Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

Sur la coloration de packing de certains graphes

Par :

ETTAHRI Amina et MOUSSAOUI Hafsa

Soutenu publiquement le 26/06/2024, devant le jury composé de :

Mohamed	BOUZAFRANE	MCB	U.Y.F-Médéa	Président
Rachid	LEMDANI	MCB	U.Y.F-Médéa	Promoteur
Abdelkader	SAHRAOUI	MAA	U.Y.F-Médéa	Examinateur
Mohamed	ZEMIR	MAA	U.Y.F-Médéa	Examinateur

Résumé

Notre travail est consacré à l'étude du nombre chromatique de packing. Le nombre chromatique de packing d'un graphe G consiste à trouver le plus petit nombre de couleurs à affecter aux sommets de G, de telle sorte que, si deux sommets u et v ont la même couleur i, alors $d_G(u, v) > i$. Le nombre chromatique de packing de G, est noté par $\chi_p(G)$. Nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing de certains graphes particuliers. Dans ce contexte, nous déterminons le nombre chromatique de packing de Mycielski du graphe puissance d'une chaîne d'ordre $n \leq 8$, et d'un cycle d'ordre $n \leq 13$. D'autre part, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe *Mycielski généralisé* d'une chaîne d'ordre $n \leq 7$ et d'un cycle d'ordre $n \leq 9$.

Mots clés: Nombre chromatique de packing, graphe de puissance, graphe de Mycielski, graphe de Mycielski généralisé.

Abstract

Our work is devoted to the study of the packing chromatic number. The packing chromatic number of a graph G, consists in finding the smallest number of colors to assign to the vertices of G, so that, if two vertices u and v have the same color i, then $d_G(u, v) > i$. The packing chromatic number of G, is denoted by $\chi_p(G)$. We determine the exact value of the packing chromatic number of certain particular graphs. In this context, we determine the packing chromatic number of a Mycielski of power graph for a path of order $n \leq 8$, and cycle of order $n \leq 13$. On the other hand, we determine the exact value of the packing chromatic number of generalized Mycielski graph of a path of order $n \leq 7$ and a cycle of order $n \leq 9$.

Key words: Packing chromatic number, power graph, Mycielski graph, generalized Mycielski graph.

ملخص

عملنا مخصص لدراسة العدد اللوني للتعبئة. العدد اللوني للتعبئة لرسم بياني G ، يتعلق بإيجاد أصغر عدد من الألوان لتعيين رؤوس الرسم البياني G ، بحيث ، إذا كان هناك رأسان u و v لهما نفس اللون i ، فان $d(u,v) > i$. عدد لون التعبئة لـ G ، يُشار إليه بـ $\chi_p(G)$. نعين القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة لبعض الرسوم البيانية الخاصة. في هذا السياق، نحدد القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسم البياني **ميسيلسكي** (Mycielski) لرسم بياني أسي لسلسلة من الرتبة $n \leq 8$ ودورة من الرتبة $n \leq 13$. من جهة أخرى، نعين القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسم البياني **ميسيلسكي المعمم** لسلسلة من الرتبة $n \leq 7$ ودورة من الرتبة $n \leq 9$.

الكلمات المفتاحية : عدد اللوني للتعبئة، الرسم البياني الأسي، الرسم البياني ميسيلسكي المعمم.

Remerciements

Avant tout, nous remercions **ALLAH,** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nos remerciements vont à Monsieur **Rachid LEMDANI**, notre promoteur pour ses conseils, ses sincères contributions pour la réalisation de notre travail et pour la qualité de son encadrement exceptionnelle,

pour sa patience, sa rigueur

et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur Mohamed BOUZAFRANE,

qui a bien voulu nous faire l'honneur en acceptant de présider le jury.

Nous exprimons nos sincères remerciements au membres de jury, Mr. A. SAHRAOUI, Mr. M. ZEMIR,

pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Nous tenons également à remercier tous les membres de nos familles pour leurs aide tout au long de la réalisation de ce travail.

Enfin, que mes enseignants et amis trouvent ici l'expression de ma parfaite considération et mon profond respect.

Dédicace

Je dédie ce travail en signe de respect et de reconnaissance:

À **ma chère mère,** source inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifices. Ta prière et ta bénidiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie. J'espère ne jamais te décevoir, ni trahir ta confiance et tes sacrifices. Puisse Dieu tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et Bonheur.

À **mon cher père,** aucune dédicace ne saurait exprimer ma reconnaissance et mon profond amour. Puisse Dieu vous préserver et vous procurer santé et bonheur. Ce travail est le résultat de l'esprit de sacrifice dont vous avez fait preuve, de l'encouragement et le soutien que vous ne cessez de manifester.

À mes frères **Abdelkader, Omar** et **Yacine,** mes compagnons de route et source inépuissable de soutien. Leurs présence constante et leurs encouragements sans faille ont illumné chaque étape de ce parcours.

À **mes chères soeurs,** pour l'amour, dont vous m'avez toujours entourné, pour votre support et encouragement sans limites.

À ma chère binôme: **Hafsa.**

À tous mes amis, et toute ma famille.

ETTAHRI Amina

Dédicace

Avant tout, nous remercions **ALLAH**, le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Je dédie ce modeste travail, aux deux êtres les plus chers sur cette terre, symbole du courage et d'affection à qui je souhaite une longue vie pleine de joie et de bonheur :

À mon père **Mr MOUSSAOUI Said** qui a cru en moi et m'a fait confiance et il m'a assuré

tout les moyens d'aller aussi loin que possible, merci beaucoup papa,

À ma mére **Mme SEFRA Aicha**, Maman c'est sûr que tu ne comprendras pas grand-chose au sujet que j'ai traité dans ce document, mais saches que chaque mot, chaque phrase, que j'y ai inscrit ont une seule et même signification : tu es la meilleure des mères, je t'aime à l'éternité.

À mes très chères soeurs: **Hind**, **Nadjlaa**, **Sahar** et mon frère **Abderrahmane** que j'aime beaucoup.

À ma chère binôme**: Amina.**

À tout mes cousins et cousines sont exception du plus grand au plus petit.

Et à tous mes professeurs surtout promoteur Mr. LEMDANI Rachid.

À tous ceux qui m'ont aimé et qui ne méritent pas d'être oubliés.

À tous mes amis.

MOUSSAOUI Hafsa

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

ملخص **iv**

Table des figures **x**

Introduction **xii**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Graphe simple 2

1.1.4 Multigraphe 2

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre 4

1.1.7 Chaîne et Cycle 4

1.1.8 Quelques graphes particuliers 5

1.1.9 Invariants de graphes 11

1.2 La coloration dans les graphes 13

1.2.1 Coloration des sommets 13

1.2.2 Le nombre chromatique 13

1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique 14

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing 15

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing 15

2.1.1 i-packing 15

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers 16

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing 17

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres 18

2.2 Quelques résultats obtenus sur les graphes puissances 18

2.2.1 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe biparti complet 19

2.2.2 Coloration de packing du graphe puissance d'une étoile 19

2.3 Quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing du graphe de Mycielski 20

2.3.1 Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'une chaîne 21

2.3.2 Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'un cycle . 22

2.3.3 Coloration de packing du graphe Mycielski d'une chaîne 23

2.3.4 Coloration de packing du graphe mycielski d'un cycle 23

3 Coloration de packing de Mycielski des graphes puissances 25

3.1 Coloration de packing de Mycielski des graphes puissances d'une chaîne . . . 25

3.2 Coloration de packing de Mycielski des graphes puissances d'un cycle 28

4 Coloration de packing de Mycielski généralisé de quelques graphes particuliers 31

4.1 Coloration de packing de Mycielski généralisé d'une chaîne 31

4.2 Coloration de packing de Mycielski généralisé d'un cycle 36

Conclusion et perspectives 49

Table des figures

Figure 1.1.1 Un graphe simple G 2
Figure 1.1.2 Un multigraphe G 3
Figure 1.1.3 Un cycle C_4 et une roue W_5 à droite..... 4
Figure 1.1.4 Un graphe G, un sous graphe et un sous graphe partiel à droite..... 5
Figure 1.1.5 Un graphe complet K_5..... 6
Figure 1.1.6 Un cycle C_5 et son complémentaire 6
Figure 1.1.7 Un graphe G, $3-$régulié 7
Figure 1.1.8 Un graphe biparti 7
Figure 1.1.9 Un graphe biparti complet 8
Figure 1.1.10 Un graphe connexe 9
Figure 1.1.11 Un arbre T 10
Figure 1.1.12 Une forêt T 10
Figure 1.1.13 Une étoile $K_{1,6}$..... 11
Figure 1.1.14 Une étoile double $S_{4,2}$..... 11
Figure 2.2.1 Un graphe puissance P_{12}^2..... 19
Figure 2.2.2 Une coloration de packing de $K_{5,4}^2$..... 19
Figure 2.2.3 Une coloration de packing de $K_{1,5}^2$..... 20
Figure 2.3.1 Graphe de Mycielski de K_5..... 21

Figure 2.3.2 Une coloration de packing de $(\mu(P_8))^2$ 22
Figure 2.3.3 Une coloration de packing de $\mu(C_{10}^2)^2$ 22
Figure 2.3.4 Une coloration de packing de $\mu(P_{10})$ 23
Figure 2.3.5 Une coloration de packing de $\mu(C_{12})$ 24
Figure 3.4.2 Une coloration de packing de $\mu(P_6^2)$ 26
Figure 3.2.2 Une coloration de packing de $\mu(C_{13}^2)$ 29
Figure 3.3.1 Une coloration de packing de $\mu_2(P_7)$ 36
Figure 3.4.1 Une coloration de packing de $\mu_2(C_8)$ 44

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé **"problème des ponts de Koenigsberg"** posé par Euler en 1736 est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville1 en traversant chaque pont une et une seule fois?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de **Berge** qui a grandement participé à sa diffusion.

La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication .

Le problème des quatre couleurs est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes, Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de façon telle que deux pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes?". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par **F. Guthrie** en 1852. Depuis, il est considéré comme l'un des problèmes les plus célèbres en théorie des graphes. Plus d'un siècle plus tard, en 1977, il y a eu une réponse positive à ce problème proposée par Appel, **Haken** et **Koch** , mais à l'aide de l'ordinateur (leur preuve a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs).

20 ans plus tard, **Robertson**, **Sanders**, **Seymour** et **Thomas** ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur. Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre sans l'aide d'ordinateurs.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces...), avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires. Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations que nous ne détaillerons pas ici, mais nous pouvons citer l'ouvrage de **Jensen** et **Tofl**, "Graph Coloring Problems", qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi de nombreuses questions ouvertes.

En 2003, **Goddard**, **Hedetniemi**, **Harris** et **Rall** ont introduit la coloration de packing des graphes, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, appelé nombre chromatique de packing et noté $\chi_p(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$ où π est une fonction de V dans l'ensemble $\{1, 2, ...\}$.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types de graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de quatres chapitres:

Le premier chapitre portera des généralités sur la théorie des graphes. Nous introduisons les définitions fondamentales, et les notations de base dans le domaine. A la fin de ce chapitre, nous précisons la définition de la coloration propre dans les graphes et nous présentons quelques bornes sur cet invariant.

Dans **le deuxième chapitre**, on étudie la coloration de packing sur les graphes, les définitions, les notations ainsi que les résultats obtenus par les chercheurs dans [1,3,13,14,16,18,19] sont énoncés.

Dans **le troisième chapitre**, nous présentons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique de packing de Mycielski du graphe puissance G^p pour $p = 2$, où G est une chaîne et un cycle.

Dans **le dernier chapitre,** nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing du graphe *Mycielski généralisé* $\mu_p(G)$ pour $p = 2$, quand G est une chaîne et

un cycle. Nous donnons les démonstrations à tous les résultats obtenus dans ce mémoire. Des figures illustratives pour chaque résultat en utilisant le logiciel **Geogebra** sont mêmes insérées.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale avec des perspectives sur l'ensemble du travail réalisé.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons quelques paramètres de coloration que nous avons étudie.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n\ (G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m\ (G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Graphe simple

Définition 1.1.3 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La Figure* 1.1.1 *illustre un graphe simple.*

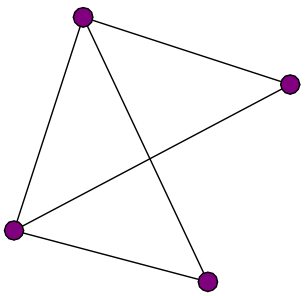


Figure 1.1.1 : *Un graphe simple G.*

1.1.4 Multigraphe

Définition 1.1.4 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets. La Figure* 1.1.2 *illustre un multigraphe.*

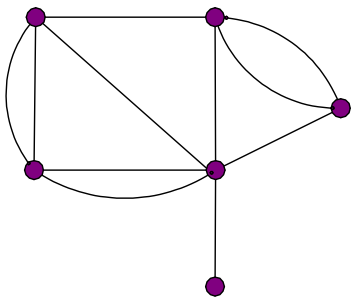


Figure 1.1.2 : Un multigraphe G

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.5 *Soit G (V, E) un graphe pour un sommet v de G, le voisinage ouvert de v est*

$$N_G(v) = \{u \in V_G(v) : uv \in E(G)\}.$$

Le voisinage fermé de v est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

le voisinage fermé de S est

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

Le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Soit $v \in V$ (G), le degré de v est noté par

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre

Soit u et v deux sommets d'un graphe G.

Définition 1.1.6 *On appelle distance entre u et v, notée $d\ (u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignante u et v.*

L'excentricité d'un sommet v dans G est: $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelée un centre.

Le diamètre de G, noté $diam\ (G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

1.1.7 Chaîne et Cycle

Définition 1.1.7 *Une chaîne joignante deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

Définition 1.1.8 *Une chaîne est simple si la séquence qui constitue ne parcourt pas plusieurs fois la même arête.*

Une chaîne est élémentaire si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois le même sommet.

On appelle cycle C_n dans un graphe G, une chaîne qui se referme.

Un cycle simple est une chaîne simple qui se referme.

Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire qui se referme.

Une roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets du cycle. La Figure 1.1.3 *illustre un cycle C_4 et une roue W_5.*

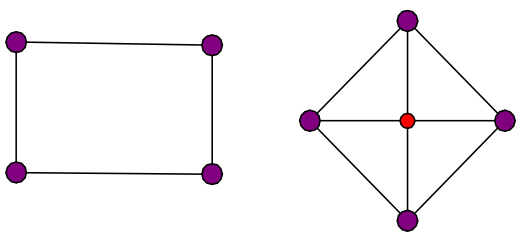


Figure 1.1.3 *: Un cycle C_4 et une roue W_5 à droite*

1.1.8 Quelques graphes particuliers

Sous-graphes et graphes partiels

Définition 1.1.9 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V sommets et E arêtes.*

• *Le sous-graphe de G* engendré par $A \subseteq V$ est le graphe dans les sommets sont ceux de A et dont les arêtes sont celles de G ayant leurs deux extrémités dans A. le sous graphe induit par A est le graphe $G[A] = (A, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset A\})$.

• *Le graphe partiel de G* défini par $W \subseteq E$ est le graphe dont ses sommets sont ceux de G et dont ses arêtes sont celles de W. La Figure 1.1.4 illustre un sous-graphe et un sous-graphe partiel.

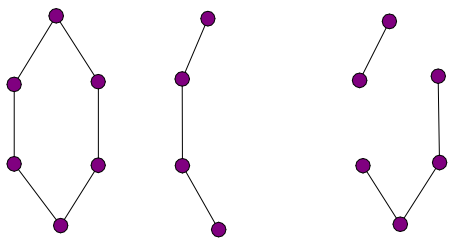


Figure 1.1.4 : Un graphe G, un sous-graphe et un sous graphe partiel à droite.

Graphe complet

Définition 1.1.10 *Un graphe complet, est un graphe dont toutes les paires de sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est de degré $n-1$. La Figure* 1.1.5 *illustre un graphe complet K_5.*

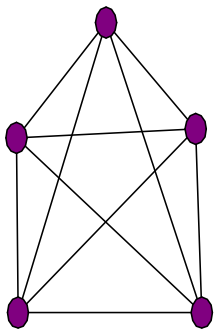


Figure 1.1.5 : Un graphe complet K_5.

Graphe complémentaire

Définition 1.1.11 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\overline{G} = (V, \overline{E})$*, défini par* $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ *et* $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\ ,\ v \in V\ \ (G)\ \ et\ u\ v\ \notin E(G)\}$*. La Figure* 1.1.6 *représente un graphe* C_5 *et son complémentaire.*

Remarque 1.1.1 *La superposition de* G *et* $\overline{G}$ *donne un graphe complet .*

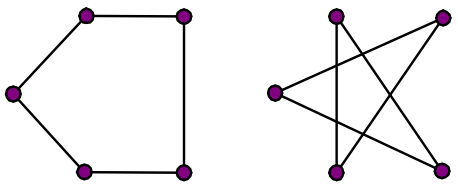


Figure 1.1.6 : *Un graphe* C_5 *et son complémentaire.*

Un graphe k-régulier

Définition 1.1.12 *Un graphe* G *est dit* $k-$*régulier si tous les sommets de* G *sont de degré* k*. La Figure* 1.1.7 *illustre un graphe* G *est* 3*-régulier .*

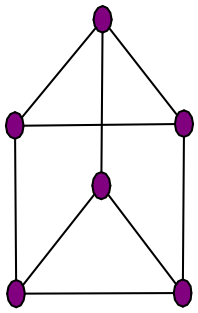


Figure 1.1.7 : Un graphe G, 3-régulier

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.13 *Un graphe dont tous les sommets sont non adjacents. Un graphe discret G est un graphe $(0)-$ régulier.*

Graphe biparti

Définition 1.1.14 *Un graphe $G = (V, U)$ est dit biparti si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2, de sorte que tous les sommets d'un même ensemble sont non adjacents. La Figure* 1.1.8 *illustre un graphe biparti.*

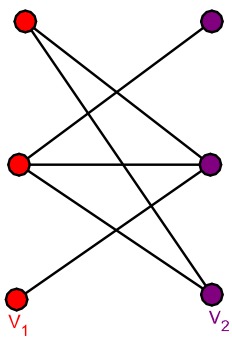


Figure 1.1.8 : *Un graphe biparti.*

Un graphe biparti complet

Définition 1.1.15 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$. Plus généralement, un graphe $G = (V; E)$ est dit $k-$parti $(k \geq 2)$, si V peut être partitionné en k stables $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$. Il est dit multiparti-complet si pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j. La Figure* 1.1.9 *illustre un graphe biparti complet .*

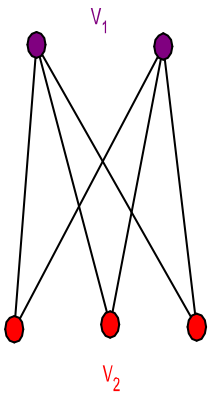


Figure 1.1.9 *: Un graphe biparti complet*

Graphe connexe

Définition 1.1.16 *Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe.*

Une arête e est appelée un arête d'articulation (isthme du graphe G) si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G, (i.e., si G est connexe alors $G - e$ n'est pas

connexe). La Figure 1.1.10 *illustre un graphe connexe.*

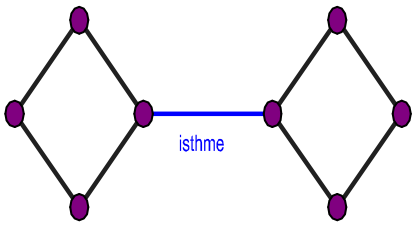


Figure 1.1.10 *: Un graphe connexe*

Graphe $h-$connexe

Définition 1.1.17 *Pour un graphe connexe G, la connectivité $k(G)$ est le nombre minimum de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G ou le réduit à un sommet isolé. G est dit $h-$connexe si sa connectivité $k(G)$ est supérieure ou égale à h.*

Arbre

Définition 1.1.18 *On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré* 1*, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur $h\ (T)$ de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. La Figure* 1.1.11 *représente un arbre.*

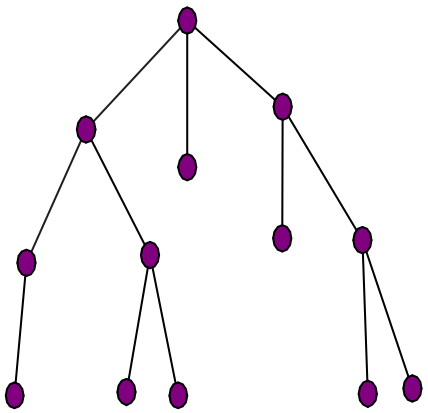


Figure 1.1.11 : Un arbre T

Forêt

Définition 1.1.19 *Une forêt est un graphe sans cycle, chacun de ses composants connexes étant un arbre. La Figure* 1.1.12 *représente une forêt.*

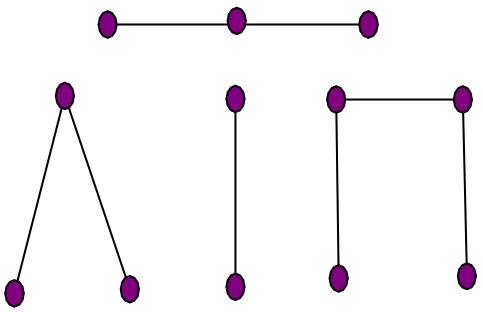


Figure 1.1.12 : Une forêt T

Étoile

Définition 1.1.20 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. La Figure* 1.1.13 *illustre une étoile $K_{1,6}$.*

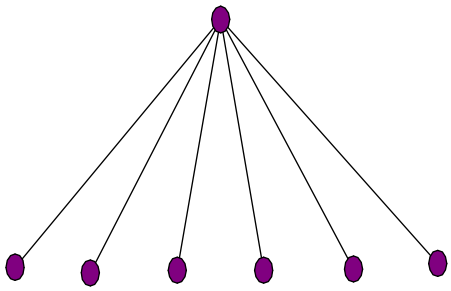


Figure 1.1.13 : Une étoile $K_{1,6}$

L'étoile double

Définition 1.1.21 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant d'une étoile $K_{1,p}$ au sommet non pendant d' une étoile $K_{1,q}$. La Figure* 1.1.14 *illustre une étoile double $S_{4,2}$.*

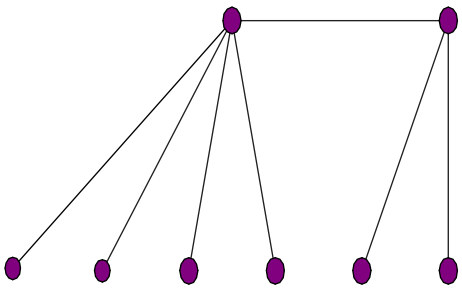


Figure 1.1.14 : Une étoile double $S_{4,2}$

1.1.9 Invariants de graphes

Clique

Définition 1.1.22 *Une clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents, ou est un sous-graphe complet. Le nombre de clique $\omega(G)$ de G, est le cardinal maximal d'une clique dans G.*

Stable

Définition 1.1.23 *Etant donné un graphe simple G, on appelle stable de G un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents.*

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

Transversal

Définition 1.1.24 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G, i.e., chaque arête de G est incidente à au moins un sommet de T. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si T est un transversal alors $V - T$ est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, et noté $\tau(G)$.*

Couplage

Définition 1.1.25 *Etant donné un graphe $G = (V, E)$, on appelle un couplage M dans G un sous-ensemble d'arêtes de E deux a deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tout les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Recouvrement

Définition 1.1.26 *Etant donné un graphe simple G (V, E) sans sommet isolé, on appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tous les sommets de G.*

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.

1.2 La coloration dans les graphes

1.2.1 Coloration des sommets

Définition 1.2.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction* $c : V \to \{1, 2, .., k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes $(c(v) \neq c(w), \forall v, w \in V$ *adjacents).*

G *est* $k-$*colorable si on peut colorer ses sommets avec* k *couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.*

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. *Une coloration triviale de* G *consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à* n *sommets admet une* $n-$*coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer* G. *D'où la définition du nombre chromatique de* G.

1.2.2 Le nombre chromatique

Définition 1.2.2 *Le nombre chromatique d'un graphe* G, *noté* $\chi(G)$ *est le plus petit nombre de couleurs nécessaires a une coloration propre des sommets de* G.

On le définit comme étant le plus petit entier k *tel que* G *admet une* $k-$*coloration, il est dit aussi que* G *est* $\chi(G)-$*chromatique*

- Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.

Remarque 1.2.1 *Soit* G *un graphe d'ordre* n. *Il est clair que* $1 \leq \chi(G) \leq n$.

- $\chi(G) = 1$ *si et seulement si* G *est un graphe discret.*
- $\chi(G) = n$ *si et seulement si* G *est un graphe complet.*
- *Pour un cycle* C_n,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2; & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3; & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 1.2.1 *[22] Si H est un sous-graphe de G, alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.2.2 *[22] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.2.3 *[18] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha}(G) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$ est le degré maximum de G.

Proposition 1.2.4 *[2] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Proposition 1.2.5 *[17] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing

Dans ce chapitre, nous exposons la coloration de packing de certains graphes et nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing de quelques graphes, trouvées par les chercheurs, à savoir: les chaînes, les cycles, les arbres, les graphes puissances.

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

Le problème de la coloration de packing a été posé suite à l'établissement de nombreux régles et réglements par la Commission des communications des Etats-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. En particulier, deux stations de radio qui sont affectées de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la diffusion de l'une n'altére pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

2.1.1 i-packing

Définition 2.1.1 *Un sous ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration de packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration de packing de G est appelé le nombre chromatique de packing, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration de packing est donc une partition $P_k = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_p(G)$. De plus, pour tout sous graphe H d'un graphe G, on a $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration de packing d'ordre n, il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n, à chaque sommet de V. Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure. Les propositions suivantes donnent les valeurs exactes du nombre chromatiques de packing d'une chaîne, cycle et graphe complet.

Proposition 2.1.1 *[4] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_p(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4$, $\chi_p(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[4] Pour les cycles C_n,*

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3; & si\ n \equiv 0\,[4]\ ou\ n = 3, \\ 4; & sinon. \end{cases}$$

La coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ de C_n les séquences des couleurs:

$$\begin{aligned} 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3 \quad si\ n &= 4r, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,4 \quad si\ n &= 4r+1, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,4 \quad si\ n &= 4r+2, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,2,4 \quad si\ n &= 4r+3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[4] Soit G un graphe complet. Alors $\chi_p\ (K_n) = n$.*

Les propositions suivantes donnent quelques bornes sur le nombre chromatique de packing d'un graphe quelconque.

Proposition 2.1.4 *[4] Pour tout graphe G, $\chi_p(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité si G a le diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[4] Si G est un graphe biparti de diamètre 3. Alors*

$$\tau(G) \leq \chi_p(G) \leq \tau(G) + 1.$$

Proposition 2.1.6 *[4] Pour tout graphe G,*

$$\omega\,(G) \leq \chi\,(G) \leq \chi_p(G).$$

Proposition 2.1.7 *[4] Soit G un graphe. si $\chi(G) = \chi_p(G)$, alors $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

Proposition 2.1.8 *[4] Pour tout graphe connexe G, $\chi_p\,(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.9 *[4] Pour tout sous graphe H d'un graphe G,*

$$\chi_p(H) \leq \chi_p(G).$$

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'aprés la Proposition **2.1.4**, on a forcément $\tau(G) = 1$, c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre de packing chromatique égal à 2.

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration de paking très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique de packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [4] ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet petit s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet grand s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de grands voisins de v, alors nous avons la proposition suivante:

Proposition 2.1.10 *[4] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4; & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3; & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3; & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1; & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2; & sinon. \end{cases}$$

2.2 Quelques résultats obtenus sur les graphes puissances

Dans cette section, nous donnons quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing des graphes puissances de quelques types de graphes. Nous définissons maintenant un nouveau graphe, noté le graphe **puissance**.

Définition 2.2.1 *Le graphe puissance noté G^p pour $p \geq 0$ d'un graphe G, est le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets à distance au*

plus p dans G. Voir la Figure 2.2.1.

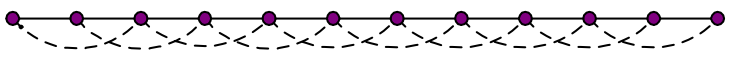


Figure 2.2.1 : *Un graphe puissance* P_{12}^2

2.2.1 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe biparti complet

Proposition 2.2.1 *[13] Pour un graphe* $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$,

$$\chi_p(K_{p,q}^2) = p + q$$

La Figure 2.2.3 illustre un graphe puissance d'un graphe biparti complet $K_{5,4}^2$.

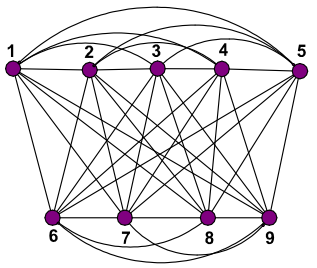


Figure 2.2.2: Une coloration de packing de $K_{5,4}^2$

2.2.2 Coloration de packing du graphe puissance d'une étoile

Proposition 2.2.2 *[13] Pour tout* $n \geq 1$,

$$\chi_p(K_{1,n}^2) = n + 1.$$

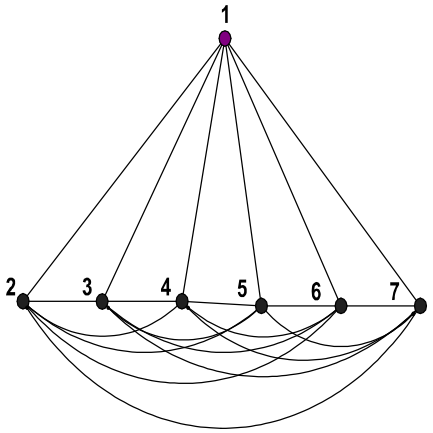


Figure 2.2.3: Une coloration de packing de $K^2_{1,5}$

2.3 Quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing du graphe de Mycielski

Dans cette partie, on étudie la coloration de packing pour le graphe **Mycielski** de quelques types de graphes, et donc on a besoin de définir cette classe de graphe.

Graphe Mycielski

Définition 2.3.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe de **Mycielski** de G, noté par $\mu(G)$, est un graphe connexe avec $V(\mu(G)) = V(G) \cup V' \cup \{W\}$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $V' = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $E(\mu(G)) = E(G) \cup E' \cup E''$ avec $E' = \{v_i x_j, v_j x_i :$ si et seulement si*

$v_iv_j \in E(G)$, $1 \leq j \leq n\}$ *et* $E'' = \{wx_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. *Voir la Figure* 2.3.1.

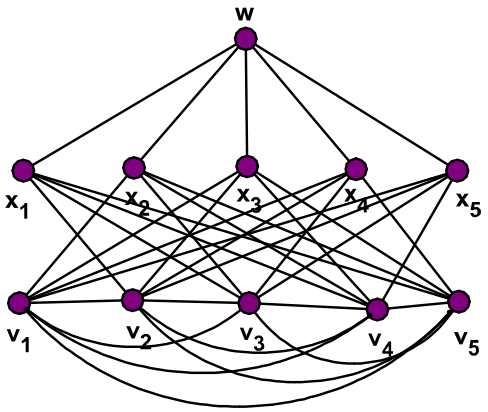


Figure 2.3.1 : *Graphe de Mycielski de* K_5.

Graphe Mycielski généralisé

Soit G un graphe avec $V^0 = \{v_1^0, v_2^0, ..., v_n^0\}$ et l'ensemble des arêtes E^0. Puur $m \geq 1$, le Mycielski généralisé noté $\mu_m(G)$ avec l'ensemble des sommets $V^0 \cup V^1 \cup V^2 \cup ...V^m \cup \{W\}$, où $V^i = \left\{V_j^i :\ V_j^0 \in V^0\right\}$ est le $i^{ème}$ copie de V^0 pour $i = 1, 2,..., m$ et l'ensemble des arêtes $E^0 \cup (\bigcup_{i=0}^{m-1} \{V_j^i V_{j'}^{i+1} : V_j^0 V_{j'}^{i+1} \in E^0\}) \cup \left\{V_j^m u :\ V_j^m \in V^m\right\}$. On définit $\mu_0(G)$ le graphe obtenu de G en ajoutant le sommet universel u. Notons que $\mu_1(G)$ est exactement le Mycielski de G.

2.3.1 Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'une chaîne

Le théorème suivant donne la valeur exacte du graphe puissance de Mycielski d'une chaîne d'ordre n.

Théorème 2.3.1 *[14]Pour tout* $n \geq 2$,

$$\chi_p((\mu(P_n)^2) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1.$$

La figure 2.3.2 suivante fournit une coloration de packing de $(\mu(P_8))^2$.

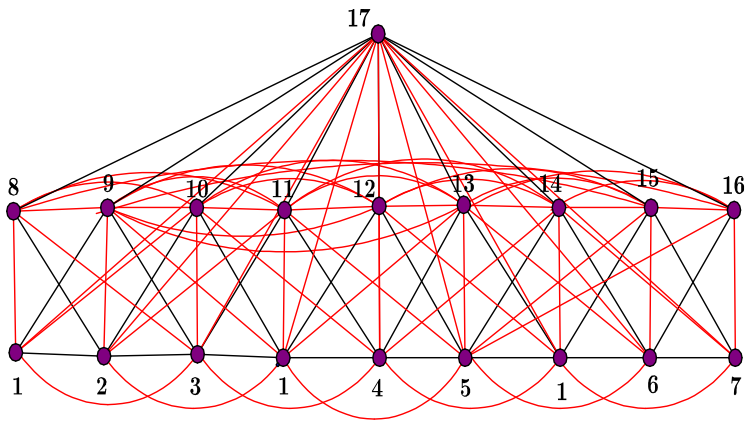


Figure 2.3.2 : Une coloration de packing de $(\mu(P_8))^2$

2.3.2 Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'un cycle

Théorème 2.3.2 *[14] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_p((\mu(C_n))^2) = 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1.$$

La Figure 2.3.3 fournit une coloration de packing de $\mu((C_{10})^2)$.

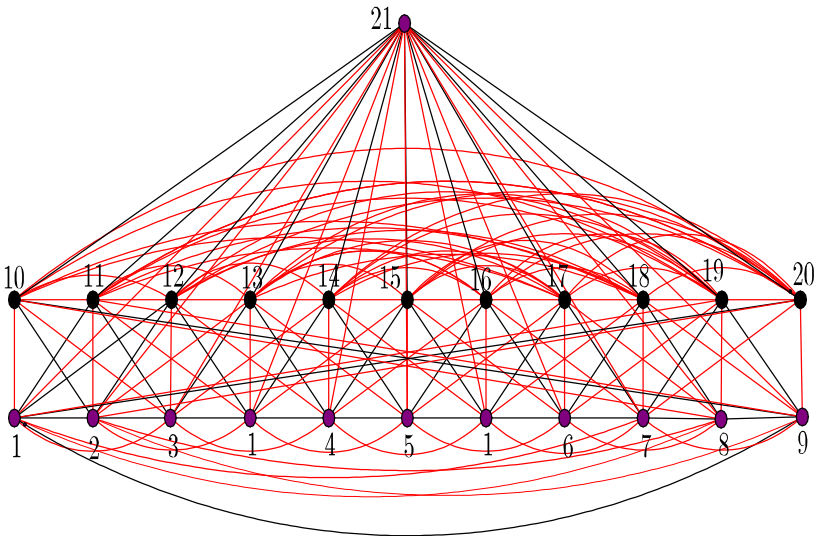


Figure 2.3.3 : Une coloration de packing de $\mu((C_{10})^2)$

2.3.3 Coloration de packing du graphe Mycielski d'une chaîne

Théorème 2.3.3 *[14] Pour $n \geq 2$,*

$$\chi_p((\mu(P_n)) = \begin{cases} 2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 2 & ; n \geq 4, \\ 4 & ; n = 2,\ 3. \end{cases}$$

La Figure 2.3.4 fournit une coloration de packing du graphe $\mu(P_{10})$.

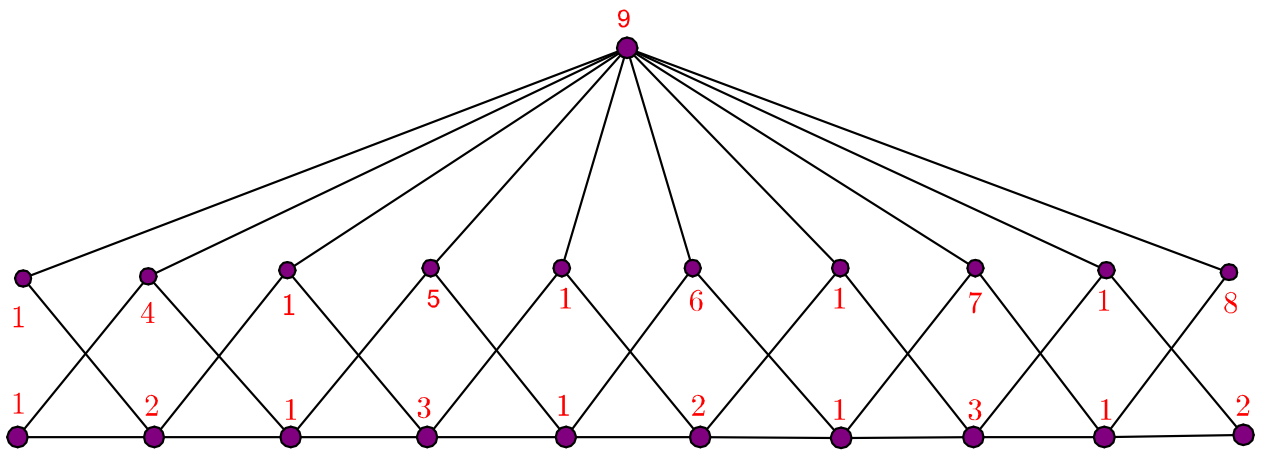


Figure 2.3.4 : Une coloration de packing de $\mu(P_{10})$.

2.3.4 Coloration de packing du graphe mycielski d'un cycle

Théorème 2.3.4 *[14] Pour tout $n \geq 4$,*

$$\chi_p(\mu(C_n)) = n - (\left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-8}{9} \right\rfloor) + 1.\ \chi_p(\mu(C_3)) = 5.$$

La figure 2.3.5 suivante donne une coloration de packing de $\mu(C_{12})$.

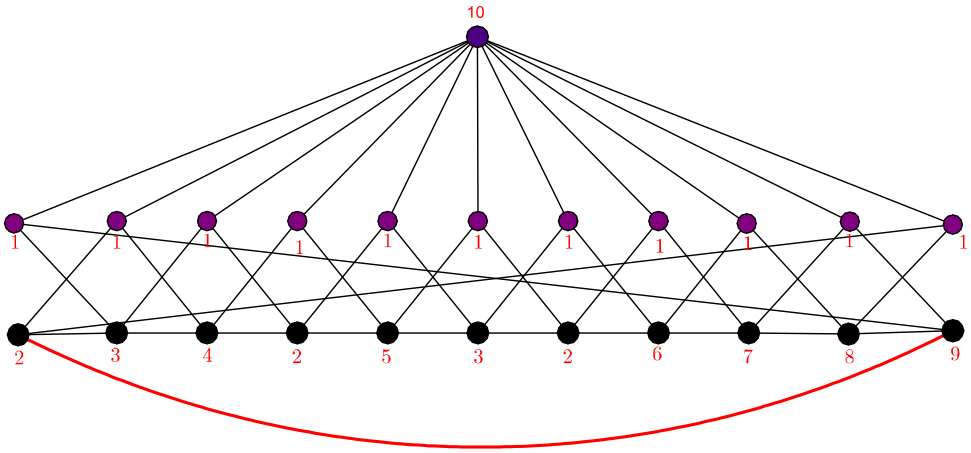


Figure 2.3.5 : Une coloration de packing de $\mu(C_{12})$.

Chapitre 3

Coloration de packing de Mycielski des graphes puissances

3.1 Coloration de packing de Mycielski des graphes puissances d'une chaîne

Le théorème suivant donne la valeur exacte du nombre chromatique de packing de Mycielski du graphe puissance d'une chaîne.

Théorème 3.1.1 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_p(\mu(P_n^2)) = \begin{cases} n+2 & ; n \in \{3,4,5\}, \\ 7 & ; n = 6, \\ 8 & ; n \in \{7,8\}. \end{cases}.$$

Preuve. *On note par x_i, $i \in \{1,...,n\}$ les sommets de la chaîne P_n et par $x_i^{'}$, $i \in \{1,...,n\}$ les sommets correspondants aux sommets x_i. Notons par ω le sommet relié par les sommets $x_i^{'}$. Soit c une coloration de packing sur $\mu(P_n^2)$.*

Premièrement, si $n \in \{3,4,5\}$, alors $diam(\mu(P_n^2)) = 2$ et donc $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 2$. Par conséquent, le nombre maximum des sommets qui peuvent être colorés par 1 est égal à n, et comme $|\mu(P_n^2)| = 2n+1$, on conclut que:

$$\chi_p(\mu(P_n^2)) \geq \left|\mu(P_n^2)\right| - n + 1$$

et donc

$$\chi_p(\mu(P_n^2)) \geq (2n+1) - n + 1 = n + 2$$

d'où

$$\chi_p(\mu(P_n^2)) \geq n + 2$$

Pour montrer que $\chi_p(\mu(P_n^2)) \leq n+2$, *on forme une coloration* $(n+2)-$*packing comme suit: Posons* $c\left(x_i'\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$, *les sommets* $\{\omega, x_i;\ 1 \leq i \leq n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* $\{2, ..., n+2\}$ *et donc* $\chi_p(\mu(P_n^2)) \leq n+2$, *i.e.,* $\chi_p(\mu(P_3^2)) = 5$, $\chi_p(\mu(P_4^2)) = 6$ *et* $\chi_p(\mu(P_5^2)) = 7$.

Si $n = 6$, *alors* $diam(\mu(P_6^2)) = 3$, *et donc* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 3$. *Le graphe* $\mu(P_6^2)$ *contient le sous graphe* $\mu(P_5^2)$ *et d'après les Propositions* 1.2.1 *et* 2.1.9, $\chi_p(\mu(P_6^2)) \geq 7$. *Montrons que* $\chi_p(\mu(P_6^2)) \leq 7$. *On forme une coloration* $7-$*packing comme suit. Posons* $c\left(x_i'\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., 6\}$, $c(x_1) = c(x_6) = 2$ *et les autres sommets* $\{\omega, x_i;\ 2 \leq i \leq 5\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, *et donc* $\chi_p(\mu(P_6^2)) \leq 7$. *D'où* $\chi_p(\mu(P_6^2)) = 7$. *Voir la Figure* 3.4.2.

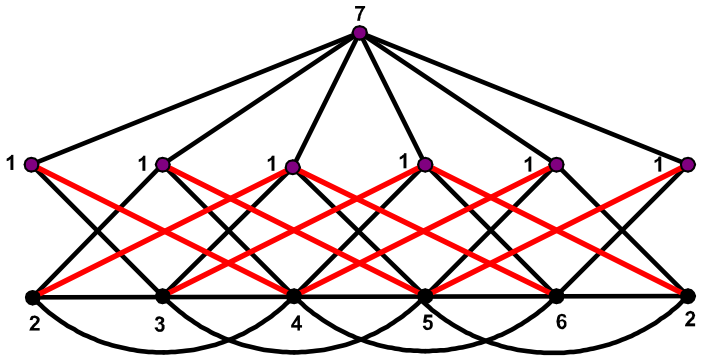


Figure 3.4.2 : *Une coloration de packing de* $\mu_2(P_6^2)$.

Si $n = 7$, *alors* $diam(\mu(P_7^2)) = 3$, *et ainsi* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 3$. *Le nombre maximum de sommets qui peuvent être colorés par* 1 *est* 7, *soit* $c\left(x_i'\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., 7\}$, *les autres sommets reçoivent par paire des couleurs différentes de* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, *ainsi* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \leq 8$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \geq 8$. *Supposons que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \leq 7$. *Comme le graphe* $\mu(P_7^2)$ *contient le sous graphe* $\mu(P_6^2)$, *les Propositions* 1.2.1 *et* 2.1.9, *prouve que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \geq 7$. *Par conséquent, montrons que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \neq 7$. *Premièrement, si*

$c(\omega) = 2$, *alors* $c(x_i) \neq 2$ *et* $c\left(x_i^{'}\right) \neq 2$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *car* $d(\omega, \{x_i,\ x_i^{'};\ 1 \leq i \leq n\}) \leq 2$. *D'autre part, on distingue les cas suivants, concernant l'utilisation de la couleur* 2.

Cas 1. *S'il existe* $h \in \{3, 4, 5\}$ *tel que* $c\left(x_h^{'}\right) = 2$, *alors la couleur* 2 *est utilisée ici une seule fois sur* $\mu(P_7^2)$, *car* $d(x_h, \{\omega,\ x_i,\ x_i^{'};\ 1 \leq i \leq n\}) \leq 2$.

Cas 2. *S'il existe* $h \in \{1, 2\}$ *tel que* $c\left(x_h^{'}\right) = 2$, *alors dans ce cas la couleur* 2 *est utilisée* 2 *fois sur* $\mu(P_7^2)$. *Supposons que* $c\left(x_1^{'}\right) = 2$. *Alors, on peut colorer soit le sommet* x_6, *soit le sommet* x_7 *par* 2.

Cas 2.1. $c\left(x_1^{'}\right) = 2$. *Dans ce cas l'un des sommets* $\{x_6,\ x_7\}$ *est coloré par* 2. *Le nombre maximun des sommets de* $\mu(P_7^2)$ *coloré par* 1 *est* 6, *soient* $\{x_i^{'};\ 2 \leq i \leq 7\}$. *Les autres sommets de* $\mu(P_7^2)$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *contraduction que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \leq 7$.

Cas 2.2. $c\left(x_2^{'}\right) = 2$. *Alors, dans ce cas le seul sommet qui peut être coloré par la couleur* 2 *est* x_7, *et les sommets qui peuvent être colorés par la couleur* 1 *sont* $\{x_1^{'},\ x_i^{'};\ 3 \leq i \leq 7\}$. *Les sommets* $\{\omega,\ x_i;\ 1 \leq i \leq 6\}$ *reçoivent par paire* 7 *couleurs différentes de* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *ainsi une contraduction que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \leq 7$. *Par symétrie, on joue le même rôle si* $h \in \{6, 7\}$.

Cas 3. *La couleur* 2 *est utilisée seulement sur les sommets* $\{x_i;\ 1 \leq i \leq 7\}$ *deux fois. Deux cas se présenter ici.*

Cas 3.1. $c(x_1) = 2$. *Alors, l'un des sommets* $\{x_6,\ x_7\}$ *peut recevoir la couleur* 2. *Le nombre maximum des sommets qui peuvent être colorés par* 1 *est* 7, *soient* $\{x_i^{'};\ 1 \leq i \leq n\}$ *et les autres sommets du graphe prennent par paire* 6 *couleurs différentes de* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Donc, contraduction que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \leq 7$.

Cas 3.2. $c(x_2) = 2$. *Alors, dans ce cas le seul sommet qui peut être coloré par la couleur* 2 *est* x_7. *Les sommets* $\{x_i^{'};\ 1 \leq i \leq n\}$ *reçoivent la couleur* 1, *et donc nous avons ici au moins* 8 *couleurs, contraduction. Par symétrie, on procéde par la même manière si l'un des sommets* $\{x_6,\ x_7\}$ *est coloré par* 2. *En conclusion, on déduit que* $\chi_p(\mu(P_7^2)) \geq 8$.

Si $n = 8$, *alors* $diam(\mu(P_8^2)) = 4$, *et donc* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 4$. *Le graphe* $\mu(P_8^2)$ *contient le sous graphe* $\mu(P_7^2)$ *et donc d'après les Propositions* 1.2.1 *et* 2.1.9, *et ainsi* $\chi_p(\mu(P_8^2)) \geq 8$. *Pour montrer que* $\chi_p(\mu(P_8^2)) \leq 8$, *on utilise la coloration suivante, posons*

$c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., 8\}$, *ainsi* $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{2, 7\}$, *de même* $c(x_i) = 3$ *si* $i \in \{1, 8\}$, *et donc les autres sommets, i.e.,* $\{\omega,\ x_i;\ 3 \leq i \leq 6\}$ *reçoivent des couleurs différentes de* $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, *donc* $\chi_p(\mu(P_8^2)) \leq 8$. *Par conséquent,* $\chi_p(\mu(P_8^2)) = 8$. ■

3.2 Coloration de packing de Mycielski des graphes puissances d'un cycle

Le théorème suivant donne la valeur exacte du nombre chromatique de packing de Mycielski du graphe puissance d'un cycle.

Théorème 3.2.1 *Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_p(\mu(C_n^2)) = \begin{cases} n+2 & ; n \in \{3, 4, 5, 6, 9\} \\ n+1 & ; n \in \{10, 11, 12, 13\} \end{cases}.$$

Preuve. *On note par* x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ *les sommets du cycle* C_n *et par* $x_i^{'}$, $i \in \{1, ..., n\}$ *les sommets correspondants aux sommets* x_i. *Notons par* ω *le sommet relié par les sommets* $x_i^{'}$. *Soit* c *une coloration de packing sur* $\mu(C_n^2)$.

Premièrement, si $n \in \{3, ..., 9\}$, *alors* $diam(\mu(C_n^2)) = 2$ *et donc* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 2$. *Posons* $A = \{\omega,\ x_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. *Nous avons* $\tau(\mu(C_n^2)) = |A| = n + 1$. *Comme* $diam(\mu(C_n^2)) = 2$, *on peut appliquer la Proposition* 2.1.4, $\chi_p(\mu(C_n^2)) = \tau(\mu(C_n^2)) + 1 = n + 2$. *Par conséquent,* $\chi_p(\mu(C_3^2)) = 5$, $\chi_p(\mu(C_4^2)) = 6$, $\chi_p(\mu(C_5^2)) = 7$, $\chi_p(\mu(C_6^2)) = 8$, $\chi_p(\mu(C_7^2)) = 9$, $\chi_p(\mu(C_8^2)) = 10$ *et* $\chi_p(\mu(C_9^2)) = 11$. *Voir la Figure* 3.2.1.

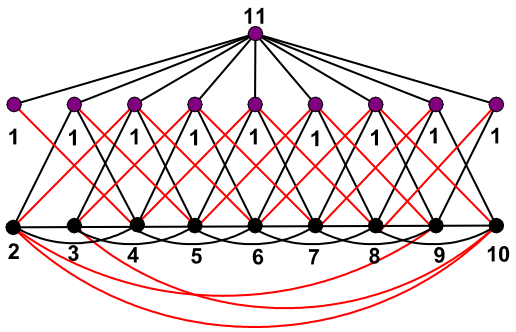


Figure 3.2.1 : *Une coloration de packing de* $\mu(C_9^2)$.

Deuxièment, si $n \in \{10, ..., 13\}$, *alors* $diam(\mu(C_n^2)) = 3$, *nous avons* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 4$. *Ainsi, la coloration de packing optimale consiste à utiliser le maximum les couleurs* 1 *et* 2. *Par conséquent, deux cas se présenter concernant l'utilisation de la couleur* 1. *Premièrement, si* $c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i\right) = 1$ *pour* $i = 3k + 1$, $i \in \{1, ..., n-2\}$, *alors, nous avons* $2\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 2$ *sommets sur* $\mu(C_n^2)$ *colorés par* 1. *D'autre part, on peut colorer* n *sommets de* $\mu(C_n^2)$ *par* 1, *soient* $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$. *Concernant la couleur* 2, *on peut l'utiliser au plus deux fois sur* $\mu(C_n^2)$, *soit* $c\left(x_i\right) = 2$ *si* $i = 5k + 1$, $i \in \{1, ..., n-4\}$, $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-5}{5} \rfloor$, *et par conséquent, pour* $n \in \{10, 11, 12, 13\}$ *deux sommets seulement peuvent être colorés par la couleur* 2. *Comme* $n \geq 2\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 2$ *et que* $|\mu(C_n^2)| = 2n + 1$, *on conclut que*

$$\chi_p(\mu(C_n^2)) \geq \left|\mu(C_n^2)\right| - (n+2) + 2$$

et donc,

$$\chi_p(\mu(C_n^2)) \geq (2n+1) - (n+2) + 2$$

d'où

$$\chi_p(\mu(C_n^2)) \geq n + 1.$$

Pour montrer que $\chi_p(\mu(C_n^2)) \leq n + 1$, *on forme une coloration* $(n+1)-$*packing comme suit: Posons* $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $c\left(x_1\right) = c\left(x_6\right) = 2$, *les autres sommets du graphe reçoivent par paire des couleurs différentes de* $\{3, ..., n+1\}$, *et ainsi* $\chi_p(\mu(C_n^2)) \leq n+1$. *Donc, nous avons* $\chi_p(\mu(C_{10}^2)) = 11$, $\chi_p(\mu(C_{11}^2)) = 12$, $\chi_p(\mu(C_{12}^2)) = 13$ *et* $\chi_p(\mu(C_{13}^2)) = 14$. *Voir la Figure* 3.2.2.

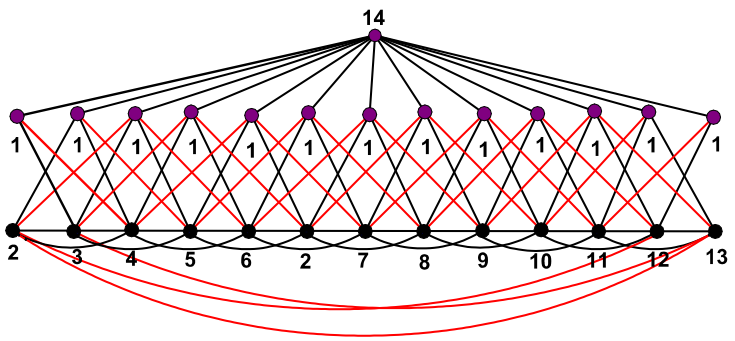


Figure 3.2.2 : *Une coloration de packing de* $\mu(C_{13}^2)$.

■

Chapitre 4

Coloration de packing de Mycielski généralisé de quelques graphes particuliers

4.1 Coloration de packing de Mycielski généralisé d'une chaîne

Le théorème suivant donne la valeur exacte du nombre chromatique de packing de Mycielski généralisé d'une chaîne.

Théorème 4.1.1 *Pour* $n \geq 2$,

$$\chi_p(\mu_2(P_n)) = \begin{cases} 4 & ; n \in \{2,3\} \\ 7 & ; n \in \{4,5\} \\ 8 & ; n \in \{6,7\} \end{cases} .$$

Preuve. On note par x_i, $i \in \{1,...,n\}$ les sommets de la chaîne P_n et par $x_i^{'}$, $i \in \{1,...,n\}$ les sommets correspondants aux sommets x_i. Notons par $x_i^{''}$, $i \in \{1,...,n\}$ les sommets correspondants aux sommets $x_i^{'}$. Notons par ω le sommet relié par les sommets $x_i^{''}$. Soit c une coloration de packing arbitraire sur $\mu_2(P_n)$.

Premièrement, si $n = 2$, alors le graphe $\mu_2(P_2)$ est isomorphe au graphe C_7, $\chi_p(\mu_2(P_2)) = \chi_p(C_7) = 4$ et le résultat est vrai.

Si $n = 3$, alors $\mu_2(P_3)$ contient un sous graphe n'est pas multiple de 4. D'après les Propositions 1.2.1 et 2.1.9, $\chi_p(\mu_2(P_3)) \geq 4$. Pour montrer que $\chi_p(\mu_2(P_3)) \leq 4$, on forme une coloration 4−packing comme suit: posons $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, 3\}$, $c(x_2) = c(\omega) = 2$, $c\left(x_2^{'}\right) = 3$ et $c\left(x_2^{''}\right) = 4$, et donc $\chi_p(\mu_2(P_3)) \leq 4$. Par conséquent, $\chi_p(\mu_2(P_3)) = 4$.

Supposons que $n = 4$. Puisque $diam(\mu_2(P_4)) = 3$, alors $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 3$. Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont 1 et 2. Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces deux couleurs. Pour montrer que $\chi_p(\mu_2(P_4)) \leq 7$, on forme une coloration 7−packing comme suit: posons $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{1, 3\}$ et $c(x_2) = c(\omega) = 2$. Les 5 sommets restants, i.e., les sommets x_4, $x_2^{'}$, $x_4^{'}$, $x_2^{''}$ et $x_4^{''}$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Maintenant, montrons que $\chi_p(\mu_2(P_4)) \geq 7$. Supposons que $\chi_p(\mu_2(P_4)) < 7$. On distingue les cas suivants.

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{1, 3\}$ et $c(x_2) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_4) = c(\omega) = 2$. Alors, la couleur 2 est utilisée dans ce cas deux fois sur $\mu_2(P_4)$. Par contre, on peut l'utiliser trois fois. Soit $c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{1, 3\}$ avec $c(x_3) = 1$, $c(x_1) = c(x_4) = c(\omega) = 2$, $c(x_2) = 3$, $c\left(x_2^{'}\right) = 4$, $c\left(x_2^{''}\right) = 5$, $c\left(x_4^{'}\right) = 6$ et $c\left(x_4^{''}\right) = 7$.

Cas 2. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{2, 4\}$ et $c(x_1) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_3) = c(\omega) = 2$. Alors, la couleur 2 est utilisée dans ce cas deux fois sur $\mu_2(P_4)$. Par contre, on peut l'utiliser trois fois. Soit $c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{2, 4\}$ avec $c(x_2) = 1$, $c(x_1) = c(x_4) = c(\omega) = 2$, $c(x_3) = 3$, $c\left(x_1^{'}\right) = 4$, $c\left(x_1^{''}\right) = 5$, $c\left(x_3^{'}\right) = 6$ et $c\left(x_3^{''}\right) = 7$.

Cas 3. $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On distingue les sous cas suivants.

Cas 3.1. $c(x_2) = c(x_4) = 1$ et $c(x_1) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_3) = c(\omega) = 2$. Les 5 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Cas 3.2. $c(x_1) = c(x_3) = 1$ et $c(x_2) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_4) = c(\omega) = 2$. Les 5 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Cas 3.3. $c(x_2) = 1$ ou $c(x_3) = 1$ et $c(x_1) = c(x_4) = c(\omega) = 2$. Les 5 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Cas 4. $c(x_i') = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ avec $c(\omega) = 1$ et $c(x_1) = c(x_4) = 2$. Les 6 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Donc, il s'ensuit d'après les cas précédents $\chi_p(\mu_2(P_4)) \geq 7$. Contradiction que $\chi_p(\mu_2(P_4)) < 7$. Par conséquent $\chi_p(\mu_2(P_4)) = 7$.

Supposons que $n = 5$. Puisque $diam(\mu_2(P_5)) = 4$, alors $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 4$. Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont $1, 2$ et 3. Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces trois couleurs. Montrons que $\chi_p(\mu_2(P_5)) = 7$. Pour montrer que $\chi_p(\mu_2(P_5)) \leq 7$, on forme une coloration $7-$packing comme suit posons $c(x_i) = c(x_i') = c(x_i'') = 1$ pour tout $i \in \{1, 3, 5\}$ et $c(x_2) = c(\omega) = 2$. Les 5 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, et donc $\chi_p(\mu_2(P_5)) \leq 7$. Maintenant, montrons que $\chi_p(\mu_2(P_5)) \geq 7$. Supposons que $\chi_p(\mu_2(P_5)) < 7$.

Cas 1. $c(x_i) = c(x_i') = c(x_i'') = 1$ pour $i \in \{1, 3, 5\}$ et $c(x_2) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_4) = c(\omega) = 2$. Alors, la couleur 2 est utilisée dans ce cas deux fois sur $\mu_2(P_5)$.

Cas 2. $c(x_i') = c(x_i'') = 1$ pour $i \in \{1, 3, 5\}$. On distingue les sous cas suivants.

Cas 2.1. $c(x_3) = c(x_5) = 1$, $c(x_1) = c(x_4) = c(\omega) = 2$.

Cas 2.2. $c(x_1) = c(x_3) = 1$, $c(x_2) = c(x_5) = c(\omega) = 2$.

Cas 2.3. $c(x_2) = c(x_4) = 1$, $c(x_1) = c(x_5) = c(\omega) = 2$.

Cas 3. $c(x_i) = c(x_i') = c(x_i'') = 1$ pour $i \in \{2, 4\}$ et $c(x_1) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_3) = c(\omega) = 2$ ou $c(x_5) = c(\omega) = 2$. Alors, la couleur 2 est utilisée dans ce cas deux fois sur $\mu_2(P_4)$.

Cas 4. $c(x_i') = c(x_i'') = 1$ pour $i \in \{2, 4\}$. On distingue les cas suivants.

Cas 4.1. $c(x_2) = 1$, $c(x_1) = c(x_4) = c(\omega) = 2$ et l'un des sommet de l'ensemble $\{x_4, x_5\}$ est coloré par 2.

Cas 4.2. $c(x_4) = 1$, $c(x_5) = c(\omega) = 2$ et l'un des sommet de l'ensemble $\{x_1, x_2\}$ est coloré par 2.

Cas 5. $c(x_i'') = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On distingue les sous cas suivants.

Cas 5.1. $c(x_2) = c(x_4) = 1$, $c(x_1) = c(x_5) = c(\omega) = 2$. Les 6 sommets restants, i.e., les sommets x_3, $x_1^{'}$, $x_2^{'}$, $x_3^{'}$, $x_4^{'}$ et $x_5^{'}$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Cas 5.2. $c(x_1) = c(x_3) = 1$ et $c(x_2) = c(x_5) = c(\omega) = 2$. Les sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6\ , 7\}$.

Cas 5.3. $c(x_5) = 1$ et l'un des sommet de l'ensemble $\{x_2, x_3\}$ est coloré par 1 avec $c(x_1) = c(x_4) = c(\omega) = 2$. Les sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6\ , 7\}$.

Cas 6. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ avec $c(\omega) = 1$ et $c(x_1) = c(x_4) = 2$ ou bien $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ avec $c(\omega) = 1$ et $c(x_2) = c(x_5) = 2$. Alors, dans ce cas les 6 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 et 2, i.e., des couleurs de $\{3, 4, 5, 6\ , 7, 8\}$.

Donc, il s'ensuit d'après les cas précédents $\chi_p(\mu_2(P_5)) \geq 7$. Contradiction que $\chi_p(\mu_2(P_5)) < 7$. Par conséquent $\chi_p(\mu_2(P_5)) = 7$.

Supposons que $n = 6$. Puisque $diam(\mu_2(P_6)) = 5$, alors $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 5$. Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont $1, 2\ , 3$ et 4. Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces quatres couleurs. Montrons que $\chi_p(\mu_2(P_6)) = 8$. Pour montrer que $\chi_p(\mu_2(P_6)) \leq 8$, on forme une coloration $8-$packing comme suit: posons $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, 3, 5\}$, $c(x_2) = c(x_6) = c(\omega) = 2$, $c\left(x_2^{'}\right) = c\left(x_6^{'}\right) = 3$. Les 5 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de $\{1, 2,\ 3\}$, i.e., des couleurs de $\{4, 5, 6, 7,\ 8\}$. Maintenant, montrons que $\chi_p(\mu_2(P_6)) \geq 8$. Supposons que $\chi_p(\mu_2(P_6)) < 8$. Nous distinguons deux cas ici.

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{1, 3, 5\}$ et $c(x_2) = c(x_6) = c(\omega) = 2$.

Cas 2. $c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{1, 3, 5\}$. On distingue les cas suivants.

Cas 2.1. $c(x_3) = 1$, $c(x_1) = c(\omega) = 2$ avec l'un des sommets de l'ensemble $\{x_4, x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 2.2. $c(x_1) = c(x_3) = 1$ ou $c(x_1) = c(x_4) = 1$, $c(x_2) = c(\omega) = 2$ avec l'un des sommets de l'ensemble $\{x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 2.3. $c(x_1) = c(x_5) = 1$, $c(x_3) = c(x_6) = c(\omega) = 2$.

Cas 3. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{2, 4, 6\}$ et $c(x_1) = c(x_5) = c(\omega) = 2$.

Cas 4. $c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour $i \in \{2, 4, 6\}$. On distingue les cas suivants.

Cas 4.1. $c(x_2) = 1$, $c(x_1) = c(\omega) = 2$ et l'un des sommets de l'ensemble $\{x_4, x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 4.2. $c(x_4) = 1$, $c(x_2) = c(\omega) = 2$ et l'un des sommets de l'ensemble $\{x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 4.3. $c(x_2) = c(x_4) = 1$, $c(x_3) = c(x_6) = c(\omega) = 2$.

Cas 5. $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On distingue les sous cas suivants.

Cas 5.1. $c(x_2) = 1$ ou $c(x_3) = 1$, $c(x_1) = c(\omega) = 2$ et l'un des sommets de l'ensemble $\{x_4, x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 5.2. $c(x_1) = c(x_3) = 1$ ou $c(x_1) = c(x_4) = 1$ et $c(x_2) = c(\omega) = 2$ et l'un des sommets de l'ensemble $\{x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 5.3. $c(x_1) = 1$ ou $c(x_2) = 1$, $c(x_3) = c(x_6) = c(\omega) = 2$.

Cas 6. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ pour $i \in \{1, ..., n\}$ avec $c(\omega) = 1$. On distingue les sous cas suivants.

Cas 6.1. $c(x_1) = 2$ et l'un des sommets de l'ensemble $\{x_4, x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 6.2. $c(x_2) = 2$ et l'un des sommets de l'ensemble $\{x_5, x_6\}$ est coloré par 2.

Cas 6.3. $c(x_3) = c(x_6) = 2$.

Alors, dans tous les cas précédents les autres sommets du graphe sont colorés par des couleurs différentes de $1, 2, 3$ et 4. Contradiction avec la supposition que $\chi_p(\mu_2(P_6)) < 8$. Par conséquent, $\chi_p(\mu_2(P_6)) \geq 8$.

Supposons que $n = 7$. Le graphe $\mu_2(P_7)$ contient le sous graphe $\mu_2(P_6)$. D'après la Proposition 1.2.1, $\chi_p(\mu_2(P_7)) \geq 8$. Pour démontrer que $\chi_p(\mu_2(P_7)) \leq 8$, on forme une coloration $8-$packing comme suit: posons $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ pour tout $i \in \{1, 3, 5, 7\}$, $c(x_2) = c(x_6) = c(\omega) = 2$, $c\left(x_2^{'}\right) = c\left(x_6^{'}\right) = 3$. Les 5 sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de $\{1, 2, 3\}$, i.e., des couleurs de $\{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Voir la Figure 3.3.1.

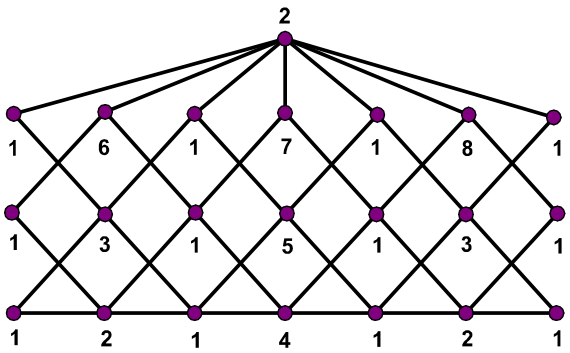


Figure 3.3.1 : Une coloration de packing de $\mu_2(P_7)$.

■

4.2 Coloration de packing de Mycielski généralisé d'un cycle

Le théorème suivant donne la valeur exacte du nombre chromatique de packing de Mycielski généralisé d'un cycle.

Théorème 4.2.1 *Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$\chi_p(\mu_2(C_n)) = \begin{cases} n+3 & ; 3 \leq n \leq 4 \text{ ou } 10 \leq n \leq 15, \\ n+4 & ; 5 \leq n \leq 7, \\ 11 & ; n = 8, \\ 13 & ; n = 9, \\ 17 & ; n = 16. \end{cases}$$

Preuve. *On note par x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du cycle C_n et par $x_i^{'}$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets x_i. Notons par $x_i^{''}$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $x_i^{'}$. Notons par ω le sommet relié par les sommets $x_i^{''}$. Soit c une coloration de packing sur $\mu_2(C_n)$.*

Premièrement, si $n = 3$. Puisque $diam(\mu_2(C_3)) = 3$, nous avons $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 3$. Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont 1 et 2.

Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces deux couleurs. Pour montrer que $\chi_p(\mu_2(C_3)) \leq 6$, *on forme une coloration* $6-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(x_2) = 1$ *et* $c(x_1) = c(\omega) = 2$. *Les* 4 *sommets restants, i.e., les sommets* x_3, $x_1^{'}$, $x_2^{'}$, $x_3^{'}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *i.e., des couleurs de* $\{3, 4, 5, 6\}$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_3)) \geq 6$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_3)) < 6$. *On distingue les cas suivants concernant l'utilisation des couleurs* 1 *et* 2.

Cas 1. $c(x_1) = c\left(x_1^{'}\right) = c\left(x_1^{''}\right) = 1$ *et* $c(x_2) = c(\omega) = 2$ *ou bien* $c(x_3) = c(\omega) = 2$.

Cas 2. $c(x_2) = c\left(x_2^{'}\right) = c\left(x_2^{''}\right) = 1$ *et* $c(x_1) = c(\omega) = 2$ *ou bien* $c(x_3) = c(\omega) = 2$.

Cas 3. $c(x_3) = c\left(x_3^{'}\right) = c\left(x_3^{''}\right) = 1$ *et* $c(x_1) = c(\omega) = 2$ *ou bien* $c(x_2) = c(\omega) = 2$.

Alors, la couleur 2 *est utilisée dans les cas précédents deux fois sur* $\mu_2(C_3)$. *Les* 5 *sommets restants sont colorés par des couleurs différentes de* 1 *et* 2. *Contraduction que* $\chi_p(\mu_2(C_3)) < 6$. *Donc* $\chi_p(\mu_2(C_3)) \geq 6$.

Cas 4. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $c(\omega) = 1$. *Les* 6 *sommets restants, i.e., les sommets* x_i *et* $x_i^{'}$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1, *i.e., des couleurs de* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, *et donc* $\chi_p(\mu_2(C_3)) \geq 6$. *Par conséquent* $\chi_p(\mu_2(C_3)) = 6$.

Supposons que $n = 4$. *Puisque* $diam(\mu_2(C_4)) = 3$. *Alors, nous avons* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 3$. *Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont* 1 *et* 2. *Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces deux couleurs. Pour montrer que* $\chi_p(\mu_2(C_4)) \leq 7$, *on forme une coloration* $7-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., 4\}$, $c(x_1) = c(x_3) = 1$ *et* $c(x_2) = c(\omega) = 2$. *Les* 5 *sommets restants, i.e., les sommets* x_4, $x_i^{'}$ *pour* $i \in \{1, ..., 4\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *i.e., des couleurs de* $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_4)) \geq 7$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_4)) < 7$. *On distingue les cas suivants.*

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, 3\}$ *et* $c(x_2) = c(\omega) = 2$ *ou bien* $c(x_4) = c(\omega) = 2$.

Cas 2. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{2, 4\}$ *et* $c(x_1) = c(\omega) = 2$ *ou bien* $c(x_3) = c(\omega) = 2$.

Alors, la couleur 2 *est utilisée dans ces deux cas deux fois sur* $\mu_2(C_4)$. *Les* 5 *sommets restants sont colorés par des couleurs différentes de* 1 *et* 2. *Contraduction que* $\chi_p(\mu_2(C_4)) < 7$. *Donc* $\chi_p(\mu_2(C_4)) \geq 7$.

Cas 3. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $c(\omega) = 1$. *Les* 8 *sommets restants, i.e., les sommets* x_i *et* $x_i^{''}$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1, *i.e., des couleurs de* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *et donc* $\chi_p(\mu_2(C_4)) \geq 7$. *Contradiction que* $\chi_p(\mu_2(C_4)) < 7$. *Par conséquent* $\chi_p(\mu_2(C_4)) = 7$. *Notons que le graphe* $\mu_2(C_4)$ *contient le sous graphe* $\mu_2(P_4)$ *et par la Proposition* 1.2.1 *et Théorème* 4.1.1, $\chi_p(\mu_2(C_4)) \geq 7$.

Supposons que $n = 5$. *Puisque* $diam(\mu_2(C_5)) = 3$, *alors* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 3$. *Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont* 1 *et* 2. *Comme* c *est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces deux colueurs. Pour montrer que* $\chi_p(\mu_2(C_5)) \leq 9$, *on forme une coloration* $9-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(x_i) = 1$ *pour tout* $i = 2k + 1$; $i \in \{1, ..., n - 1\}$ *et* $c(x_2) = c(\omega) = 2$. *Les* 7 *sommets restants, i.e., les sommets* x_4, x_5, $x_i^{'}$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *i.e., des couleurs de* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_5)) \geq 9$. *Notons que* $\chi_p(\mu_2(C_5)) \geq \chi_p(\mu_2(P_5)) = 7$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_5)) < 9$. *Deux cas se présenter ici.*

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i = 2k + 1$, $i \in \{1, ..., n - 1\}$. *On distingue les sous cas suivants.*

Cas 1.1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, 3\}$. *La couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_2, x_4, x_5\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω.

Cas 1.2. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, 4\}$. *La couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_2, x_3, x_5\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω.

Cas 1.3. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{2, 4\}$. *La couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1, x_3, x_5\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω.

Cas 1.4. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{2, 5\}$. *La couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1, x_3, x_4\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω.

Cas 1.5. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{3, 5\}$. *La couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1, x_{2,}x_4\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω.

Dans tous les cas précédents, les autres sommets du graphe sont colorés par des couleurs différentes de 1 *et* 2, *i.e.,* 8 *sommets du graphe reçoivent des couleurs différentes de* 1 *et* 2. *Contradiction avec la supposition que* $\chi_p(\mu_2(C_5)) < 9$. *Par conséquent,* $\chi_p(\mu_2(C_5)) \geq 10$.

Cas 2. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $c(\omega) = 1$. *Donc, pour utiliser la couleur* 2, *on distingue les cas suivants.*

Cas 2.1. $c(x_1) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_2^{''}, x_5^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$.

Cas 2.2. $c(x_2) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1^{''}, x_3^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$.

Cas 2.3. $c(x_3) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1^{''}, x_4^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$.

Cas 2.4. $c(x_4) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_3^{''}, x_5^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$.

Cas 2.5. $c(x_5) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1^{''}, x_4^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$.

Alors, dans tous les cas précédents la couleur 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_5)$. *Les* 8 *sommets restants, i.e., les sommets* x_i *et* $x_i^{''}$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *et donc* $\chi_p(\mu_2(C_5)) \geq 9$. *Par conséquent* $\chi_p(\mu_2(C_5)) = 9$.

Supposons que $n = 6$. *Puisque* $diam(\mu_2(C_6)) = 3$, *alors* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 3$. *Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont* 1 *et* 2. *Comme* c *est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces deux couleurs. Pour montrer que* $\chi_p(\mu_2(C_6)) \leq 10$, *on forme une coloration* $10-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(x_i) = 1$ *pour tout* $i = 2k+1$; $i \in \{1, ..., n-1\}$ *et* $c(x_2) = c(\omega) = 2$. *Les* 8 *sommets restants, i.e., les sommets* x_4, x_6, $x_i^{'}$ *pour* $i \in \{1, ..., 6\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *i.e., des couleurs de* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_6)) \geq 10$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_6)) < 10$. *On distingue les deux cas suivants.*

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i = 2k+1$; $i \in \{1, ..., n-1\}$. *On distingue les sous cas suivants.*

Cas 1.1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1,3,5\}$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_2, x_{4,}x_6\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_6)$.

Cas 1.2. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{2,4,6\}$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1, x_{3,}x_5\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_6)$.

Donc, dans tous les cas précédents les autres sommets sont colorés par des couleurs différentes de 1 *et* 2, *i.e.,* 8 *sommets du graphe sont colorés par les couleurs* $\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$. *Contradiction avec la supposition que* $\chi_p(\mu_2(C_6)) < 10$. *Par conséquent,* $\chi_p(\mu_2(C_6)) \geq 10$.

Cas 2. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $c(\omega) = 1$. *On distingue les sous cas suivants.*

Cas 2.1. $c(x_1) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_4, x_2^{''}, x_4^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_6)$.

Cas 2.2. $c(x_2) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_1^{''}, x_3^{''}, x_5^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_6)$.

Cas 2.3. $c(x_3) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_2^{''}, x_4^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_6)$.

Donc, dans tous les cas précédents la couleur 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_6)$. *Les autres sommets restants, i.e., les sommets* x_2, x_3, x_5, x_6 *et* $x_i^{''}$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2. *Alors,* $\chi_p(\mu_2(C_6)) \geq 10$. *Par conséquent* $\chi_p(\mu_2(C_6)) = 10$.

Supposons que $n = 7$. *Puisque* $diam(\mu_2(C_7)) = 3$, *alors* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 3$. *Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont* 1 *et* 2. *Comme* c *est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces deux couleurs. Pour montrer que* $\chi_p(\mu_2(C_7)) \leq 11$, *on forme une coloration* $11-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(x_i) = 1$ *pour tout* $i = 2k+1$; $i \in \{1, ..., n-1\}$ *et* $c(x_2) = c(x_6) = c(\omega) = 2$. *Les* 9 *sommets restants, i.e., les sommets* x_4, x_7, $x_i^{'}$ *pour* $i \in \{1, ..., 7\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *i.e., des couleurs de* $\{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_7)) \geq 11$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_7)) < 11$. *Deux cas se présenter ici.*

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i = 2k+1$; $i \in \{1, ..., n-1\}$. *On distingue les sous cas suivants.*

Cas 1.1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, 3, 5\}$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_2, x_4, x_6\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_7)$.

Cas 1.2. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{2, 4, 6\}$. *L'un des sommets de l'ensemble* $\{x_1, x_3, x_5\}$ *est coloré par* 2 *avec le sommet* ω. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_7)$.

Donc, dans tous les cas les autres sommets non colorés par 1 *et* 2, *sont colorés par des couleurs différentes de* 1 *et* 2, *i.e.,* 10 *sommets du graphe sont colorés par les couleurs* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. *Contradiction avec la supposition que* $\chi_p(\mu_2(C_7)) < 11$. *Par conséquent,* $\chi_p(\mu_2(C_7)) \geq 11$.

Cas 2. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $c(\omega) = 1$. *On distingue les sous cas suivants.*

Cas 2.1. $c(x_1) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_4, x_2^{''}, x_4^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_7)$.

Cas 2.2. $c(x_2) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_1^{''}, x_3^{''}, x_5^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_7)$.

Cas 2.3. $c(x_3) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_2^{''}, x_4^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 2. *Alors, la couleur* 2 *est utilisée deux fois sur* $\mu_2(C_7)$.

Donc, dans tous les cas précédents les 12 *sommets restants reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1 *et* 2. *Alors,* $\chi_p(\mu_2(C_7)) \geq 11$. *Contradiction que* $\chi_p(\mu_2(C_7)) < 11$. *Par conséquent* $\chi_p(\mu_2(C_7)) = 11$.

Supposons que $n = 8$. *Puisque* $diam(\mu_2(C_8)) = 4$, *alors* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 4$. *Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont* 1, 2 *et* 3. *Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces trois couleurs. Pour montrer que* $\chi_p(\mu_2(C_8)) \leq 11$, *on forme une coloration* $11-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(x_i) = 1$ *pour tout* $i = 2k+1$; $i \in \{1, ..., n-1\}$ *et* $c(x_2) = c(x_6) = c(\omega) = 2$, $c(x_4) = c(x_8) = 3$. *Les* 8 *sommets restants, i.e., les sommets* $x_i^{'}$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* 1, 2 *et* 3, *i.e., des*

couleurs de $\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_8)) \geq 11$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_8)) < 11$. *On distingue les deux cas suivants.*

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i^{'}\right) = c\left(x_i^{''}\right) = 1$ *pour tout* $i = 2k+1$, $i \in \{1,...,n-1\}$. *Chacune des couleurs* 2 *et* 3 *est utilisées* 2 *fois sur les sommets* $\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$, *sans oublier que* $c(\omega) = 2$. *Les autres sommets du graphe sont colorés par des couleurs différentes de* 1, 2 *et* 3. *Donc, pour utiliser les couleurs* 2 *et* 3, *on distingue les cas suivants.*

Cas 1.1. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{2,6\}$ *avec* $c(\omega) = 2$, $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{'}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.2. $c(x_2) = 2$ *et* $c\left(x_6^{'}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_6^{''}\right) = 2$, $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{'}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.3. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{4,8\}$ *avec* $c(\omega) = 2$, $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{'}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.4. $c(x_4) = 2$ *et* $c\left(x_8^{'}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_8^{''}\right) = 2$, $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{'}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1,...,n\}$, $c(\omega) = 1$. *Donc, pour utiliser les couleurs* 2 *et* 3, *on distingue les cas suivants.*

Cas 2.1. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{1,4\}$ *avec* $c\left(x_5^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_8^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.1.1. $c(x_5) = 3$ *et* $c\left(x_1^{''}\right) = 3$.

Cas 2.1.2. $c(x_8) = 3$ *et* $c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Cas 2.1.3. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.1.4. $c(x_6) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_2, x_2^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats sur Cas 2.1.3. *et Cas* 2.1.4.

Cas 2.2. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{2,5\}$ *avec* $c\left(x_1^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_6^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.2.1. $c(x_1) = 3$ *et* $c\left(x_5^{''}\right) = 3$.

Cas 2.2.2. $c(x_6) = 3$ *et* $c\left(x_2^{''}\right) = 3$.

Cas 2.2.3. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.2.4. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats sur Cas 2.2.3. *et Cas* 2.2.4.

Cas 2.3. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{3, 6\}$ *avec* $c\left(x_2^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_7^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.3.1. $c(x_2) = 3$ *et* $c\left(x_6^{''}\right) = 3$.

Cas 2.3.2. $c(x_7) = 3$ *et* $c\left(x_3^{''}\right) = 3$.

Cas 2.3.3. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_5^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.3.4. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats sur Cas 2.3.3. *et Cas* 2.3.4.

Cas 2.4. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{4, 7\}$ *avec* $c\left(x_3^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_8^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.4.1. $c(x_3) = 3$ *et* $c\left(x_7^{''}\right) = 3$.

Cas 2.4.2. $c(x_8) = 3$ *et* $c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Cas 2.4.3. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_5^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.4.4. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats sur Cas 2.4.3. *et Cas* 2.4.4.

Cas 2.5. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{5, 8\}$ *avec* $c\left(x_4^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_1^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.5.1. $c(x_1) = 3$ *et* $c\left(x_5^{''}\right) = 3$.

Cas 2.5.2. $c(x_4) = 3$ *et* $c\left(x_8^{''}\right) = 3$.

Cas 2.5.3. $c(x_2) = 3$ *et* $c\left(x_6^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_2) = 3$ *et* $c\left(x_6^{''}\right) = 3$.

Cas 2.5.4. $c(x_3) = 3$ *et* $c\left(x_7^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_3) = 3$ *et* $c\left(x_7^{''}\right) = 3$.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats sur Cas 2.5.3. *et Cas* 2.5.4.

Dans tous les cas précédents, les autres sommets du graphe reçoivent des couleurs différentes de 1, 2 *et* 3. *Donc, nous avons au moins* 11 *couleurs autres que les couleurs* $1, 2$

et 3. *Par conséquence, nous avons* $\chi_p(\mu_2(C_8)) \geq 11$. *Contradiction que* $\chi_p(\mu_2(C_8)) < 11$. *Voir la Figure* 3.4.1.

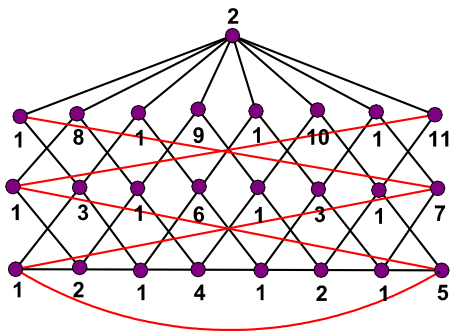


Figure 3.4.1 : *Une coloration de packing de* $\mu_2(C_8)$.

Supposons que $n = 9$. *Puisque* $diam(\mu_2(C_9)) = 4$, *alors* $|c^{-1}(i)| \leq 1$ *pour tout* $i \geq 4$. *Par conséquent, les couleurs qui peuvent être répétées deux fois ou plus sont* $1, 2$ *et* 3. *Comme* c *est une coloration de packing optimale, elle consiste à utiliser le maximum ces trois couleurs. Pour montrer que* $\chi_p(\mu_2(C_9)) \leq 13$, *on forme une coloration* $13-$*packing comme suit: posons* $c\left(x_i''\right) = 1$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(x_i) = 1$ *pour tout* $i = 2k+1$; $i \in \{1, ..., n-1\}$ *et* $c(x_2) = c(x_6) = c(\omega) = 2$, $c(x_4) = c(x_8) = 3$. *Les* 10 *sommets restants, i.e., les sommets* x_9, x_i' *pour* $i \in \{1, ..., 9\}$ *reçoivent par paire des couleurs différentes de* $1, 2$ *et* 3. *Maintenant, montrons que* $\chi_p(\mu_2(C_9)) \geq 13$. *Supposons que* $\chi_p(\mu_2(C_9)) < 13$. *On distingue les deux cas suivants.*

Cas 1. $c(x_i) = c\left(x_i'\right) = c\left(x_i''\right) = 1$ *pour tout* $i = 2k+1$, $i = \{1, ..., n-1\}$. *Donc, pour utiliser les couleurs* 2 *et* 3, *on distingue les cas suivants.*

Cas 1.1. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{2, 6\}$ *avec* $c(\omega) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 1.1.1. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8', x_8''\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.2.2. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_9', x_9''\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.2. $c(x_2) = 2$ *et* $c\left(x_6'\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_6''\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 1.2.1. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8', x_8''\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.2.3. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_9', x_9''\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.3. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{4, 8\}$ *avec* $c(\omega) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 1.3.1. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{'}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.3.2. $c(x_9) = c\left(x_4^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_9) = c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Cas 1.4. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{4, 9\}$ *avec* $c(\omega) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 1.4.1. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{'}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.4.2. $c(x_8) = c\left(x_4^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_8) = c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Cas 1.5. $c(x_4) = 2$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8^{'}, x_8^{''}, x_9^{'}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 1.5.1. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{'}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 1.5.2. $c(x_8) = c\left(x_4^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_8) = c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Cas 1.5.3. $c(x_9) = c\left(x_4^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_9) = c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Cas 1.6. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{6, 9\}$ *avec* $c(\omega) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 1.6.1. $c(x_2) = c\left(x_6^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_2) = c\left(x_6^{''}\right) = 3$.

Cas 1.6.2. $c(x_4) = c(x_8) = 3$ *ou bien* $c(x_4) = c\left(x_8^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_4) = c\left(x_8^{''}\right) = 3$.

Cas 1.6.3. $c(x_8) = c(x_4) = 3$ *ou bien* $c(x_8) = c\left(x_4^{'}\right) = 3$ *ou bien* $c(x_8) = c\left(x_4^{''}\right) = 3$.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2. $c\left(x_i^{'}\right) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$, $c(\omega) = 1$. *Donc, pour utiliser les couleurs* 2 *et* 3, *on distingue les cas suivants.*

Cas 2.1. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{1, 4, 7\}$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.1.1. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.1.2. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.1.3. $c(x_5) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_1^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.2. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{1, 4\}$ *avec* $c\left(x_5^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_7^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_9^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.2.1. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.2.2. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_8, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.2.3. $c(x_5) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_1^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.3. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{2, 5, 8\}$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.3.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.3.2. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.3.3. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_8^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.4. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{2, 5\}$ *avec* $c\left(x_1^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_6^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_8^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.4.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.4.2. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.4.3. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_9, x_8^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.5. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{3, 6, 9\}$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.5.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.5.2. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.5.3. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.6. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{3, 6\}$ *avec* $c\left(x_2^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_7^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_9^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.6.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.6.2. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.6.3. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.6.4. $c(x_5) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.7. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{4, 7\}$ *avec* $c\left(x_3^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_8^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.7.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.7.2. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.7.3. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.7.4. $c(x_5) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.8. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{5, 8\}$ *avec* $c\left(x_2^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_4^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_9^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.8.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.8.2. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_6, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.8.3. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.8.4. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_9, x_8^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Cas 2.9. $c(x_i) = 2$ *si* $i \in \{6, 9\}$ *avec* $c\left(x_1^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_3^{''}\right) = 2$ *ou bien* $c\left(x_5^{''}\right) = 2$. *On distingue les sous cas suivants concernant l'utilisation de la couleur* 3.

Cas 2.9.1. $c(x_1) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_5, x_5^{''}, x_6^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.9.2. $c(x_2) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_6^{''}, x_7^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.9.3. $c(x_3) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_7, x_7^{''}, x_8^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Cas 2.9.4. $c(x_4) = 3$ *et l'un des sommets de l'ensemble* $\{x_8, x_8^{''}, x_9^{''}\}$ *est coloré par* 3.

Par symétrie, on joue le même rôle en commençant la coloration de l'autre coté, on trouve les même resultats.

Dans tous les cas, les autres sommets du graphe reçoivent des couleurs différentes de 1, 2 *et* 3. *Donc, nous avons au moins* 13 *couleurs autres que les couleurs* $1, 2$ *et* 3.*Contradiction que* $\chi_p(\mu_2(C_9)) < 13$. *Alors,* $\chi_p(\mu_2(C_9)) \geq 13$. *Par conséquent* $\chi_p(\mu_2(C_9)) = 13$.

■

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude du problème de la coloration de packing . On a commencé dans le premier chapitre par rappeler quelques notions de base sur la théorie des graphes et dans le deuxième chapitre par les différents résultats à propos de la coloration de packing. Le chapitre 3 a été consacré sur notre étude sur la détermination de la coloration de packing de quelques types de graphes. Nos contributions relatives à ce chapitre concerne d'une part la détermination du nombre chromatique de packing de Mycielski de certains graphes. Dans ce contexte, nous avons obtenu les valeurs exactes du nombre chromatique de packing du graphe Mycielski d'un graphe *puissance* G^p pour $p = 2$, quand G est une chaîne d'ordre $n \leq 8$ ou un cycle d'ordre $n \leq 13$. Notons que les deux graphes mentonnés sont de diamètres 4. Dans le chapitre 4, nous avons étudié un autre type de graphes, appelé graphe de *Mycielski généralisé,* noté $\mu_p(G)$ où $p \geq 2$ et G est un graphe quelconque. Dans ce contexte, on a pu déterminer la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe Mycielski généralisé pour $p = 2$ de quelques types de graphes particuliers, à savoir: les chaînes d'ordres $n \leq 8$ et les cycles d'ordres $n \leq 9$. Notons aussi que ces deux types de graphes sont de diamètre 6.

Finalement, Comme perspective à notre travail, nous proposons de :

• Trouver d'autres valeurs exactes, bornes inférieures et supérieures de $\chi_p(G)$.

• Déterminer le nombre chromatique de packing de Mycielski d'un graphe puissance $\mu(G^p)$ pour $p \geq 3$ et G un graphe quelconque, pas nécessairement pour $p = 2$.

• Déterminer le nombre chromatique de packing de Mycielski d'un graphe puissance.

• Déterminer le nombre chromatique de packing de Mycielski généralisé $\mu_p(G))$ pour $p \geq 2$ et G un graphe quelconque.

Bibliographie

[1] St. Aloysius College, Edathua, Kerala. The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] B. Bresãr, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Packing chromatic numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33-49, 2008.

[5] M. Joice Punitha, Kernel in Interconnection Networks, Ph.D thesis, University of Madras, March 2009.

[6] R. LEMDANI, CHABANE Kwider et ZAHED Ahmed, Sur le Nombre de Subdivision de la Domination Broadcast, 17/06/2015.

[7] R. LEMDANI, A.TAIBAOUI et O. MEZIOUD. Opérations sur le nombre de la coloration de packing. Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle, juin 2015.

[8] R. LEMDANI, A. SOUADKIA et F.S DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 16/06/2016.

[9] R. LEMDANI, K BAKHTI et K. MELIANI, Opérations sur le nombre de la domination broadcast, Mémoire de Master, RO, 14/06/2017.

[10] R. LEMDANI, Y. MOUSSA et O. ALLOUCHE, Etude de la coloration packing dans les graphes, Mémoire de Master, RO, 18/06/2018.

[11] R. LEMDANI, C. OUNNAS et S. ZENIKHRI, Détermination du nombre de la coloration packing de certaines classes de graphes, Mémoire de Master, RO, 2019.

[12] R. LEMDANI, N.R. YAHIAOUI et B. BEN KOUIDER, Opérations sur le nombre de la coloration packing de certains types de graphes, Mémoire de Master, RO, 29/10/2020.

[13] R. LEMDANI. M. BESSERI et I. HADJADJ, Etude et détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 18 Juillet, 2021.

[14] R. LEMDANI. R. SAYEH et O. RAMOUL, Caractérisation des graphes à diamètre $d \geq 1$ avec leurs nombres chromatiques de packing, Mémoire de Master, RO, 23 Juin, 2022.

[15] D. Laiche, Mémoire présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[16] D. Miller. Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, (2008).

[17] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, (1956).

[18] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[19] Christian Sloper. Packing-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[20] E. Sopena, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, JUNE 2015.

[21] A. SOUADKIA, F.S. DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, 2016.

[22] M. A. Tahraoui. Coloring, packing and embedding of graphs. Thèse de doctorat, Université de Lyon, Décembre 2012.

[23] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.D Thesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[24] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[25] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[26] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, Chennai 600034, INDIA.