République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

AOUIMEUR Khadidja

L'existence d'une solution positive de problème elliptique semilineaire avec conditions aux limites non linéaires.

Soutenu publiquement le 13/06/2021 devant le jury composé de

Président :	N. BENAICHOUCHE	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinateur :	N. MEKEDACHE	*M.A.A*	Université de Médéa
Encadreur :	K. MALOUM	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail

A mon père **EL ABED** (Que Dieu bénisse son âme). J'aimerais que tu sois avec nous aujourd'hui

A ma mère **BOUTHAMER EMBARKA** pour son amour inestimable, son sacrifice, son confiance, son soutien et toute les valeurs qu'il est su m'inculquer.

A mes Frères **LAKHDER,KHALED,SEDIK,SALIM,TAHER,FAROUK**

A mes sœurs **HABIBA,NACIRA**

A ma belle sœur **AMINA**

pour leurs aides et encouragement multiples

A mon fiancé **MOUNIR** un grand merci pour votre soutien

A Mes camarades, amis et connaissances

Tout ce que j'espère, c'est que vous soyez fiers de moi aujourd'hui.

Remerciements

Je remercie

A Dieu le tout-puissant pour m'avoir protégé et guidé depuis le commencement de ma vie. Pour tous les manières miraculeuse dont il m'a aidé à surmonter tous les problèmes et défis dont j'ai fait face pendant toute la période de mon séjour.

Mon Directeur de mémoire, Dr **K.MAALOUM** pour son encadrement , ses multiples conseils, ses orientations, ses corrections, sa gentillesse et sa patience .

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

A Monsieur le Directeur de résidence universitaire **malik** notre profonde gratitude pour sa coopération.

A Dr **RAFAA** de m'avoir donné la force nécissaire pour réussir.

Résumé

Dans ce mémoire, On étudiera une équation elliptique semi-linéaire avec une condition au frontière non linéaire et une perturbation dans le terme de réaction. L'existence d'un solution positif et une autre solution non nulle au probléme est prouvée lorsque $|\lambda|$ est assez petit sans aucune hypothèse spécifique sur le terme de perturbation. De plus, il est montré que la solution non nulle devient positive pour un petit $\lambda > 0$ sous des hypothèses appropriées sur le terme de perturbation.

Mots-clés : problème elliptique semi-linéaire, condition aux limites non linéaire, perturbé problème, solution positive, multiplicité

Abstract

In this memory, we will study a semilinear elliptic equation with a nonlinear boundary condition and a perturbation in the reaction term. The existence of a positive solution and another non-zero solution to the problem is proved when $|\lambda|$ is a small enough without any specific assumptions on the perturbation term. Moreover, it is shown that the non-zero solution becomes a positive one for small $\lambda > 0$ under suitable assumptions on the perturbation term

Key word : Semilinear elliptic problem, nonlinear boundary condition, perturbed problem, positive solution, multiplicity.

Notation

$\mathbb{R}^N$: L'espace Euclidien de dimension N.

Ω : Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: La frontière topologique de Ω.

$\overline{\Omega}$: L'adhérence de l'ensemble Ω.

$|\Omega|$:La mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.

V' : Le dual topologique de V.

$\langle ., . \rangle_{V' \times V}$: Le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'.

$\|.\|$: La norme sur l'espace de Banach V.

H : Un espace de Hilbert.

$(., .)$: Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.

$B_\rho(x_0)$: La boule de centre x_0 et de rayon $\rho > 0; B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \|x - x_0\|_2 \leq \rho\}$.

$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$: La mesure de Lebesgue sur Ω.

$\alpha \in \mathbb{N}^N$: Un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

∂_i : La i-ième dérivée partielle ; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

∂^α : La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$: Le gradient de $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\operatorname{div} v$: La divergence du vecteur $v = (v_1, ..., v_N)$, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_N}{\partial x_N}$.

$\rightharpoonup$: La convergence faible.

p.p. : Presque partout.

sign(x) : Le signe d'un nombre réel non nul x, sign$(x) = \frac{x}{|x|}$.

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$: la partie positive et négative de la fonction f.

$\sup\limits_{x\in\Omega} ess(u)$: Le sup essentiel d'une fonction u sur Ω.

$$\sup_{x\in\Omega} ess(u) = \inf\{C > 0 \ ; \ |u(x)| \leq C \quad p.p.\ x \in \Omega\}.$$

$\{u \geq k\} := \{x \in \Omega, u(x) \geq k\}$ pour une fonction donnée u.

supp$(u) := \overline{\{x \in \Omega \ ; \ u(x) \neq 0\}}$: Support d'une fonction u.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$: L'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$: L'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))'$: L'espace des distributions.

$L^p(\Omega)$:L'espace de Lebesgue,

$$L^p(\Omega) = \begin{cases} \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \ \int\limits_\Omega |u|^p < +\infty\}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \\ \sup\limits_{x\in\Omega} ess(u) < +\infty, & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}$: Un espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty\}$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: Le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}/(\Omega) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: Un espace de Sobolev.

$P' = \frac{p}{p-1}$: L'exposant conjugué de l'exposant p pour $1 \leq p \leq +\infty$.

$P^* = \frac{Np}{N-p}$: L'exposant critique de Sobolev pour $1 \leq p < N$.

Table des matières

Notations **vi**

1 Préliminaire **xii**

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle xii

1.2 Espace de Lebegue L^p xii

1.2.1 Définition et propriétés des espaces L^p xiii

1.2.2 Séparabilité, réflexivité et dual de L^p xv

1.3 Distributions xv

1.4 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ xix

1.4.1 Injection de Sobolev xx

1.5 Théorie des points critiques xxi

1.5.1 Condition de palais-smale xxiii

1.5.2 Théorème de Passe-Montagne xxiii

1.5.3 propriétés de l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ xxxiv

1.5.4 Séparabilité,réflexivité et dual de $L^p(x)$ xxxvii

1.6 Espace de Sobolev généralisé xxxviii

2 2 **xl**

2.1 Position du probléme xl

2.2 Résultat principal xlii

Introduction

Dans la modélisation mathématique, les équations aux dérivées partielles elliptiques sont utilisées avec conditions aux limites spécifiant la solution sur la frontière du domaine. Commensuellement, des problèmes avec des conditions aux limites qui sont des fonctions linéaires des valeurs ou les dérivées normales des solutions sur la frontière ont été largement étudiées. Cependant, les modèles qui nécessitent non-lin-les conditions aux limites de l'oreille ont augmenté et, par conséquent, les problèmes de non-linéarité Les conditions aux limites ont suscité un grand intérêt dans les études récentes. Par exemple, Mavingaet Nkashama [15] ont étudié la résolvabilité des différences partielles elliptiques non linéaires du second ordre. équations ferentielles avec des conditions aux limites non linéaires où les non-linéarités interagissent avec des valeurs propres d'ordre élevé. Plus récemment, Kim et al. [13] ont étudié l'équation de Laplacetion avec une condition aux limites non linéaire superlinéaire sur un domaine borné. Parmi d'autres résultats, en utilisant la méthode variationnelle, l'existence d'une solution positive non constante pour toutune valeur de paramètre suffisamment grande a été affichée.

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un problèmes elliptique semi-linieaire avec condition aux limites non linéaires, on le problème suivant :

$$\begin{cases} \triangle u + u = \lambda g(x,u) & sur \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x,u) & \partial\Omega \end{cases}$$

oú Ω est un domaine borné lisse dans $\mathbb{R}^N$ avec $\mathbb{R} \geq 2$, η est la normale externe a $\partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre et les non-linéarités $f : \partial\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonction continues

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suit de ce travail. Tout d'abord, on va rappeler quelques résultats de base sur les espace fonctionnels, ensuite on va donner les condition de plais-smale et la théorème de passe-Montagne, et dans le deuxième chapitre consacré des théorèmes et lemmes importantes qui nous aident à résoudre le problème.

L'objectif de troisième chapitre est consacré à l'étude un problème elliptique semilineair, et de présenter un résultat d'existence pour le problème.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. on introduit quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels.

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

1.2 Espace de Lebegue L^p

Définition 1.1. *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*

Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et de Hilbert Pour $p = 2$ muni de prouit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)\ dx.$$

1.2.1 Définition et propriétés des espaces L^p

Lemme 1.1 (**Inégalité de Young**). *Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. pour tout réel positif a et b , on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q.$$

Démonstration. Voir [9] □

Lemme 1.2 (**Inégalité de Young avec epsilon**). *Pour $a, b \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ et $p, q \geq 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}\,(\frac{b}{\varepsilon})^q.$$

Théorème 1.1 (**Inégalité de Hölder**). *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors $fg \in L^1$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}.$$

Démonstration. Voir [9] □

Lemme 1.3. *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $a, b \geq 0$, on a*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Démonstration. voir [9] □

Corollaire 1.2. *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Définition 1.2 (**Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$**). *Soient $p \in [1, \infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.*

- *on dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.*

- *on dit que* f_n *converge faiblement vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *et on note* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $L^p(\Omega)$ *si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\Omega}(f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^{p'}$.
- *on dit que* f_n *converge* $*$ *faible vers* f *dans* $L^\infty(\Omega)$ *et on note* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *dans* $L^\infty(\Omega)$ *si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\Omega}(f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^1$.

Lemme 1.4 (**Lemme de Fatou**). *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonction mesurable, à valeurs dans* $[0, +\infty[$ *on a*

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\ dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(x)\ dx.$$

Démonstration. Voir [10] □

Théorème 1.3 (**Théorème de convergence dominée**). *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$.

On suppose que,

1. $f_n \longrightarrow f \quad p.p.$ *dans* Ω.
2. *il existe* $g \in L^p(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $|f_n| \leq g \quad p.p.$ *dans* Ω.

Alors

$$f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Démonstration. Voir [10] □

Définition 1.3 (**Equi-intégrabilité**). *Soit* $1 \leq p < \infty$ *,on dit qu'une suite de fonction* $(f_n)_n$ *de* $L^p(\Omega)$ *est equi-intégrable, si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\forall E \subset \Omega$ *mesurable , avec* $|E| < \delta$ *on a* $\int\limits_{E} |f_n|^p < \varepsilon$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.4 (**Théorème de Vitali**). *Soient* $1 \leq p < \infty$ *, et une suite de fonction* $(f_n)_n$ *dans* $L^p(\Omega)$,*on suppose que*

1. $f_n \longrightarrow f \quad p.p.$ *dans* Ω.
2. $(f_n)_n$ *est equi-intégrable.*

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Démonstration. Voir [12, Theorem B.101, page 674] □

Définition 1.4 (**Fonction de Carathéodory**). *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de Carathéodory si*

1. $f(.,s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable pour tout* $s \in \mathbb{R}$.
2. $f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue p.p.* $x \in \Omega$.

Définition 1.5 (**Opérateur de Nemitski**). *Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. on appelle l'opérateur de Nemitski relatif à f,l'opérateur N_f de la forme suivante $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$.*

Théorème 1.5. *Si f est de carathéodory et elle existe une fonction positive $a \in L^q(\Omega)$ et une constante $b > 0$, tels que*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}.$$

alors l'opérateur de Nemitski est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

1.2.2 Séparabilité, réflexivité et dual de L^p

1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.
2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

1.3 Distributions

Définition 1.6. *On appelle support d'une fonction continue φ sur Ω, et on note supp(φ) l'ensemble définie par*

$$\text{supp}(\varphi) = \{\overline{x \in \Omega : \quad \varphi(x) \neq 0}\}.$$

Définition 1.7. *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact, un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé fonction test.*

Exemple 1. *La fonction φ définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

appartient à l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, où $\Omega = B(0,1)$ représente la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

Prposition 1.6. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. voir [9]. □

Définition 1.8 (**Distributions**). *Le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ noté par $\mathcal{D}'(\Omega)$, un élément T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est appelé distribution sur Ω définie par.*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T\ , \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\mathcal{D}(\Omega)} = \langle T\ , \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Définition 1.9 (**Distribution régulière**). *On dit que T est une distribution régulière s'il exite une fonction f appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$T(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2}$$

On dénote cette distribution par T_f.

Définition 1.10. *Soit $K \subset \Omega$ compact, on noté*

$$\mathcal{D}_c(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \quad supp(\varphi) \subset K\}.$$

Définition 1.11 (**Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$**). *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Définition 1.12 (**Dérivées aux sens de distributions**). *Soit $N \in \mathbb{N}^\star, k \in \{1,\dots,N\}, \alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\frac{\partial T}{\partial x_k}$, la distribution définie par

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

par récurrence, on définit la dérivé partielle de T d'ordre α par

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.13 (**Suites régularisantes**). *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, dx = 1, \quad supp\, \varphi \subset \overline{B}(0,1).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonction $\varphi_n(x) = n^N \varphi(nx)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx = 1$, et $supp\, \varphi_n \subset B(0, \frac{1}{n})$. la suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée suite régularisante.

Exemple 2. *La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui associe à la fonction (1.1) est une suite régularisante.*

Définition 1.14 (**Translation**). *Soient f une fonction de $\mathbb{R}^N$, et h un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^N$. La translation τ_h de f par h est une fonction de $\mathbb{R}^N$ définie par :*

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 1. *Il est facile de prouver que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est stable par translations, c'est à dire, $\tau_h \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.*

Définition 1.15 (**Réflexion par rapport à l'origine**). *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^N$. On définit la fonction $\hat{f}$ par :*

$$\check{f}(x) = f(-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.16 (**Produit de convolution**). *Soient $f, g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, on leur associe une fonction appelée produit de convolution de f et g, notée $f * g$ définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, dy$$

Théorème 1.7. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, soient $f \in L^P(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable. alors le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout,*

$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, et

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

De plus $f * g = g * f$.

Démonstration. Voir [9] □

Remarque 2. *En utilisant la translation et la réflexion, on peut écrire le produit de convolution $f * g$ comme suivant :*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)(\tau_x \check{g})(y)\, dy. \tag{1.3}$$

La formule (1.3) permet de définir la convolution d'une distribution régulière avec une fonction test.

Définition 1.17 (Convolution d'une distribution régulière). *Soit $T = T_f$ une distribution associé à la fonction localement intégrable f. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir le produit de convolution $T * f$ par :*

$$(T * f)(x) = \int_{\Omega} f(y)(\tau_x \check{\varphi})(y)\, dy = f(\tau_x \check{\varphi}). \tag{1.4}$$

Maintenant on peut généraliser la formule (1.4) pour une distribution quelconque.

Définition 1.18 (Convolution d'une distribution). *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Leur produit de convolution est la fonction définie en chaque point par*

$$(T * \varphi)(x) = T(\tau_x \check{\varphi}) = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 1.8. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $T * \varphi$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Voir [16][Theorem 3.5, page 90]Algwaiz. □

Le théorème suivant permet d'approcher une distribution par une suite de fonctions régulières.

Théorème 1.9. *Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite régularisante, on note la régularisée de T par*

$$T_n = T * \varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ alors $T_n \longrightarrow T$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$, pour $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration. Voir [12]. □

1.4 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.19. *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$ par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) & si \quad p = \infty \end{cases}$$

pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prposition 1.10. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Démonstration. voir [9]. □

Définition 1.20. *Soit $1 \leq p < +\infty$.*

On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, (c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$) avec

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

si $p > 1$, on note $W^{1,p'}(\Omega)$ au dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Définition 1.21 (**Convergence faible, convergence forte dans** $W^{1,p}(\Omega)$)**.**

Soient $p \in [1, +\infty[$ *et* $\{f_n, f\}$ *une famille de* $W^{1,p}(\Omega)$.

- *on dit que* f_n *converge fortement vers* f *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *et on note* $f_n \to f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *si*

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega)$$

- *on dit que* f_n *converge faiblement vers* f *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *et on note* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *si*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega)$$

Théorème 1.11 (**Inégalité de Poincaré**)**.** *Soit* $1 \leq p < +\infty$*, on suppose que* Ω *est un ouvert borné dans une direction de* $\mathbb{R}^N$ *alors, il existe une constante positive* $C = C(p, N, \Omega)$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad , \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

par conséquence l'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$ *définie une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, équivalente à la norme usuelle.*

Démonstration. Voir [8, page 48] □

Théorème 1.12 (**Inégalité de Sobolev**)**.** *Soient* $1 \leq p < N$ *et* $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *(l'exposant de sobolev), alors il existe une constante positive* $S_p = C(p, N)$ *telle que :*

$$\left[\int_\Omega |u|^{p^*} dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \leq S_p \left[\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.5}$$

Démonstration. Voir [8, page 43] □

Théorème 1.13 (**Meyers-Serrin**)**.** *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ *alors il existe une suite* $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. voir [8]. □

1.4.1 Injection de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathcal{C}^1$,on a :

- si $p < N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, p^*)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
- si $p = N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, +\infty)$.
- si $p > N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte.

  en particulier l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact pour tout $p \in [1, +\infty)$

Démonstration. Voir [17] □

1.5 Théorie des points critiques

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ usuelle et X^* son dual topologique, muni de la norme duale usuelle. $\langle , \rangle$ désigne de le crochet de dualité entre X et X^*.

Définition 1.22. *Un sous ensemble C de X est dit convexe s'il est stable par combinaison convexe.*

$$\forall u, v \in]0, 1[, \lambda u + (1 - \lambda)v \in C.$$

Définition 1.23. *On dit que $\varphi : X \to \overline{R}$ est semi-continue inférieurement (en obrégé S.C.I) au point $u \in X$, si $\varphi(u) = -\infty$ ou bien si á tout $\alpha < \varphi(u)$ on peut associe un voisinage V_α de u tel que $\alpha < \varphi(u)$ pour $u \in V_\alpha$ (ou encore, si $\varphi^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est un voisinage de u).En terme de suite, si $u_n \to u$ alors*

$$\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_n).$$

La fonction φ est S.C.I sur X si elle l'est en tout point de X .

Définition 1.24. *De maniére similaire, on dit φ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement*

$$\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_n).$$

pour toute suite u_n faiblement convergente vers u .

On suppose maintenant que X est un espace de Banach réel et on définit sur X la fonctionnelle J de classe C^1. On rappelle que la dérivée de J au point u, notée $DJ(u)$, est l'unique opérateur linéaire continu de X dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$|J(x+h) - J(x) - DJ(x)[h]| = o(\|h\|) \text{ quand } (\|h\|) \to 0.$$

Définition 1.25. *La fonctionnelle J est dite coércive si*

$$\lim_{\|u\|_X \to +\infty} J(u) = +\infty$$

Définition 1.26. *Le point $u \in X$ est appelé point critique si $DJ(u) = 0$. La valeur correspondante J(u) est dite valeur critique .*

Lorsque X est un espace de Hilbert, on écrit plus simplement, grâce au théorème de Reisz

$$(\nabla J(u), h) = DJ(u)[h], \quad \forall h \in X.$$

D'autre part, étant donné une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1, l'ensemble

$$M = g^{-1}(0) = \{u \in X, g(u) = 0, Dg(u) \neq 0\}$$

représente une variété de classe C^1. Dans ce cas l'espace tangent á M en u, s'écrit

$$T_u M = \{h \in X, Dg(u)[h] = 0\}$$

Définition 1.27. *Le point $u \in M$ est appelé un point critique de J contraint á M si $DJ(u)[h] = 0, \forall h \in T_u M$.*

Autrement dit, si X un espace de Hilbert et $u \in M$ est un point critique de J containt á M, on a directement

$$\nabla J(u) = \lambda \nabla g(u)$$

pour un certaine $\lambda \in \mathbb{R}$, appelé multiplicateur de Lagrange.

Le théoreme qui va suivre constitue á bien des égards, l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse fonc-

tionnelle.

Théorème 1.14. *Soit K un ensemble compact de X et soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement,*

alors J est bornée inférieurement et atteint un minimum absolu sur K, c'est-a-dire qu'il existe $\overline{u} \in K$ tel que

$$J(\overline{u}) = \inf_k J.$$

Comme corollaire, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.15. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $J : x \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle coercive et faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement, alors J est bornée inférieurement et atteint un minimum absolu sur X .*

1.5.1 Condition de palais-smale

Définition 1.28. ***(Palais-Smale)***

(i) La suite $u_n \in X$ est appelée suite de palais-Smale de niveau c notée $(PS)_c$ si

$$J(u_n) \to c \text{ et } \|DJ(u_n)\|_{X^*} \to 0$$

(ii) On dit que la fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ satisfait la condition de Plais-Smale au niveau c si toute suite de $(PS)_c$ est un point critique de J. On a implicitement $DJ(\overline{x}) = 0$ et $J(\overline{x}) = c$. Le principe minimax est mis en évidence dans le théoreme suivant

1.5.2 Théorème de Passe-Montagne

Théorème 1.16. *Considérons $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, oú X est un espace de Hilbert, supposons que $\eta = \nabla J(\eta)$ définie par $\eta(t, .) : X \to X, \forall t \geq 0$.*

i) Il existe une famille de sous-ensembles $F \subset X$, est dit invarint positif,

i.e, si $F \in f$ alors $\eta(t, F) \in F, \forall t \geq 0$

ii) Le minmax niveau $c = \inf \sup J(x)$ est fini

iii) J satisfait $(PS)_c$

Alors c est une valeur critique.

Lemme 1.5. *Supposons* $DJ = L + K$*, oú* $L : X \to X^*$ *est un opératur linéaire inversible á inverse borné, et* $k : X \to X^*$ *est compact (i.e), ensemble des opérateurs bornées dans X dans des ensembles précompact dans* X^**. Alors, toute suite bornée de* $(PS)_c$ $x_n \in X$ *est précompact .*

Un résultat important du principe du minimax est illustré par le théoreme de Passe-Montagne d'Ambrosetti et Rabinowitz [5]. Avant de l'énoncer, on considère l'ensemble Γ *de tous les chemins joignant l'origine á* u_0 *de X :*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]), X), \quad (0) = 0, \quad \gamma(1) = u_0\}$$

et on pose $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{s\in[0,1]} J(\gamma(s))$.

Théorème 1.17. *Supposons que* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *et satisfaisant les trois conditions*

i) J(0) = 0,

ii) $\exists \rho, \alpha > 0$ *tels que* $J(u) \geq \alpha$ *pour* $\|u\| = \rho$

iii) $\exists u_0 \in X$ *avec* $\|u_0\| > \rho$

et tel que $J(u_0) \leq 0$.

On suppose de plus que J satisfait la condition $(PS)_c$*, alors c'est une valeur critique .*

Précisément, il existe $v \in X$*, tel que* $J(v) = c$ *et* $DJ(v) = 0$

En particulier,$v \neq 0, \quad u_0$.

Prposition 1.18. *pour tout* $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$*, on a*

(*a*) $\rho(u) = 0$ *si et seulement si* $u = 0$ *;*

(*b*) $\rho(-u) = \rho(u)$ *;*

(*c*) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$*, pour tout* $t \in [0,1]$ *; autrement dit* ρ *est une fonction convexe.*

(*d*) $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}(\rho(u)+\rho(v))$.

(*e*) *Si* $\lambda > 1$, *alors*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u).$$

et si $0 < \lambda < 1.$, *on a*

$$\lambda^{p+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u).$$

(*f*) *Pour tout* $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ *et* $\lambda \in [0, +\infty[, \rho(\lambda u)$ *et une fonction croissante, continue et convexe .*

Démonstration. Soit u,v $\in L^{p(x)}(\Omega)$

(a) On a

$$\rho(u) = 0 \Longleftrightarrow |u(x)|^{p(x)} = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\Longleftrightarrow u(x) = 0 \text{ dans } \Omega \Longleftrightarrow u(x) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

(b) Evidente, de la définition de ρ .

(c) Nous considérons la fonction $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow$ d'expression $\varphi(x,s) = |s|^{p(x)}$.

Il est clair que φ est convexe par rapport à s. D'après la propriété de l'intégrale de Lebesgue, nous concluons que ρ est convexe.

(d) Nous avons

$$|u(x)+v(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)}\Big(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}\Big) \text{ sur } \Omega$$

.

Par intégration de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons le résultat.

(e) Si $\lambda > 1$, alors

$|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p-}|u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p+}|u(x)|^{p(x)}$, dans Ω

Si $0 < \lambda < 1$, alors

$\lambda^{p+}|u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p-}|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda|u(x)|^{p(x)} \leq |u(x)|^{p(x)}$ dans Ω

En intégrant, dans les deux cas, les inégalités ci-dessus nous obtenons (e).

(f) Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty[$, telles que $\lambda_1 < \lambda_2$, fixons $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, alors

$|\lambda_1 u(x)|^{p(x)} = |\lambda_1|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} = |\lambda_2 u(x)|^{p(x)}$, dans Ω

Par intégration de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\rho(\lambda_1 u) < \rho(\lambda_2 u).$$

Par conséquent

$$\rho(\lambda u) \text{ est croissante pour } \lambda \in [0, \infty[.$$

Montrons la continuité. Pour cela soit $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ et soit la suite

$$\varphi_n := |\lambda_n u(x)|^{p(x)}.$$

Bien évidemment φ_n est une suite convergente vers la quantité $|\lambda u(x)|^{p(x)}$. D'aprés le Théorème de convergence Monotone

$$\rho(\lambda_n u) \longrightarrow \rho(\lambda u).$$

Par conséquent $\rho(\lambda u)$ est continue pour $\lambda \in [0, \infty[$.

Comme la fonction

$$\varphi(x, \lambda) = |\lambda u(x)|^{p(x)}, \lambda \geq 0$$

est convexe pour rapport á λ, l'application $\rho(\lambda u)$ reste convexe pour $\lambda \in [0, \infty[$.

Soit la quantité définie sur l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ par

$$\|u\|_{p(x)} = \inf \Big\{ \lambda > 0, \rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1 \Big\}.$$

On définit pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, l'intervalle I_u de $\mathbb{R}$ par

$$I_u = \Big\{ \lambda > 0, \rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1 \Big\}$$

il est facile de voir que

$$\begin{cases} I_u = [0, \infty[, & u = 0 \\ I_u = [a, \infty[, & u \neq 0 \text{ et } a > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

□

Prposition 1.19. *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace vectoriel,*

Nous allons définir une norme dans l'espace $L^{p(x)}\Omega$, notée $\|.\|_{p(x)}$.

Prposition 1.20. *L'expression $\|.\|_{p(x)}$ est une norme sur $L^{p(x)}(\Omega)$, dite norme de Luxembourg.*

Démonstration. (i) $\|u\|_{p(x)} \geq 0$.

(ii) $\|u\|_{p(x)} = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

(iii) $\|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha|\|u\|_{p(x)}$.

(iv) $\|u+v\|_{p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$.

En effet, (i) est évident. Si u = 0, alors $I_u = [0,\infty[$, donc $\|u\|_{p(x)} = 0$. Supposons maintenant que $\|u\|_{p(x)} = 0$. Il existe $(\lambda_n) \subset [0,1]$ telle que

$$\lambda_n \longrightarrow 0 \text{ et } \rho\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

donc

$$1 \geq \rho\Big(\tfrac{u}{\lambda_n}\Big) = \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx \quad > \Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Ceci n'est possible que si $\rho(u) = 0$, car sinon

$$\rho\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \longrightarrow +\infty, \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

ce qui contredit l'inégalité ci-dessus. Par conséquent u = 0.

(iii) Si $\alpha = 0$, le résultat est immédiat. Si $\alpha \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_{p(x)} &= \inf\Big\{\lambda > 0 : \rho\Big(\frac{\alpha u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} \\
&= \inf\Big\{|\alpha|\lambda > 0 : \rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} \\
&= |\alpha| \inf\Big\{\lambda > 0 : \rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} \\
&= |\alpha|\|u\|_{p(x)}.
\end{aligned}$$

(iv) Soit l'ensemble définie dans $L^{p(x)}$ par

$$C = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho(u) \leq 1\}.$$

L'ensemble C est convexe puisque ρ est convexe. Posons $\|u\|_{p(x)} = a, \|v\|_{p(x)} = b$,

par conséquent

$$\frac{u}{a+\varepsilon}, \frac{v}{b+\varepsilon} \in C, \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

oú $a+\varepsilon \in I_u$ et $b+\varepsilon \in I_v$.

Nous avons aussi

$$\frac{tu}{a+\varepsilon} + \frac{(1-t)^v}{b+\varepsilon} \in C, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

En particulier, en choisissant

$$t = \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon},$$

on obtient

$$\frac{u+v}{a+b+2\varepsilon} \in C.$$

Ainsi

$$a+b+2\varepsilon \in I_{u+v}$$

d'oú

$$\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)} + 2\varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Ce qui entraine l'inégalité triangulaire

$$\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}.$$

□

Prposition 1.21. *Les propriétés* $(a)-(f)$ *et la proposition 1.20, en font de l'espace* $L^{p(x)}(\Omega)$, *un espace de Banach.*

Prposition 1.22. *Si la fonction* $p(x)=p\in[0,+\infty]$, *alors* $\|.\|_{p(x)}$ *est la norme usuelle de l'espace* $L^p(\Omega)$.

En effet, comme c'est évident pour $u=0$, *nous supposons que* $u\neq 0$. *Par définition, on a :*

$$\begin{aligned}\|u\|_{p(x)} &= \inf\{\lambda>0:\rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)\leq 1\Big\}\\ &= \inf\Big\{\lambda>0:\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\lambda^{p(x)}}|u(x)|^{p(x)}dx\leq 1\Big\}\\ &= \inf\Big\{\lambda>0:\frac{1}{\lambda^{p(x)}}\|u\|_p^p\leq 1\Big\}\\ &= \inf\Big\{\lambda>0:\|u\|_p\leq\lambda\Big\}\\ &= \|u\|_p.\end{aligned}$$

Prposition 1.23. *Si* $u\in L^{p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$, *alors*

$$\|u\|_{p(x)}=a \text{ si et seulement si } \rho\Big(\frac{u}{a}\Big)=1.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\|u\|_{p(x)}=a$, alors

$$I_u=[a,\infty[\text{ et } \rho\Big(\frac{u}{a}\Big)\leq 1.$$

Supposons que

$$\rho\Big(\frac{u}{a}\Big)<1.$$

Pour tout $t>0$, le modulaire $\rho(\frac{u}{t})$ est continue, convexe et décroissante. Il existe alors $\delta>0$, tel que

$$\rho\Big(\frac{u}{t}\Big)<1, \text{ pour tout } \in[\alpha-\delta,a+\delta].$$

Ainsi, nous aurons $a - \frac{\delta}{2} \in I_u$, ce qui est absurde, En conséquence

$$\rho\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) = 1.$$

($\Leftarrow$) Nous supposons que $\rho\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) = 1$ et $\alpha \in I_u$, Par suite $\|u\|_{p(x)} \leq \alpha$. Supposons que $\|u\|_{p(x)} < a$, Il existe alors $\lambda_0 \in I_u$ satisfaisant

$$\|u\|_{p(x)} \leq \lambda_0 < a,$$

Autrement dit

$$\rho\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) \leq \rho\Big(\frac{u}{\lambda_0}\Big) \leq 1,$$

ce qui est évidemment absurde, donc $\|u\|_{p(x)} = a$. Ceci achève la démonstration.

□

Prposition 1.24. *Si $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ alors,*

(1) $\|u\|_{p(x)} < 1 (= 1 > 1)$ si seulement si $\rho(u) < 1 (= 1 > 1)$

(2) Si $\|u\|_{p(x)} > 1$, alors $\|u\|^{p-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p+}_{p(x)}$

(3) Si $\|u\|_{p(x)} < 1$, alors $\|u\|^{p+}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p-}_{p(x)}$

Démonstration. Le cas u = 0 est trivial. Nous supposons donc que $u \neq 0$. D'aprés la proposition ci-dessus $\|u\|_{p(x)} = 1 \Longleftrightarrow \rho(u) = 1$. Maintenant si $\|u\|_{p(x)} = a < 1$, alors $1 < \frac{1}{a}$. En vertu de la croissance de $\rho(\lambda u)$, on obtient pour $\lambda \in [0, \infty[$:

$$\rho(u) < \rho\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) < 1.$$

Réciproquement si $\rho(u) < 1$, alors $1 \in I_u$. On en déduit de la proposition 1.23, que $\|u\|_{p(x)} < 1$

Les autres inégalités se démontrent de maniére similaire.

(2) Si on suppose que $\|u\|_{p(x)} = a > 1$, alors

$$\rho\Big(\frac{u}{a}\Big) = 1.$$

Puisque $\frac{1}{a} < 1$, nous obtenone d'aprés la propriété (e) de la proposition 1.18,

$$\frac{1}{a^{p+}}\rho(u) \leq \rho\Big(\frac{u}{a}\Big) = 1 < \frac{1}{a^{p-}}\rho(u)$$

c'est-á-dire

$$\|u\|^{p-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p+}_{p(x)}$$

Pour le point (3), on adapte de manière analogue la démarche de (2). □

Prposition 1.25. *Soit la suite $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) $\lim \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$,

(2) $\lim \rho(u_n - u) = 0$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Nous supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ on a

$$\|u_n - u\| < \varepsilon < 1.$$

Il s'en suit que

$$\rho(u_n - u) < \|u_n - u\|^{p-} < \varepsilon^{p-} < \varepsilon,$$

et par voie de conséquence

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1). La réciproque est toute aussi évidente car si $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$, alors $\rho(u_n - u) < \varepsilon^{p+}$ pour n suffisamment grand.

En tenant compte de la proposition 1.24,(1), on obtient $\|u_n - u\| < 1$.

Il vient en vertu des résultats de la proposition 1.24,(2),

$$\|u_n - u\|^{p+}_{p(x)} \leq \rho(u_n - u) < \varepsilon^{p+}.$$

ou bien

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0.$$

Ceci echève la démonstration . □

Prposition 1.26. *L'espace dual de $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ est $L^{p'(x)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, avec*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1.$$

En outre, pour tout $(u, v) \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \times L^{p'(x)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$,nous avons

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N} uvdx \Big| \leq \Big(\frac{1}{p-} + \frac{1}{(p')^-} \Big) |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)} \leq 2|u|_{p(x)} |v|_{p'(x)}$$

1.5.3 propriétés de l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Théorème 1.27. *L'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$, alors $\{u_n\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\}, j = 1, ..., N$ sont des suite de Cauchy dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

Comme $L^{p(x)}(\Omega)$ espace de Banach, il existe $u, w_j \in L^{p(x)}(\Omega)$ tels que

$$u_n \to u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_j} \to w_j \text{ quand n } \to \infty, \qquad j = 1, ..., N \tag{1.7}$$

Nous utilisons l'inégalité de Holder,

$$\int_\Omega (u_n - u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq C\|u_n - u\|_{p(x)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\|_{q(x)}, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.8}$$

oú $C = \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}$.D'aprés (1.7),(1.8) „nous avons

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \to \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ quand n } \to \infty, \tag{1.9}$$

donc

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \to \int_\Omega w_j \varphi dx, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ quand n } \to \infty, \tag{1.10}$$

car

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.11}$$

Par passage á la limite, compte tenu de (1.8) et (1.9), nous obtenons

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{w_j \varphi}{\varphi} dx \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.12}$$

D'aprés le lemme du Bois-Reymond en (1.11), nous concluons que (voir théoréme 0.5),

$$u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \text{ et } w_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, j = 1, ..., N.$$

On a donc

$\|u_n - u\|_{W^{1,p(x)}} = \|u_n - u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \to 0$, quand n $\to \infty$.

Finalement $W^{1.p(x)}(\Omega)$ est un zspace de Banach . □

Théorème 1.28. *([7]) L'espace $W^{1.p(x)}(\Omega)$ est réflexif et séparable pour $p^- > 1$.*

Définition 1.29. *On désigne par $W_0^{1.P(x)}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1.p(x)}(\Omega)$.*

Théorème 1.29. *([7]) L'espace $W_0^{1.p(x)}(\Omega)$ est aussi un espace de Banach, réflexif et séparable .*

Si de plus Ω est borné, alors :

Théorème 1.30. *([20]) Pour $p, q \in L^\infty(\Omega), p(x) \leq q(x)$, on a*

$$W^{1.p(x)}(\Omega) \subset W^{1.q(x)}(\Omega).$$

avec injection continue .

Soit p^* l'exposant critique de Sobolev associé apí, d'expression

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} \quad si \quad p(x) < N, \\ \\ +\infty \quad si \quad p(x) \geq N. \end{cases}$$

Théorème 1.31. *([20]) Pour $p, q \in C(\overline{\Omega}), p^-, q^- \geq 1$, on a alors*

$$q(x) < p^*(x) \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

De plus

$$W^{1.p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

avec injection continue et compacte.

Théorème 1.32. ***([20])*** *Si $p,q \in C(\overline{\Omega})$ sont tels que $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors*

$$W^{1.p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

avec injection continue .

Théorème 1.33. ***(Inégalité de poincaré [7])*** *Pour $p \in C(\overline{\Omega}), p^- > 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|u\|_{p(x)} \leq C\|\nabla u\|_{p(x)}, \forall u \in W^{1.p(x)}(\Omega)$$

Théorème 1.34. *Les normes $\|u\|, \|\nabla u\|_{p(x)}$ sont équivalentes sur $W_0^{1.p(x)}(\Omega)$.*

Lemme 1.6. ***(lemme 4.2 de [15])*** *Suppose que $(C1) - (C3')$ tenir. Ensuit $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ et*

$$I'(u)v = \int \nabla u \nabla v + \int c(x)uv - \int f(x,u)v - \oint g(x,u)v \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où I'(u) désigne la dérivée de I dans u. De plus

$$J(u) = \int F(x,u) + \oint G(x,u).$$

est faiblement continue, et J' est compact

Démonstration. voir [15] □

Prposition 1.35. ***(proposition 4.3[15])*** *Suppose que $(C1) - (C3')$ tenir. Si $\{u_m\}$ est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$ tel que $\lim_{m\to\infty} I'(u_m) = 0$ ensuite $\{u_n\}$ a une sous-suite convergente.*

Démonstration. voir [15] □

Théorème 1.36. *(**théorème 2,[14]**) comme être dans le théorème 1 et suppose que A et B satisfont (0,3). si satisfait la condition*

$$|\phi(x,z)-\phi(y,w)| \leq \Phi[|x-y|^{\alpha}+|z-w|^{\alpha}], |\phi(x,z)| \leq \Phi$$

pour tout (x,z) et (y,w) dans $\partial\Omega \times [-M_0, M_0]$, et si u est une solution faible bornée du problème conormal

$$divA(x,u,Du)+B(x,u,Du)=0 \text{ dans } \Omega, A(x,u,Du).\gamma=\phi(x,u) \text{ au } \partial\Omega$$

oú γ est la normale intérieure à $\partial\Omega$, avec $|u| \leq M_0$ dans Ω, alors il existe une constante positive $\beta = \beta(\alpha, \Lambda/\lambda, m, n)$ telle que u soit dans $C^{1,\beta}(\Omega)$, de plus (0,5) est valable

1.5.4 Séparabilité,réflexivité et dual de $L^p(x)$

Nous allons distinguer l'étude des trois cas :

(A) $1 < p < \infty$

(B) $p = 1$

(C) $p = \infty$

$1 < P < \infty$

Il s'agit du cas le plus (favorable) : L^p est réflexif séparable et le dual de L^p s'identifie á $L^{p'}$.

Théorème 1.37. *L^p **est réflexif pour** $1 < p < \infty$*

Démonstration. voir [9] □

Théorème 1.38. *(**Théorème de représentation de Riesz**) Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$.*

Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$< \varphi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$

Remarque 3. *Le théorème 1.38 est trés important. Il exprime que tout forme linéaire continue sur L^p avec $1 < p < \infty$ se répresent á l'aide d'une fonction de $L^{p'}$.*

L'application $\varphi \longrightarrow u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p avec

Démonstration. voir [9] □

Théorème 1.39. *$L^p(\Omega)$ **est séparable pour** $1 \leq \infty$*

Démonstration. voir [9] □

Théorème 1.40. *Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que*

$$< \varphi, f > = \int uf \quad \forall f \in L^1$$

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

Remarque 4. *Le théorème 1.40 affirme que toute forme linéaire et continue sur L^1 se represente á l'aide d'une fonction de L^∞. L'application $\varphi \longrightarrow u$ est une isométrie surjective qui permet d'identifier $(L^1)'$.*

$$(L^1)' = L^\infty.$$

Démonstration. voir ([9], p66) □

Remarque 5. *L'espace L^∞ n'est pas séparable .*

Démonstration. voir [9] □

1.6 Espace de Sobolev généralisé

Ces espaces vont representer le cadre fonctionnel dans les quels nous allons chercher les soluttion . Notés $W^{1.p(x)}(\Omega)$, ils ont pour expression

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), \quad j = 1, ..., N \right\}$$

Ici $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de u et satisfait á l'équation

$$\int_{\Omega} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Nous munissons l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}.$$

En outre, si on note gradient de u par $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$, on peut définir, de manière équivalente, l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega), |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

Chapitre 2

2

2.1 Position du probléme

$$\begin{cases} -\triangle u + u = \lambda g(x,u) & sur\Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x,u) & \partial\Omega \\ \\ \end{cases} \tag{2.1}$$

Oú Ω est un domaine borné lisse dans $\mathbb{R}^N$ avec $\mathbb{R} \geq 2$, η est la normale externe a $\partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre et les non-linéarités $f : \partial\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonction continues.

Sous des hypothèses appropriées sur le terme frontière $f(x,s)$ (un signe non linéarité), nous étudions l'existence d'une solution positive de passe Montagne et autre non nul solution au problème pour $|\lambda| > 0$ assez petit.

De plus, on montre que la solution non nulle est positive pour les petits $\lambda > 0$ sous des hypothèses appropriées sur $g(x,s)$ (voir F_6 ci-dessous).

(F_1) Il existe $\alpha \in [2, 2_*[$ et $C > 0$ tels que $\mid f(x,s) \mid \leq C(s^{\alpha_1 - 1} + 1)$ pour $(x,s) \in \partial\Omega \times [0, \infty[$ oú $2_* = \infty$ si $N = 2$ et $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ si $N \geq 3$.

(F_2) Il existe $\alpha > 2, \theta \in [1, 2[$ et $C > 0$ tel que $\alpha F(x,s) - sf(x,s) \leq Cs^\theta + C$ pour $s \geq 0$ et x $\in \partial\Omega$, ou $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$.

(F_3) Il existe $x_0 \in \partial\Omega$ et $\delta_0 > 0$ oú $\lim_{s\longrightarrow\infty}(\min_{x\in B_{(x_0,\delta_0)}\cap\partial\Omega}\frac{F(x,s)}{s^2}) = \infty$ oú $B(x_0,\delta_0)$ désigne une boule ouverte centrée en x_0 de rayon δ_0 dans $\mathbb{R}^N$.

$(F4)$ $f(x,s) = 0$ pour tout $(x,s) \in \partial\Omega\times]-\infty,0]$ et $\limsup_{s\longrightarrow 0^+}(\max_{x\in\partial\Omega}\frac{f(x,s)}{s}) < \mu_1$, oú $\mu_1 > 0$ est la valeur propre principale de $-\Delta u + u = 0$ dans Ω, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu u$ sur $\partial\Omega$.

$(F5)$ f est localement lipschitzienne continue sur $\partial\Omega \times [0,\infty[$ c'est-a-dire pour tout $M > 0$, il existe $\alpha_2 = \alpha_2(M) \in [0,1[$ et $L = L(M) > 0$ tels que $|f(x_1,s_1) - f(x_2,s_2)| < L(|x_1 - x_2|^{\alpha_2} + |s_1 - s_2|^{\alpha_2})$ pour tout $(x_1,s_1),(x_2,s_2) \in \partial\Omega \times [0,M]$.

$(F6)$ $g(x,0) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $\liminf_{s\longrightarrow 0}(\max_{x\in\Omega}\frac{g(x,s)-g(x,0)}{s}) > -\infty$.

Nous donnons un exemple de $f(x,s)$ satisfaisant toutes les hypothèses $(F_1) - (F_5)$.

Exemple 3. *Soit* $f(x,s) = a(x)s^{p-1} + b(x)s^{q-1}$ *pour (x,s)* $\in \partial\Omega \times [0,\infty[$ *et* $f(x,s) = 0$ *pour* $(x,s) \in \partial\Omega\times]-\infty,0[$, *ici* $2 < q < p < 2_*$ *et a,b sont localement lipschitienne continue sur* $\partial\Omega$ *vérifiant soit (i)* $a(x_0) > 0$ *pour certains* $x_0 \in \partial\Omega$ *et* $b(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in \partial\Omega$ *oú (ii)* $a(x) \geq 0 \equiv 0$ *dans* $\partial\Omega$ *et* $b(x)$ *est n'importe quelle fonction, Alors f vérifié que* $(F_1),(F_2),(F_4)$ *et* (F_5) *sont valables. Si on prend* $\alpha = p$ *pour le cas (i) et* $\alpha = q$ *pour le cas (ii), alors* $\alpha F(x,s) - sf(x,s) \leq 0$ *pour tout* $(x,s) \in \partial\Omega \times [0,\infty)$. *Ainsi* (F_2) *Soit X l'espace de sobolev* $W^{1,2}(\Omega)$ *de norme* $\|u\|_X = (\int_\Omega(|\nabla u|^2 + u^2)dx)^{1/2}$ *Nous donnons maintenant le resultat principal du travail .*

Théorème 2.1. *D'aprés* $(F_1) - (F_5)$, *les affirmations suivante sont valables :*

(i) il existe $\lambda^* > 0$ *tel que (2.1) a une solution positive* u_λ *lorsque* $|\lambda| \leq \lambda^*$. *plus loin de plus, pour toute suite* $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ *satisfaisant* $(\lambda_n) \longrightarrow 0$ *comme* $n \longrightarrow \infty$, *il existe une sous-séquence* (λ_{nk}) *de* (λ_n) *et une suite* (u_{nk}) *de solutions positives au probléme (2.1) avec* $\lambda = \lambda_n$ *vérifaint* $u_{nk} \longrightarrow u_0$ *en* $C^1(\overline{\Omega})$ *comme* $n_k \longrightarrow \infty$, *oú* u_0 *est une solution de passe de montagne de (2.1) avec* $\lambda = 0$

(ii) Si $g(x,0) \equiv 0$ *sur* Ω, *alors il existe* $\lambda_* > 0$ *tel que (1.1) a un autre solution non nul* v_λ *pour* $\lambda \in (-\lambda_*,0)\cup(0,\lambda_*)$ *telle que* $v_\lambda \longrightarrow 0$ *dans X comme* $\lambda \longrightarrow 0$. *de plus, si nous supposons que* (F_6) *est également vrai,* $v_\lambda > 0$ *dans* $\overline{\Omega}$ *pour* $\lambda \in (0,\lambda_*)$

2.2 Résultat principal

Dans ce travail supposons que les hypotéses(F_1) et(F_4) sont valables. Pour (2.1) avec $\lambda = 0$, on définit la fonctionnelle lagrangienne $I_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par $I_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{dx} - \int_{\partial\Omega} F(x,u)d\sigma$ pour u ∈ X, oú σ est la mesure de surface sur la frontiére. Noter que opérateur de trace $X \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ est compacte pour q $\in [1, 2_*[$ (voir [4],théoreme 1.1) puis, par (F_1), I_0 est bien définit et $I_0 \in \mathbf{C}^1(X, \mathbb{R})$ avec $I_0'(u)\phi = \int_\Omega(\nabla u.\nabla\phi + u\phi)\mathrm{dx}$ - $\int_{\partial\Omega} f(x,u)\phi\mathrm{d}\sigma$ pour $u, \phi \in X$ (voir [15], lemme 1.6]).

Lemme 2.1. *Supposons que* $(F_1) - (F_4)$. *Ensuite les affirmations suivantes sont valables :*

(1) Il existe $r_0 > 0$ *et* $p_0 > 0$ *tel que*

$$I_0(u) \geq p_0 \text{ lorsque } \| u \|_X = r_0 \tag{2.2}$$

(2) Il existe $v_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ *tel que* $v_1 \geq 0$, $v_1(x_0) > 0$, $\| v_1 \|_X > r_0$ *et* $I_0(v_1) < 0$, *oú* $x_0 \in \partial\Omega$ *dans* (F_3).

(3) I_0 *satisfait la la condition de palais smale, c'est-a-dire, soit toute suite* $\{u_n\}$ *dans* X *telle que* $|I_0(u_n)|$ *est uniformément borné et* $I_0'(u_n) \longrightarrow 0$ *comme* $n \longrightarrow \infty$, *alors* $\{u_n\}$ *une sous-suite convergent dans* X

Démonstration. (1) Apartir de (F_4), il existe $s_0 > 0$ et $\mu \in (0, \mu_1)$ tels que $\frac{f(x,s)}{s} < \mu$ pour $|s| < s_0$ alors $F(x,s) \leq \frac{\mu}{2}s^2$.

En combinant cela avec (F_1), il existe $\alpha_1 \in [2, 2_*[$ et $c > 0$ tel que $F(x,s) \leq \frac{\mu}{2}s^2 + C|s|^{\alpha_1}$ pour $s \in \mathbb{R}$. puisque μ_1 est la valeur propre principale de $-\triangle u + u = 0$ dans Ω $\frac{\partial\mu}{\partial\eta} = \mu u$ sur $\partial\Omega$, $\mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \leq \| u \|_X^2$ pour tout $u \in X$. En suite, pour tout $u \in X$.

$$I_0(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{\mu_1})\|u\|_X^2 - \tilde{C}\|u\|_X^{\alpha_1} = \|u\|_X^2\Big[\frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{\mu_1}) - \tilde{C}\|u\|_X^{\alpha_1 - 2}\Big], \tag{2.3}$$

Oú $\tilde{C}$ est la constante positive qui provient de l'inclusion continue $X \longrightarrow L^{\alpha_1}(\partial\Omega)$. Ainsi, il existe $r_0 > 0$ et $p_0 > 0$ satisfaisant (2.2).

(2) Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et $\delta_0 > 0$ dans (F_3). Choisissez une fonction $\psi \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que $\psi \geq 0, \psi(x_0) > 0$ et le support de ψ est dans $B(x_0, \delta_0)$. On pose $A = \{x \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_0) : \psi(x) > \frac{\psi(x_0)}{\sqrt{2}}\}$ et $B = \{x \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_0) : \psi(x) < \frac{\psi(x_0)}{\sqrt{2}}\}$ alors $A \cup B = \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_0)$ la mesure de surface

de A est positive. Par (F_3), min $\{\frac{F(x,s)}{s^2} : x \in A \cup B\} \longrightarrow \infty$ comme $s \longrightarrow \infty$ par conséquent, $min\{\frac{F((x,t\psi(x))}{(t\psi(x))^2} : x \in A\} \longrightarrow \infty$ comme $t \longrightarrow \infty$ et $\int_B F(x,t\psi(x))d\sigma \geq 0$ pour un t suffisamment grand. Alors

$I_0(t\psi) = \frac{t^2}{2}\|\psi\|_X^2 - \int_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta_0)} F(x,t\psi)d\sigma = \frac{t^2}{2}\|\psi\|_X^2 - t^2\int_A \frac{F(x,t\psi)}{t^2\psi^2}\psi^2 d\sigma - \int_B F(x,t\psi)d\sigma \leq \frac{t^2}{2}(\|\psi\|_X^2 - [\psi(x_0)]^2\int_A \frac{f(x,t\psi)}{t^2\psi^2}d\sigma) \to -\infty$ comme $t \to \infty$.

Ainsi, il existe $t_0 > 0$ tel que $v_1 = t_0\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ vérifie $v_1 \geq 0, v_1(x_0) > 0, \|v_1\|_X > r_0$ et $I_0(v_1) < 0$.

(3) Soit (u_n) une suite dans X telle que $I_0(u_n)$ est bornée et $I'(u_n) \to 0$ comme $n \to \infty$ et $\alpha I_0(u_n) - I_0'(u_n)u_n = \frac{\alpha-2}{2}\|u_n\|_X^2 - \int_{\partial\Omega}(\alpha F(x,u_n) - u_n f(x,u_n))d\sigma$. Depuis $|I_0(u_n)|$ et $\|I_0'(u_n)\|$ sont bornés, par $(F_2)et(F_4)$, pour certaines constante $M, M' > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-2}{2}\|u_n\|_X^2 &= \alpha I_0(u_n) - I_0'(u_n)u_n + \int_{\partial\Omega}(\alpha F(x,u_n) - u_n f(x,u_n))d\sigma \\ &\leq M + M\|u_n\|_X + M\|u_n\|_{L^\theta(\partial\Omega)}^\theta \\ &\leq M + M\|u_n\|_X + M'\|u_n\|_X^\theta.\end{aligned}$$

Car $\alpha > 2$ et $\theta \in [1,2[$, il s'ensuit que $\|u_n\|_X$ est borné. par arguments standard, I_0 satisfait la condition de Palais-smale (voir la proposition 1.35 de [15])

Metrre $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],x) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_1\}$ oú v_1 est la fonction lemme 2.1(2). Alors $c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma} max_{0\leq t\leq 1} I_0(\gamma(t) > 0$ est une valeurs critique de I_0en vue du théoreme de passe montagne d'Ambrosetti et Rabinowitz [2]. Ainsi I_0 a un critique de I_0 en vue point $u_0 \in X\ \{0\}$ avec $I_0(u_0) = c_0 > 0$ on appelle u_0 une solution de passe montagne associée avec I_0. En général, une solution de passe de montagne n'est pas nécessairement unique, mais l'estimation a priori pour toutes les solutions de passe montagne est donnée comme suit.

□

Lemme 2.2. *Supposons que $(F_1) - (F_4)$ tiennent. Alors il existe $M_1 > 0$ tel que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1$ pour toute solution u associée a I_0. Si, en plus, on suppose (F_5) est également vrai, alors il existe des constantes $\beta \in]0,1[$ et $M_2 > 0$ telles que $\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq M_2$ pour toute solution u assosiée a I_0*

Démonstration. Soit u une solution de passe montagne associée a I_0. Depuis $I_0'(u) = 0$ et $I_0(u) = c_0$

$$\frac{\alpha-2}{2}\|u\|_X^2 = \alpha I_0(u) - I_0'(u)u - \int_{\partial\Omega}(\alpha F(x,u) - uf(x,u))d\sigma$$
$$\leq \alpha c_0 + M\|u\|_X^\theta + M$$

Pour certains $M > 0$, et donc $\|u\|_X \leq M_0$ pour certaine $M_0 > 0$ par technique d'itération de Moser [18, 19], $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1$ pour certaine $M_1 > 0$. Supposons que F_5 soit valable. Puis par la régularité de Lieberman(Théorema 1.36 de [14], il existe des constantes $\beta \in (0,1)$ et $M_2 > 0$ tel que $\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq M_2$ pour toute solution de cols u associée a I_0.

Notez que 0 est la solution constante unique au probléme 2.1 avec $\lambda = 0$. Ensuite, nous montrons que toutes les solutions non constantes au probléme 2.1 avec $\lambda = 0$ sont en effet des solutions positives. □

Lemme 2.3. *Supposons que* $(F_1) - (F_5)$ *tiennent soit u une solution non constante au probléme 2.1 avec* $\lambda = 0$. *Alors* $u > 0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

Démonstration. Soit u une solution non constante au probléme 2.1 avec $\lambda = 0$. Supposons, au contraire , il existe $x_1 \in \overline{\Omega}$ tel que $u(x_1) \leq 0$. Puisque u n'est pas une solution constante, par principe du maximum fort, u ne peut pas atteindre son minimum non positif en. il existe $x_2 \in \partial\Omega$ tel que $u(x_2) < u(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et $u(x_2) \leq 0$. par le lemme de Hopf $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_2) < 0$, ce qui contredit le fait que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_2) = f(x, u(x_2)) = 0$ Alors $u > 0$ dans $\overline{\Omega}$ □

Rappelons que M_1 est une constante dans le lemme 2.2. Soit g une fonctions continue sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ et a tel qu'il coincide avec g sur $\overline{\Omega} \times [-2M_1, 2M_1]$ et son support dans $\overline{\Omega} \times [-3M_1, 3M_1]$.

pour $\lambda \in \mathbb{R}$,definir $I_\lambda : X \to \mathbb{R}$ par, pour u ∈ X

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + u^2) - \lambda G(x,u)\Big)dx - \int_{\partial\Omega} F(x,u)d\sigma$$
$$= I_0(u) - \lambda \int_\Omega G(x,u)dx.$$

oú $G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par, $G(x,s) = \int_0^s g(x,\tau)d\tau$ pour $(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ alors I_λ est bien défini et $I_\lambda \in C^1(X, \mathbb{R})$ avec $I_\lambda'(u)\phi = \int_\Omega (\bigtriangledown u. \bigtriangledown \phi + u\phi)dx - \int_{\partial\Omega} f(x,u)\phi d\sigma - \lambda \int_\Omega g(x,u)\phi d\sigma$ avec $u, \phi \in X$ un point critique de I_λ est une solution (faible) de $-\triangle u + u = \lambda g(x,u)$ dans Ω et $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x,u)$ sur $\partial\Omega$

Lemme 2.4. *Supposons que* $(F_1)-(F_4)$ *tiennement. Ensuite, les affirmation suivantes sont valables :*

(1) Il existe $\lambda^0 > 0$ *tel que pour tout* λ *avec* $|\lambda| \leq \lambda^0$,

$$I_\lambda(u) \geq \frac{\rho_0}{2} \text{ quand } \|u\|_X = r_0 \tag{2.4}$$

et $I_\lambda(v_1) < 0$, *quand* r_0, ρ_0 *et* v_1 *sont comme dans le lemme 2.1*

(2) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, I_λ *satisfait la condition de Palais-Smale*

Démonstration. (1) Depuis $\hat{G}$ (x,s) est borné $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ nous avons

$$I_0(u) - |\lambda|C \leq I_\lambda(u) \leq I_0(u) + |\lambda|C \text{ pour } u \in X \tag{2.5}$$

oú C > 0 est indépendant de λ et u. Puis par (2.3) et (2.5), il existe $\lambda^0 > 0$ tel que pour tout λ avec $|\lambda| \leq \lambda^0, I_\lambda(v_1) \leq I_0(v_1) + |\lambda|C < 0$ et $I_\lambda(u) \geq \rho - |\lambda|C \geq \frac{\rho}{2}$ pour $\|u\|_X = r_0$.

(2) puisque g(x,s) et G(x,s) sont les memes arguments dans le lemme 2.1(3), on peut montrer que pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}, I_\lambda$ satisfait la condition de Palais-Smale.

D'aprés le théoreme de passe montagne d'Ambrosetti et de Rabinowitz [2], par le lemme 2.4 on définit une valeur de passe montagne c_λ de I_λ par $C_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I_\lambda(\gamma(t)) > 0$. Puis par (2.5), $c_\lambda \longrightarrow c_0$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$

□

Lemme 2.5. *Supposons que* $(F_1)-(F_5)$ *tienement. Soit* (λ_n) *une suite dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\lambda_n \longrightarrow 0$ *comme* $n \longrightarrow \infty$ *et soit* (u_n) *une suite dans* X *telle que* u_n *est une solution associé a* I_{λ_n}. *Alors il existe une sous suite* (n_k) *de* (u_n) *satisfaisant* $u_{nk} \longrightarrow u_0$ *dans* $C^1(\overline{\Omega})$ *comme* $n_k \longrightarrow \infty$, *oú* u_0 *est une solution de passe montagne associée a* I_0.

Démonstration. Puisque $I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n}$ et $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$, en utilisant le meme argument que dans le lemme 2.2 avec la borne de c_{λ_n}, la norme $C^{1,\beta}(\Omega)$ de u_n est uniformément bornée. Par le plongeant compact $C^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$. une sous-séquence de u_n converge vers une limite u_0 dans $C^1(\overline{\Omega})$. Alors u_0 vérifie que $I_0(u_0) = C_0$ et $I'_0(u_0) = 0$. Par conséquent u_0 est une solution associée a I_0

D'aprés 2.2 ,2.3 et 2.5 nous avons le lemme suivant □

Lemme 2.6. *Supposons que* $(F_1)-(F_5)$ *tiennent, Il existe* $\lambda^* \in (0, \lambda^0)$ *tel que tout solutions passe u associe a* I_λ *avec* $|\lambda| \leq \lambda^*$

ou $= \lambda^0$ *et* M_1 *sont les constantes du lemme 2.4 et du lemme 2.2 respectivement.*

Démonstration. premiérement, nous montrons que toute solutions u associée a I_λ pour $|\lambda| > 0$ assez petit satisfait $|u(x)| \leq 2 \leq 2M_1$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Supposons , par l'absurd, qu'il existe deux suite $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ et $(u_n) \subseteq X$ telle que $\lambda_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ et u_n est une solutions assoviée a I_{λ_n} satisfaisant $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} > 2M_1$. par le lemme 2.5 a sous séquences de (u_n) converge vers une solution u_0 associée a I_0 dans $C_1(\overline{\Omega})$. Depuis $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1$ par le lemme 2.2, Il s'ensuit que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2M_1$

pour n assez grand , ce qui est une contradiction . Il existe donc $\lambda_1 > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2M_1$ pour tout solution de cols u associée a I_λ avec $|\lambda| < \lambda_1$. De meme , on peut prouver que $u(x) > 0$ pour tout x $\in \overline{\Omega}$ au vu des lemmes 2.3 et 2.5.

Maintenant, nous donnons la preuve du théoreme 2.1. □

Démonstration. du théoreme 2.1.

(i) Soit u_λ une solution associée a I_λ avec $|\lambda| \leq \lambda^*$, oú λ^* constante dans le lemme 2.6. Alors $0 < u_\lambda(x) \leq 2M_1$ par le lemme 2.6. Ainsi, $g(x, u_\lambda) = g(x, u_x)$, et u_λ est une solution positive au probléme (2.1). Soit (λ_n) toute suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Puis par le lemme 2.5, il existe une sous-suite (λ_{nk}) de (λ_n) et un suite (u_{nk}) de solutions positives au probléme (2.1) avec $\lambda = \lambda_{nk}$ satisfaisant $u_{nk} \longrightarrow u_0$ en $C^1(\overline{\Omega})$ comme $n_k \longrightarrow \infty$, oú u_0 est une solution de passe montagne u_0 associée á I_0 .

(ii) Nous supposons maintenant que $g(x, 0) \equiv 0$ dans Ω. Soit $\overline{B}_{r_0}$ la boule fermée centrée au origine de rayon r_0 dans X, oú $r_0 > 0$ est la constante du lemme 2.4. Puis le minimum de I_λ dans $\overline{B}_{r_0}$ tell que $I_\lambda(v_n)$ converge vers le minimum de I_λ dans $\overline{B}_{r_0}$ et $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ faiblement dans X pour un certain $v_\lambda \in \overline{B}_{r_0}$. Par la semi-continuité faiblement inférieure de I_λ, on a $I_\lambda(v_\lambda) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} I_\lambda(v_n)$, ce qui implique que v_λ est un point minimum dans $\overline{B}_{r_0}$. puisque $I_\lambda(0) = 0$, il s'ensuit que $I_\lambda(v_\lambda) \leq 0 \leq I_\lambda(u_\lambda)$,oú u_λ est une solution de passe montagne associée avec I_λ. Par (2.3), $\inf_{\|u\|_X = r_1} I_\lambda(u) \geq \frac{\rho}{2} > 0 = I_\lambda(0)$. Donc $\|v_\lambda\|_X < r_0$ et $v_\lambda \neq u_\lambda$. et par (2.2) et (2.4), on peut choisir $r_0 > 0$ dans les lemmes 2.1 et 2.4 de sorte que $I_\lambda(u) \geq \frac{1}{4}(1 - \frac{\mu}{\mu_1})\|u\|_X^2 - |\lambda|C$ pour tout $\|u\|_X \leq r_0$. Notez que C>0 est indépendant de λ et u. Par conséquent, $\|v_\lambda\| \longrightarrow 0$ comme $\lambda \longrightarrow 0$, Par le fait que $I_\lambda(v_\lambda) \leq 0$. Par l'itération de Moser

technique [18, 19], comme dans le lemme2.2, il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2M_1$ pour $|\lambda| < \lambda*$. D'oú $\widehat{g}(x, v_\lambda) = g(x, v_\lambda)$ et donc v_λ est une solution non nulle de (2.1) pour $\lambda \in (-\lambda^*, 0) \cup (0, \lambda^*)$, puisque $g(x, 0) \equiv 0$.

Supposons que (F_6) soit également valable. Alors il existe $C > 0$ tel que $g(x, s) - g(x, 0) \geq -Cs$ pour $-2M_1 \leq s \leq 2M_1$ et $x \in \Omega$. Soit $\lambda \in (0, \lambda*) fixe$. Alors

$$-\Delta v_\lambda + (1 + \lambda C)v_\lambda = \lambda(g(x, v_\lambda) - g(x, 0) + Cv_\lambda) + \lambda g(x, 0) \geq 0.$$

Since $v_\lambda \equiv 0$, Par le même argument que dans le lemme 2.3, on conclut que $v_\lambda > 0$ dans $\overline{\Omega}$ pour $\lambda \in (0, \lambda*)$.

□

Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons étudié des problèmes elliptique non linéaires. Nous avons établi des théorèmes d'existance á l'aide de la théorie des points critique, précisément l'utilisation du théoreme de Passe-Montagne était concluante. Les difficultés rencontrées sont de deux natures : équation non-lineaire, définies sur des domaines bornés .

Bibliographie

[1] **Alama S et Tarantello G**, Sur les équations elliptiques semi-linéaires a non -linéarités indéfinies, Calc. *Var.Equations diffeerentielles partielles*, **1 (4)** (1993) 439-475

[2] **Ambrosetti A et Rabinowitz PH**, méthodes double variationnelles en théorie des points critiques et application ,*J.Functional Analysis*,**14** (1973) 349-475

[3] **Amster P et De Nápoli P**, Une méthode de quasi-linéarisation pour les probléme elliptique avec un condition aux limites, Anal non linéaire, **66 (10)** (2007) 2255-2263

[4] **Biegert M**, Sur les traces de fonctions de sobolev á la frontiére des domaines d'extension, *Proc.Amer Math. Soc.* **137** (2009) 4169-4176

[5] **Cantrell RS et Conser C**, Sur les effets des conditions aux limites non linéaires en logistique diffusive équation sur les domaines bornés, *J. Equations diffeerentielles*, **231 (2)** 2006) 768-804

[6] **Cantrell RS, Conser C et Martinez S, bifurcation globale de solutions á la logistique diffusive équations sur des domaines bornés soumis á des conditions aux limites non linéaires,** *Proc. Roy. Soc. Sect d'Edimbourg. A*, **139 (1) (2009) 45-56**

[7] **Cicero Januário Guimarães**, Sobro os espace de lebesgue e Sobolev generalizados e aplicoes envolvend o p(x)-Laplaciano, Document présenté du programme d'études supérieures en Mathématique - CCT - UFGC.Université fédérale de Campina Grande, Brézil, 2006.

[8] **J.Kinnunen**, *Sobolev Spaces*.Déparetement of mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[9] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[10] **H. Le Dret**, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[11] **H.K.Pathak**, *an introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*.springer.

[12] **G. Leoni**, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[13] **Kim CG, Liang ZP et Shi JP**, Existence de solutions positives à une équation de Laplace avec condition aux limites non linéaire, Z. Angew. Math. Phys. , **66(6)** (2015) 3061-3

[14] **Lieberman GM**, Régularité aux limites pour les solutions d'équations elliptiques dégénérées, Non linéaireAnal. , **12(11)** (1988) 1203-1219

[15] **Mavinga N et Nkashama M N**, problèmes propres de Steklov–Neumann et équation elliptique non linéaireavec des conditions aux limites non linéaires, J. Differential Equations , **248 (5)** (2010) 1212–1229

[16] **M. A. Al-Gwaiz**, *Theory of distributions*. CRC Press, 1992.

[17] **N.S Papageorgiou**, V.D Radulescu and D.D.Repovs, *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*.Springer Monographs in Mathematics.

[18] **Winkert P**, L^{∞}-estimates pour les problèmes de valeurs limites elliptiques non linéaires de Neumann, NoDEA Appl. d'équations différentielles non linéaires. , **17(3)** (2010) 289-302

[19] **Winkert P et Zacher R**, Bornes a priori pour les solutions faibles aux équations elliptiques avec non-croissance standard, Discrete Contin. Dyna. Syst. Sér. S , **5(4)** (2012) 865–878

[20] **X. Fan, J. Shen et D. Zaho**, Sobolev embedding theorems for espace $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262(2001), 749-760.