RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

ABDELOUAHAB Benaissa

QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTIONS D'EDP

Soutenu publiquement le 23/06/2022 devant le jury composé de :

Président : BENAICHOUCHE Noureddine

Examinateur : AYADI Hocine

Encadreur : BENCHAA Mohamed

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022

Table des matières

Notations **1**

Introduction **1**

1 Rappels et définitions **4**

1.1 Espases de Lebesgue $L^p(\Omega)$ 4

1.2 Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$ 4

1.3 Inégalité de Young 5

1.4 Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$ 5

1.5 Lemme de Fatou 6

1.6 Théorème de convergence dominée 6

1.7 Espaces de Sobolev 6

2 Méthode de point fixe **9**

2.1 Théorème de Brouwer 10

2.2 Théorème de Schauder 13

2.3 Un Application 17

3 Méthode de monotonie **21**

3.1 Opérateurs monotones, définitions et propriétés 21

3.2 Inéquations variationnelles 23

3.3 Applications 26

Conclusion générale **31**

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie.

Que je dédie ce mémoire

A mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père,

Qui m'ont soutenus tout au long de ma vie.

Par leur patience, leur amours et leur encouragement .

A mes soeurs,

A toute ma famille,

A tout mes amis,

A tout mes enseignants, pour leur utiles conseils, leur patience et leur persévérance.

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanahou wa taala.

Je tenais à remercier mon encadreur de mémoire,

Mr BENCHAA Mohamed, pour ces conseils, son encouragement et sa disponibilité dans ce travaille.

Je remercie également :

Mr AYADI Hocine et Mr BENAICHOUCHE Noureddine pour leur conseils et leur écoute durant l'élaboration de ce mémoire.

je remercie ma famille :

mon père , ma mère et mes soeurs,

qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes amis (SOUIHEL Benaissa, GUEDAHI Mustapha, Hamza TOUMI).

Je remercie tous enseignants d'université de Yahia Farès.

Notations

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω

$x = (x_1, \cdots, x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$

$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω

$Q = \Omega \times]0, T[$ t : variable du temps, $T > 0$

$\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$

$\overline{\Omega}$: l'adhérence de l'ensemble Ω

$\rightharpoonup$: la convergence faible

$\to$: la convergence fort

$\mathrm{p.p.}$: presque partout

H : un espace de Hilbert

$\langle ., . \rangle_{V' \times V}$: le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'

$\|.\|$: la norme sur un espace.

$(.,.)$: le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H

$|.|$: la norme sur l'espace de Hilbert H

Id : désigne la matrice d'identité.

$\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_N})$: gradient de $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$: la partie positive et négative de la fonction f

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de solution pour quelques equations aux dérivées partielles elliptiques avec des conditions aux limites de type Dirichlet en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et la méthode des opérateurs monotones.

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles constituant une branche importante des mathématiques appliquées, nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équation : elliptique, parabolique et hyperbolique.

Les Équations aux dérivées partielles interviennent dans plusieurs domaines : en chimie, en économie, en physique, en biologie et dans les sciences ingénieur.

La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Il existe plusieurs méthode de résoudre des équations aux dérivées partielles, dans ce mémoire, nous avons présenté quelques méthodes pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions pour les équations aux dérivées partielles elliptiques notamment méthode de point fixe de Schauder et méthode de monotonie.

Chapitre 1

Rappels et définitions

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail.

Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, muni de la mesure de Lebesgue

1.1 Espases de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1 *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par : Pour $1 \leq p < +\infty$*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \ mesurable, \int_\Omega |u|^p dx < +\infty\},$$

mini de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \ mesurable, \ \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| < \infty\},$$

1.2 Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$

Théorème 1.1 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tous $p \in \mathbb{R}$, réflexif pour tous $1 < p < \infty$ et séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

preuve. Voir [2] ■

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,le dual topologique de $L^p(\Omega)$ est noté par $L^{p'}(\Omega)$ ou p' est le nombre conjugué de p, ce qui signifie :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

.

preuve. Voir [2] ■

1.3 Inégalité de Young

Théorème 1.3 *Soit $a, b \geq 0$, $p > 1$ et $q < \infty$ deux exposants cojugués.*

Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

preuve. Voir [2] ■

Théorème 1.4

$$\int_\Omega f g \, dx \leq \left[\int_\Omega |f|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |g|^{p'} \, dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

preuve. Voir [2] ■

Théorème 1.5 ***(Convergence monotone de Beppo-Levi)***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que f_n converge en croissance vers f p.p. sur X.

Alors $f : X \to [0, +\infty]$ est mesurable et on a

$$\int_X f(x) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu.$$

1.4 Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.2 (Convergence forte) .

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, et f_n une suite de $L^p(\Omega)$. On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Définition 1.3 (Convergence faible) *Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,et f_n une suite de $L^p(\Omega)$. On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f)g\, dx = 0, \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

1.5 Lemme de Fatou

Théorème 1.6 *Soit (E, Ω, μ) un espace métrique, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f_n une suite dans E alors*

$$\int_\Omega (\liminf_{n\to+\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

preuve. Voir [2] ■

1.6 Théorème de convergence dominée

Théorème 1.7 *Soient $p \in [1, +\infty[$, f_n une suite de fonctions mesurables tel que :*

(1) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour presque partout dans (Ω) ,

(2) Il existe une fonction g dans $L^p(\Omega, m)$ telle que : $f(x) \leq g(x)$ p.p. $x \in (\Omega)$.

Alors $f(x)$ est dans $L^p(\Omega)$ et on a

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \; quand, \; n \to \infty.$$

preuve. Voir [2] ■

1.7 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels et ses éléments sont des fonctions,qui sont intégrables au sens de Lebesgue.

Définition 1.4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, l'espace Sobolev est noté $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles*

jusqu'à l'ordre m au sens des distributions identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.
La définition précédente est s'écrite donc :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \; avec \; |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\right\},$$

Tel que $D^\alpha u$ la dérivée au sens de distribution. Cet espace est munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ on pose*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Définition 1.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|.\|_{m,p}$.*

Proposition 1.1 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$,donc $W_0^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Lemme 1.8 *Soient $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ et $|\alpha| \leq m$ .Alors*

(1) $D^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$,

(2) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u)$ pour tout multi-indice α, β tel que $|\beta| + |\alpha| \leq m$,

(3) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,alors $\lambda u + \mu v \in W^{m,p}(\Omega)$ et $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

Proposition 1.2 *Pour toute $m \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$,$W^{m,p}(\Omega)$est un espace de Banach et séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexive uniformément convexe si $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.3 *Pour toute $m \geq 0$ et $p = 2$,$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable qui est définit par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \; avec \; |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\},$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u| \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.9 *soient Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

(1) $si\ 1 \leq p < N,\ alors\ W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)\ ou\ \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N},$

(2) $si\ p = N,\ W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, \infty[,$

(3) $si\ p > N,\ alors\ W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$

Chapitre 2

Méthode de point fixe

Si f est une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle point fixe de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$. De nombreux problèmes, y compris des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, peuvent être (re)formulés sous forme de problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application dans un certain espace. Nous en verrons plusieurs exemples plus loin. Il est par conséquent intéressant de disposer de théorèmes assurant l'existence de points fixes dans des contextes aussi généraux que possible.

On rappelle d'abord le théorème de point fixe de Picard pour une contraction stricte dans un espace métrique complet, un résultat relativement élémentaire mais peu utilisé pour les applications que l'on a en vue :

Théorème 2.1 (Voir [5]) *Soit (E, d) un espace métrique complet, $T : E \longrightarrow E$ une contraction stricte, i.e., telle qu'il existe une constante $k < 1$ telle que*

$$\forall x, y \in E, d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0) \in E$. De plus, pour tout $z \in E$, la suite des itérés $T^m(z)$ converge vers x_0 quand $m \longrightarrow +\infty$.

Ce théorème, ou des variantes de ce théorème, est néanmoins utile dans le contexte des équations aux dérivées partielles d'évolution, notamment pour établir le théorème de Cauchy-Lipschitz, contexte qui ne nous concerne pas directement ici.

2.1 Théorème de Brouwer

Le théorème de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie. Soit $\overline{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de Rm muni de la norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial\overline{B}^m$ la sphere unité, qui en est la frontière. Le théorème de Brouwer affirme que :

Théorème 2.2 (Voir [5]) *Toute application continue de $\overline{B}^m$ dans $\overline{B}^m$ admet au moins un point fixe.*

Théorème 2.3 *Il n'existe pas d'application $f : \overline{B}^m \longrightarrow S^{m-1}$ de classe C^1 telle que l'on ait $f|S^{m-1} = Id$.*

preuve. On raisonne par l'absurde. Soit f une rétraction de $\overline{B}^m$ sur S^{m-1} de classe C^1.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $f_t(x) = (1 - t)x + tf(x)$.

Comme la boule est convexe, f_t envoie $\overline{B}^m$ dans $\overline{B}^m$.

De plus, comme f est une rétraction, la restriction de f_t à S^{m-1} est l'identité.

Pour $t = 1$, on $f_t = f$, pour $t = 0$, $f_t = Id$ et pour t petit, f_t est une petite perturbation de l'identité. On va montrer dans un premier temps, que f_t est un difféomorphisme de la boule ouverte sur elle-même pour t petit.

Soit $c = \max_{\overline{B}^m} \|\nabla f\|$ (∇f désigne la matrice $m \times m$des dérivées partielles des composantes de f et l'on en prend la norme matricielle subordonnée associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$).

Par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in \overline{B}^m$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Comme $\|f_t(x) - f_t(y)\| \geq (1 - t)\|x - y\| - t\|f(x) - f(y)\| \geq ((1 - t) - ct)\|x - y\|$,

on en déduit que f_t est injective dès que $0 \leq t < 1/(1 + c)$.

Comme f_t est l'identité sur S^{m-1}, il s'ensuit que $f_t(B^m) \subset B^m$ (on note B^m la boule ouverte) pour ces valeurs de t.

On remarque également que pour $0 \leq t < 1/(1 + c)$, on a

$$\nabla f_t = (1 - t)I + t\nabla f = (1 - t)(I + \frac{t}{1 - t}\nabla f),$$

avec

$$\frac{t}{1-t}\|\nabla f\| \leq \frac{ct}{1-t} < 1.$$

Par conséquent, pour ces mêmes valeurs de t, ∇f_t est partout inversible. Par le théorème d'inversion locale, on en déduit que f_t est un C^1-difféomorphisme local sur B^m.

En particulier, l'image de B^m par f_t est un ouvert, toujours pour ces mêmes valeurs de t.

Montrons que f_t est aussi surjective. Pour cela, il suffit de voir que $f_t(B^m) = B^m$, puisque $f_t(S^{m-1}) = S^{m-1}$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $f_t(B^m) \neq B^m$.

Comme on a vu que $f_t(B^m) \subset B^m$, il existe donc $y \in B^m \setminus f_t(B^m)$. Choisissons un point $y_0 \in f_t(B^m)$ et posons

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+; y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \notin f_t(B^m)\}.$$

Comme $f_t(B^m)$ est un ouvert, on a $\lambda_0 > 0$.

On a aussi $\lambda_0 \leq 1$ par le choix de y.

La suite $y_{\lambda_0 - 1/k}$ est donc dans $f_t(B^m)$ pour k assez grand, c'est-à-dire qu'il existe une suite $x_k \in B^m$ telle que $f_t(x_k) = y_{\lambda_0 - 1/k} \longrightarrow y_{\lambda_0}$.

Comme la suite x_k appartient au compact $\overline{B}^m$, on peut supposer qu'elle converge vers un certain $x_0 \in \overline{B}^m$.

Naturellement, par continuité de f_t, il vient $f_t(x_0) = y_{\lambda_0}$, donc $x_0 \notin S^{m-1}$ puisque dans le cas contraire, on aurait $y_{\lambda_0} = x_0 \in S^{m-1}$, et le segment $\{y_\lambda, \lambda \in [0,1]\}$, est inclus dans B^m par convexité.

On a donc $x_0 \in B^m$, et f_t est par conséquent un difféomorphisme local au voisinage de x_0, ce qui implique que l'image de f_t est un voisinage de y_{λ_0}.

On en déduit qu'il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $y_\lambda \in f_t(B^m)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1[$.

Ceci contredit la définition de λ_0 comme borne inférieure.

Jusqu'ici, on a démontré que pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, f_t est un C^1-difféomorphisme de B^m sur B^m.

Posons, pour $t \in [0,1]$,

$$V(t) = \int_{B^m} \det \nabla f_t dx.$$

Il est clair que pour t au voisinage de 0, $\det \nabla f_t > 0$.

Par conséquent, c'est le jacobien de f_t et par la formule de changement de variable dans une intégrale, on a

$$V(t) = \int_{B^m} dx = \textbf{volume} B^m.$$

En particulier cette valeur ne dépend pas de t au voisinage de 0.

Or, il est également clair d'après la forme de ∇f_t que, en tant que fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$, V_t est un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

C'est donc un polynôme constant, d'où $V(0) = V(1) = \textbf{volume} B^m$.Comme $f_1 = f$ et que f est une rétraction, on a $\det \nabla f = 0$, sinon l'image de f ne serait pas d'intérieur vide par le théorème d'inversion locale.

On en déduit que $V(1) = 0$, contradiction. ∎

preuve. (Théorème de Brouwer) On raisonne une nouvelle fois par l'absurde. Soit g une application continue de $\overline{B}^m$ dans $\overline{B}^m$ et supposons qu'elle n'admette pas de point fixe. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}^m$, $\|x - g(x)\| \geq \alpha$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une application polynomiale $h : \overline{B}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que l ?on ait $\max_{\overline{B}^m} \|g(x) - h(x)\| \leq \alpha/2$. Écrivant

$$\|x - h(x)\| = \|x - g(x) + g(x) - h(x)\| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2},$$

on voit que h n'a pas de point fixe non plus. Bien sûr, h n'est pas à valeurs dans $\overline{B}^m$, mais $(1 + \frac{\alpha}{2})^{-1} h$ l'est.

On a donc remplacé g continue sans point fixe par une application C^1 (en fait C^∞) sans point fixe. À partir de maintenant, on suppose sans perte de généralité g de classe C^1.

L'application $x \mapsto \|x - g(x)\|^{-1}$ est donc de classe C^1 comme composée d'applications de classe C^1 et il en est de même de $x \mapsto u(x) = \|x - g(x)\|^{-1}(x - g(x))$, qui est de surcroît à valeurs dans la sphère unité S^{m-1}.

On considère la droite qui passe par x et est dirigée par $u(x)$. Cette droite coupe la sphère S^{m-1} en deux points. On appelle $f(x)$ le point d'intersection situé du côté de x sur cette droite.

Il est clair par construction que f est à valeurs dans S^{m-1} et que si $x \in S^{m-1}$, alors $f(x) = x$. Vérifions que f est de classe C^1. Par définition de f , il existe un nombre réel

$t(x)$ tel que $f(x) = x + t(x)u(x)$. Ce nombre s'obtient en résolvant l'équation du second degré qui exprime que $\|f(x)|^2 = 1$ et en en prenant la racine positive. On trouve par un calcul élémentaire :

$$t(x) = -x.u(x) + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x.u(x))^2}.$$

Remarquons que le nombre situé sous la racine carrée est toujours strictement positif. On en déduit que t est de classe C^1, ainsi que f , laquelle est donc une rétraction de $\overline{B}^m$ sur son bord de classe C^1, ce qui est impossible. ∎

Théorème 2.4 (Voir [5]) *Il n'existe pas d'application $f : \overline{B}^m \longrightarrow S^{m-1}$ continue telle que l'on ait $f_{|s^{m-1}} = Id$.*

Théorème 2.5 (Voir [5]) *Soit K un compact homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$. Tout application continue de K dans K admet au moins un point fixe.*

Théorème 2.6 (Voir [5]) *Soit C un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^m$. Toute application continue de C dans C admet au moins un point fixe.*

Théorème 2.7 (Voir [5]) *Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie) et soit $P : E \longrightarrow E$ une application continue telle qu'il existe $\rho > 0$ pour lequel tout point x sur la sphère de rayon ρ satisfait $P(x).x \geq 0$. Il existe alors un point $x_0, \|x_0\| \leq \rho$, tel que $P(x_0) = 0$.*

2.2 Théorème de Schauder

On considère l'espace des suites de carré sommable $l^2 = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$. Muni de la norme $\|x\|_{l^2} = (\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty)^{1/2}$, c'est un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit $\overline{B}$ sa boule unité fermée et S sa sphère unité. Alors l'application

$$\begin{aligned} T : \overline{B} &\longrightarrow \overline{B} \\ x &\longrightarrow T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|_{l^2}^2}, x_0, x_1, x_2, \cdots\right), \end{aligned}$$

est continue mais n'a pas de point fixe. En effet, T est à valeurs dans la sphère unité, donc un éventuel point fixe devrait satisfaire à la fois $\|x\|_{l^2} = 1$ et $x_0 = 0$ et $x_{i+1} = x_i$ pour tout $i \geq 0$, soit $x = 0$.

De même, l'application $R : \overline{B} \longrightarrow S$ obtenue par la même construction qu'en dimension finie, i.e.,

$$\begin{cases} R(x)_0 = x_0 + \dfrac{1 - \|x\|_{l^2}^2}{\|x - T(x)\|_{l^2}^2}\left(x_0 - \sqrt{1 - \|x\|_{l^2}^2}\right); \\ \\ R(x)_i == x_i + \dfrac{1 - \|x\|_{l^2}^2}{\|x - T(x)\|_{l^2}^2}(x_0 - x_{i-1}), i \geq 1, \end{cases}$$

est une rétraction de $\overline{B}$ sur son bord.

Lemme 2.8 *Soit E un espace vectoriel normé et soit K un compact de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie et une application g_ε continue de K dans f_ε tels que pour tout $x \in K$, $\|x - g_\varepsilon(x)\|_E < \varepsilon$. De plus, $g_\varepsilon(K) \subset convK$.*

Note : $convK$ dénote l'enveloppe convexe de K.

Théorème 2.9 *Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe compact de E et T une application continue de C dans C.*

Alors T admet un point fixe.

preuve. D'après le Lemme (2.8), pour tout entier $n \geq 1$, il existe un sous-espace de dimension finie F_n et une application g_n continue de C dans F_n tels que

$$\forall x \in C, \|x - g_n(x)\|_E < \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad g_n(x) \subset convC = C.$$

On note $\overline{conv}A$ l'enveloppe convexe fermée d'une partie A de E, c'est-à-dire l'adhérence de l'enveloppe convexe de A. Posons $K_n = \overline{conv}g_n(C)$. C'est un convexe de F_n, compact comme sous-ensemble fermé du compact C. On considère l'application $T_n : K_n \longrightarrow K_n$ définie par $T_n(x) = g_n(T(x))$. Cette application est continue comme composée d ?applications continues, donc, par le Théorème (2.6), elle admet un point fixe $x_n \in K_n \subset C$. Comme C est un compact métrique, on peut extraire de la suite x_n une sous-suite $x_{n'}$ qui converge vers un certain $x \in C$.

L'application T étant continue, on en déduit d'abord que $T(x_{n'}) \longrightarrow T(x)$ quand $n' \longrightarrow +\infty$. Puis, utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\|x - T(x)\|_E \leq \|x - x_{n'}\|_E + \|x_{n'} - T_{n'}(x_{n'})\|_E + \|T_{n'}(x_{n'}) - T(x_{n'})\|_E + \|T(x_{n'}) - T(x)\|_E.$$

Le premier et le dernier terme du membre de droite de cette inégalité tendent vers zéro quand n' tend vers l'infini, par les convergences que nous venons de montrer. Le deuxième terme est identiquement nul par la propriété de point fixe pour $T_{n'}$. Enfin,

$$\|T_{n'}(x_{n'}) - T(x_{n'})\|_E = \|g_{n'}(T(x_{n'})) - T(x_{n'})\|_E < \frac{1}{n'} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n' \longrightarrow +\infty,$$

par construction de $g_{n'}$. Par conséquent, $x = T(x)$est point fixe de T. ∎

Théorème 2.10 *Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.*

preuve. Soit $C' = \overline{conv}T(C)$. Il s'agit d'un convexe inclus dans C. En effet, $T(C) \subset C$, donc $convT(C) \subset C$ car C est convexe, et $\overline{conv}T(C) \subset C$ car C est fermé. De plus, C' est compact comme enveloppe convexe fermée d'un ensemble relativement compact dans un espace complet, cf. lemme suivant.

On applique alors le théorème de Schauder à la restriction de T à C'. ∎

Lemme 2.11 *Soit E un espace de Banach et A une partie relativement compacte de E. Alors $convA$ est compact.*

Remarque 2.1 *Si E est de dimension finie et si $K \subset E$ est compact, alors $convK$ est compact. En effet, un théorème de Carathéodory affirme que si $A \subset E$, alors*

$$convA = \{x \in E, x = \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i = 1, x_i \in A\}.$$

Par conséquent, si K est un compact de E, $convK$ est l'image du compact

$$K^{\dim E+1} \times \{\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i = 1\},$$

par l'application continue $(x_i, \lambda_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i x_i$. Par contre, cette propriété est fausse en dimension infinie. Pour le voir, on considère l ?espace l^2 muni de sa base Hilbertienne canonique $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Soit $K = \{e_i/i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \bigcup \{0\}$, c ?et évidemment un compact. On prend la suite

$$x_\kappa = \sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{e_i}{i2^i} + (1 - \frac{1}{2^\kappa})\frac{e_\kappa}{k} \in convK.$$

Alors $x_\kappa \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{i2^i} \notin convK$ quand $k \to +\infty$, donc $convK$n'est pas fermé,donc pas compact.

Théorème 2.12 (Voir [5]) *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, C un convexe compact de E et T un application continue de C dans C. Alors T admet un point fixe.*

Théorème 2.13 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de E dans E qui satisfait la condition suivante : il existe $R \geq 0$ tel que $x = tT(x)$ avec $t \in [0,1[$ implique $\|x\|_E \leq R$. Alors T admet un point fixe.*

preuve. Considérons l'application $T^* : \overline{B}(0, R+1) \longrightarrow \overline{B}(0, R+1)$ définie par

$$T^*(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si} \quad \|T(x)\|_E \leq R+1 \\ (R+1)\dfrac{T(x)}{\|T(x])\|_E} & \text{si} \quad \|T(x)\|_E > R+1 \end{cases}$$

Comme T^* est obtenue en composant T avec une fonction continue de E dans E, T^* est continue et compacte. Par conséquent, $T^*(\overline{B}(0, R+1))$ est relativement compact et T^* admet un point fixe $x^* \in \overline{B}(0, R+1)$ par le théorème de Schauder. Montrons que x^* est aussi un point fixe de T. Si $\|T(x^*)\|_E \leq R+1$, il n'y a rien à montrer. Si $\|T(x^*)\|_E > R+1$, alors d ?une part $\|x^*\|_E = \|T^*(x^*)\|_E = R+1$ et d'autre part $x^* = tT(x^*)$ avec $t = (R+1)/\|T(x^*)\|_E \in [0,1[$. Par hypothèse, on a donc $|x^*\|_E \leq R$, contradiction. ∎

Remarque 2.2 *En remplaçant $R+1$ par $R+1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, on voit que l'on peut en outre assurer l'existence d'un point fixe tel que $\|x^*\|_E \leq R$.*

Théorème 2.14 (Voir [5]) *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de $[0,1] \times E$ dans E qui satisfait la condition suivante : $T(0,x) = 0$ et il existe $R \geq 0$ tel que $x = T(t,x)$ avec $t \in [0,1]$ implique $\|x\| \leq R$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $T(t,.)$ admet un point fixe $x^*(t)$ qui dépend continûment de t.*

Théorème 2.15 (Voir [5]) *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de E dans E telle qu'il existe $R \geq 0$ tel que $T(\overline{B}(0,R)) \subset \overline{B}(0,R)$. Alors T admet un point fixe.*

2.3 Un Application

En guise d'application des théorèmes de point fixe, nous nous intéressons dans cette section à un problème d'EDP elliptique non linéaire modèle très simple. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et soit f fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On consister le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Nous verrons par la suite comment préciser le sens fonctionnel de cette équation.

Pour mettre ce problème sous forme d'un problème de point fixe, on commence par énoncer un résultat d'existence et d'unicité linéaire.

Proposition 2.1 *Soit $g \in H^{-1}(\Omega)$ Il existe un unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta v = g$ au sens de $\mathfrak{D}'(\Omega)$.*

Cette fonction v est l'unique solution du problème variationnel :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \langle g, w \rangle. \tag{2.2}$$

De plus, l'application $g \longrightarrow (-\Delta)^{-1} g = v$ est continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$

Corollaire 2.16 *L'application $(-\Delta)^{-1}$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.*

Dans le problème modèle apparaît au second membre de l'équation un terme de la forme $f(u)$ dont nous n'avons pas encore précisé le sens. C'est l'objet du théorème de Carathéodory, introduit par un lemme.

On note $\sim$ la relation d'équivalence de l'égalité presque partout des fonctions mesurables.

Lemme 2.17 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$. Pour tout couple de fonctions mesurables u_1 et u_2 sur Ω, si $u_1 \sim u_2$ alors $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$.*

preuve. Notons d'abord que si une fonction u est mesurable alors $f \circ u$ l'est aussi, puisque f est continue. Supposons que $u_1 \sim u_2$, i.e., $u_1 = u_2$ presque partout dans Ω. Il existe donc

un ensemble négligeable N tel que si $x \notin N, u_1(x) = u_2(x)$, d'où également $f(u_1) = f(u_2)$, c'est-à-dire $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$. ■

En d'autres termes, on vient de voir que l'application $u \mapsto f \circ u$ passe au quotient par la relation d'égalité presque partout.

Théorème 2.18 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $|f(t)| \leqslant a + b|t|$. On définit pour toute classe d'équivalence de fonctions mesurables sur Ω la classe d'équivalence $f(u) = f \circ u$ comme au lemme précédent. Alors l'application $\tilde{f} : u \mapsto f \circ u$ envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et est continue pour la topologie forte.*

preuve. Voir [5]page 55 ■

Théorème 2.19 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty$. Il existe au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathfrak{D}'(\Omega)$.*

preuve. On donne deux démonstrations utilisant le théorème de point fixe de Schauder.

Première démonstration :

On prend comme espace de Banach de base $E = L^2(\Omega)$. D'après le Théorème (2.18), si $v \in E$ alors $f(v) \in E$ (en fait, ici $f(v) \in L^\infty(\Omega)$). Posons $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T : E \longrightarrow E$ est continue.

En effet, elle est composée d'applications continues :

$$L^2(\Omega) \overset{\tilde{f}}{\to} L^2(\Omega) \overset{(-\Delta)^{-1}}{\to} H_0^1(\Omega) \overset{injection}{\to} L^2(\Omega)$$

$$v \to f(v) \to T(v) \to T(v)$$

Vérifions que tout point fixe de T est une solution de notre problème. Soit donc $u \in L^2(\Omega)$ tel que $T(u) = u$.Comme $T(u) = ((-\Delta)^{-1}(f(u))$, on en déduit d'abord que $u \in H_0^1(\Omega)$ D'autre part, par définition de l'opérateur$(-\Delta)^{-1}$, $-\Delta T(u) = f(u)$ au sens de $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et donc u est solution du problème modèle (et réciproquement).

Pour appliquer le théorème de Schauder, il faut encore choisir un convexe. Nous prenons ici $C = \{v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{H_0^1(\Omega} \leq M\}$ où M est une constante à choisir (on pose $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ en utilisant l'inégalité de Poincaré). Par le théorème de Rellich, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, donc C qui est borné dans $H_0^1(\Omega)$, est relativement compact dans E. De plus, c'est un fermé de E. En effet, si $v \in C$converge vers $v \in E$

dans E, alors v_n est bornée dans$H_0^1(\Omega)$ et contient donc une sous suite $u_{n'}$ qui converge faiblement vers un élément de $H_0^1(\Omega)$, lequel ne peut être que v. De plus, la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la norme implique que $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n' \to +\infty} \|v_{n'}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$, c ?est-à-dire $v \in C$. Par conséquent, C est compact dans E.

Nous allons choisir la constante M pour que $T(C) \subset C$. Il s'agit d'un problème d'estimation de $T(v)$. D'après la Proposition (2.18), $T(v)$ est solution du problème variationnel :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla T(v).\nabla w dx = \int_\Omega f(v) w dx.$$

Prenant $w = T(v)$ dans l'équation précédente, il vient :

$$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(v)T(v)dx \leq \|f(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_\Omega |T(v)|dx,$$

puisque $f(v)T(v). \leq \|f(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|T(v)|$. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons que

$$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(mes\ \Omega)^{1/2}\|T(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_Ω telle que pour tout z dans $H_0^1(\Omega)$, $\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla z\|_{L^2_\Omega}$. Comme $T(v) \in H_0^1(\Omega)$, nous obtenons donc, pour tout v dans E,

$$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(mes\ \Omega)^{1/2}.$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, il suffit donc de prendre $M = C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(mes\ \Omega)^{1/2}$, puisqu'alors, $T(E) \subset C$.

Les hypothèses du théorème de Schauder, première version, sont satisfaites, par conséquent, il existe au moins une solution du problème modèle appartenant à C.

Deuxième démonstration :

On prend cette fois comme espace $E = H_0^1(\Omega)$ et l'on pose encore $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T : E \to E$ est continue. En effet, elle est composée d'applications continues :

$$H_0^1(\Omega) \overset{injection}{\to} L^2(\Omega) \overset{\tilde{f}}{\to} L^2(\Omega) \overset{(-\Delta)^{-1}}{\to} H_0^1(\Omega)$$

$$v \to v \to f(v) \to T(v)$$

Notons que par le théorème de Rellich, l'injection est compacte et que par conséquent, T transforme les bornés de E en ensembles relativement compacts de E, puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact.

Nous prenons une nouvelle fois $C = \{v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M\}$ avec toujours $M = C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}(mes\ \Omega)^{1/2}$. Par le même calcul d'estimation que précédemment, nous avons donc $T(C) \subset C$. L'ensemble C est un convexe fermé de E. Il est de plus borné, donc d ?après la remarque faite plus haut, $T(C)$ est relativement compact. Les hypothèses du théorème de Schauder, dans sa deuxième version, sont donc satisfaites ■

Théorème 2.20 *On suppose qu'en outre des hypothèses précédentes, f est décroissante. Alors la solution u du problème modèle est unique.*

preuve. Soient u_1 et u_2 deux solutions. D'après le Théorème (2.19), elles satisfont donc :

$$\forall v_1 \in H_0^1(\Omega) \int_\Omega \nabla u_1.\nabla v_1 dx = \int_\Omega f(u_1)v_1 dx,$$
$$\forall v_2 \in H_0^1(\Omega) \int_\Omega \nabla u_2.\nabla v_2 dx = \int_\Omega f(u_2)v_2 dx,$$

Prenons $v_1 = u_1 - u_2$ et $v_2 = u_2 - u_1$ et additionnons les deux équations. Nous obtenons :

$$\int_\Omega |\Delta(u_1 - u_2)|^2 dx = \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2)dx \leq 0,$$

puisque l'intégrande du membre de droite est négative à cause de la décroissance de f. Par conséquent, $u_1 = u2$ par l'inégalité de Poincaré. ■

Chapitre 3

Méthode de monotonie

Un opérateur quasi-linéaire ne s'écrit pas toujours comme la différentielle d'une fonctionnelle du calcul des variations. La notion abstraite d'opérateur monotone, et plus généralement d'opérateur pseudo-monotone, permet d'aller plus loin que le calcul des variations dans le cas convexe.Les inéquations variationnelles apparaissent quant à elles dans de nombreux problèmes, notamment ceux qui font intervenir un obstacle.

3.1 Opérateurs monotones, définitions et propriétés

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et A un opérateur de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 3.1 *On dit que*

i) *A est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \ \ \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0. \tag{3.1}$$

ii) *A est strictement monotone si de plus* $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = 0$ *implique* $u = v$.

iii) *A est hémicontinue si pour tous* $u, v \in V$*, l'application* $t \longmapsto \langle A(u + tv), v \rangle$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1 *Soit* A *un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors* A *est continu de* V *fort dans* V' *faible.*

preuve. Soit un une suite telle que $u_n \to u$ dans V fort. Cette suite est donc bornée, et comme A envoie les bornés dans les bornés, $A(u_n)$ reste dans un borné de V'. On extrait une sous-suite n' telle que $A(u_{n'}) \rightharpoonup \psi$(car V' est réflexif). En raison de la monotonie, pour tout $v \in V$, on a

$$0 \leq \langle A(u_{n'}) - A(v), u_{n'} - v\rangle = \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle - \langle A(v), u_{n'} - v\rangle$$

Il est bien clair que $\langle A(v), u_{n'} - v\rangle \to \langle A(v), u - v\rangle$. Par ailleurs, comme $A(u_{n'})$ converge faiblement dans V' et $u_{n'}$ fortement dans V, leur crochet de dualité converge :

$$\langle A(v), u_{n'} - v\rangle \longrightarrow \langle \psi, u - v\rangle$$

Par conséquent, on obtient à la limite

$$\forall v \in V, 0 \leq \langle \psi - A(v), u - v\rangle. \tag{3.2}$$

On va montrer que cette inégalité détermine en fait ψ en utilisant un procédé caractéristique des opérateurs monotones et appelé astuce de Minty. Soit $w \in V$ quelconque et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquant (3.2) à $v = u + tw$ et divisant l'inégalité obtenue par $t > 0$, on obtient

$$\langle \psi - A(u + tw), w\rangle \leq 0.$$

Faisons alors tendre t vers 0. Comme A est hémicontinu, il vient

$$\forall w \in V \;\; \langle \psi - A(u), w\rangle \leq 0.$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $-w$, donc en fait

$$\forall w \in V \;\; \langle \psi - A(u), w\rangle = 0.$$

soit

$$\psi = A(u).$$

On conclut par unicité de la limite faible des sous-suites extraites de la suite $A(u_n)$ et faiblement convergentes. ∎

3.2 Inéquations variationnelles

Les opérateurs monotones se prêtent bien à la résolution des inéquations variationnelles abstraites, dont nous donnerons des exemples concrets dans le contexte des problèmes aux limites non linéaires plus loin.

Théorème 3.2 (Voir [5]) *Soit $A : V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinue et monotone et soit C un convexe fermé borné non vide de V. Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle : trouver $u \in C$ tel que*

$$\forall v \in C \ \langle A(u) - f, v - u\rangle \geq 0. \tag{3.3}$$

admet au moins une solution.
On utilise la méthode de Galerkin à travers une série de lemmes. Adaptons d'abord l'idée de base de la méthode de Galerkin au cas de convexes.

Lemme 3.3 *Il existe une famille dénombrable de convexes fermés $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ croissante, telle que chaque C_m est de dimension finie, inclus dans C et $\cup_{m=0}^{+\infty} C_m$est dense dans C.*

preuve. Comme V est métrique séparable, il en va de même de C et il existe donc une famille dénombrable $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dense dans C. On pose

$$C_m = \overline{conv}\{w_0, w_1, \ldots, w_m\}$$

De cette façon, C_m est un convexe fermé de dimension inférieure à m. Il est bien clair que $C_m \subset C_{m+1} \subset C$. Enfin, on a trivialement que $\cup_{m=0}^{+\infty} C_m$ est dense dans C, puisque cet ensemble contient chaque w_m.
Une fois construits les C_m, on résout le problème en dimension finie. ∎

Lemme 3.4 *L'inéquation variationnelle : trouver $u_m \in C_m$ tel que*

$$\forall v \in C_m \ \langle A(u_m) - f, v - u_m\rangle \geq 0. \tag{3.4}$$

admet au moins une solution.

Lemme 3.5 *Il existe une sous-suite (toujours notée m), $u \in C$ et $\psi \in V'$ tels que $u_m \rightharpoonup u$ dans V faible et $A(u_m) \rightharpoonup \psi$ dans V' faible.*

preuve. Comme $C_m \subset C$, qui est borné, la suite u_m est bornée dans V. Comme A est un opérateur borné, la suite $A(u_m)$ est bornée dans V'. On extrait donc une sous-suite telle que $u_m \rightharpoonup u$ dans V faible et $A(u_m) \rightharpoonup \psi$ dans V' faible. De plus, comme C est convexe fermé fort, il est faiblement fermé et $u \in C$. Il s'agit maintenant d'identifier ψ. ∎

Lemme 3.6 *On a l'inégalité* $\liminf_{m\to+\infty} \langle A(u_m), u_m\rangle \geq \langle \psi, u\rangle$.

Lemme 3.7 *On a aussi l'inégalité* $\limsup_{m\to+\infty} \langle A(u_m), u_m\rangle \leq \langle \psi, u\rangle$.

Lemme 3.8 *On a* $\langle A(u_m), u_m\rangle \to \langle \psi, u\rangle, A(u) = \psi$ *et* u *est solution de l'inéquation variationnelle (3.3).*

Théorème 3.9 *Si* A *est strictement monotone alors la solution de l'inéquation variationnelle (3.3) est unique.*

preuve. Soient $u_1, u_2 \in C$ deux solutions. Pour tous $v_1, v_2 \in C$,

$$\langle A(u_1) - f, v_1 - u_1\rangle \geq 0 \ \ et \ \ \langle A(u_2) - f, v_2 - u_2\rangle \geq 0.$$

On prend $v_1 = u_2$ et $v_2 = u_1$, d'où

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle \leq 0.$$

Par conséquent :

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle = 0.$$

Comme A stricte monotonie $u_1 = u_2$.

Pour traiter le cas d'un convexe C non borné, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire. ∎

Définition 3.2 *On dit que* A *est coercif :*

$$\lim_{\|v\|_V\to+\infty} \frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty. \tag{3.5}$$

Théorème 3.10 (Voir [5]) *Soit* $A : V \to V'$ *un opérateur borné, hémicontinue, monotone et coercif et soit* C *un convexe fermé non vide de* V. *Alors, pour tout* $f \in V'$, *l'inéquation variationnelle (2.1) admet au moins une solution.*

Théorème 3.11 (Voir [5]) *Soit $A : V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinue, monotone et coercif.*

Alors A est surjectif.

c'est-à-dire $\forall f \in V',\ \exists u \in V :\ A(u) = f$.

3.3 Applications

Exemple 3.1 (Le Laplacien) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

On pose $V = H_0^1(\Omega), \quad V' = H^{-1}(\Omega)$

On définie l'opérateur

$$\begin{aligned} A: \quad H_0^1(\Omega) &\to H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto -\Delta u. \end{aligned}$$

1. *A est borne :*

   soit $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle = \langle -\Delta u, v\rangle &= \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \\ |\langle Au, v\rangle| &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \, dx \\ |\langle Au, v\rangle| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\ d'ou \ \|Au\|_{H^{-1}} &\leq \|Au\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

   donc A est borné.

2. *A strictement monotone :*

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v\rangle &= \langle -\Delta u - (-\Delta v), u - v\rangle \\ &= \langle -\Delta(u - v), u - v\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla(u - v)\nabla(u - v) \\ &= \int_| \nabla(u - v)|^2 \\ &= \|u - v\|_{H_0^1} > 0, \ \forall \ u \neq v \end{aligned}$$

3. *A est hémicontinue :*

$$\lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle = \int_\Omega \nabla(u+\lambda v)\nabla w = \int_\Omega (\nabla u\nabla v + \lambda \nabla u\nabla w)$$
$$= \int_\Omega \nabla u\nabla v + \lambda \int_\Omega \nabla u\nabla w.$$

$$avec\ \alpha = \int_\Omega \nabla u\nabla w\ et\ \beta = \int_\Omega \nabla u\nabla v.$$

donc $\lambda \mapsto \alpha\lambda + \beta$ (application affine continu)

donc A hémicontinue.

4. *A est coercif :*

$$\langle Av, v\rangle = \int_\Omega \nabla v\nabla v = \int_\Omega |\nabla v|^2 = \|v\|^2_{H_0^1}.$$

$$\lim_{\|v\|_{H_0^1}\to+\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_{H_0^1}} = \lim_{\|v\|_{H_0^1}\to+\infty} \frac{\|v\|^2_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}} = \lim_{\|v\|_{H_0^1}\to+\infty} \|v\|_{H_0^1} \longrightarrow +\infty.$$

$u \mapsto Au = -\Delta u$ *donc A est coercif.*

A borne, strictement monotone, hémicontinue et coercif, d'après le théorème (3.11) le problème (3.6) admet une solution unique tel que : $u \in H_0^1(\Omega)$.

Exemple 3.2 (Le p-Laplacien) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.*

On considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

On pose $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$.

On définie l'opérateur

$$\begin{aligned} A: \quad W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\mapsto -\Delta_p u. \end{aligned}$$

1. *A est borne :*

   soit $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle &= \langle -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \nabla v\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx \\ |\langle Au, v\rangle| &\le \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \, dx \\ &\le \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1}\right)^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} dx\right)^{p-1} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}} \\ &d'ou \ \|Au\|_{W_0^{1,p}} \le \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \le M^{p-2}. \end{aligned}$$

   donc A est borné.

2. *A strictement monotone :*

   On a pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right)(a-b) \ge \begin{cases} C'|a-b|^p, \ p \ge 2 \ge 0 \\ C\dfrac{|a-b|^2}{(|a|+|b|+1)^{2-p}}, \ 1 < p < 2 \end{cases}$$

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u| - |\nabla v|^{p-2}|\nabla v|\right)(\nabla u - \nabla v)\, dx$$

$$\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u| - |\nabla v|^{p-2}|\nabla v|\right)(\nabla u - \nabla v) \ge \begin{cases} C|\nabla u - \nabla v|^p, \ p \ge 2 \ge 0 \\ C\dfrac{|\nabla u - \nabla v|^2}{(|\nabla u| + |\nabla v| + 1)^{2-p}}, \ 1 < p < 2 \end{cases}$$

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$$

donc A est strictement monotone.

3. *A est hémicontinue :*

   Soit $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, montrons que :

   $\lambda \to \langle A(u + \lambda v), w\rangle$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   On a :

$$\begin{aligned}\langle A(u+\lambda v), w\rangle &= \int_\Omega |\nabla(u+\lambda v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda v)\nabla w dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)\nabla w dx\end{aligned}$$

   On pose :

   $h_n = |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)\nabla w$

   $h = |\nabla(u+\lambda v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda v)\nabla w$

   $h_n \to h - p.p.$ *dans* Ω

$$\begin{aligned}|h_n| = |\nabla u + \lambda_n \nabla v|^{p-1} &\le 2^{p-2}\Big(|\nabla u|^{p-1} + |\lambda_n \nabla v|^{p-1}\Big) \\ &\le 2^{p-2}\Big(|\nabla u|^{p-1} + |\lambda_n|^{p-1}|\nabla v|^{p-1}\Big) \\ &\le C|\nabla w|_{L^p}\Big(|\nabla u|_{L^p}^{p-1} + |\nabla v|_{L^p}^{p-1}\Big)\end{aligned}$$

   d'après la théorème dominé de Lebesgue $\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle \to \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ donc A hémicontinue.

4. *A est coercitif :*

$$\langle Av, v\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v = \int_\Omega |\nabla v|^p = \|v\|_{W_0^{1,p}}^p$$

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}}} = \frac{\|v\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|v\|_{W_0^{1,p}}} = \|v\|_{W_0^{1,p}}^{p-1}$$

$$d'ou \lim_{\|v\|_{W_0^{1,p}} \to +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}}} = +\infty.$$

   donc A est coercif.

A borné, strictement monotone, hémicontinue et coercif, d'après le théorème (3.11) le problème (3.6) admet une solution admet une solution unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité d'une solution pour quelques équations aux dérivées partielles elliptiques avec des conditions aux limites de type Dirichlet en utilisant la méthode du point fixe de Schauder et la méthode de monotonie.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, ordinary and partial differential équations, (2009).

[2] Brézis.H, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[3] J. K. Hale and S. Verduyn, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] J.L. Lions, Quelques Methodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Lineaires. Paris Gauthier-Villars 1969.

[5] H. Le Dret, *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. Mathématiques et Applications*. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, 2015.

[6] S.Sessa, On a weak Commutativityb Condition of Mappings in a Fxed point, Consideration, Publ. Inst Math. Deber,32 (1982),149-153.

[7] D.R. Smart, Fixed Point Théorems, Cambridge Univ. Press 1973.

[8] E.Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorems,Springer-Verlag, New york Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.