrm{i} - \frac{V_0}{n} * \mathrm{i}$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{V_0}{n} * \mathrm{i}$$

3.3 مجموع الدفعات: ان الدفعات تشكل فيما بينها متتالية عددية حدها الاول a_1 واساسها $\frac{V_0}{n} *$ i (فائدة الاستهلاك) وعدد حدودها n.

في طريقة الاستهلاك الثابت يكون:

$$I = \frac{V_0}{n}$$

والدفعة رقم K تساوي:

$$a_k = I + M_k$$

وبما أن:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{V_0}{n} * \mathrm{i}$$

ومنه:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{V_0}{n} * \mathrm{i}$$

وهو مقدار ثابت، إذا الدفعات:

$$a_1, a_2, \ldots., a_n$$

تشكل متتالية حسابية متناقصة أساسها $r = -\frac{V_0}{n} *$ i

وعدد حدودها: n

وعليه يصبح حدود متتالية عددية من الشكل:

$$\sum_{K=1}^{n} \mathbf{a_K} = \left(\frac{\mathbf{a_1} + \mathbf{a_n}}{\mathbf{2}}\right) * \mathbf{n}$$

تمارين حول استهلاك القرض

التمرين الأول: من جدول استهلاك قرض عادي يسدد بواسطة دفعات ثابتة تحصلنا على المعلومات التالية:

فائدة السنة الأولى 1000 دج

الاستهلاك الثاني 3087.37 دج.

الفرق بين فائدة السنة الأولى وفائدة السنة الثانية 147.02 دج.

أحسب على الترتيب: معدل القرض؛ مبلغ الدفعة الثابتة؛ مبلغ القرض.

التمرين الثاني: اقترضت مؤسسة مبلغا قدره 150000 يسدد بواسطة دفعات ثابتة خلال 4 سنوات بمعدل% 10 سنويا

أحسب مبلغ الدفعة الثابتة، أنجز جدول استهلاك هدا القرض.

التمرين الثالث: قرض يسدد بواسطة 6 دفعات ثابتة تدفع الأولى منها في نهاية السنة الأولى من تاريخ استلام القرض فاذا علمت أن مجموع الاستهلاكات $M2+M3+M4=9558,7$

أحسب بمعدل فائدة مركبة % 8 سنويا وعلى الترتيب:

الاستهلاك الأول، ، أحسب أصل القرض، المبلغ الباقي بعد الدفعة الثالثة، قدم السطرين الأول والثاني من جدول الاستهلاك.

التمرين الرابع: من جدول استهلاك قرض عادي استخرجنا المعلومات التالية:

$M9=127768,77\ ^{DA}$ $M1=69029,49^{DA}$

أحسب المعدل السنوي، أحسب القسط الثابت علما أن القرض يستهلك عن طريق 10 أقساط ثابتة متساوية، أحسب أصل القرض.

التمرين الخامس: إذا علمت أن مبلغ الاستهلاك الرابع يقدر ب 179589.68دج، ومبلغ الدفعة هو 201786.97دج، وان القرض يسدد بعد 5 دفعات ثابتة لنهاية المدة.

اوجد: معدل الفائدة، مبلغ القرض السطر الأول والأخير من جدول استهلاك القرض

التمرين السادس: دين قيمته 500000دج يسدد خلال 20 سنة بواسطة دفعات ثابتة الأولى تدفع سنه بعد الاقتراض وبمعدل 6%.

اوجد: الدفعة الثابتة، حساب الاستهلاك الأخير

التمرين السابع: اقترضت المؤسسة مبلغ 1000000 يسدد بدفعات ثابتة خلال 15 سنة بمعدل فائدة مركبة % 7 سنويا

أحسب مبلغ الاستهلاك العاشر؛ أحسب المبلغ المتبقي تسديده من القرض بعد دفع الدفعة العاشرة؛ أحسب الفوائد المتضمن في الدفعة الأخيرة.

التمرين الثامن: من جدول استهلاك قرض عادي يسدد بواسطة 5 دفعات ثابتة استخرجنا ما يلي:

رصيد نهاية السنة الثانية 200255 دج.

رصيد نهاية السنة الرابعة 73205 دج.

أحسب على الترتيب: معدل القرض؛ الدفعة الثابتة؛ الاستهلاك الأول؛ أصل القرض.

التمرين التاسع: قرض يسدد بواسطة 9 دفعات ثابتة تدفع الأولى بعد سنة من تاريخ الحصول على القرض إذا علمت أن:

$$a=1075,92\ ^{DA}$$
$$M9\text{-}M1=278,61\ ^{DA}$$

احسب على الترتيب: الاستهلاك الأخير؛ معدل القرض؛ أصل القرض.

التمرين العاشر: من جدول استهلاك قرض عادي يسدد بواسطة 6 دفعات ثابتة تحصلنا على المعلومات التالية:

$$=1,1025\frac{M_3}{M_1}$$
$$I_1-I_3=4100\ ^{DA}$$

أحسب على الترتيب: الاستهلاك الأول؛ معدل الفائدة؛ أصل المبلغ؛ قيمة الدفعة؛

التمرين الحادي عشر: من أجل مسايرة الأوضاع الاجتماعية قررت إدارة المؤسسة زيادة طاقتها الإنتاجية ولهذا الغرض اقترضت مبلغا إضافيا يسدد على 6 أقساط سنوية متساوية فادا علمت أن:

$$I_3 - I_4 = 1018,42$$

قيمة القسط المتساوي هي 11883.8 دج، والاستهلاك الرابع 7807.86 دج

أحسب معدل الفائدة المركبة، قيمة القرض وأنجز السطرين الأول والرابع من جدول الاستهلاك.

التمرين الثاني عشر: تسعى إدارة المؤسسة التجارية إلى زيادة طاقة إنتاجها عن طريق اقتناء تجهيزات إنتاج جديدة لهدا الغرض اقترضت مبلغا إضافيا قدره (x) يسدد بواسطة 9 أقساط سنوية متساوية بمعدل فائدة مركبة% 15 سنويا.

إذا علمت أن رصيد القرض في نهاية السنة الأولى 564255.6 دج، والفرق بين فائدتي السنة الأولى والسنة الثانية يساوي 5361.66دج.

أحسب مبلغ الدفعة الثابتة وأنجز السطر الأول والأخير من جدول استهلاك القرض.

التمرين الثالث عشر: قرض يستهلك بواسطة 10 أقساط ثابتة سنوية بمعدل فائدة % 8 سنويا من جدول استهلاك القرض استخرجنا رصيد القرض في نهاية السنة السادسة الذي بلغ 493604.55 دج.

أحسب القسط الثابت وأنجز السطر الأخير ثم السطر السادس من جدول استهلاك هذا القرض.

التمرين الرابع عشر: قرض قيمته الاسمية V_0 يُسدد بواسطة 10 دفعات سنوية ثابتة .لديك المعلومات التالية المستخرجة من جدول استهلاك هذا القرض كما يلي:

$$M_3=23460,22\ ^{DA}$$
$$M_6=30381,61\ ^{DA}$$
$$V_7 = 118328.24^{DA}$$

أحسب على الترتيب: معدل القرض، أصل القرض، قيمة الدفعة وتقديم جزء من جدول الاستهلاك المتعلق بالاستحقاقات الثلاثة الأخيرة.

الحلول:

حل التمرين الأول:

$V_{1=}\ 85298.26 \quad I_1 = 1000 \quad M_2 = 3087.37\ I_1 - I_2 = 147.02$

حساب معدل الفائدة:

$$I_1 - I_2 = 147.02$$
$$1000 - I_2 = 147.02$$
$$I_2 = 852.98$$
$$I_1 - I_2 = M_2 - M_1$$
$$147.02 = 3087.37 - M_1$$
$$\mathbf{M_1 = 2940.35}^{DA}$$

لدينا:

$$M_n = M_{n-1}(1+i)$$
$$M_2 = M_1(1+i)$$
$$3087.37 = 2940.35(1+i)$$
$$\frac{3087.37}{2940.35} = (1+i)$$
$$1.050000 = (1+i)$$
$$\boldsymbol{i = 5\%}$$

حساب قيمة الدفعة:

$$M_1 = a - I_1$$
$$\Rightarrow\ a = M_1 + I_1$$
$$\Rightarrow\ a = 2940.35 + 1000$$
$$\mathbf{a = 3940.35}^{DA}$$

حساب مبلغ القرض:

$$I_1 = V_0 * i \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{I_1}{i} \quad \Rightarrow \quad \frac{1000}{0.05} = \mathbf{20000}$$

حل التمرين الثاني:

لدينا:

$$V_0 = 150000 \quad i = 10\% \quad n = 4$$

حساب قيمة الدفعة:

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$a = 150000 \frac{0.1}{1-(1.1)^{-4}}$$
$$\boldsymbol{a = 47320.62} \ \mathbf{DA}$$

جدول استهلاك القرض:

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1	150000	15000	47320.62	32320.62	117679.38
2	117679.38	8374.625	47320.62	35552.68	82126.70
3	82126.70	4386.7095	47320.62	39107.95	43018.75
4	43018.75		47320.62	43018.75	0

حل التمرين الثالث:

حساب الاستهلاك الأول:

لدينا:

$$M2+M3+M4=9558,7$$

$$M_n = M_{n-1}(1+i)$$
$$M_1(1+i) + M_1(1+i)^2 + M_1(1+i)^3 = 9558.7$$
$$M_1(1.08) + M_1(1.08)^2 + M_1(1.08)^3 = 9558.7$$
$$1.08\, M_1 + 1.1664\, M_1 + 1.259712 M_1 = 9558.7$$
$$3.506112\, M_1 = 9558.7$$
$$\boldsymbol{M_1 = 2726.18^{DA}}$$

حساب أصل القرض

$$V_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = 2726.18\frac{(1.08)^6 - 1}{0.08}$$
$$\boldsymbol{V_0 = 20000^{DA}}$$

المبلغ الباقي بعد الدفعة الثالثة:

$$V_3 = V_2 - M_3$$
$$V_3 = M_1\frac{(1+i)^2 - 1}{i} - M_1(1+i)^2$$
$$V_3 = 2726.18\frac{(1.08)^2 - 1}{0.08} - 2726.18(1.08)^2$$
$$\boldsymbol{V_3 = 8850.27^{DA}}$$

السطر الأول والثاني من جدول الاستهلاك:

$$M_1 = a - I_1$$
$$\Rightarrow a = M_1 + V_0 * i$$
$$\Rightarrow a = 2726.18 + (20000 * 0.08)$$
$$\boldsymbol{^{DA}a = 4326.18}$$

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1	20000	1600	4326.18	2726.18	17273.82
2	17273.82	1381.9056	4326.18	2944.28	14329.54

حل التمرين الرابع:

حساب المعدل السنوي:

لدينا:

$$M_n = M_{n-1}(1+i)$$
$$M_9 = M_1(1+i)^8$$
$$127768.77 = 69029.49(1+i)^8$$
$$\frac{127768.77}{69029.49} = (1+i)^8$$
$$1.85093023 = (1+i)^8$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم (1) وعند السنة الثامنة، نجد أن القيمة المالية هذه تقابل معدل الفائدة

$$\boldsymbol{i = 8\%}$$

حساب القسط الثابت:

$$n = 10$$
$$a = M_1(1+i)^n$$
$$a = 69029.49(1.08)^{10}$$
$$\boldsymbol{a = 149029.49^{DA}}$$

حساب أصل القرض:

$$V_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$V_0 = 69029.49 \frac{(1.08)^{10} - 1}{0.08}$$
$$\boldsymbol{V_0 = 1000000^{DA}}$$

حل التمرين الخامس:

إيجاد معدل الفائدة:

$$n = 5;\ a = 201786.97;\ M_4 = 179589.68$$
$$a = M_4(1+i)^n$$
$$201786.97 = 179589.68(1+i)^5$$
$$\frac{201786.97}{179589.68} = (1+i)^5$$
$$1.1236 = (1+i)^5$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم (1) نجد أن القيمة المالية هذه تقابل معدل الفائدة

$$\boldsymbol{i = 6\%}$$

حساب مبلغ القرض:

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$V_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
$$V_0 = 201786.97 \frac{1-(1.06)^{-5}}{0.06}$$
$$\boldsymbol{V_0 = 850000^{DA}}$$

انجاز السطر الأول والأخير:

$$M_1 = a - I_1$$

$$M_1 = 201786.97 - 51000$$

$$M_1 = 150786.97$$

$$M_5 = M_4(1+i)$$
$$M_5 = 179589.68(1.06)$$
$$\boldsymbol{M_5 = 190365.06^{DA}}$$

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1	850000	51000	201786.97	150786.97	699213.03
5	190365.06	11421.90	201786.97	190365.06	0

حل التمرين السادس:

حساب الدفعة الثابتة:

$$n = 20;\ V_0 = 500000;\ i = 6\%$$
$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$a = 500000 \frac{0.06}{1-(1.06)^{-20}}$$
$$\boldsymbol{a = 43592.27^{DA}}$$

حساب الاستهلاك الأخير:

$$M_n = M_1(1+i)^{n-1}$$
$$M_1 = a - I_1$$
$$M_1 = a - V_0 * i$$
$$M_1 = 43592.27 - (500000 * 0.06)$$
$$\boldsymbol{M_1 = 13592.27^{DA}}$$
$$M_{20} = M_1(1+i)^{19}$$

$$M_{20} = 13592.27(1.06)^{19}$$

$$\boldsymbol{M_{20} = 41124.76^{DA}}$$

حل التمرين السابع:

حساب الاستهلاك العاشر:

$$n = 15;\ V_0 = 1000000;\ i = 7\%$$

$$M_n = M_1(1+i)^{n-1}$$

$$M_{10} = M_1(1+i)^9$$

$$M_1 = \frac{M_{10}}{(1+i)^9}$$

$$V_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = \frac{M_{10}}{(1+i)^9} . \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = M_{10} . \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^9 . i}$$

$$M_{10}((1+i)^n - 1) = V_0\ (1+i)^9 . i$$

$$M_{10} = V_0\ \frac{i}{(1+i)^n - 1}(1+i)^9$$

$$M_{10} = 1000000\ \frac{0.07}{(1.07)^{15} - 1}(1.07)^9$$

$$M_{10} = 1000000\ \frac{0.07}{1.75903154}1.838459$$

$$\boldsymbol{73160.78^{DA} M_{10} =}$$

المبلغ المتبقي تسديده من القرض بعد دفع الدفعة العاشرة:

$$V_{10} = V_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$V_{10} = V_0 \frac{(1+i)^{15} - (1+i)^{10}}{(1+i)^{15} - 1}$$

$$V_{10} = 1000000 \frac{(1.07)^{15} - (1.07)^{10}}{(1.07)^{15} - 1}$$

$$V_{10} = 1000000 \frac{2.75903154 - 1.96715135}{2.75903154 - 1}$$

$$\boldsymbol{V_{10} = 450179.64^{DA}}$$

الفوائد المتضمنة في الدفعة الأخيرة:

في السطر الأخير من جدول استهلاك القرض

$$V_{15} = 0 \rightarrow M_{15} = V_{14}$$
$$I_{15} = V_{14}.i$$
$$V_{14} = 1000000\frac{(1.07)^{15} - (1.07)^{14}}{(1.07)^{15} - 1}$$
$$V_{14} = 1000000\frac{2.75903154 - 2.57853415}{2.75903154 - 1}$$
$$V_{14} = 102611.80$$
$$I_{15} = V_{14}.i$$
$$I_{15} = 102611.80 * 0.07$$
$$^{DA}\boldsymbol{I_{15} = 7182.83}$$

حل التمرين الثامن:

$$V_5{=}0 \leftrightarrow V_5{=}\ V_4{-}M_5{=}0$$
$$\rightarrow V_4{=}M_5{=}\ 73205$$

لدينا:

$$V_3{=}\ V_2{-}M_3$$
$$V_4{=}\ V_3{-}M_4$$
$$\rightarrow V_4{=}\ V_2{-}M_3{-}M_4$$
$$\rightarrow 73205{=}200255{-}M_3{-}M_4$$
$$\rightarrow M_3{+}M_4{=}127050\ldots\ldots\ldots(1)$$

لدينا:

$$M_5{=}M_3\ (1+i)^2$$
$$\rightarrow M_3{=}\ \frac{M_5}{(1+i)^2}\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$M_5 = M_4(1+i)$$
$$\rightarrow M_5{=}\frac{M_5}{(1+i)}\ldots\ldots\ldots(3)$$

بتعويض المعادلتين 2 و 3 في المعادلة 1 نجد:

$$(1)\leftrightarrow\ \frac{M_5}{(1+i)^2}{+}\frac{M_5}{(1+i)}{=}127050$$
$$\rightarrow \frac{73205}{(1+i)^2}{+}\frac{73205}{(1+i)}{=}127050$$
$$\rightarrow \frac{73205{+}73205(1{+}i)}{(1+i)^2}{=}127050$$
$$\rightarrow 73205 + 73205(1+i){=}\ 127050(1+i)^2$$
$$\rightarrow 127050(1+i)^2{=}73205\ i\ {+}146410$$
$$\rightarrow 127050(i^2{+}2\ i\ {+}1){=}73205\ i\ {+}146410$$
$$\rightarrow 127050i^2{+}254100\ i\ {+}127050{=}73205\ i\ {+}146410$$

$$\rightarrow 127050i^2+180895\ i-19360=0$$
$$\rightarrow 2541i^2+3617{,}9\ i-387{,}2=0$$

حلول المعادلة (4) هي حلول المميز:

$$\Delta= B2-4AC$$
$$\rightarrow \Delta= (3617.9)^2-4(2541)(-387{,}2)$$
$$\rightarrow \Delta= 13089200{,}41+3935500{,}8$$
$$\rightarrow \Delta= 17024701.21$$
$$\rightarrow\sqrt{\Delta}= 4126{,}1\ ou\ \sqrt{\Delta}= -4126{,}1$$

إذن حلول هذه المعادلة هي:

$$i_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-3617.9-4126.1}{2(2541)}<0\ refusée$$
$$i_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-3617.9+4126.1}{2(2541)}=0{,}1>0\ Acceptée$$

إذن معدل القرض هو:

$$\boldsymbol{i=10\%}$$

حساب قيمة الدفعة الثابتة:

$$a=M_5(1+i)$$
$$a=73205(1.1)$$
$$\boldsymbol{a=80525.5^{DA}}$$

حساب الاستهلاك الأول:

$$a=M_1(1+i)^n$$
$$M_1=\frac{a}{(1+i)^n}$$
$$M_1=\frac{80525.5}{(1.1)^5}$$
$$\boldsymbol{M_1=50000^{DA}}$$

حساب أصل القرض:

$$V_0=M_1\frac{(1+i)^n-1}{i}$$
$$V_0=50000\frac{(1.1)^5-1}{0.1}$$
$$\boldsymbol{V_0=305255^{DA}}$$

حل التمرين التاسع:

الاستهلاك الأخير:

$$M_9-M_1=278{,}61$$

$$\rightarrow M_1\ (1+i)^8 - M_1 = 278{,}61$$

$$\rightarrow M_1(1+i)^8 - 1] = 278{,}61$$

$$\rightarrow M_1.[1{,}368569 - 1] = 278{,}61$$

$$\rightarrow 0{,}368569 M_1 = 278{,}61$$

$$\rightarrow \boldsymbol{M_1 = 755{,}93^{DA}}$$

$$M_9 = M_1(1+i)^8$$

$$\rightarrow M_9 = 755{,}93 * 1{,}368569$$

$$\boldsymbol{M_9 = 1034{,}53^{\ DA}}$$

حساب معدل القرض:

$$(1+i)^8 = 1{,}368569$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم (1) وعند السنة الثامنة، نجد أن القيمة المالية هذه تقابل معدل الفائدة

$$\boldsymbol{i = 4\%}$$

حساب أصل القرض:

$$V_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = 755.93 \frac{(1.04)^9 - 1}{0.04}$$

$$\boldsymbol{V_0 = 8000^{DA}}$$

حل التمرين العاشر:

حساب الاستهلاك الأول:

لدينا:

$$\frac{M_3}{M_1} = 1{,}1025$$

$$I_1 - I_3 = 4100^{\,DA}$$

$$n = 6$$

$$\frac{M_3}{M_1} = 1.1025$$

$$\frac{M_1(1+i)^2}{M_1} = 1.1025$$

$$(1+i)^2 = 1.1025$$

$$1 + i = \sqrt{1.1025}$$

$$1 + i = 1.05$$

$$\boldsymbol{i = 5\%}$$

حساب الاستهلاك الأول:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = M_1.i \text{.....(1)} \\ I_2 - I_3 = M_2.i \text{ .....(2)} \end{cases}$$

بجمع المعادلتين 1 و 2 نجد:

$$I_1 - I_3 = M_1.i + M_2.i = 4100$$
$$i\,(M_1 + M_2) = 4100$$
$$i\,(M_1 + M_1(1+i)) = 4100$$
$$M_1.i(1+1+i) = 4100$$
$$M_1.i\,(2+i) = 4100$$
$$M_1 = \frac{4100}{i\,(2+i)}$$
$$M_1 = \frac{4100}{0.05\,(2+0.05)}$$
$$M_1 = \frac{4100}{0.1025}$$
$$\boldsymbol{M_1 = 40000^{DA}}$$

حساب أصل القرض:

$$V_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$V_0 = 40000 \frac{(1.05)^6 - 1}{0.05}$$
$$\boldsymbol{^{DA}V_0 = 272076.51}$$

حساب قيمة الدفعة الثابتة:

$$a = M_1 + V_0 * i$$
$$a = 40000 + (272076.51 * 0.05)$$
$$\boldsymbol{a = 53603.82^{DA}}$$

حل التمرين الحادي عشر:

لدينا:

$M_4 \text{a} = 11883.8$ = 7807.86 $\quad I_3 _ I_4$ =1018.42

1. حساب معدل الفائدة:

لدينا العلاقة التالية:

$$M_n = M_{n-1}(1+i)$$
$$M_4 = M_3(1+i)$$

$$M_4 = a - I_4$$

$$\Rightarrow I_4 = a - M_4$$

$$\Rightarrow I_4 = 11883.8 - 7807.86$$

$$\boldsymbol{I_4 = 4075.94^{DA}}$$

$$I_3 - I_4 = 1018.42$$

$$\Rightarrow I_3 = 1018.42 + 4075.94$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_3 = 5094.36}$$

$$M_3 = a - I_3$$

$$\Rightarrow M_3 = 11883.8 - 5094.36$$

$$\boldsymbol{M_3 = 6789.44}$$

$$M_4 = M_3(1 + i)$$

$$\Rightarrow 7807.86 = 6789.44(1 + i)$$

$$\Rightarrow \frac{7807.86}{6789.44} = (1 + i)$$

$$\Rightarrow 1.15 = (1 + i)$$

$$\boldsymbol{i = 15\%}$$

حساب قيمة القرض:

$$V_0 = a\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 11883.8\frac{1 - (1.15)^{-6}}{0.15}$$

$$\boldsymbol{V_0 = 44974.03^{DA}}$$

انجاز السطر الأول والرابع:

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	القرض في نهاية السنة (الدين	الدين المتبقي في نهاية الفترة

	المستهلك)					
39836.33	5137.7	5137.7	11883.8	6746.10	44974.03	**1**
19365.07	25643.355	7807.86	11883.8	4075.94	27172.33	**4**

$$I_4 = V_4 * i \quad \Rightarrow \quad V_4 = \frac{I_4}{i} \quad \Rightarrow \quad \frac{4075.94}{0.15} = \mathbf{27172.33}^{\mathbf{DA}}$$

$$M_2 = M_1(1+i)$$

$$M_2 = 5137.7(1.15) = \mathbf{5908.355}^{\mathbf{DA}}$$

حل التمرين الثاني عشر:

$$n=9 \; ; \; i=15\% \; ; \; V_1 = 564255{,}6 \; ; \; I_1 - I_2 = 5361{,}66$$

حساب مبلغ الدفعة الثابتة:

$$I_{n-1} - I_n = M_{n-1}.\, i$$
$$\Rightarrow I_1 - I_2 = M_1.\, i$$
$$\Rightarrow M_1.\, i = 5361{,}66$$
$$\Rightarrow 0{,}15.\, M_1 = 5361{,}66$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{M_1 = 35744{,}4}^{\mathbf{DA}}$$

لدينا:

$$a = M_1(1+i)^n$$
$$\Rightarrow a = 35744{,}4(1.15)^9$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a = 125744{,}38}^{\boldsymbol{DA}}$$

انجاز السطر الأول والأخير من جدول الاستهلاك:

$$V_1 = V_0 - M_1$$
$$\Rightarrow V_0 = V_1 + M_1$$
$$\Rightarrow V_0 = 564255{,}6 + 35744{,}4$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{V_0 = 600000}^{\boldsymbol{DA}}$$

$$I_1 = V_0 * i$$

$$\Rightarrow I_1 = 600000 * 0{,}15$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_1 = 90000}\ \boldsymbol{DA}$$

المعلومات المستخرجة من السطر الأخير من جدول الاستهلاك:

في السطر الأخير من جدول الاستهلاك يكون رأس المال المتبقي في نهاية السنة التاسعة، بعد تسديد القسط الأخير يُساوي الصفر أي أن:

$$V_9 = 0 \Rightarrow V_8 = M_9$$

$$M_9 = M_1(1+i)^8$$

$$\Rightarrow M_9 = 35744{,}4\ (1.15)^8$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_9 = 109342{,}94}\ \boldsymbol{DA} = V_8$$

$$I_9 = V_8 * i$$

$$\Rightarrow I_9 = 109342{,}94 * 0{,}15$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_9 = 16401{,}44}\ \boldsymbol{DA}$$

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1	600000	90000	125744.38	35744.4	564255.6
9	109342.94	16401.44	125744.38	109342.94	0

حل التمرين الثالث عشر:

$$n=10\ ;\ i=8\%\ ;\ V_6 = 493604{,}55\ DA$$

حساب القسط الثابت:

$$V_{\mathrm{p}} = a\frac{1-(1+i)^{-(n-p)}}{i}$$

$$\Rightarrow a\,[\,1-(1+i)^{-(n-p)}] = V_{\mathrm{p}}.\,i$$

$$\Rightarrow a = V_{\mathrm{p}}\,\frac{i}{1-(1+i)^{-(n-p)}}$$

$$\Rightarrow a = V_6\,\frac{i}{1-(1+i)^{-(10-6)}}$$

$$\Rightarrow a = a = 493604.55\,\frac{0.08}{1-(1.08)^{-(4)}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = 149604{,}55}\ \boldsymbol{DA}$$

انجاز السطر الأخير ثم السطر السادس من جدول استهلاك القرض:

$$V_{10}=0 \Rightarrow V_9 = M_{10}$$

$$V_{\mathrm{p}} = a\frac{1-(1+i)^{-(n-p)}}{i} \Rightarrow V_9 = a\frac{1-(1+i)^{-(10-9)}}{i}$$

$$\Rightarrow V_9 = 149604.55\,\frac{1-(1.08)^{-(1)}}{0.08}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_9 = 137990{,}25}\ \boldsymbol{DA}$$

$$V_9 = M_{10} \Rightarrow M_{10} = 137990{,}25\ DA$$

$$I_{10} = V_9 * i$$

$$\Rightarrow I_{10} = 137990{,}25 * 0{,}08$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_{10} = 11039{,}22}\ \boldsymbol{DA}$$

$$V_6 = 493604{,}55\ DA$$

$$a = M_p(1+i)^{n-p+1}$$

$$\Rightarrow a = M_6(1+i)^{10-6+1}$$

$$\Rightarrow M_6 = \frac{\mathrm{a}}{(1+i)^5}$$

$$\Rightarrow M_6 = \frac{149604.55}{(1.08)^5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_6 = 101426{,}96}\ \boldsymbol{DA}$$

$$a= I_i+M_i$$

$$\Rightarrow a= I_6+M_6$$

$$\Rightarrow I_6=a-M_6$$

$$\Rightarrow I_6=149604,55-101426,96$$

$$I_6=\mathbf{48177,59^{DA}}$$

$$V_6=V_5-M_6$$

$$\Rightarrow V_5= V_6+M_6$$

$$\Rightarrow V_5= 493604,55+101426,96$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_5=595031,51^{DA}}$$

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	الدين المتبقي في نهاية الفترة
6	595031.51	48177.59	149029.48	101426.96	493604.55
10	137990.26	11039.22	149029.48	137990.26	0

حل التمرين الرابع عشر:

V_0=?; n=10 ; M_3=23460,22 ; M_6=30381,61 ; V_7 = 118328.24

حساب معدل الفائدة:

$$=M_3\ (1+i)^3 M_6$$

$$\Rightarrow (1+i)^3= \frac{M_6}{M_3}$$

$$\Rightarrow (1+i)^3=\frac{30381,61}{23460,22}$$

$$\Rightarrow (1+i)^3=1,295111$$

بالرجوع الى الجدول المالي رقم 1 وعند السنة الثالثة نجد أن القيمة المالية (1.295111) تقابل معدل الفائدة% 9

إذن:

$$\boldsymbol{i = 9\%}$$

حساب قيمة القرض:

$$M_3 = M_1 (1+i)^2$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{M_3}{(1+i)^2}$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{23460,22}{(1.09)^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_1 = 19745,9978\ DA}$$

$$V_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\Rightarrow V_0 = 19745.9978 \frac{(1.09)^{10} - 1}{0.09}$$

$$\Rightarrow V_0 = 299999,57 \cong \boldsymbol{300000\ DA}$$

حساب قيمة الدفعة الثابتة السنوية:

$$a = I_i + M_i$$

$$\Rightarrow a = I_1 + M_1$$

$$\Rightarrow a = V_0 * i + M_1$$

$$\Rightarrow a = 300000 * 0,09 + 19745,9978$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = 46745,96\ DA}$$

تقديم جزء من جدول الاستهلاك المتعلق بالاستحقاقات الثلاثة الأخيرة:

$$I_8 = V_7 * i$$

$$\Rightarrow I_8 = 118328,24 * 0,09$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_8 = 10649,54\ DA}$$

$$M_8 = a - I_8$$

$$\Rightarrow M_8 = 46745,96 - 10649,54$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_8 = 36096,42\ DA}$$

$$V_8 = V_7 - M_8$$

$$\Rightarrow V_8 = 118328{,}24 - 36096{,}42$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_8 = 82231{,}82}\ \boldsymbol{DA}$$

$$I_9 = V_8 * i$$

$$\Rightarrow I_9 = 82231{,}82 * 0{,}09$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_9 = 7400{,}86}\ \boldsymbol{DA}$$

$$M_9 = a - I_9$$

$$\Rightarrow M_9 = 46745{,}96 - 7400{,}86$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_9 = 39345{,}096}\ \boldsymbol{DA}$$

$$V_9 = V_8 - M_9$$

$$\Rightarrow V_9 = 82231{,}82 - 39345{,}096$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_9 = 42886{,}74}\ \boldsymbol{DA}$$

$$I_{10} = V_9 * i$$

$$\Rightarrow I_{10} = 42886{,}74 * 0{,}09$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_{10} = 3859{,}80}\ \mathbf{DA}$$

$$M_{10} = a - I_{10}$$

$$\Rightarrow M_{10} = 46745{,}96 - 3859{,}80$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_{10} = 42886{,}15}\ \boldsymbol{DA}$$

$$V_{10} = V_9 - M_{10}$$

$$\Rightarrow V_{10} = 42886{,}15 - 42886{,}15$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_{10} = 0{,}00}\ \boldsymbol{DA}$$

n	V_0 أصل القرض في بداية السنة	I الفائدة	aالقسط المتساوي	M الاستهلاك	الدين المتبقي في نهاية الفترة
8	118328.24	10649.54	46745.96	36096.42	82231.82
9	82231.82	7400.86	46745.96	39345.096	42886.150
10	42886.15	3859.80	46745.96	42886.15	0

هوامش الفصل الرابع:

[1] خليفة الحاج، دروس وتمارين محلولة في الرياضيات المالية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة مستغانم، 2020، ص98.
[2] خيرة بلحمري، مرجع سبق ذكره، ص ص 95-96 .

قائمة المراجع:

أولا– المراجع بالغة العربية:

آيت سعيد فوزي، الرياضيات المالية، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة الجزائر 03، 2022-2023.

الحاج خليفة، دروس وتمارين محلولة في الرياضيات المالية، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة مستغانم، 2019-2020.

بوجنان خالدية، محاضرات في الرياضيات المالية، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس جذع مشترك، كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، قسم العلوم الاقتصادية، جامعة تيارت 2016_2017.

بن طلحة صليحة، الرياضيات المالية، منشورات الدار الجزائرية، الطبعة 1، الجزائر، 2015.

بلحمري خيرة، محاضرات في مقياس الرياضيات المالية، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المدية، 2022-2023.

بن عميروش صليحة، الرياضيات المالية، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة الجزائر 03، 2022-2023.

بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.

شقيري موسى نوري وآخرون، الرياضيات المالية، الطبعة الأولى، دار أهل المعرفة، الجزائر، 2016.

شامي صليحة، محاضرات في الرياضيات المالية دروس وتمارين محلولة، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة الجزائر 03، 2021-2022.

فتحي خليل حمدان، الرياضيات المالية مع تطبيقات في الحاسوب، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة 1، عمان، الأردن، 2010.

طارق عبد الباري، عيد أبو بكر، تطبيقات الرياضيات المالية في العلوم المالية والإدارية، دار النشر الأردنية زمزم، الجامعة الأردنية، 2009.

مرابطي سناء، محاضرات في مقياس الرياضيات المالية، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة أم البواقي، 2018-2019.

ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء الاول،دار المحمدية، الجزائر، 1995.

ثانيا– المراجع بالغة الأجنبية:

Benjamin Lagros, Mini Mannel de Mathématique financières, Edition Dunod, France, 2011.

Walder Masieri; mathématique financiers ; Dalloz; paris; 2001.

الملاحق:

الجدول المالي رقم (1): لإيجاد الجملة المركبة

الصيغة العامة: $(1+t)^n$

12%	11%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	
1,1200	1,1100	1,1000	1,0900	1,0800	1,0700	1,0600	1,0500	1,0400	1,0300	1,0200	1,0100	1
1,2544	1,2321	1,2100	1,1881	1,1664	1,1449	1,1236	1,1025	1,0816	1,0609	1,0404	1,0201	2
1,4049	1,3676	1,3310	1,2950	1,2597	1,2250	1,1910	1,1576	1,1249	1,0927	1,0612	1,0303	3
1,5735	1,5181	1,4641	1,4116	1,3605	1,3108	1,2625	1,2155	1,1699	1,1255	1,0824	1,0406	4
1,7623	1,6851	1,6105	1,5386	1,4693	1,4026	1,3382	1,2763	1,2167	1,1593	1,1041	1,0510	5
1,9738	1,8704	1,7716	1,6771	1,5869	1,5007	1,4185	1,3401	1,2653	1,1941	1,1262	1,0615	6
2,2107	2,0762	1,9487	1,8280	1,7138	1,6058	1,5036	1,4071	1,3159	1,2299	1,1487	1,0721	7
2,4760	2,3045	2,1436	1,9926	1,8509	1,7182	1,5938	1,4775	1,3686	1,2668	1,1717	1,0829	8
2,7731	2,5580	2,3579	2,1719	1,9990	1,8385	1,6895	1,5513	1,4233	1,3048	1,1951	1,0937	9
3,1058	2,8394	2,5937	2,3674	2,1589	1,9672	**1,7908**	1,6289	1,4802	1,3439	1,2190	1,1046	10
3,4785	3,1518	2,8531	2,5804	2,3316	2,1049	1,8983	1,7103	1,5395	1,3842	1,2434	1,1157	11
3,8960	3,4985	3,1384	2,8127	2,5182	2,2522	2,0122	1,7959	1,6010	1,4258	1,2682	1,1268	12
4,3635	3,8833	3,4523	3,0658	2,7196	2,4098	2,1329	1,8856	1,6651	1,4685	1,2936	1,1381	13
4,8871	4,3104	3,7975	3,3417	2,9372	2,5785	2,2609	1,9799	1,7317	1,5126	1,3195	1,1495	14
5,4736	4,7846	4,1772	3,6425	3,1722	2,7590	2,3966	2,0789	1,8009	1,5580	1,3459	1,1610	15
6,1304	5,3109	4,5950	3,9703	3,4259	2,9522	2,5404	2,1829	1,8730	1,6047	1,3728	1,1726	16
6,8660	5,8951	5,0545	4,3276	3,7000	3,1588	2,6928	2,2920	1,9479	1,6528	1,4002	1,1843	17
7,6900	6,5436	5,5599	4,7171	3,9960	3,3799	2,8543	2,4066	2,0258	1,7024	1,4282	1,1961	18
8,6128	7,2633	6,1159	5,1417	4,3157	3,6165	3,0256	2,5270	2,1068	1,7535	1,4568	1,2081	19
9,6463	8,0623	6,7275	5,6044	4,6610	3,8697	3,2071	2,6533	2,1911	1,8061	1,4859	1,2202	20
10,8038	8,9492	7,4002	6,1088	5,0338	4,1406	3,3996	2,7860	2,2788	1,8603	1,5157	1,2324	21
12,1003	9,9336	8,1403	6,6586	5,4365	4,4304	3,6035	2,9253	2,3699	1,9161	1,5460	1,2447	22
13,5523	11,0263	8,9543	7,2579	5,8715	4,7405	3,8197	3,0715	2,4647	1,9736	1,5769	1,2572	23
15,1786	12,2392	9,8497	7,9111	6,3412	5,0724	4,0489	3,2251	2,5633	2,0328	1,6084	1,2697	24
17,0001	13,5855	10,8347	8,6231	6,8485	5,4274	4,2919	3,3864	2,6658	2,0938	1,6406	1,2824	25
19,0401	15,0799	11,9182	9,3992	7,3964	5,8074	4,5494	3,5557	2,7725	2,1566	1,6734	1,2953	26
21,3249	16,7386	13,1100	10,2451	7,9881	6,2139	4,8223	3,7335	2,8834	2,2213	1,7069	1,3082	27
23,8839	18,5799	14,4210	11,1671	8,6271	6,6488	5,1117	3,9201	2,9987	2,2879	1,7410	1,3213	28
26,7499	20,6237	15,8631	12,1722	9,3173	7,1143	5,4184	4,1161	3,1187	2,3566	1,7758	1,3345	29
29,9599	22,8923	17,4494	13,2677	10,0627	7,6123	5,7435	4,3219	3,2434	2,4273	1,8114	1,3478	30
33,5551	25,4104	19,1943	14,4618	10,8677	8,1451	6,0881	4,5380	3,3731	2,5001	1,8476	1,3613	31
37,5817	28,2056	21,1138	15,7633	11,7371	8,7153	6,4534	4,7649	3,5081	2,5751	1,8845	1,3749	32
42,0915	31,3082	23,2252	17,1820	12,6760	9,3253	6,8406	5,0032	3,6484	2,6523	1,9222	1,3887	33
47,1425	34,7521	25,5477	18,7284	13,6901	9,9781	7,2510	5,2533	3,7943	2,7319	1,9607	1,4026	34
52,7996	38,5749	28,1024	20,4140	14,7853	10,6766	7,6861	5,5160	3,9461	2,8139	1,9999	1,4166	35
59,1356	42,8181	30,9127	22,2512	15,9682	11,4239	8,1473	5,7918	4,1039	2,8983	2,0399	1,4308	36
66,2318	47,5281	34,0039	24,2538	17,2456	12,2236	8,6361	6,0814	4,2681	2,9852	2,0807	1,4451	37
74,1797	52,7562	37,4043	26,4367	18,6253	13,0793	9,1543	6,3855	4,4388	3,0748	2,1223	1,4595	38
83,0812	58,5593	41,1448	28,8160	20,1153	13,9948	9,7035	6,7048	4,6164	3,1670	2,1647	1,4741	39
93,0510	65,0009	45,2593	31,4094	21,7245	14,9745	10,2857	7,0400	4,8010	3,2620	2,2080	1,4889	40

الجدول المالي رقم **(2)**: لإيجاد المبلغ (القيمة الحالية)

الصيغة العامة: $(1+t)^{-n}$ أو $\frac{1}{(1+t)^n}$

12%	11%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	
0,8929	0,9009	0,9091	0,9174	0,9259	0,9346	0,9434	0,9524	0,9615	0,9709	0,9804	0,9901	1
1,6901	1,7125	1,7355	1,7591	1,7833	1,8080	1,8334	1,8594	1,8861	1,9135	1,9416	1,9704	2
2,4018	2,4437	2,4869	2,5313	2,5771	2,6243	2,6730	2,7232	2,7751	2,8286	2,8839	2,9410	3
3,0373	3,1024	3,1699	3,2397	3,3121	3,3872	3,4651	3,5460	3,6299	3,7171	3,8077	3,9020	4
3,6048	3,6959	3,7908	3,8897	3,9927	4,1002	4,2124	4,3295	4,4518	4,5797	4,7135	4,8534	5
4,1114	4,2305	4,3553	4,4859	4,6229	4,7665	4,9173	5,0757	5,2421	5,4172	5,6014	5,7955	6
4,5638	4,7122	4,8684	5,0330	5,2064	5,3893	5,5824	5,7864	6,0021	6,2303	6,4720	6,7282	7
4,9676	5,1461	5,3349	5,5348	5,7466	5,9713	6,2098	6,4632	6,7327	7,0197	7,3255	7,6517	8
5,3282	5,5370	5,7590	5,9952	6,2469	6,5152	6,8017	7,1078	7,4353	7,7861	8,1622	8,5660	9
5,6502	5,8892	6,1446	6,4177	6,7101	7,0236	7,3601	7,7217	8,1109	8,5302	8,9826	9,4713	10
5,9377	6,2065	6,4951	6,8052	7,1390	7,4987	7,8869	8,3064	8,7605	9,2526	9,7868	10,3676	11
6,1944	6,4924	6,8137	7,1607	7,5361	7,9427	8,3838	8,8633	9,3851	9,9540	10,5753	11,2551	12
6,4235	6,7499	7,1034	7,4869	7,9038	8,3577	8,8527	9,3936	9,9856	10,6350	11,3484	12,1337	13
6,6282	6,9819	7,3667	7,7862	8,2442	8,7455	9,2950	9,8986	10,5631	11,2961	12,1062	13,0037	14
6,8109	7,1909	7,6061	8,0607	8,5595	9,1079	9,7122	10,3797	11,1184	11,9379	12,8493	13,8651	15
6,9740	7,3792	7,8237	8,3126	8,8514	9,4466	10,1059	10,8378	11,6523	12,5611	13,5777	14,7179	16
7,1196	7,5488	8,0216	8,5436	9,1216	9,7632	10,4773	11,2741	12,1657	13,1661	14,2919	15,5623	17
7,2497	7,7016	8,2014	8,7556	9,3719	10,0591	10,8276	11,6896	12,6593	13,7535	14,9920	16,3983	18
7,3658	7,8393	8,3649	8,9501	9,6036	10,3356	11,1581	12,0853	13,1339	14,3238	15,6785	17,2260	19
7,4694	7,9633	8,5136	9,1285	9,8181	10,5940	11,4699	12,4622	13,5903	14,8775	16,3514	18,0456	20
7,5620	8,0751	8,6487	9,2922	10,0168	10,8355	11,7641	12,8212	14,0292	15,4150	17,0112	18,8570	21
7,6446	8,1757	8,7715	9,4424	10,2007	11,0612	12,0416	13,1630	14,4511	15,9369	17,6580	19,6604	22
7,7184	8,2664	8,8832	9,5802	10,3711	11,2722	12,3034	13,4886	14,8568	16,4436	18,2922	20,4558	23
7,7843	8,3481	8,9847	9,7066	10,5288	11,4693	12,5504	13,7986	15,2470	16,9355	18,9139	21,2434	24
7,8431	8,4217	9,0770	9,8226	10,6748	11,6536	12,7834	14,0939	15,6221	17,4131	19,5235	22,0232	25
7,8957	8,4881	9,1609	9,9290	10,8100	11,8258	13,0032	14,3752	15,9828	17,8768	20,1210	22,7952	26
7,9426	8,5478	9,2372	10,0266	10,9352	11,9867	13,2105	14,6430	16,3296	18,3270	20,7069	23,5596	27
7,9844	8,6016	9,3066	10,1161	11,0511	12,1371	13,4062	14,8981	16,6631	18,7641	21,2813	24,3164	28
8,0218	8,6501	9,3696	10,1983	11,1584	12,2777	13,5907	15,1411	16,9837	19,1885	21,8444	25,0658	29
8,0552	8,6938	9,4269	10,2737	11,2578	12,4090	13,7648	15,3725	17,2920	19,6004	22,3965	25,8077	30
8,0850	8,7331	9,4790	10,3428	11,3498	12,5318	13,9291	15,5928	17,5885	20,0004	22,9377	26,5423	31
8,1116	8,7686	9,5264	10,4062	11,4350	12,6466	14,0840	15,8027	17,8736	20,3888	23,4683	27,2696	32
8,1354	8,8005	9,5694	10,4644	11,5139	12,7538	14,2302	16,0025	18,1476	20,7658	23,9886	27,9897	33
8,1566	8,8293	9,6086	10,5178	11,5869	12,8540	14,3681	16,1929	18,4112	21,1318	24,4986	28,7027	34
8,1755	8,8552	9,6442	10,5668	11,6546	12,9477	14,4982	16,3742	18,6646	21,4872	24,9986	29,4086	35
8,1924	8,8786	9,6765	10,6118	11,7172	13,0352	14,6210	16,5469	18,9083	21,8323	25,4888	30,1075	36
8,2075	8,8996	9,7059	10,6530	11,7752	13,1170	14,7368	16,7113	19,1426	22,1672	25,9695	30,7995	37
8,2210	8,9186	9,7327	10,6908	11,8289	13,1935	14,8460	16,8679	19,3679	22,4925	26,4406	31,4847	38
8,2330	8,9357	9,7570	10,7255	11,8786	13,2649	14,9491	17,0170	19,5845	22,8082	26,9026	32,1630	39
8,2438	8,9511	9,7791	10,7574	11,9246	13,3317	15,0463	17,1591	19,7928	23,1148	27,3555	32,8347	40

الجدول المالي رقم (3): لإيجاد الجملة المركبة لدفعات تدفع في نهاية كل وحدة زمنية

الصيغة العامة: $\frac{(1+t)^n-1}{t}$

12%	11%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1
2,120	2,110	2,100	2,090	2,080	2,070	2,060	2,050	2,040	2,030	2,020	2,010	2
3,374	3,342	3,310	3,278	3,246	3,215	3,184	3,153	3,122	3,091	3,060	3,030	3
4,779	4,710	4,641	4,573	4,506	4,440	4,375	4,310	4,246	4,184	4,122	4,060	4
6,353	6,228	6,105	5,985	5,867	5,751	5,637	5,526	5,416	5,309	5,204	5,101	5
8,115	7,913	7,716	7,523	7,336	7,153	6,975	6,802	6,633	6,468	6,308	6,152	6
10,089	9,783	9,487	9,200	8,923	8,654	8,394	8,142	7,898	7,662	7,434	7,214	7
12,300	11,859	11,436	11,028	10,637	10,260	9,897	9,549	9,214	8,892	8,583	8,286	8
14,776	14,164	13,579	13,021	12,488	11,978	11,491	11,027	10,583	10,159	9,755	9,369	9
17,549	16,722	15,937	15,193	14,487	13,816	13,181	12,578	12,006	11,464	10,950	10,462	10
20,655	19,561	18,531	17,560	16,645	15,784	14,972	14,207	13,486	12,808	12,169	11,567	11
24,133	22,713	21,384	20,141	18,977	17,888	16,870	15,917	15,026	14,192	13,412	12,683	12
28,029	26,212	24,523	22,953	21,495	20,141	18,882	17,713	16,627	15,618	14,680	13,809	13
32,393	30,095	27,975	26,019	24,215	22,550	21,015	19,599	18,292	17,086	15,974	14,947	14
37,280	34,405	31,772	29,361	27,152	25,129	23,276	21,579	20,024	18,599	17,293	16,097	15
42,753	39,190	35,950	33,003	30,324	27,888	25,673	23,657	21,825	20,157	18,639	17,258	16
48,884	44,501	40,545	**36,974**	33,750	30,840	28,213	25,840	23,698	21,762	20,012	18,430	17
55,750	50,396	45,599	41,301	37,450	33,999	30,906	28,132	25,645	23,414	21,412	19,615	18
63,440	56,939	51,159	46,018	41,446	37,379	33,760	30,539	27,671	25,117	22,841	20,811	19
72,052	64,203	57,275	51,160	45,762	40,995	36,786	33,066	29,778	26,870	24,297	22,019	20
81,699	72,265	64,002	56,765	50,423	44,865	39,993	35,719	31,969	28,676	25,783	23,239	21
92,503	81,214	71,403	62,873	55,457	49,006	43,392	38,505	34,248	30,537	27,299	24,472	22
104,603	91,148	79,543	69,532	60,893	53,436	46,996	41,430	36,618	32,453	28,845	25,716	23
118,155	102,174	88,497	76,790	66,765	58,177	50,816	44,502	39,083	34,426	30,422	26,973	24
133,334	114,413	98,347	84,701	73,106	63,249	54,865	47,727	41,646	36,459	32,030	28,243	25
150,334	127,999	109,182	93,324	79,954	68,676	59,156	51,113	44,312	38,553	33,671	29,526	26
169,374	143,079	121,100	102,723	87,351	74,484	63,706	54,669	47,084	40,710	35,344	30,821	27
190,699	159,817	134,210	112,968	95,339	80,698	68,528	58,403	49,968	42,931	37,051	32,129	28
214,583	178,397	148,631	124,135	103,966	87,347	73,640	62,323	52,966	45,219	38,792	33,450	29
241,333	199,021	164,494	136,308	113,283	94,461	79,058	66,439	56,085	47,575	40,568	34,785	30
271,293	221,913	181,943	149,575	123,346	102,073	84,802	70,761	59,328	50,003	42,379	36,133	31
304,848	247,324	201,138	164,037	134,214	110,218	90,890	75,299	62,701	52,503	44,227	37,494	32
342,429	275,529	222,252	179,800	145,951	118,933	97,343	80,064	66,210	55,078	46,112	38,869	33
384,521	306,837	245,477	196,982	158,627	128,259	104,184	85,067	69,858	57,730	48,034	40,258	34
431,663	341,590	271,024	215,711	172,317	138,237	111,435	90,320	73,652	60,462	49,994	41,660	35
484,463	380,164	299,127	236,125	187,102	148,913	119,121	95,836	77,598	63,276	51,994	43,077	36
543,599	422,982	330,039	258,376	203,070	160,337	127,268	101,628	81,702	66,174	54,034	44,508	37
609,831	470,511	364,043	282,630	220,316	172,561	135,904	107,710	85,970	69,159	56,115	45,953	38
684,010	523,267	401,448	309,066	238,941	185,640	145,058	114,095	90,409	72,234	58,237	47,412	39
767,091	581,826	442,593	337,882	259,057	199,635	154,762	120,800	95,026	75,401	60,402	48,886	40

الجدول المالي رقم (4): لإيجاد القيمة الحالية لعدد من الأقساط في نهاية كل وحدة زمن (عادة سنة)

الصيغة العامة: $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

12%	11%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	
0,8929	0,9009	0,9091	0,9174	0,9259	0,9346	0,9434	0,9524	0,9615	0,9709	0,9804	0,9901	1
1,6901	1,7125	1,7355	1,7591	1,7833	1,8080	1,8334	1,8594	1,8861	1,9135	1,9416	1,9704	2
2,4018	2,4437	2,4869	2,5313	2,5771	2,6243	2,6730	2,7232	2,7751	2,8286	2,8839	2,9410	3
3,0373	3,1024	3,1699	3,2397	3,3121	3,3872	3,4651	3,5460	3,6299	3,7171	3,8077	3,9020	4
3,6048	3,6959	3,7908	3,8897	3,9927	4,1002	4,2124	4,3295	4,4518	4,5797	4,7135	4,8534	5
4,1114	4,2305	4,3553	4,4859	4,6229	4,7665	4,9173	5,0757	5,2421	5,4172	5,6014	5,7955	6
4,5638	4,7122	4,8684	5,0330	5,2064	5,3893	5,5824	5,7864	6,0021	6,2303	6,4720	6,7282	7
4,9676	5,1461	5,3349	5,5348	5,7466	5,9713	6,2098	6,4632	6,7327	7,0197	7,3255	7,6517	8
5,3282	5,5370	5,7590	5,9952	6,2469	6,5152	6,8017	7,1078	7,4353	7,7861	8,1622	8,5660	9
5,6502	5,8892	6,1446	6,4177	6,7101	7,0236	7,3601	7,7217	8,1109	8,5302	8,9826	9,4713	10
5,9377	6,2065	6,4951	6,8052	7,1390	7,4987	7,8869	8,3064	8,7605	9,2526	9,7868	10,3676	11
6,1944	6,4924	6,8137	7,1607	7,5361	7,9427	8,3838	8,8633	9,3851	9,9540	10,5753	11,2551	12
6,4235	6,7499	7,1034	7,4869	7,9038	8,3577	8,8527	9,3936	9,9856	10,6350	11,3484	12,1337	13
6,6282	6,9819	7,3667	7,7862	8,2442	8,7455	9,2950	9,8986	10,5631	11,2961	12,1062	13,0037	14
6,8109	7,1909	7,6061	8,0607	8,5595	9,1079	9,7122	10,3797	11,1184	11,9379	12,8493	13,8651	15
6,9740	7,3792	7,8237	8,3126	8,8514	9,4466	10,1059	10,8378	11,6523	12,5611	13,5777	14,7179	16
7,1196	7,5488	8,0216	8,5436	9,1216	9,7632	10,4773	11,2741	12,1657	13,1661	14,2919	15,5623	17
7,2497	7,7016	8,2014	8,7556	9,3719	10,0591	10,8276	11,6896	12,6593	13,7535	14,9920	16,3983	18
7,3658	7,8393	8,3649	8,9501	9,6036	10,3356	11,1581	12,0853	13,1339	14,3238	15,6785	17,2260	19
7,4694	7,9633	8,5136	9,1285	9,8181	10,5940	11,4699	12,4622	13,5903	14,8775	16,3514	18,0456	20
7,5620	8,0751	8,6487	9,2922	10,0168	10,8355	11,7641	12,8212	14,0292	15,4150	17,0112	18,8570	21
7,6446	8,1757	8,7715	9,4424	10,2007	11,0612	12,0416	13,1630	14,4511	15,9369	17,6580	19,6604	22
7,7184	8,2664	8,8832	9,5802	10,3711	11,2722	12,3034	13,4886	14,8568	16,4436	18,2922	20,4558	23
7,7843	8,3481	8,9847	9,7066	10,5288	11,4693	12,5504	13,7986	15,2470	16,9355	18,9139	21,2434	24
7,8431	8,4217	9,0770	9,8226	10,6748	11,6536	12,7834	14,0939	15,6221	17,4131	19,5235	22,0232	25
7,8957	8,4881	9,1609	9,9290	10,8100	11,8258	13,0032	14,3752	15,9828	17,8768	20,1210	22,7952	26
7,9426	8,5478	9,2372	10,0266	10,9352	11,9867	13,2105	14,6430	16,3296	18,3270	20,7069	23,5596	27
7,9844	8,6016	9,3066	10,1161	11,0511	12,1371	13,4062	14,8981	16,6631	18,7641	21,2813	24,3164	28
8,0218	8,6501	9,3696	10,1983	11,1584	12,2777	13,5907	15,1411	16,9837	19,1885	21,8444	25,0658	29
8,0552	8,6938	9,4269	10,2737	11,2578	12,4090	13,7648	15,3725	17,2920	19,6004	22,3965	25,8077	30
8,0850	8,7331	9,4790	10,3428	11,3498	12,5318	13,9291	15,5928	17,5885	20,0004	22,9377	26,5423	31
8,1116	8,7686	9,5264	10,4062	11,4350	12,6466	14,0840	15,8027	17,8736	20,3888	23,4683	27,2696	32
8,1354	8,8005	9,5694	10,4644	11,5139	12,7538	14,2302	16,0025	18,1476	20,7658	23,9886	27,9897	33
8,1566	8,8293	9,6086	10,5178	11,5869	12,8540	14,3681	16,1929	18,4112	21,1318	24,4986	28,7027	34
8,1755	8,8552	9,6442	10,5668	11,6546	12,9477	14,4982	16,3742	18,6646	21,4872	24,9986	29,4086	35
8,1924	8,8786	9,6765	10,6118	11,7172	13,0352	14,6210	16,5469	18,9083	21,8323	25,4888	30,1075	36
8,2075	8,8996	9,7059	10,6530	11,7752	13,1170	14,7368	16,7113	19,1426	22,1672	25,9695	30,7995	37
8,2210	8,9186	9,7327	10,6908	11,8289	13,1935	14,8460	16,8679	19,3679	22,4925	26,4406	31,4847	38
8,2330	8,9357	9,7570	10,7255	11,8786	13,2649	14,9491	17,0170	19,5845	22,8082	26,9026	32,1630	39
8,2438	8,9511	9,7791	10,7574	11,9246	13,3317	15,0463	17,1591	19,7928	23,1148	27,3555	32,8347	40