جامعة يحي فارس بالمدية

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم: العلوم الاقتصادية

عنوان المطبوعة:

محاضرات في الرياضيات المالية

– دروس وتمارين محلولة –

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الثالثة ليسانس LMD العلوم الاقتصادية

تخصص إقصاد نقدي ومالي

الدكتور:

فرجاني وليد

السنة الجامعية: 2026/2025


بسم الله الرحمن الرحيم

أهدي ثمرة جهدي إلى روح الوالدة الكريمة رحمها الله
وأسكنها فسيح جنانه.

إلى أبي حفظه الله وأطال عمره.

إلى زوجتي الغالية.

إلى ولدي قرّة عيني.

إلى إخوتي وأخواتي كبيرهم وصغيرهم.

إلى أساتذة جامعة المدية.

إلى طلبتي الأعزاء.

إلى كلِّ من لم تسعهم ذاكرتي.

د. فرجاني وليد

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات:

العنوان	رقم الصفحة
الإهداء.....	
فهرس المحتويات.....	I-II
قائمة الجداول.....	VII-VIII
المقدمة.....	أ
الفصل الأول: العمليات المالية ذات الأجل القصير.	
المحور الأول: الفائدة البسيطة	
أولا: تعريف الفائدة.....	01
ثانيا: معدل الفائدة.....	02
ثالثا: مفهوم الفائدة البسيطة.....	02
1. عناصر قانون الفائدة البسيطة:	02
2. حالات حول المدة:	04
3. أنواع الفائدة البسيطة:	
– الفائدة البسيطة التجارية:	05
– الفائدة البسيطة الصحيحة:	05
– العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة:	07
4. جملة الفائدة البسيطة:	07
5. طريقة النمر والقاسم لحساب الفائدة البسيطة:	08
6. المعدل الوسطي لعدة توظيفات:	10
تمارين المحور الأول: الفائدة البسيطة.	12
المحور الثاني: الخصم على الفائدة البسيطة.	
1. الأوراق التجارية وخصمها:	15
أ. الأوراق التجارية:	15
ب. خصم الأوراق التجارية:	15

فهرس المحتويات:

2.	أنواع الخصم:	
أ.	الخصم التجاري (الخارجي):	16
ب.	الخصم الصحيح (الداخلي):	16
3.	قانون الخصم التجاري:	16
4.	قانون الخصم الصحيح (الداخلي):	19
5.	العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الصحيح:	21
6.	المعدل الاسمي والمعدل الحقيقي للخصم:	22
تمارين المحور الثاني: الخصم على الفائدة البسيطة.		25
المحور الثالث: تكافؤ (استبدال) الأوراق التجارية.		
1.	مفهوم استبدال الأوراق التجارية:	28
2.	طرق تسوية واستبدال الأوراق التجارية:	28
أ.	التكافؤ ورقتين تجاريتين:	28
ب.	تكافؤ عدة أوراق تجارية:	29
-	التسوية في تاريخ الاستحقاق المشترك:	30
-	التسوية في تاريخ الاستحقاق المتوسط:	31
تمارين المحور الثالث: تكافؤ (استبدال) الأوراق التجارية		34
هوامش الفصل الأول:		38
الفصل الثاني: العمليات المالية ذات الأجل الطويل.		
المحور الأول: الفائدة المركبة.		
1.	تعريف الفائدة المركبة:	40
2.	قانون الفائدة المركبة:	41
3.	عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:	
1.	أصل المبلغ C:	44
2.	معدل الفائدة t:	45
3.	مدة التوظيف n:	47

فهرس المحتويات:

4. حالات خاصة لإيجاد الجملة بالفائدة المركبة:	
أ. حالة عدم وجود المدة بالجدول المالي:	49
- إذا كان n عدد صحيح لكنه خارج نطاق الجدول:	49
- إذا كان n عدد غير صحيح (كسر):	50
- إذا كان n غير موجود في الجدول المالي (داخل النطاق):	53
ب. حالة عدم وجود المعدل بالجدول المالي:	53
- إيجاد الجملة المركبة في حالة المعدل غير مجدول:	53
- إيجاد معدل الفائدة في حالة قيمة حاصل $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي: ..	54
5. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:	
أ. المعدلات المتناسبة:	55
ب. المعدلات المتكافئة:	55
تمارين المحور الأول: الفائدة المركبة.	57
المحور الثاني: خصم واستبدال الديون طويلة الأجل	
أولا: الخصم والقيمة الحالية (معدل فائدة مركب):	60
ثانيا: استبدال الديون طويلة الأجل.	62
1. تعريف استبدال الديون طويلة الأجل:	62
2. طرق تسوية واستبدال الديون طويلة الأجل:	62
أ. التكافؤ سندين ماليين:	63
ب. تكافؤ عدة سندات مالية:	63
- التسوية في تاريخ الاستحقاق المشترك:	64
- التسوية في تاريخ الاستحقاق المتوسط:	65
تمارين المحور الثاني: خصم واستبدال الديون طويلة الأجل	68
هوامش الفصل الثاني:	73
الفصل الثالث: الدفعات المتساوية بالفائدة المركبة.	
المحور الأول: دفعات آخر المدة (دفعات السداد)	

فهرس المحتويات:

1. جملة الدفعات لآخر المدة:	74
2. تطبيقات على عناصر جملة دفعات آخر المدة:	77
أ. حساب قيمة الدفعة:	77
ب. حساب معدل الفائدة:	79
ت. حساب عدد الدفعات عدد الفترات:	80
3. القيمة الحالية لدفعات آخر المدة:	81
تمارين المحور الأول: دفعات آخر المدة (دفعات السداد)	84
المحور الثاني: دفعات أول المدة (دفعات الاستثمار)	
1. جملة الدفعات لأول المدة:	86
2. تطبيقات على عناصر جملة دفعات أول المدة:	88
أ. حساب قيمة الدفعة:	88
ب. حساب معدل الفائدة:	89
ت. حساب عدد الدفعات عدد الفترات:	90
3. القيمة الحالية لدفعات أول المدة:	91
تمارين المحور الثاني: دفعات أول المدة (دفعات الاستثمار)	94
هوامش الفصل الثالث:	97
الفصل الرابع: استهلاك القروض.	
المحور الأول: طريقة القسط المتناقص (الاستهلاك الثابت).	98
1. حساب قسط الاستهلاك الثابت:	98
2. جدول استهلاك القرض:	99
3. العلاقات العامة من جدول الاستهلاك:	101
المحور الثاني: طريقة استهلاك القرض بدفعات متساوية (طريقة التقسيط المتساوي).	103
1. حساب القسط المتساوي (قيمة الدفعة):	104
2. جدول استهلاك القرض:	105
3. العلاقات العامة من جدول الاستهلاك:	106

فهرس المحتويات:

تمارين الفصل الرابع: استهلاك القروض طويلة الأجل	110
هوامش الفصل الرابع:	112
الفصل الخامس: تقييم واختيار المشاريع الاستثمارية.	
المحور الأول: المعايير التي لا تأخذ بعين الاعتبار القيمة الزمنية للنقود.	114
1. معيار فترة الاسترداد DR:	114
2. معيار المعدل المتوسط للعائد TRM :	117
المحور الثاني: المعايير التي تأخذ بعين الاعتبار القيمة الزمنية للنقود.	120
1. معيار صافي القيمة الحالية VAN :	120
2. معيار دليل الربحية Ip :	124
3. معيار معدل العائد الداخلي TRI:	127
تمارين الفصل الخامس: تقييم واختيار المشاريع الاستثمارية	130
هوامش الفصل الخامس:	136
قائمة المراجع:	137

قائمة الجداول

قائمة الجداول:

الرقم	عنوان الجدول	رقم الصفحة
01	تحليل حساب الفائدة البسيطة.	40
02	تحليل حساب الفائدة المركبة.	41
03	طريقة استخراج القانون الأساسي للفائدة المركبة.	42
04	القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة.	75
05	القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة.	81
06	القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة.	86
07	القيمة الحالية لدفعات بداية المدة.	92
08	جدول استهلاك القرض (الفترات متساوية تدفع كل سنة).	99
09	جدول استهلاك القرض (الفترات متساوية تدفع كل سنة).	105

تعد **الرياضيات المالية** أحد الفروع التطبيقية الأساسية التي تجمع بين علمي الرياضيات والاقتصاد، حيث تعنى بدراسة وتحليل العمليات المالية باستخدام أدوات كمية ونماذج رياضية دقيقة، وتهدف هذه التخصصات إلى فهم كيفية تطور الأموال عبر الزمن، في ظل تأثير مجموعة من العوامل أبرزها سعر الفائدة، معدلات التضخم والمخاطر المرتبطة بالاستثمار.

إذ ترتكز الرياضيات المالية على مفهوم جوهري يتمثل في **القيمة الزمنية للنقود**، الذي يفيد بأن قيمة وحدة نقدية في الحاضر تختلف عن قيمتها في المستقبل، نتيجة لإمكانية استثمارها وتحقيق عائد، ومن هذا المنطلق تم تطوير مجموعة من الأساليب الكمية مثل الخصم، الرسملة وحساب الفوائد بمختلف أنواعها، والتي تستخدم في تقييم التدفقات النقدية واتخاذ القرارات الاستثمارية الرشيدة.

كما تلعب الرياضيات المالية دورًا محوريًا في مجالات متعددة، من بينها تقييم المشاريع الاستثمارية، تسعير الأدوات المالية، إدارة المخاطر وتحليل القروض، مما يجعلها أداة لا غنى عنها في البيئة الاقتصادية الحديثة. وعليه فإن الإلمام بمفاهيمها وتقنياتها يعدّ شرطًا أساسيًا لفهم آليات اتخاذ القرار المالي وتحقيق الكفاءة في تخصيص الموارد.

تهدف هذه المطبوعة إلى تقديم مقياس الرياضيات المالية بأسلوب مبسط ومنسجم مع تخصص الطلبة في الاقتصاد النقدي والمالي، حيث تم تقسيم محتوى المطبوعة على النحو التالي:

تناول **الفصل الأول** العمليات المالية القصيرة المدى التي تضمنت الفائدة البسيطة، الخصم التجاري وتكافؤ الأوراق التجارية، أما **الفصل الثاني**، فقد تطرق إلى العمليات المالية طويلة الأجل التي تشمل دراسة الفائدة المركبة، خصم واستبدال الديون طويلة الأجل، فيما قمنا في **الفصل الثالث** بتحليل الدفعات المتساوية بالفائدة المركبة بنوعيها (دفعات آخر المدة، دفعات أول المدة)، ليأتي **الفصل الرابع** وفيه أوضحنا كيفية تسوية واستهلاك القروض قصيرة الأجل سواء بطريقة القسط المتساوي أو الطريقة القسط المتناقص، لنختتم جهدنا بالتطرق في **الفصل الخامس** إلى طرق تقييم واختيار المشاريع الاستثمارية التي تشمل تلك المعايير التي لا تأخذ بعين الاعتبار القيمة الزمنية للنقود وكذا المعايير التي تولي أهمية للقيمة الزمنية للنقود.

وفي الأخير أرجو من الله تعالى أن تقدم هذه المطبوعة مساهمة في تزويد الطلاب بما يحتاجونه من دروس نظرية وتطبيقية في ميدان الرياضيات المالية، مع تقديم اضافة في مجال البحث العلمي لكل طلبة العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير.

يعتبر رأس المال أحد عناصر الإنتاج الرئيسية، بجانب الأرض، العمل، والتنظيم والإدارة، وتعمل المشروعات الاقتصادية سواء كانت عامة أو خاصة فردية أو مشتركة على توفير الأرض بالشراء أو الاستئجار من الغير، وتوفير العمل بالاستئجار أيضاً، والتنظيم والادارة بالاستعانة بالمديرين والمستشارين الأكفاء، في حين أنها تعمل على توفير رأس المال عن طريق الاقتراض من أفراد أو جهات متخصصة في مجال التمويل والاستثمار مثل البنوك وشركات التأمين.. إلخ، أو عن طريق إصدار الأسهم والسندات وبيعها في سوق الأوراق المالية.

ومن الطبيعي أن يكون لكل عنصر من عناصر الإنتاج المشار إليها، عائداً أو ثمناً لاستخدامه أو الانتفاع به، فإذا كان الريع هو عائد الأرض، الأجر أو المكافأة هو عائد العمل، الربح هو عائد التنظيم والإدارة، فإن الفائدة هي عائد رأس المال، ويختلف عائد رأس المال باختلاف العرض والطلب عليه، فيرتفع بزيادة الطلب عليه، وينخفض هذا العائد بانخفاض الطلب على رأس المال، وغالباً ما يتم ذلك في حدود سياسة نقدية يرسمها البنك المركزي للدولة، ويلتزم بها أفراد المجتمع.

المحور الأول: الفائدة البسيطة.

Simple Interest

أولا: تعريف الفائدة.

تعرف الفائدة بأنها المقابل الذي يدفعه المستثمر إلى المقرض، نتيجة لاستخدامه أو حيازته لأمواله، هذا من وجهة نظر المقترض، في حين أنها تعتبر الدخل الذي يحصل عليه صاحب رأس المال من المستثمر، مقابل استثمار الأخير أو حيازته لأموال الأول.[1]

فإذا أودع شخص ما مبلغا من النقود في مؤسسة مالية، فإن هذه المؤسسة تدفع له أو تضيف لحسابه كل فترة زمنية محددة أو بصفة دورية مبلغ كربح أو فائدة، نظير استخدامها أو حيازتها للمبلغ المودع لديها.

فبفرض أن شخصاً ما قد اقترض مبلغاً معيناً من النقود، من شخص آخر لفترة زمنية محددة، فإن الأول يدفع للثاني مبلغاً ما كمقابل لاستخدامه أو حيازته لنقود الثاني، والمقابل المشار إليه نعني به الفائدة، وسنرمز لمقدار الفائدة بالرمز **I**.

ثانيا: معدل أو سعر الفائدة Interest Rate.

نقصد بمعدل الفائدة هو عائد وحدة رأس المال بالنسبة لوحدة الزمن، فإذا ما اعتبرنا وحدة رأس المال في الاقتصاد الجزائري هي الدينار ووحدة الزمن هي السنة، وذكر أن معدل الفائدة **10%** سنوياً، فهذا يعني أن المدين أو المستثمر يدفع للدائن أو المقرض **0,10** دينار كمقابل أو فائدة، نظير استخدامه أو حيازته لمبلغ دينار واحد وذلك لمدة سنة واحدة.[2]

فإذا ما تم الاتفاق على أن يكون معدل الفائدة **10%** سنوياً، فهذا يعني أن مقدار الفائدة السنوية لمبلغ **100**دينار جزائري هو عشرة دنانير سنوياً.

من ناحية أخرى، يمكن ألا يكون معدل أو سعر الفائدة سنوياً، أي عن وحدة زمن قدرها سنة، حيث يمكن أن يتحدد على أساس وحدات زمنية تقل عن السنة، كنصف السنة، أو ربع السنة أو الشهر مثلاً، فإذا ذكر أن معدل الفائدة **5%** عن كل نصف سنة، فهذا يعني أن الفائدة تسدد أو تضاف كل نصف سنة بمقدار **5** دنانير لكل **100** دينار مودعة أو مقترضة، في حين لو ذكر أن سعر الفائدة 1% شهرياً، فهذا يعني أن الفائدة الواجب سدادها أو إضافتها إلى المدين هي دينار واحد لكل **100** دينار عن كل شهر وهكذا، فإذا لم ينص صراحة على وحدة الزمن التي يحسب أو يضاف على أساسها معدل الفائدة، فيعتبر المعدل في هذه الحالة معدلاً سنوياً.

ثالثا: مفهوم الفائدة البسيطة.

الفائدة البسيطة هي المبلغ المكتسب أو المدفوع مقابل استخدام النقود المقترضة أو التي أُقرضت للغير مرتبطة بذلك بالعمليات قصيرة الأجل، خلال مدة زمنية تقل عن سنة بمعدل متفق عليه، وتحسب الفائدة هنا عن كل وحدة زمنية يتم الاتفاق عليها، على أصل المبلغ المودع أو المستثمر **(C)**، أي أن أصل المبلغ المحسوب عليه الفائدة يظل ثابتاً في كل الوحدات الزمنية المحسوب عنها الفائدة، ونتيجة لما تقدم فالفائدة تحسب دائما من أصل المبلغ ولا تستثمر معه.[3]

1. عناصر قانون الفائدة البسيطة:

هناك عناصر عديدة تأثر في احتساب قيمة الفائدة البسيطة وهي:[4]

أ. المبلغ المستثمر أو مبلغ القرض ويطلق عليه الأصل: يقصد به المبلغ المقترض أو المودع مقابل الاستفادة من الفائدة، ويرمز له بالرمز **C**؛

ب. مدة الاستثمار أو مدة القرض: يقصد بها الزمن الذي يستفاد فيه من خدمات الأموال المقترضة أو المودعة خلاله، ويرمز له بالرمز **n**؛

ت. معدل أو سعر الفائدة: يعبر عن المقدار المحصل عليه من الفائدة لقاء ايداع او اقتراض وحدة واحدة من النقد، خلال وحدة واحدة من الزمن (عدد السنوات، و/أو عدد الأشهر و/أو عدد الايام)، ويرمز له بالرمز **t**.

إذ أن هناك علاقة طردية بين كل من العوامل الثلاثة السابقة وبين الفائدة، فتزداد الفائدة بزيادتها، والعكس صحيح.

وعليه فإن القانون الأساسي للفائدة البسيطة يكون كما يلي:

$$\mathbf{I = c \times t \times n}$$

مثال رقم 01:

أودع أحد الاشخاص مبلغ من المال قدره 20000 دج لدى البنك بمعدل فائدة **8%** ولمدة 3 سنوات.

المطلوب:

- أحسب الفائدة البسيطة؟

الحل:

C=20000 DA

t=8%

n=3 ans

$$\mathbf{I = c \times t \times n} \quad \mapsto \quad \mathbf{I = \frac{20000 \times 8 \times 3}{100}}$$

$$\boxed{\mathbf{I = 4800\ DA}}$$

2. حالات حول المدة:

تختلف المدة حسب الاتفاق المبرم بين الطرفين الدائن والمدين وحسب نوع القرض كما يلي:[5]

أ. التعامل بعدد من السنوات:

نضع: $\mathbf{t\% = \frac{t}{100}}$ حيث $\mathbf{n}$ بالسنوات.

وبالتالي فإن قانون الفائدة البسيطة يصبح كما يلي:

$$\mathbf{I = C \times \frac{t}{100} \times n}$$

ب. التعامل بعدد من الأشهر:

نضع: $\mathbf{n = \frac{m}{12}}$

حيث: $\mathbf{m}$ هو عدد الأشهر

وبالتالي فإن قانون الفائدة البسيطة يصبح كما يلي:

$$\mathbf{I = C \times \frac{t}{100} \times \frac{m}{12}}$$

مثال رقم 02:

من المثال 01، أحسب الفائدة البسيطة على افتراض أن المبلغ المودع كان لمدة 9 اشهر؟

الحل: $\mathbf{I = C \times \frac{t}{100} \times \frac{m}{12}} \mapsto \mathbf{I = 20000 \times \frac{8}{100} \times \frac{9}{12}}$

$$\boxed{I = 1200\ DA}$$

ت. التعامل بعدد من الأيام: هنا الحساب يختلف حسب نوع الفائدة البسيطة، بناء على الشكل الموالي.



3. أنواع الفائدة البسيطة: هنا علينا التفريق بين نوعين من الفوائد البسيطة. [6]

- **الفائدة البسيطة التجارية:** وهي الفائدة التي تحسب على أساس أن عدد أيام السنة تساوي 360 يوما أي اعتبار أن كل شهر يساوي 30 يوما أي :12*30 = 360 يوما.

نضع: $\mathbf{n = \frac{j}{360}}$

حيث : **J** هو عدد الأيام.

وبالتالي فإن قانون الفائدة البسيطة يصبح كما يلي:

$$\mathbf{I_c = C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{360}}$$

حيث: **c** (الصغيرة) تعني تجارية

- **الفائدة البسيطة الصحيحة:** وهي الفائدة التي تحسب على أساس عدد الأيام الحقيقية من كل شهر، وهنا نكون أمام نوعين من السنوات:

– السنة البسيطة (العادية): هي السنة التي يكون فيها عدد الأيام 365 يوما، تأتي في حالة شهر فيفري من تلك السنة فيه 28 يوما. فهي السنة التي لا تقبل القسمة على 4 (حاصل قسمة السنة على 4 عدد عشري). إذ نضع: $\mathbf{n = \frac{j}{365}}$

حيث: **J** هو عدد الأيام.

وبالتالي فإن قانون الفائدة البسيطة يصبح كما يلي:

$$\mathbf{I_r = C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{365}}$$

حيث: **r** (الصغيرة) تعني حقيقية.

– السنة الكبيسة: وهي السنة التي يكون فيها عدد الأيام 366 يوما، تأتي في حالة شهر فيفري من تلك السنة فيه 29 يوما. والسنة الكبيسة هي السنة التي تقبل القسمة على 4 (حاصل قسمة السنة على 4 عدد طبيعي). إذ نضع: $\mathbf{n = \frac{j}{366}}$

حيث: **J** هو عدد الأيام.

وبالتالي فإن قانون الفائدة البسيطة يصبح كما يلي:

$$\mathbf{I_r = C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{366}}$$

حيث: **r** (الصغيرة) تعني حقيقية.

مثال رقم 03:

قام أحد الأشخاص بإيداع مبلغ من المال لدى البنك، قدره 45000 دج بمعدل فائدة **4%** وهذا بتاريخ 2024/01/10 ليسحبه بتاريخ 2024/03/30.

المطلوب:

- أحسب كل من الفائدة البسيطة التجارية والفائدة البسيطة الصحيحة؟

الحل:

c = 45000 DA

t = 4%

- حساب الفائدة البسيطة التجارية:

حساب عدد الأيام:

أولا نقوم بتقسيم السنة على العدد 4 نجد: $506 = \frac{2024}{4}$

بما أن السنة تقبل القسمة على العدد 4 فهي سنة كبيسة وعدد أيام شهر فيفري هي **29** يوم.

حساب عدد الأيام: $n = (31 - 10) + 29 + 30 = 80\, j$

$$\mathbf{I_c = C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{360} \mapsto \quad I_c = 45000 \times \frac{4}{100} \times \frac{80}{360}}$$

$\mathbf{I_c}$ = 400 DA

- حساب الفائدة البسيطة الصحيحة:

بما أن سنة ايداع المبلغ هي 2024، فالسنة كبيسة وبالتالي حساب عدد الأيام يكون كما يلي:

$$n = (31\text{-}10) + 29 + 30 = 80\ j$$

$$I_c = C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{366} \mapsto \quad I_c = 4500 \times \frac{4}{100} \times \frac{80}{366}$$

$$Ic = 39.34\ DA$$

- **العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة:**

لمعرفة العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة يجب قسمتهما على بعضهما كما يلي:[7]

$$\frac{I_c}{I_r} = \frac{C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{360}}{C \times \frac{t}{100} \times \frac{j}{365}}$$

عند القيام بالعمليات اللازمة نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{I_c}{I_r} = \frac{73}{72} \mapsto I_c = \frac{73}{72} I_r \mapsto I_r = \frac{72}{73} I_c$$

من خلال ما تم الوصول إليه نلاحظ أن الفائدة الصحيحة أقل من الفائدة التجارية.

ملاحظات:

- عند حساب الفائدة البسيطة التجارية بالأيام، فإننا نحسب عدد الأيام الحقيقية ويكون التقسيم على 360 (اعتبار أن كل شهر من شهور السنة يساوي **31** يوم أو 30يوم ولكن نقسم على 360)؛
- عند وجود تاريخين: تاريخ الإيداع وتاريخ السحب فإننا نحسب عدد الأيام بين هذين التاريخين مع عدم احتساب يوم الإيداع واحتساب يوم السحب؛
- إذا كان المطلوب حساب الفائدة البسيطة ولم يتم تحديد نوع الفائدة البسيطة (تجارية أو صحيحة) فإنه يتم حساب الفائدة البسيطة التجارية.[8]

4. جملة الفائدة البسيطة:

يقصد بجملة الفائدة البسيطة المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المقرض بعد انقضاء مدة القرض، أي الأصل زائد الفوائد الناتجة عن عملية الإقراض، ومنه فإن قانون جملة الفائدة البسيطة يكون كما يلي:[9]

$$V = C + I$$

نعوض معادلة الفائدة البسيطة في معادلة الجملة فنحصل على:

$$V = C + C \times \frac{t}{100} \times n = C(1 + \frac{t}{100} \times n)$$

إذن جملة الفائدة البسيطة بالسنوات هي: $V = C(1 + \frac{t}{100} \times n)$

جملة الفائدة البسيطة بالأشهر هي: $V = C(1 + \frac{t}{100} \times \frac{m}{12})$

جملة الفائدة البسيطة بالأشهر هي: $V = C(1 + \frac{t}{100} \times \frac{j}{360})$ (السنة التجارية)

$V = C(1 + \frac{t}{100} \times \frac{j}{360})$ (السنة الصحيحة)

مثال رقم 04:

كم تبلغ جملة رأس مال قدره 40000 دج موظفة في البنك لمدة سنتين بمعدل فائدة 5%؟

الحل:

C=40000 DA

t=5%

n=2 ans

$V = c(1 + \frac{t}{100} \times n) \quad \mapsto \quad V = 40000 + \frac{4000 \times 5 \times 2}{100}$

V = 44000 DA

5. طريقة النمر والقاسم لحساب الفائدة البسيطة:

تقوم هذه الطريقة بتغيير معادلة الفائدة البسيطة، حيث يشمل البسط حاصل ضرب المبلغ في المدة ونسميه النمر، أما المقام فيعبر عنه بحاصل قسمة أيام السنة (360 يوم) على معدل الفائدة ونسمي ذلك بالقاسم.

نرمز للنمر بالرمز **N** والقاسم بالرمز **D** حيث:[10]

$$I = \frac{N}{D} = \frac{C \times N}{\frac{36000}{t}}$$

مثال رقم 05:

أحسب باستخدام طريقة النمر والقاسم الفائدة المحققة عن توظيف مبلغ 80000 دج لمدة 70 يوم بمعدل 6%؟

الحل:

لدينا: القاسم $D = 36000 \div 6 = 6000$

النمر $N = 80000 \times 70 = 560000$

وعليه بتطبيق العلاقة السابقة نجد:

$$I = \frac{N}{D} = \frac{C \times N}{\frac{36000}{t}} = \frac{560000}{6000} = 933.33\ DA$$

يلاحظ أن تطبيق طريقة النمر والقاسم تساعد على اختصار العمليات الحسابية خاصة إذا كان لدينا عدة مبالغ وكان معدل الفائدة موحدا، حيث يتطلب الأمر حساب القاسم مرة واحدة فقط.

وعليه يكون حساب فائدة عدة مبالغ وفق العلاقة التالية:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{D}$$

مثال رقم 06:

ثلاثة رؤوس أموال قيمها على التوالي 50000 دج، 110000 دج 130000 دج تستحق بعد 40، 60، 80 يوم على الترتيب بمعدل فائدة بسيطة 8%.

المطلوب:

- أحسب قيمة الفائدة المترتبة عن هذه المبالغ؟

الحل:

- إيجاد قيمة الفائدة المترتبة باستخدام طريقة القاسم والنمر:

$(C_i+n_i) = (N_i)$ النمر / $4500 = 8 \div 36000 =$ (D) القاسم

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{D} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i}{D} = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{D} = \frac{50000 \times 40 + 110000 \times 60 + 130000 \times 80}{4500}$$

$$\boxed{I_3 = 4222.22 \text{ DA}}$$

6. المعدل الوسطي لعدة توظيفات:

يعبر المعدل الوسطي عن معدل واحد ووحيد نحصل عليه من خلال عدة توظيفات لنفس المدة للحصول على نفس الفائدة. ويعطى بالعلاقة التالية: [11]

$$C_1 \longrightarrow n_1 \longrightarrow t_1 \Longrightarrow I_1 = \frac{C_1 * n_1 * t_1}{36000}$$
$$C_2 \longrightarrow n_2 \longrightarrow t_2 \Longrightarrow I_2 = \frac{C_2 * n_2 * t_2}{36000}$$
$$C_3 \longrightarrow n_3 \longrightarrow t_3 \Longrightarrow I_3 = \frac{C_3 * n_3 * t_3}{36000}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$C_k \longrightarrow n_k \longrightarrow t_k \Longrightarrow I_k = \frac{C_k * n_k * t_k}{36000}.$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_k == \frac{C_1 * n_1 * t_1}{36000} + \frac{C_2 * n_2 * t_2}{36000} + \frac{C_3 * n_3 * t_3}{36000} + \cdots + \frac{C_k * n_k * t_k}{36000}$$

إذا عوضت التوظيفات الأولى بتوظيفات أخرى لها نفس المعدل، بحيث تؤدي إلى نفس الفائدة الإجمالية، فان المعدل المتوسط لهذه التوظيفات هو **المعدل الوسطي** لتلك التوظيفات وهو t^*.

لدينا:

$$\frac{C_1 * n_1 * t_1}{36000} + \frac{C_2 * n_2 * t_2}{36000} + \frac{C_3 * n_3 * t_3}{36000} + \cdots + \frac{C_k * n_k * t_k}{36000} = \frac{C_1 * n_1 * t^*}{36000} + \frac{C_2 * n_2 * t^*}{36000} + \frac{C_3 * n_3 * t^*}{36000} + \cdots + \frac{C_k * n_k * t^*}{36000}$$

$$C_1 * n_1 * t_1 + C_2 * n_2 * t_2 + C_3 * n_3 * t_3 + \cdots + C_k * n_k * t_k = C_1 * n_1 * t^* + C_2 * n_2 * t^* + C_3 * n_3 * t^* + \cdots + C_k * n_k * t^*$$

ومنه:

$$C_1 * n_1 * t_1 + C_2 * n_2 * t_2 + C_3 * n_3 * t_3 + \cdots + C_k * n_k * t_k = t^* (C_1 * n_1 * + C_2 * n_2 + C_3 * n_3 + \cdots + C_k * n_k)$$

وعليه نجد:

$$t^* = \frac{C_1 * n_1 * t_1 + C_2 * n_2 * t_2 + C_3 * n_3 * t_3 + \cdots + C_k * n_k * t_k}{C_1 * n_1 * + C_2 * n_2 + C_3 * n_3 + \cdots + C_k * n_k}$$

أي:

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i * t_k}{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i}$$

مثال رقم 07:

تم توظيف مبلغين الأول يقدر ب 1200دج بمعدل 5% لمدة 115يوم والثاني يقدر ب 800دج بمعدل 6% لمدة 170يوم، ما هو المعدل المتوسط؟

الحل:

- حساب المعدل المتوسط للتوظيف:

لدينا:

$$t^* = \frac{\sum_{i=}^{k} c_i * n_i * t_k}{\sum_{i=1}^{k} c_i * n_i}$$

إذن:

$$t^* = \frac{(1200 * 115 * 5) + (800 * 170 * 6)}{(1200 * 115) + (1200 * 170)}$$

$$t^* = 26.375 \text{ DA}$$

تمارين المحور الأول: الفائدة البسيطة.

التمرين الأول:

أحسب الفوائد المترتبة عن توظيف مبلغ 75000 دج، حسب الحالات التالية:

1. عند معدل فائدة 6%

أ/ 15 يوما. ب/ 03 أشهر. ج/ سنة واحدة.

2. عند معدل 7%:

أ/ من 18 مارس إلى 31 ماي.

ب/ من 12 سبتمبر إلى 27 أكتوبر.

ج/ من 21 أوت إلى 30 ديسمبر.

التمرين الثاني:

أحسب الفائدة البسيطة التجارية والصحيحة لمبلغ مالي قدره 20000دج، علما أن معدل الفائدة بلغ 6 % سنويا حسب المدد التالية:

- 240 يوما؛
- 90 يوما؛
- 80 يوما.

التمرين الثالث:

أودع شخص بتاريخ 22 ماي 2025 لدى أحد البنوك مبلغ 70000 دج، فإذا كان البنك يمنح عملائه فائدة بسيطة بمعدل 7% سنويا.

المطلوب: أحسب ما يستحقه هذا الشخص في تاريخ 17 مارس 2026 على أساس:

- معدل سنوي؛
- معدل سداسي (نصف سنوي)؛

- معدل فصلي؛
- فسر العلاقة بين النتائج السابقة.

التمرين الرابع:

مبلغين مجموعهما 70000 دج، استثمرا لمدة 6 شهور و9 شهور على التوالي، فأنتجا خلال المدة مجموع فوائد بقيمة 3200دج.

المطلوب:

- أحسب أصل مبلغ كل منهما إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة بلغ 8 % سنويا؟

التمرين الخامس:

بتاريخ 19 جانفي 2025 وظف أحد الأشخاص مبلغ 29000 دج لدى أحد البنوك بمعدل 3.5%، وبعد مدة معينة وصله من البنك إشعار يفيد بأن قيمة الفوائد قد بلغت 186.08 دج.

المطلوب: ما هو تاريخ تحرير الإشعار؟

التمرين السادس:

ثلاث مبالغ في تزايد حسابي، تم توظيفها لمدة سنة بمعدل فائدة 3%، إذا علمت أن الفائدة الإجمالية المحققة عن توظيف هذه المبالغ هي 1890 دج، وأن الفرق بين المبلغ الثالث والأول هو 2400 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة المبالغ؟

التمرين السابع:

يحقق مبلغ موظف بمعدل 4% لمدة معينة جملة محصلة قدرها 14400 دج، أما إذا وظف هذا المبلغ خلال مدة أقل من المدة السابقة بسنة واحدة وعلى أساس معدل فائدة 5%، أعطى فائدة مقدراها 2400 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة هذا المبلغ ومدة توظيفه؟

التمرين الثامن:

قام شخص باستثمار مبلغ من المال لمدة 6 أشهر فأنتج فائدة بسيطة قدرها 1750 دج، إذا علمت أنه لو استثمر المبلغ نفسه وبمعدل الفائدة ذاتها لمدة 9 أشهر لكانت جملته 52625 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة المبلغ المستثمر ومعدل الفائدة المستعمل؟

التمرين التاسع:

مبلغان من المال مجموعهما 33600 دج أستثمر المبلغ الأول لمدة سنة بمعدل فائدة بسيط 9%، وأستثمر المبلغ الثاني لمدة ثمانية أشهر بمعدل فائدة بسيط 4%.

المطلوب:

- أوجد قيمة كل مبلغ إذا كان الفرق بين جملتي المبلغين 1476 دج؟

المحور الثاني: الخصم على الفائدة البسيطة.

Discount on Simple Interest

1. الأوراق التجارية وخصمها:

أ. الأوراق التجارية:

من أجل ضمان البائع لحقوقه اتجاه العميل الناتجة عن العمليات الآجلة يشترط الأول على الثاني قبول نوع من أنواع الأوراق التجارية، هذه الأوراق تعطي ضمانا أكثر للمورد (البائع)، كما تعطيه أولوية التحصيل مقارنة ببعض الدائنين الآخرين. ومن بين هذه الأوراق السندات الأذنية والكمبيالات. فالسند الأذني هو تعهد من المدين للدائن بدفع مبلغ معين بتاريخ معين، ويكون فيه طرفان فقط: المحرر والمستفيد. أما الكمبيالة فيها ثلاثة أطراف: الساحب (عادة المدين) الذي يسحب الكمبيالة، والمسحوب عليه والذي يلتزم بدفع الكمبيالة (بنك متخصص في هذا النوع من التعامل) ثم المستفيد (عادة الدائن) والذي تدفع له قيمة الكمبيالة.

هذه الأوراق تمثل اعترافا من قبل المدين لدائنه بمبلغ الدين وتاريخ استحقاقه. ويمكن للدائن أن يستخدم ما في حافظته من أوراق لإبراء ذمته، كما يمكن له أن يحصل على قيمتها الحالية عند الحاجة سواء لدى المدين نفسه أو لدى أحد البنوك عن طريق عملية خصمها.

وتتضمن الأوراق التجارية القيمة الآجلة الدفع (القيمة الاسمية)، كما تتضمن تاريخا لسداد قيمتها، واسم المستفيد (الدائن) واسم المسحوبة عليه (المدين)، ويمكن أن تكون محددة الجهة التي تسدد قيمتها عند حلول مواعيد استحقاقها.[12]

ب. خصم الأوراق التجارية:

إن الدائن الحائز على أوراق تجارية بإمكانه أن يحول هذه الأخيرة إلى أموال جاهزة حسب حاجته، لأجل ذلك يتقدم إلى البنك ويتنازل له عن الحق في قيمتها عند آجال استحقاقها، ليحصل على قيمة أقل تعرف بالقيمة الحالية. أما البنك فيستفيد من الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية في شكل فائدة قائمة على أساس الفاصل الزمني بين حصوله على القيمة الاسمية عند أجال الاستحقاق ودفعه للقيمة بتاريخ الخصم. ويحسب مبلغ الخصم اعتمادا على قواعد الفائدة البسيطة.

تسمى قيمة الأوراق التجارية المرتبطة بتاريخ استحقاقها بالقيمة الاسمية والقيمة المسددة قبل الموعد بالقيمة الحالية، كما يسمى الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية بالخصم التجاري. أما التاريخ المحدد لسداد القيمة الاسمية للدين فيعرف بتاريخ الاستحقاق. في حين يعرف تاريخ سداد القيمة الحالية بتاريخ الخصم.[13]

2. أنواع الخصم:

هناك نوعان من الخصم:[14]

أ. الخصم التجاري (الخارجي):

حسب هذا النوع من الخصم تحسب الفوائد المخصومة على أساس القيمة الاسمية أي القيمة الآجلة لتاريخ الاستحقاق، ويعتبر الخصم التجاري الأسهل والأبسط حسابيا لذا نراه شائع الاستعمال وهو النوع الذي سوف نركز عليه في هذا المحور.

ب. الخصم الصحيح (الداخلي):

إن حساب هذا النوع من الخصم يحسب على أساس القيمة التي يقدمها البنك للدائن (القيمة الحالية)، أي أن الفرق بين القيمتين الاسمية والحالية يكون عبارة عن الفائدة البسيطة الناتجة عن توظيف القيمة الحالية بفائدة بسيطة، لتعطي لنا القيمة الاسمية عند تاريخ الاستحقاق.

3. قانون الخصم التجاري:

يتضمن قانون الخصم التجاري العناصر التالية:

أ. القيمة الاسمية: هي القيمة الواجبة الدفع عند تاريخ الاستحقاق والمسجلة على الورقة التجارية؛

ب. المدة: لحساب مبلغ الخصم تحدد المدة ابتداء من تاريخ قطع (خصم) الورقة التجارية إلى تاريخ ميعاد الاستحقاق؛

ت. معدل الخصم: وهو معدل الفائدة المعمول به لخصم الأوراق التجارية؛

ث. القيمة الحالية: وهي الفرق بين القيمة الإسمية ومبلغ الخصم، وهو المبلغ الذي يناله المستفيد.

مثال رقم 01:

في 2 مارس 2023 اشترى أحد الأشخاص سلعة من إحدى مؤسسات مواد البناء بمبلغ 4000 دج، ولتسديد دينه اتفق مع المؤسسة على سحب كمبيالة تدفع من طرف البنك الوطني الجزائري يوم 31 ماي من نفس السنة. ونظرا لحاجة الدائن للسيولة النقدية اضطر إلى تقديم الكمبيالة للخصم بتاريخ 1 أفريل من نفس السنة بمعدل خصم 6%.

المطلوب:

- أحسب قيمة الخصم التجاري؟
- ما هو المبلغ الذي يتحصل عليه المستفيد من الدين؟

الحل:

يمكن تحليل هذا المثال كما يلي:

- المبلغ الواجب الدفع (4000 دج) في 31 ماي يسمى" القيمة الاسمية"؛
- على مؤسسة مواد البناء أن تنتظر حتى تاريخ 31 ماي لتأخذ مبلغ 4000 دج، وهذا التاريخ يسمى ب" تاريخ الاستحقاق"؛
- يمكن لمؤسسة مواد البناء أن تقدم الكمبيالة للبنك قبل تاريخ 31 ماي (1 أفريل في مثالنا) للحصول على نقود. وفي هذه الحالة نقول أن المؤسسة قامت بقطع أو "الخصم" أو مفاوضة البنك بالكمبيالة، وعليه ستحصل على القيمة الحالية؛
- 6% هو المعدل الذي تخصم به الكمبيالة؛
- الفترة من تاريخ الخصم (1 أفريل 2023) حتى تاريخ الاستحقاق (31 ماي 2023) هي المدة التي يحسب على أساسها الخصم مع إهمال يوم الخصم أو يوم الاستحقاق.
- يمكن اعتماد طريقة القاسم بالأشهر أو الأيام في حساب مختلف المعادلات الخاصة بالخصم التجاري من خلال العلاقة التالية:

$$D = \frac{36000}{t} \quad \text{أو} \quad D = \frac{1200}{t}$$

وعليه يكتب قانون الخصم التجاري كما يلي:[15]

$$E_c = V_n \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} = \frac{V_n \times n}{D}$$

أما القيمة الحالية ممثلة في المبلغ الذي يتحصل عليه الدائن فتحسب كما يلي:

$$V_a = V_n - E_c = V_n\left(1 - \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}\right) = V_n\left(\frac{D-n}{D}\right)$$

حيث:

E_c: الخصم التجاري.

V_n: القيمة الاسمية للدين أو السند.

V_a: القيمة الحالية.

t: معدل الخصم.

n: المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الاستحقاق، يمكن أن نعبر عنها بالأيام أو الأشهر.

الحل:

V_n= 4000DA

t = 6%

$\mathbf{n = \frac{j}{360} = \frac{60}{360}}$ من 01 أفريل إلى 31 ماي تساوي 60 يوما وعليه

- إيجاد قيمة الخصم التجاري:

$$E_c = V_n \times \frac{t}{100} \times n = 4000 \times \frac{6}{100} \times \frac{60}{360} = 40DA$$

- إيجاد المبلغ الذي يتحصل عليها المستفيد من الدين (القيمة الحالية):

$$V_a = V_n - E_c = 4000 - 40 = 3960DA$$

4. قانون الخصم الصحيح (الداخلي):

في ظل هذه الطريقة يطبق القانون الأساسي للفائدة البسيطة، حيث تتحدد قيمة الخصم عن طريق القيمة الحالية الصحيحة V_{ar} باعتبارها المبلغ الذي وظف بفائدة بسيطة بمعدل t، حيث تصل جملتها في نهاية الفترة n إلى القيمة الاسمية V_n، وعليه فالخصم حسب هذه الطريقة ما هو إلا الفائدة البسيطة المستحقة على مبلغ يعادل القيمة الحالية، ويسمى الخصم حسب هذه الطريقة بالخصم الصحيح أو الحقيقي The Rational Discount".

وعليه فالخصم وفق هذه الطريقة يحسب على أساس القيمة الحالية وليس القيمة الاسمية كما في طريقة الخصم التجاري.

وبالتالي فعلاقة الخصم الصحيح تكتب كما يلي:[16]

$$E_r = V_{ar} \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}$$

لتطبيق هذه العلاقة يتعين معرفة القيمة الحالية الصحيحة "الحقيقية".

لدينا:

القيمة الاسمية = القيمة الحالية الصحيحة + الخصم الصحيح وهذا ما نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$V_n = V_{ar} + E_r = V_{ar} + V_{ar} \times \frac{t}{100} \times n$$

إذ يمكن إيجاد القيمة الحالية الصحيحة بدلالة القيمة الاسمية:

$$V_n = V_{ar}\left(1 + \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}\right)$$

$$V_{ar} = \frac{V_n}{1 + \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}}$$

$$V_{ar} = \frac{36000 \times V_n}{36000 + t \times n} = \frac{V_n \times D}{D + n}$$

بالرجوع إلى علاقة الخصم الحقيقي السابقة نعوض القيمة الحالية بما يعادلها بالقيمة الاسمية، فنحصل على:

$$E_r = \frac{36000 \times V_n}{36000 + t \times n} \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}$$

$$E_r = \frac{V_n \times t \times n}{36000 + t \times n} = \frac{V_n \times n}{D + n}$$

في حالة تعويض الأيام بالأشهر تصبح العلاقة على النحو التالي:

$$E_r = \frac{V_n \times t \times n}{1200 + t \times n}$$

مثال رقم 02:

قام شخص بخصم ورقة تجارية قيمتها الاسمية 5000 دج تستحق السداد بعد 80 يوما من الآن.

المطلوب:

- أحسب قيمة الخصم الحقيقي والقيمة الحالية الصحيحة للورقة التجارية إذا علمت أن معدل الخصم 7%؟

الحل:

$Vn = 5000DA$

$n = 80j$

$t = 7\%$

- حساب قيمة الخصم الحقيقي:

$$E_r = \frac{V_n \times t \times n}{36000 + t \times n} = \frac{5000 \times 7 \times 80}{36000 + 7 \times 80} = \frac{2800000}{36560} = 76.59DA$$

- حساب القيمة الحالية الصحيحة:

الطريقة الأولى:

$$V_{ar} = V_n - E_r = 5000 - 76.59 = 4923.41DA$$

الطريقة الثانية:

$$V_{ar} = \frac{36000 \times V_n}{36000 + t \times n} = \frac{36000 \times 5000}{36000 + 7 \times 80} = 4923.41DA$$

ملاحظة: ننوه أنه عند حساب الخصم نتبع الطريقة التجارية إلا إذا نص صراحة على تطبيق الطريقة الصحيحة.

5. العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الصحيح:

يمكن توضيح العلاقة بين الطريقتين التجارية والصحيحة، من خلال الأخذ بعين الاعتبار أن الخصم التجاري دائما يكون أكبر من الخصم الحقيقي (الصحيح)، لأن القيمة الاسمية لأي ورقة تجارية أكبر من قيمتها الحالية. حيث:[17]

القيمة الحالية التجارية = القيمة الاسمية – الخصم التجاري

القيمة الحالية الصحيحة = القيمة الاسمية – الخصم الصحيح

أما رياضيا فيمكن تبيان العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الصحيح بحساب الفرق بينهما، فإذا رمزنا لهذا الفرق بالرمز **D** نجد:

$$\mathbf{D} = E_c - E_r = V_n \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} - V_{ar} \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} = (V_n - V_{ar}) \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}$$

نلاحظ أن الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية الصحيحة يعبر عن قانون الخصم الحقيقي، وبتعويض علاقة الخصم الحقيقي بقيمته في العلاقة الأخيرة يصبح الفرق بين الخصمين كما يلي:

$$\mathbf{D} = \frac{V_n \times t \times n}{36000 + t \times n} \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}$$

أي الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح يساوي فائدة الخصم الصحيح.

كما لدينا بعض العلاقات يمكن توضيحها في الآتي:

$$V_n = \frac{E_c \times E_r}{E_c - E_r} \quad /E_C = \frac{V_n \times E_r}{V_{ar}} \quad /E_r = \frac{V_n \times E_c}{V_n + E_c} / \quad V_a = \frac{V_n(V_{ar} - E_r)}{V_{ar}} / \quad V_{ar} = \frac{V_n \times E_r}{E_c}$$

مثال رقم 03:

دين قيمته الاسمية 9000 دج يستحق بعد 80 يوما، خصم بمعدل 6%.

المطلوب:

- أحسب قيمة الخصمين التجاري والصحيح والفرق بينهما؟

الحل:

$Vn = 9000DA$

$n = 80j$

$t = 6\%$

- إيجاد الخصم التجاري:

$$E_c = V_n \times \frac{t}{100} \times n = 9000 \times \frac{6}{100} \times \frac{80}{360} = 120DA$$

- إيجاد الخصم الصحيح:

$$E_r = \frac{V_n \times t \times n}{36000 + t \times n} = \frac{9000 \times 6 \times 80}{36000 + 6 \times 80} = \frac{4320000}{36480} = 118.42DA$$

- إيجاد الفرق بين الخصم التجاري والخصم الحقيقي D :

الطريقة الأولى: $\mathbf{D} = E_c - E_r = 120 - 118.42 = 1.58DA$

الطريقة الثانية: $\mathbf{D} = \frac{V_n \times t \times n}{36000 + t \times n} \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} = 118.42 \times \frac{6}{100} \times \frac{80}{360} = 1.58DA$

6. المعدل الاسمي والمعدل الحقيقي للخصم:

عند خصم الأوراق التجارية يتحمل حامل الورقة التجارية مجموعة من المصاريف على عاتقه، هذه الأخيرة تتضمن قيمة الخصم (الذي يحسب على أساس المعدل الاسمي للخصم)، إضافة إلى العمولات والمصاريف الأخرى التي تعطي في مضمونها ما يسمى بقيمة الآجيو الذي يقيس لنا المعدل الحقيقي للخصم.

فمعدل الخصم الحقيقي هو المعدل الذي يعكس جميع مصاريف خصم الورقة التجارية (الخصم، العمولة والمصاريف المختلفة). فهو المعدل الذي إذا ضرب في قيمة الورقة التجارية والمدة الباقية عن تاريخ استحقاقها لأعطى قيمة الأجيو، فالأجيو هو مجموع المصاريف التي يأخذها البنك عند خصم الورقة التجارية، ويتمثل هذا الأخير فيما يلي:[18]

- الخصم التجاري: E_C؛
- عمولة التظهير: هي عمولة مرتبطة بالزمن، تحتسب بالعلاقة التالية: $Com_1 = \frac{V_n \times t' \times n}{36000}$؛

- عمولة تغيير المكان: هي عمولة غير متعلقة بالزمن، تحتسب بالعلاقة التالية: $Com_2 = \frac{V_n \times t''}{100}$؛
- عمولة ثابتة: تعطى بالدينار، ويرمز لها بالرمز: Com_3؛
- الرسم على القيمة المضافة TVA: يمثل الرسم على عمليات الخصم حاليا قيمة 19%، يطبق على Ec وباقي العمولات، وفق العلاقة التالية: $TVA = (E_C + Com_1 + Com_2 + Com_3) \times \frac{19}{100}$

وعليه الآجيو يكتب بالعلاقة التالية: $\mathbf{Agio} = E_C + Com_1 + Com_2 + Com_3 + TVA$

أو يمكن كتابة علاقة الأجيو اعتمادا على معدل الخصم الحقيقي حيث:

$$Agio = V_n \times \frac{t_r}{100} \times \frac{n}{360}$$

وعليه فإن معدل الخصم الحقيقي يحتسب وفق العلاقة التالية:

$$t_r = \frac{Agio \times 36000}{V_n \times n}$$

مثال رقم 04:

قام شخص بخصم ورقة تجارية بتاريخ 2024/06/12 بمعدل خصم 4%، فكانت قيمة الخصم التجاري مساوية لـ 80 دج.

إذا علمت أن القيمة الاسمية للورقة 6000 دج.

المطلوب: أحسب.

- تاريخ استحقاق الورقة التجارية؟
- المبلغ الإجمالي للآجيو إذا كان: معدل عمولة التظهير 0.3% ، – عمولة المكان 0.15% و10دج كعمولة ثابتة، TVA=19%؟
- صافي ما يتحصل عليه صاحب الورقة التجارية؟
- معدل الخصم الحقيقي الذي طبقة البنك؟

الحل:

- إيجاد تاريخ استحقاق الورقة:

لدينا: $\mathbf{E_c} = V_n \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}$

$$\mathbf{n} = \frac{E_C \times 36000}{V_n \times t} = \frac{80 \times 36000}{6000 \times 4} = 120j$$

- إيجاد مبلغ الأجيو:

- عمولة التظهير: $\mathbf{Com_1} = \frac{V_n \times t' \times n}{36000} = \frac{6000 \times 0.3 \times 120}{36000} = 6DA$

- عمولة المكان: $\mathbf{Com_2} = \frac{V_n \times t''}{100} = \frac{6000 \times 0.15}{100} = 9DA$

- عمولة ثابتة: $\mathbf{Com_3} = 10DA$

- TVA: $\mathbf{TVA} = (E_C + Com_1 + Com_2 + Com_3) \times \frac{19}{100} = (80 + 6 + 9 + 10)\frac{19}{100} = 19.95\ DA$

$$\mathbf{Agio} = E_C + Com_1 + Com_2 + Com_3 + TVA = 80 + 6 + 9 + 10 + 19.95 = 124.95DA$$

- إيجاد صافي ما يتحصل عليه صاحب الورقة التجارية:

$$\mathbf{V_a} = V_n - \mathbf{Agio} = 6000 - 124.95 = 5875.04DA$$

- إيجاد معدل الخصم الحقيقي:

$$\mathbf{t_r} = \frac{Agio \times 36000}{V_n \times n} = \frac{124.95 \times 36000}{6000 \times 120} = 6.25\%.$$

تمارين المحور الثاني: الخصم على الفائدة البسيطة.

التمرين الأول:

دين قدره 2500 دج يستحق بعد سنة ونصف. فإذا تمت تسوية هذا الدين بمعدل فائدة بسيطة 8%.

المطلوب: أحسب.

- الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية لهذا الدين؟
- الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة؟

التمرين الثاني:

اشترى موظف ثلاجة وقام بدفع مبلغ 40000 دج نقدا، واتفق مع البائع على دفع 12000 دج بعد شهر، ودفع مبلغ 18000 دج بعد شهرين إذا علمت أن معدل الخصم هو 7%.

المطلوب: أحسب ثمن الثلاجة:

- بإتباع طريقة الخصم التجاري.
- بإتباع طريقة الخصم الصحيح.

التمرين الثالث:

أحسب القيمة المجهولة في كل حالة من الحالات الموضحة في الجدول التالي:

القيم	الحالة 1	الحالة 2	الحالة 3	الحالة 4
القيمة الاسمية	1200	؟	؟	1200
القيمة الحالية التجارية	؟	؟	2250	؟
القيمة الحالية الصحيحة	؟	800	؟	1000
الخصم التجاري	؟	؟	150	؟
الخصم الصحيح	؟	؟	؟	؟

معدل الخصم أو الفائدة	%7	%6	؟	%15
المدة	48 يوم	60 يوم	6 أشهر	؟ شهر

التمرين الرابع:

القيمة الحالية لورقة تجارية 11846 دج، خصمت بتاريخ 25 أوت بمعدل 7%. فإذا خصمت هذه الورقة قبل 30 يوما من تاريخ استحقاقها لكانت قيمة الخصم أقل بـ 87 دج من الخصم الأول.

المطلوب:

- أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية وتاريخ استحقاقها؟

التمرين الخامس:

بلغ الخصم التجاري 55 دج على ورقة تجارية قيمتها الاسمية 2300 دج، تستحق السداد بعد 140 يوم. وبافتراض أن الكمبيالة سيتم خصمها اليوم.

المطلوب:

- أحسب معدل الخصم؟

التمرين السادس:

دين قدره 4300 دج يستحق السداد في 04 أوت 2025، غير أن المدين اتفق مع الدائن على أن يدفع له 4165 دج سدادا لهذا الدين، فإذا تمت هذه العملية على أساس خصم تجاري بمعدل 4% سنويا.

المطلوب:

- حدد تاريخ الاتفاق بين المدين والدائن؟

التمرين السابع:

ورقة تجارية تم خصمها بمعدل 3% فكانت قيمتها الحالية 33233 دج، ولو خصمت قبل تاريخ استحقاقها بـ 15 يوم لانخفضت قيمة الخصم ب 125.25 رج عن قيمته السابقة.

المطلوب:

- أحسب القيمة الاسمية لهذه الورقة؟
- المدة الباقية للاستحقاق عند الخصم الأول؟

المحور الثالث: تكافؤ (استبدال) الأوراق التجارية.

Equivalence (substitution) of commercial papers

1. مفهوم استبدال الأوراق التجارية:

تتطلب العمليات التجارية الاستفادة من السيولة النقدية بأقصى سرعة ممكنة، إذ يقوم كثير من المدينين باستبدال ديونهم (أوراق تجارية) بدين أو عدة ديون جديدة تستحق بتواريخ مختلفة عن تاريخ سداد الديون القديمة سواء قبل أو بعد تاريخ استحقاق هذه الأخيرة، من خلال اتفاق يجري بين الدائن والمدين بكيفية لا تؤدي للإضرار بالمصلحة التجارية والمالية لكلا الطرفين، ففي الحالتين يكون للدين أو الديون الجديدة قيمة تختلف عن قيمة الدين أو الديون الأصلية، ويعتمد هذا الاختلاف على الفترة الزمنية، وعلى تاريخ الاستحقاق الجديد بعد أو قبل تاريخ سداد الدين أو الديون الأصلية.

فإذا استحق دفع الدين أو الديون الجديدة بعد تاريخ الاستحقاق للدين أو الديون القديمة (الأصلية)، فإن قيمة الديون الجديدة تكون أكبر من قيمة الديون الأصلية في تاريخ الاستحقاق الجديد.

وإذا استحق دفع الديون الجديدة من طرف المدين قبل تاريخ استحقاق الديون الأصلية رغبة في تخفيض الفوائد، فإن قيمة الديون الجديدة تكون أقل من قيمة الديون الأصلية في تاريخ الاستحقاق الجديد.

2. طرق تسوية واستبدال الأوراق التجارية:

يتم تسوية واستبدال الديون بين الدائن والمدين من خلال الاتفاق على تغيير شروط الدين واستبدالها بطرق وتواريخ جديدة تتناسب وظروف الطرفين المتفق عليها، فالشرط الأساسي لتحقيق عملية الاستبدال هو أن يكون هناك تكافؤ بين الورقة أو الأوراق التجارية القديمة والورقة أو الأوراق التجارية الجديدة، أي المساواة بين القيمة أو القيم الحالية للأوراق القديمة بالقيمة أو القيم الحالية للأوراق الجديدة؛ وهنا يمكن استخدام الطريقة التجارية في التكافؤ أو الطريقة الصحيحة.

أ. التكافؤ ورقتين تجاريتين:

عند استبدال الدين الأصلي لورقة تجارية بدين آخر جديد لمدة أقل (أطول) من مدة الدين الأصلي، فإننا سنتطرق إلى وجود ورقتين تجاريتين قيمتها الاسمية V_{n1}، وV_{n2}، لا تكافئ إلى إذا تساوت قيمتهما الحالية $V_{a1} = V_{a2}$، بعد خصمهما بمعدل خصم t، ولفترتي استحقاق n_1 وn_2 على التوالي. حيث:[19]

لدينا: $V_{a1} = V_{a2}$

$$V_{n1}\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_1}{360}\right) = V_{n2}\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_2}{360}\right)$$

مثال رقم 01:

تم استبدال ورقة تجارية قيمتها الاسمية 6700 دج، تستحق بعد 200 يوم، بورقة تجارية أخرى تستحق بعد 90 يوم بمعدل خصم 5%.

المطلوب:

- أحسب القيمة الاسمية للورقة الثانية؟

الحل:

$V_{n1} = 6700DA \qquad V_{n2} = ?$

$t = 5\%$

$n_1 = 200j \qquad n_2 = 90j$

- إيجاد القيمة الاسمية للورقة الجديدة:

لدينا: $V_{a1} = V_{a2}$

$$V_{n1}\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_1}{360}\right) = V_{n2}\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_2}{360}\right)$$

$$V_{n1}\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_1}{360}\right) = V_{n2}\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_2}{360}\right)$$

$$\mathbf{V_{n2}} = \frac{\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_1}{360}\right)}{\left(1-\frac{t}{100}\times\frac{n_2}{360}\right)}V_{n1} = \frac{\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{200}{360}\right)}{\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{90}{360}\right)}\times 6700$$

$$\mathbf{V_{n2}} = 6596.34DA$$

القيمة الاسمية للورقة التجارية الجديدة (6596.34 دج).

ب. تكافؤ عدة أوراق تجارية:

يأخذ استبدال الديون لعدة أوراق تجارية أكثر من صورة لا تخرج عن إحدى الحالات التالية:

- استبدال مجموعة من الديون القديمة بدين جديد واحد بتاريخ سابق لتواريخ استحقاق الديون القديمة؛
- استبدال مجموعة من الديون القديمة بدين جديد واحد بتاريخ لاحق لتواريخ استحقاق الديون القديمة؛
- استبدال مجموعة من الديون القديمة بدين جديد واحد بتاريخ سابق لتواريخ استحقاق بعض الديون القديمة، ولاحق للبعض الآخر من الديون؛
- سداد جزء من الدين الأصلي نقدا على أن يتم تحرير أوراق تجارية جديدة للدين المتبقي تستحق في تواريخ جديدة بما يسمح للمدين بتسديد القيم الجديدة وفق تواريخها الجديدة.

لأجل استبدال عدة ديون وأوراق تجارية نعتمد طريقتين تختلفان عن بعضهما كما يلي:[20]

- **التسوية في تاريخ الاستحقاق المشترك:** هي الحالة التي لا تتساوى فيها القيمة الاسمية للورقة الوحيدة مع مجموع القيم الاسمية للديون أو الأوراق التجارية الأخرى كما يلي:

$$V'_N \neq V_{n1} + V_{n2} + \cdots + V_{nk}$$

وعليه يحصل التكافؤ (التسوية) وفق العلاقة التالية:

$$V'_a = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ai}$$

مثال رقم 02:

أراد تاجر استبدال أوراقه التجارية الثلاث بورقة تجارية جديدة تستحق بعد خمسة أشهر. إذا علمت أن:

- الورقة الأولى: 5000 دج تستحق بعد 4 أشهر.
- الورقة الثانية: 9600 دج تستحق بعد 6 أشهر.
- الورقة الثالثة: 7500 دج تستحق بعد 9 أشهر.

معدل الخصم 5%.

المطلوب:

- أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية الجديدة؟

الحل:

$V_{n1} = 5000DA \quad V_{n2} = 9600DA \quad V_{n3} = 7500DA$

$n_1 = 4m \quad n_2 = 6m \quad n_3 = 9m$

$V'_N = ? \quad N = 5m \quad t = 5\%$

- إيجاد القيمة الاسمية للورقة الجديدة:

شرط التكافؤ: $V'_a = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ai}$

لدينا: $V_a = V_n - E_c = V_n\left(1 - \frac{t}{100} \times n\right)$

وعليه:

$$V'_N\left(1 - \frac{t}{100} \times n\right) = V_{n1}\left(1 - \frac{t}{100} \times n_1\right) + V_{n2}\left(1 - \frac{t}{100} \times n_2\right) + V_{n3}\left(1 - \frac{t}{100} \times n_3\right)$$

$$V'_N = \frac{V_{n1}\left(1 - \frac{t}{100} \times n_1\right) + V_{n2}\left(1 - \frac{t}{100} \times n_2\right) + V_{n3}\left(1 - \frac{t}{100} \times n_3\right)}{\left(1 - \frac{t}{100} \times n\right)}$$

$$V'_N = \frac{5000\left(1 - \frac{5}{100} \times 4\right) + 9600\left(1 - \frac{5}{100} \times 6\right) + 7500\left(1 - \frac{5}{100} \times 9\right)}{\left(1 - \frac{5}{100} \times 5\right)}$$

$V'_N = 19793.34DA.$

- **التسوية في تاريخ الاستحقاق المتوسط:** هي الحالة التي تتساوى فيها القيمة الاسمية للورقة الجديدة مع مجموع القيم الاسمية للديون أو الأوراق التجارية الأخرى كما يلي:

$$V'_N = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ni} = V_{n1} + V_{n2} + \cdots + V_{nk}$$

إذ يتم الاتفاق بين الدائن والمدين على تسوية الديون القديمة بدين واحد جديد تكون قيمته الاسمية مساوية لمجموع القيم الاسمية للديون الجديدة، مع البحث عن تاريخ استحقاق للدين الجديد الذي يكون عبارة عن متوسط ترجيحي لتواريخ استحقاق الديون القديمة.

لتحقيق التكافؤ لابد من تحقق الشرط التالي: $V'_a = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ai}$

$$V'_n - V'_n \times \frac{t}{100} \times N = V_{n1} - V_{n1} \times \frac{t}{100} \times n_1 + V_{n2} - V_{n2} \times \frac{t}{100} \times n_2 + \cdots + V_{nk} - V_{nk} \times \frac{t}{100} \times n_k$$

بما أن **t** نفسه وأن القيم الاسمية متساوية في الطرفين يمكن اختزالها لتصبح العلاقة كما يلي:

$$V'_n \times N = V_{n1} \times n_1 + V_{n2} \times n_2 + \cdots + V_{nk} \times n_k$$

من هذه الأخيرة يمكن استخراج العلاقة المختصرة لحساب تاريخ الاستحقاق المتوسط N، دون أخذ معدل الخصم بعين الاعتبار:

$$N = \frac{V_{n1} \times n_1 + V_{n2} \times n_2 + \cdots + V_{nk} \times n_k}{V'_n}$$

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{V_{ni} \times n_i}{V_{ni}}$$

مثال رقم 03:

تاجر مدين بالأوراق التجارية التالية:

- الورقة الأولى: 5000 دج تستحق بعد 5 أشهر.
- الورقة الثانية: 7000 دج تستحق بعد 9 أشهر.
- الورقة الثالثة: 8500 دج تستحق بعد 10 أشهر.

أراد هذا التاجر استبدال هذه الأوراق بورقة تجارية وحيدة قيمتها 20500 دج.

المطلوب:

- أحسب مدة استحقاق هذه الورقة إذا علمت أن معدل الخصم هو 7%؟

الحل:

$V_{n1} = 5000DA \quad V_{n2} = 7000DA \quad V_{n3} = 8500DA$

$n_1 = 5m \quad n_2 = 9m \quad n_3 = 10m$

$V_n = 20500DA \quad N = ? \quad t = 7\%$

- إيجاد مدة الاستحقاق للورقة الجديدة:

بما أن: $V_N = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} = 20500$

وعليه فإننا هنا في حالة فترة استحقاق متوسط، يمكن من خلالها حساب مدة الاستحقاق من خلال العلاقة التالية:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{V_{ni} \times n_i}{V_{ni}}$$

$$\mathbf{N} = \frac{V_{n1} \times n_1 + V_{n2} \times n_2 + V_{n3} \times n_3}{V_n}$$

$$\mathbf{N} = \frac{5000 \times 5 + 7000 \times 9 + 8500 \times 10}{20500}$$

$$\mathbf{N} = 8.44 \text{ans}$$

وعليه مدة الاستحقاق المتوسط هي: 8 أشهر و13 يوم.

تمارين المحور الثالث: تكافؤ (استبدال) الأوراق التجارية.

التمرين الأول:

بتاريخ 13 أفريل 2023 اتفق أحد التجار مع مورده على استبدال ورقة تجارية قيمتها الاسمية 74000 دج، تستحق في 15 ماي 2023، بورقة أخرى تستحق بعد 65 يوم من تاريخ الاستبدال.

فإذا علمت أن معدل الخصم 5%.

المطلوب:

- أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية الجديدة؟

التمرين الثاني:

شخص مدين بالأوراق التجارية التالية:

- الورقة الأولى: 3000 دج تستحق بعد 2 أشهر.
- الورقة الثانية: 7000 تستحق بعد 6 أشهر.
- الورقة الثالثة: 15000 دج تستحق بعد 9 أشهر.

وقد اتفق مع الدائن على تسوية هذه الديون على النحو التالي: يدفع له نقداً مبلغ 5430 دج، ويحرر له ثلاث أوراق تجارية لكل منها نفس القيمة الاسمية، تستحق بعد 3، 5، 7 أشهر على التوالي.

المطلوب:

- أوجد القيم الاسمية للأوراق التجارية الثلاث الجديدة إذا كان معدل الخصم 6% سنويا؟

التمرين الثالث:

شخص مدين للبنك الوطني الجزائري بالمبالغ التالية: مبلغ 54000دج أستحق بتاريخ 2023/10/25 (لم يسدد)، مبلغ 72000دج يستحق بتاريخ 2024/03/17، مبلغ 82800 دج يستحق بتاريخ 2024/07/10.

اتفق هذا الشخص مع دائنه على تعويض الدين بثلاثة مبالغ كما يلي: مبلغ 22000دج يدفع نقدا بتاريخ 2024/01/15، مبلغ ثاني يستحق بعده بـ 60 يوم، ومبلغ ثالث يستحق بعد المبلغ النقدي بـ 80 يوم، وذلك بمعدل خصم بسيط سنوي 8% .

المطلوب:

- أحسب قيمة المبلغ الثاني والثالث إذا علمت أن المبلغ الثالث يساوي ضعف المبلغ الثاني؟

التمرين الرابع:

أحد التجار مدين لموردة بالأوراق التجارية التالية:

- الورقة الأولى: 8000 دج تستحق في 30 ديسمبر 2025.
- الورقة الثانية: 10000 دج تستحق في 14 جانفي 2026.

وفي تاريخ 15 نوفمبر 2025 قرر هذا التاجر تسوية تلك الأوراق بورقة جديدة تستحق في تاريخ 13 فيفري 2026.

المطلوب:

- ما هي القيمة الاسمية للورقة الجديدة إذا كان معدل الخصم 6%؟
- في 25 نوفمبر 2025 تقدم المورد إلى البنك من أجل خصم الورقة الجديدة، ففرض عليه البنك عمولة التظهير بنسبة 0.5% وعمولة ثابتة بقيمة 5.63 دج، ليتحصل في الأخير على مبلغ 14800 دج.

المطلوب:

- أحسب معدل الخصم؟

التمرين الخامس:

تاجر مدين لأحد البنوك بالأوراق التجارية التالية:

- الورقة الأولى: 1500 دج تستحق السداد بعد 18 يوم.
- الورقة الثانية: 2000 دج تستحق السداد بعد 90 يوم.

- الورقة الثالثة: 3000 دج تستحق السداد بعد 100 يوم.

اتفق التاجر مع البنك على أن يستبدلها بورقة تجارية واحدة قيمتها 6538,55 دج تستحق السداد بعد 120 يوم.

المطلوب:

- أحسب معدل الخصم؟

التمرين السادس:

ورقتين تجاريتين مجموع قيمتهما الاسمية 48800 دج، ومجموع خصمهما 305 دج. إذا علمت أن مدة الاستحقاق المتوسط لهما هو 45 يوم.

المطلوب:

- أحسب معدل الخصم؟
- إذا كانت القيمة الاسمية للورقة الأولى 36600 دج وتستحق بعد شهر، أحسب مدة استحقاق الورقة الثانية؟

التمرين السابع:

بتاريخ 2023/12/08 قدمت لأحد البنوك الأوراق التجارية التالية:

- Vn1: 1750 دج تستحق بعد 25 يوم.
- Vn2: 2400 دج تستحق بعد 45 يوم.
- Vn3: 2720 دج تستحق بعد n يوم.

فقدم البنك لحاملها قيمة متساوية عن كل ورقة.

المطلوب:

- أحسب معدل الخصم؟
- أحسب مدة استحقاق الورقة الثالثة؟

- ما هو التاريخ الذي يمكن من تعويض الأوراق السابقة بورقة جديدة قيمتها الاسمية هي مجموع القيم الاسمية للأوراق الثلاث؟

التمرين الثامن:

ورقة تجارية قيمتها الاسمية 78000 دج تستحق في 23 أفريل 2025، وفي 09 مارس من نفس السنة تم تعويضها بثلاث أوراق تجارية قيمتها الاسمية في تزايد حسابي تستحق على التوالي في 17 مارس، 04 أفريل، 09 أفريل.

المطلوب:

- أحسب القيم الاسمية للأوراق المستبدلة إذا علمت أن مجموعها يساوي 78000 دج؟

هوامش الفصل الأول:

1 – إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، أساسيات الرياضيات (المالية. والبحثية)، مكتبة الاشعاع، الطبعة الثانية، مصر، 1998، ص408.

2 – عبد الله توفيق الهلباوي، الرياضيات المالية، مكتبة الحرية للنشر والتوزيع، القاهرة، مصر، 2119 ، ص18.

3 – باديس بوغرة، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، دار الهدى، الطبعة الأولى، الجزائر، 2012، ص10.

4 – جون بيارفادز، الرياضيات المالية والاكتوازية، دار النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود، السعودية، 2015، ص08.

5 – إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مرجع سبق ذكره، ص418-423.

6 – باديس بوغرة، مرجع سبق ذكره، ص11-15.

7 – مناضل الجواري، مقدمة في الرياضيات المالية، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2024، ص31.

8 – باديس بوغرة، مرجع سبق ذكره، ص13-14.

9 – شقيري موسى نوري واخرون، الرياضيات المالية، الطبعة الاولى، دار اهل المعرفة، الجزائر، 2106، ص15.

10 – منصور بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011، ص16-17.

11 – صليحة بن طلحة، الرياضيات المالية، منشورات الدار الجزائرية، الطبعة 1 ، 2015، الجزائر، ص: 18.

12– علي جمال الدين عوض، الأوراق التجارية السند الأدنى–الكمبيالة –الشيك دراسة للقضاء، مطبعة جامعة القاهرة (مصر)، 1995، ص04.

13 – منصور بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006، ص15.

14 – إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مرجع سبق ذكره، ص500-500.

15 - Benjamin Lagros, Mini Mannel de Mathématique financières, Edition Dunod, France, 2011, p44.

16 – باديس بوغرة، مرجع سبق ذكره، ص64-65.

17 – صليحة بن طلحة، مرجع سبق ذكره، ص46.

18 – صليحة بن طلحة، مرجع سبق ذكره، ص49.

19 – إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مرجع سبق ذكره، ص537-541.

20 – باديس بوغرة، مرجع سبق ذكره، ص97-103.

المحور الأول: الفائدة المركبة.

compound interest

بعد تطرقنا في الفصل الأول للعمليات المالية قصيرة الأجل التي تطبق بالفائدة البسيطة، التي لا تزيد مدتها غالبا عن سنة، سنحاول من خلال هذا الفصل بيان تطبيقات الرياضيات المالية على المعاملات المالية طويلة الأجل، والتي تفوق السنة الواحدة، حيث نتطرق إلى الأسس التطبيقية للفائدة المركبة، ومن ثم التركيز على خصم وتكافؤ الديون طويلة الأجل، وكذا الدفعات المتساوية بالفائدة المركبة في الفصل الذي يليه.

1. تعريف الفائدة المركبة:

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة التي تحسب على أساس أصل المبلغ مضافا إليه الفوائد المتولدة عن الفترات السابقة، وهي بهذا تختلف عن الفائدة البسيطة كون هذه الأخيرة تحسب فقط على أساس أصل المبلغ مهما كان عدد الوحدات الزمنية، وتستعمل في الغالب الفائدة المركبة للاقتراض طويل الأجل بينما تحسب الفائدة البسيطة على الاقتراض قصير الأجل.[1]

مثال رقم 01:

تم إيداع مبلغين من المال كل واحد منهما يساوي 1600دج لمدة 3 سنوات لكل منهما، وأودع كلاهما بمعدل فائدة سنوي 6%، غير أن الأول بالفائدة البسيطة والثاني بالفائدة المركبة. الجدولين المواليين يوضحان الفرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة.

الجدول رقم (01): تحليل حساب الفائدة البسيطة. **الوحدة: دج**

المدة (سنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل عليه
1	1600	1600×0.06=96	1600+96=1696
2	1600	1600×0.06=96	1696+96=1792
3	1600	1600×0.06=96	1792+96=1888

المصدر: من إعداد الباحث.

الجدول رقم (02): تحليل حساب الفائدة المركبة. **الوحدة: دج**

المدة (سنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل عليه
1	1600	1600×0.06=96	1600+96=1696
2	1696	1696×0.06=101.76	1696+101.76=1797.76
3	1797.76	1797.76×0.06=107.87	1797.76+107.87=1905.63

المصدر: من إعداد الباحث.

من خلال الجدولين السابقين نلاحظ أن حالة الفائدة البسيطة فإن حساب الفائدة يكون على أساس أصل الدين مهما زادت عدد السنوات، أما في حالة الفائدة المركبة فيكون على أساس أصل الدين مضافا لها الفوائد التراكمية للسنوات السابقة.

أي في حالة الفائدة البسيطة حسبت قيمة الفائدة بناء على أصل الدين (1600 دج) في السنة الأولى الذي بلغ 96 دج ونفس الشيء في السنتين المواليتين أي (**96+96+96 =288**)**دج**، أما في حالة الفائدة المركبة حسبت قيمة الفائدة بناء على أصل الدين (1600) في السنة الأولى الذي بلغ 96 دج، ليتم إضافة الفائدة لأصل الدين (96 + 1600 = 1696)دج، ومن ثم حساب الفائدة للسنة الثانية بناء على هذا المبلغ فبلغت فائدة السنة الثانية 101.76دج، ونفس الشيء للسنة الثالثة تضاف فائدة السنة الثانية للمبلغ السابق ليصبح المبلغ (101.76 + 1696 = 1797.76)دج، ومن ثم حساب الفائدة للسنة الثالثة بناء على هذا المبلغ فبلغت 107.87دج، وعليه فإن جملة التوظيف باستخدام الفائدة البسيطة تبلغ 1888دج أما باستخدام الفائدة المركبة فتبلغ 1905.63دج

2. قانون الفائدة المركبة:

لا تختلف العناصر المحددة لاحتساب الفائدة المركبة عن تلك المعتمدة في احتساب الفائدة البسيطة وهي كما يلي:[2]

- المبلغ الأصلي **C**: وهو أصل الدين أو المبلغ الموظف.
- معدل الفائدة t: وهو نسبة مئوية تعطى في الغالب على أساس سنوي.

- عدد الفترات الزمنية **n**: هي المدة التي يسدد في نهايتها أصل المبلغ مع فوائده.

من خلال التوضيحات أعلاه يمكننا أن نستنتج قانون الفائدة المركبة ابتداء من احتساب فائدة السنة الأولى، والسنوات التي تليها إلى غاية السنة n، والجدول التالي يلخص ذلك:

الجدول رقم (03): طريقة استخراج القانون الأساسي للفائدة المركبة.

السنة	رأس المال في بداية كل سنة	الفوائد في نهاية كل سنة	القيمة المحصلة (الجملة المكتسبة) في نهاية كل سنة	
1	C	$C \times t$	$C + I = C + C \times t$	$\mathbf{C(1+t)}$
2	$C(1+t)$	$C(1+t) \times t$	$C(1+t) + C(1+t) \times t$	$\mathbf{C(1+t)^2}$
3	$C(1+t)^2$	$C(1+t)^2 \times t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2 \times t$	$\mathbf{C(1+t)^3}$
…	…	…	…	**…**
…	…	…	…	**…**
n-1	$C(1+t)^{n-2}$	$C(1+t)^{n-2} \times t$	$C(1+t)^{n-2} + C(1+t)^{n-2} \times t$	$\mathbf{C(1+t)^{n-1}}$
n	$C(1+t)^{n-1}$	$C(1+t)^{n-1} \times t$	$C(1+t)^{n-1} + C(1+t)^{n-1} \times t$	$\mathbf{C(1+t)^n}$

Source: Walid Khoufi & Ines Dami; le calcul financier et la notation la valeur temporelle de l'argent; école supérieure de commerce de safex; TUNISIE; on line: https://coursexamens.org/images/Etudes_superieures/Marketing/math_financiere/Cours_et_exocours2valeurtemporelle.pdf ; p9; consulte le: 13-11-2020.

نستنتج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة t لكل وحدة زمنية تعطى بالعلاقة التالية:[3]

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n}$$

وهي تمثل القانون الأساسي للفائدة المركبة.

إن العلاقة السابقة لحساب الجملة المحصلة تقتضي تطابق معدل الفائدة مع مدة الرسملة، فإذا كانت الفترات سنوية لابد أن يكون معدل الفائدة المركبة سنويا، وإذا تم الاتفاق على رسملة الفوائد شهريا أو فصليا أو سداسيا وجب أن يكون معدل الفائدة المركبة متطابقا مع الفترة.

يوضح الجدول أن فوائد السنوات المتتالية وأيضا القيم المحصلة في نهاية السنوات المتتالية تشكل متوالية هندسية أساسها $(1+t)$.

قانون الفائدة المركبة لا يمدنا بقيمة الفائدة مباشرة بخلاف قانون الفائدة البسيطة. لذا يتعين المعرفة قيمة الفائدة المركبة أن تطرح أصل القرض من جملته المحصلة كما يلي:

$$I = C_n - C \mapsto I = C(1+t)^n - C \mapsto I = C[(1+t)^n - 1]$$

يتم استخراج القيمة $(1+t)^n$ من الجدول المالي رقم 01 أو بالاعتماد على الآلة الحاسبة العلمية.

مثال رقم 02:

أودع أحد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3500 دج لدى أحد البنوك بمعدل فائدة مركب 6% ولمدة 7 سنوات.

المطلوب:

- أحسب جملة المبلغ؟
- أحسب الفائدة المتحصل عليها؟

الحل:

$C = 3500DA$

$t = 6\%$

$n_1 = 7ans$

- ايجاد جملة المبلغ:
  - طريقة الحساب بالآلة الحاسبة العلمية:

$$C_n = C(1+t)^n = 3500(1+0.06)^7 = 3500(1.503630259)$$

$$\boxed{C_n = 5262.71DA}$$

  - طريقة الجداول المالية:

لدينا: $(1.06)^7 = 1.50363026$ في الجدول المالي رقم 01 وعليه:

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n} = 3500(1.06)^7 = 3500(1.503630259)$$

$$\boxed{\mathbf{C_n} = 5262.71DA}$$

- حساب الفائدة المتحصل عليها:

يتم حساب قيمة الفائدة سواء من خلال طرح أصل المبلغ من الجملة المركبة المتحصل عليها أو باستخدام قانون حساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة. ومنه:

الطريقة الأولى: $\mathbf{I = C_n - C} = 5262{,}71 - 3500 = 1762.71DA$

الطريقة الثانية: $\mathbf{I = C[(1+t)^n - 1]} = 3500[(1+0.06)^7 - 1] = 1762.71DA$

3. عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:

أ. **أصل المبلغ C**: انطلاقا من القانون الأساسي للفائدة المركبة، يمكن إيجاد المبلغ المستثمر في بداية المدة n ويدعى أيضا بالقيمة الحالية للجملة مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n} \mapsto \mathbf{C} = \frac{\mathbf{C_n}}{\mathbf{(1+t)^n}} \mapsto \mathbf{C = C_n(1+t)^{-n}}$$

هذه العلاقة هي نفسها علاقة القيمة الحالية لمبلغ مستقبلي في الوقت الحاضر.

كما يمكن حسابه بدلالة علاقة الفائدة I كما يلي:

$$\mathbf{I = C[(1+t)^n - 1]} \mapsto \mathbf{C} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{[(1+t)^n - 1]}}$$

يمكن إيجاد C عن طريق الآلة الحاسبة أو باستخدام طريقة الجداول المالية، من خلال الجدول المالي رقم 2 يمكن استخراج قيمة $\mathbf{(1+t)^{-n}}$ ومن ثم إيجاد قيمة أصل المبلغ C.[4]

مثال رقم 03:

أودع أحد الأشخاص مبلغا من المال لدى أحد البنوك بمعدل فائدة مركب 5.75% ولمدة 8 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2450 دج.

المطلوب:

- ما هو المبلغ الذي أودعه ذلك الشخص؟

الحل:

$C_n = 2450DA$

$t = 5.75\%$

$n_1 = 8ans$

- إيجاد المبلغ الذي أودعه هذا الشخص:
  - طريقة الحساب بالآلة الحاسبة العلمية:

$$\mathbf{C = C_n(1+t)^{-n}} = 2450(1+0.0575)^{-8} = 2450(0.63937697)$$

$$\boxed{\mathbf{C} = 1566.47DA}$$

  - طريقة الجداول المالية:

لدينا:

في الجدول المالي رقم 02 $(1.0575)^{-8} = 0.63937697$ وعليه:

$$\mathbf{C = C_n(1+t)^{-n}} = 2450(0.63937697)$$

$$\boxed{\mathbf{C} = 1566.47DA}$$

ب. **معدل الفائدة t**: لإيجاد معدل الفائدة، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام طريقة الجداول المالية أو طريقة الجذر النوني.

الطريقة الأولى: استخراج t من الجدول المالي رقم 01، إذ لدينا:

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n} \mapsto \mathbf{(1+t)^n = \frac{C_n}{C}}$$

بعد معرفة حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ نذهب للجدول المالي رقم 01 في السطر الذي يقابل المدة n (معلومة). والمعدل (العمود) المقابل هو المعدل المطلوب.

الطريقة الثانية: طريقة الجذر النوني بحيث تعطى علاقة المعدل كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n \mapsto (1+t)^n = \frac{C_n}{C} \mapsto 1+t = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}}$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} - 1$$

مثال رقم 04:

أودع أحد الأشخاص مبلغا من المال لدى أحد البنوك قدره 1550 دج لمدة 5 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2330.67 دج.

المطلوب:

- أوجد معدل الفائدة المركب الذي وظف به المبلغ بطريقتين؟

الحل:

$C_n = 2330,67DA$

$C = 1550DA$

$n_1 = 5ans$

- إيجاد معدل الفائدة المركب الذي وُظف به المبلغ بطريقتين:
  - الطريقة الأولى: طريقة الجداول المالية.

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} = \frac{2330.67}{1550} = 1.503658065$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند السطر الذي يقابل 5 سنوات ونجد هذه القيمة عند المعدل 8.5%، إذا:

$$\boxed{t = 8.5\%}$$

- الطريقة الثانية: طريقة الجذر النوني.

$$\mathbf{t} = \sqrt[\mathbf{n}]{\frac{\mathbf{C_n}}{\mathbf{C}}} - \mathbf{1} = \sqrt[5]{\frac{2330.67}{1550}} - 1 = \left(\frac{2330.67}{1550}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$\boxed{\mathbf{t = 8.5\%}}$$

ت. مدة التوظيف n: لإيجاد مدة التوظيف مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام طريقة الجداول المالية أو الطريقة اللوغاريتمية.

الطريقة الأولى: استخراج n من الجدول المالي، إذ لدينا:

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n \ \mapsto \ (1+t)^n = \frac{C_n}{C}}$$

بعد معرفة حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ نذهب للجدول المالي رقم 01 في العمود الذي يقابل المعدل t (معلومة). والمدة (السطر) المقابل هو المدة المطلوبة.

الطريقة الثانية: الطريقة اللوغاريتمية بحيث تعطى علاقة المدة كما يلي:

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n \ \mapsto \ (1+t)^n = \frac{C_n}{C} \ \mapsto \ \log(1+t)^n = \log\frac{C_n}{C}}$$

$$\mathbf{n \times \log(1+t) = \log\frac{C_n}{C}}$$

$$\mathbf{n = \frac{\log\frac{C_n}{C}}{\log(1+t)}}$$

مثال رقم 05:

أودع أحد الأشخاص مبلغا من المال لدى أحد البنوك قدره 100000 دج بمعدل فائدة 8% ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 199900.463 دج.

المطلوب:

- أوجد المدة التي وظف بها المبلغ بطريقتين؟

الحل:

$C_n = 199900.463DA$

$C = 100000DA$

$t = 8\%$

- إيجاد المدة التي وظف بها المبلغ بطريقتين:

- الطريقة الأولى: طريقة الجداول المالية.

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} = \frac{199900.463}{100000} = 1.99900463$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند العمود الذي يقابل معدل 8% ونجد هذه القيمة عند $n = 9$، إذا:

$$\boxed{n = 9ans}$$

- الطريقة الثانية: الطريقة اللوغاريتمية.

$$n = \frac{\log \frac{C_n}{C}}{\log(1+t)} = \frac{\log \frac{199900,463}{100000}}{\log(1,08)}$$

$$\boxed{n = 9ans}$$

4. حالات خاصة لإيجاد الجملة بالفائدة المركبة:

إن الاعتماد على الجداول المالية في إيجاد قيمة المتغيرات الخاصة بالفائدة المركبة تطرح العديد من المشكلات عكس التعامل بالآلة الحاسبة، كعدم توفر المدة في الجدول، أو عدم توفر المعدل المطبق، كما يمكن ألا تتوفر المدة والمعدل معا، فنجد مثلا المدة المعتمدة في الجداول المالية على أساس أنها رقم صحيح يبدأ من 1، 2، 3 إلى غاية فترة محدودة، ومعدلات الفائدة ابتداء من 1% إلى 10%، حيث تظهر مشاكل الاعتماد على الجداول المالية خاصة في الحالات التالية:

- حالة عدم وجود المدة بالجدول المالي؛

- حالة عدم وجود المعدل بالجدول المالي.

أ. **حالة عدم وجود المدة بالجدول المالي:**

في هذه الحالة نجد ثلاث مشاكل وهي:

✓ إذا كان n عدد صحيح لكنه خارج نطاق الجدول:

يتم حل هذا الإشكال باستخدام قاعدة رياضية (ضرب نفس الأعداد هو جمع لأسسها) وفيها يتم تقسيم المدة إلى أعداد صحيحة يرمز لكل منها بـ x، y، z، بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مساويا لـ n، كما يشترط ألا يزيد كل منها على نطاق الجدول المالي، هذا الأخير قد يكون محدودا بـ 20 أو 25 أو 50 فترة زمنية، وتأخذ صيغة الأسس العلاقة التالية:

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n = C(1+t)^x(1+t)^y(1+t)^z}$$

حيث: $n = x + y + z$

مثال رقم 06:

قام شخص بإيداع مبلغ من المال قيمته 1300دج بمعدل فائدة مركبة 6% لمدة 65 سنة، فإذا كان الجدول الذي بين يديك محدود المدة بـ 50 سنة.

المطلوب:

- أحسب جملة التوظيف للمبلغ الذي تم ايداعه؟

الحل:

$C = 1300DA$

$t = 6\%$

$n_1 = 65ans$

- ايجاد جملة المبلغ:

نفترض أن: $x = 20;\quad y = 30;\quad z = 15$

$$n = 65 = x + y + z = 20 + 30 + 15$$

وعليه:

$$C_n = C(1+t)^n = C(1+t)^x(1+t)^y(1+t)^z$$

$$C_n = 1300(1+0.06)^{65} = 1300(1.06)^{20}(1.06)^{30}(106)^{15}$$

بالرجوع للجدول المالي رقم 01 نبحث عن الجملة المركبة للدينار الواحد بمعدل 6% بعد مدة 20، 30 و 15 سنة نجدها على التوالي: (3.207135)، (5.743491) و (2,396558).

بالتعويض نجد:

$$C_n = 1300(3.207135)(5.743491)(2,396558)$$

$$\boxed{C_n = 57388.46DA}$$

✓ إذا كان n عدد غير صحيح (كسر):

يمكن أن تحتوي المدة عدد غير تام (عدد من السنوات إضافة لأجزاء من السنة (شهور، أيام))، ومثال ذلك مدة 5سنوات وثمانية أشهر، أي $n = 5 + \frac{8}{12}$، هنا نكون أمام طريقتين تساعدنا على إيجاد الجملة، نذكر فيما يأتي:[5]

- الطريقة التجارية (طريقة الفائدة البسيطة).
- طريقة التناسب (الطريقة العقلانية).

مثال رقم 07:

أوجد جملة مبلغ قيمته 5500 دج وظف بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا لمدة 8 سنوات و3 شهور؟

الحل:

- باستخدام طريقة الفائدة البسيطة: تحتسب جملة المبلغ الموظف للفترات الزمنية الصحيحة بالفائدة المركبة مضافا إليها فائدة هذه الجملة المحسوبة للفترة الأقل من سنة بتطبيق علاقة الفائدة البسيطة، وذلك كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n + C(1+t)^n \times \frac{t}{100} \times \frac{m}{360}$$

$$C_n = C(1+t)^n \left(1 + \frac{t}{100} \times \frac{m}{360}\right)$$

حيث تمثل j عدد أيام التوظيف بعد نهاية السنوات الصحيحة، وفي مثالنا أعلاه عدد الأيام بعد نهاية السنة الثامنة هي 3 أشهر أي 90 يوم.

بتطبيق العلاقة السابقة نجد:

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n\left(1+\frac{t}{100}\times\frac{j}{360}\right)} = 5500(1.05)^8\left(1+\frac{5}{100}\times\frac{90}{360}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{C_n} = 8227.58DA}$$

- باستخدام طريقة التناسب (الطريقة العقلانية):

تسمى هذه الطريقة بالطريقة الرياضية وتعتمد على مبادئ الرياضيات المالية وتتمثل في استعمال الجدول المالي رقم 01 للسنوات الكاملة بينما تستعمل الجداول الملحقة المخصصة للشهور أو الأيام للمدة الباقية المرافقة لعدد السنوات الكاملة (الجدول المالي رقم 6). ونجد الجملة كما يلي:

$$\mathbf{C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+t)^{n+\frac{m}{12}} = C(1+t)^n(1+t)^{\frac{m}{12}}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\mathbf{\frac{m}{12}}$ بـ $\mathbf{\frac{J}{360}}$.

بناء على معطيات المثال وبتطبيق طريقة التناسب نجد:

$$\mathbf{C_{n,\frac{J}{360}} = C(1+t)^n(1+t)^{\frac{J}{360}}} = 5500(1.05)^8(1.05)^{\frac{90}{360}}$$

$$\boxed{\mathbf{C_{n,\frac{J}{360}}} = 8225.73DA}$$

✓ إذا كان n غير موجود في الجدول المالي (داخل النطاق):

إذا كانت القيمة التي نبحث عنها لا توجد في الجدول المالي، في هذه الحالة يمكننا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد المدة كما يلي:[6]

$$\mathbf{C_n = C(1+t)^n \ \mapsto \ (1+t)^n = \frac{C_n}{C}}$$

بعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 01 في العمود الذي يقابل المعدل فنجدها محصورة بين X_1 و X_2 تقابلان n_1 السنة الكبرى و n_2 السنة الصغرى على التوالي ونطبق القانون التالي:

$$j = \frac{\left\{\frac{C_n}{C} - X_2\right\} \times 360}{(X_1 - X_2)}$$

ومنه تكون المدة هي n_2 القيمة الصغرى مضافا إليها **j** التي تم حسابها من خلال القانون السابق

مثال رقم 08:

تم توظيف مبلغ من المال قدره 32000 دج بمعدل فائدة مركب 3,5% لينتج جملة قدرها 48593,95دج

المطلوب:

- أوجد المدة التي وُظف بها المبلغ؟

الحل:

$C_n = 48593,95DA$

$C = 32000DA$

$t = 3.5\%$

- ايجاد المدة التي وُظف بها المبلغ:

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} \quad \mapsto \quad (1.035)^n = \frac{48593,95}{32000} = 1.51856094$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 01 عند العمود الذي يقابل معدل 3.5% ونجد هذه القيمة محصورة بين $n_1 = 12ans$ و $n_2 = 13ans$، لذلك نطبق القانون التالي:

$$j = \frac{\left\{\frac{C_n}{C} - X_2\right\} \times 360}{(X_1 - X_2)} = \frac{\{1.51856094 - 1.51106866\} \times 360}{(1.56395606 - 1.51106866)}$$

$$\boxed{j = 50.99 = 51\ j}$$

وعليه تقدر المدة بـ 12 سنة و51 يوم.

ب. حالة عدم وجود المعدل بالجدول المالي:

✓ إيجاد الجملة المركبة في حالة المعدل غير مجدول:

عندما يكون معدل الفائدة المركب غير موجود في الجدول المالي، فإنه يمكن إتباع إحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة الجذر النوني: هنا يتم حساب الجملة المركبة كما تناولناها عند التطرق إلى كيفية حساب الجملة.
- طريقة الجداول المالية: وهنا يتم الاستعانة بالجداول المالية كما يلي:

ليكن t هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل المجدول وليكن المعدل الأكبر t_1 والمعدل الأصغر t_2 وبطريقة التناسب نكتب:

$$(\mathbf{1+t})^{\mathbf{n}} = (1+t_2)^n + \frac{((1+t_1)^n - (1+t_2)^n) \times (t-t_2)}{(t_1-t_2)}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $(1+t)^n$ في حساب الجملة.

مثال رقم 09:

بطريقة الجداول المالية، أوجد جملة مبلغ قدره 2000 دج وُظف لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركب سنوي 5.8%؟

الحل:

$C = 2000DA$

$t = 5{,}8\%$

$n_1 = 5ans$

- ايجاد جملة المبلغ:

من الجدول المالي رقم 1 نجد أن المعدل 5.8% محصور بين المعدلين 5.75% و 6%. ومنه:

$$(\mathbf{1+t})^{\mathbf{n}} = (1+t_2)^n + \frac{((1+t_1)^n - (1+t_2)^n) \times (t-t_2)}{(t_1-t_2)}$$

$$(\mathbf{1,058})^{\mathbf{5}} = (1{,}0575)^n + \frac{((1{,}06)^n - (1{,}0575)^n) \times (0{,}058-0{,}0575)}{(0{,}06-0{,}0575)}$$

$$(\mathbf{1,058})^{\mathbf{5}} = 1{,}32566022$$

$$C_n = C(1+t)^n \quad \mapsto \quad C_5 = 2000(1{,}058)^5 = 2000(1{,}32566022)$$

$$\boxed{C_5 = 2651{,}32DA}$$

✓ إيجاد معدل الفائدة في حالة قيمة حاصل $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي:

في حالة أن حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب X_1 والقيمة الصغرى X_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير ب t_1 والمعدل الصغير ب t_2.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:[7]

$$t = \frac{(t_1 - t_2) \times \left(\frac{C_n}{C} - X_2\right)}{(X_1 - X_2)} + t_2$$

مثال رقم 10:

اقترض أحد الأشخاص مبلغا من المال قدره 2000 دج لمدة 4 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2705.89 دج.

المطلوب:

- أوجد معدل الفائدة المركب؟

الحل:

$C_n = 2330{,}67DA$

$C = 1550DA$

$n_1 = 5ans$

- إيجاد معدل الفائدة المركب الذي وُظف به المبلغ:

$$t = \frac{(t_1 - t_2) \times \left(\frac{C_n}{C} - X_2\right)}{(X_1 - X_2)} + t_2 = \frac{(0.08 - 0.0775) \times (1.352945 - 1.34793551)}{(1.36048896 - 1.34793551)} + 0.0775$$

$$\boxed{t = 0.07849 \quad \mapsto \quad t = 7.845\%}$$

5. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:

معدلات الفائدة في الحالة العادية تحدد سنويا، وقد تكون جزئية من السنة كأن تكون يومية، شهرية، فصلية، رباعية أو سداسية، هذه المعدلات غير السنوية تستوجب إيجاد معدل متناسب أو متكافئ مع المدة محل الدراسة على النحو التالي:

أ. المعدلات المتناسبة:

يكون المعدل متناسبا (t_k) مع المعدل السنوي t إذا تساوت نسبتهما مع نسبة فترتيهما، على أن يحققا نفس الجملة المحصلة عند حساب الفائدة البسيطة، وتكون القيمة المحصلة للمعدل المتناسب أكبر من القيمة المحصلة للمعدل السنوي عند الحساب بالفائدة المركبة، حيث يحسب هذا الأخير وفق العلاقة التالية:[8]

$$t_k = \frac{t}{k}$$

حيث: k تمثل عدد مرات التوظيف خلال السنة الواحدة.

مثال رقم 11:

أحسب المعدلات المتناسبة مع المعدلات التالية:

- معدل سداسي متناسب مع المعدل السنوي 10%. $t_s = \frac{t_a}{2} = \frac{10}{2} = 5\%$
- معدل فصلي (ثلاثي) متناسب مع المعدل سنوي 9%. $t_t = \frac{t_a}{4} = \frac{9,5}{4} = 2,375\%$
- معدل شهري متناسب مع المعدل سنوي 6%. $t_m = \frac{t_a}{12} = \frac{6}{12} = 0.5\%$
- معدل ثلاثي متناسب مع المعدل سداسي 6%. $t_t = \frac{t_s}{2} = \frac{6}{2} = 3\%$
- معدل سنوي متناسب مع المعدل شهري 1%. $t_a = t_m \times 12 = 1 \times 12 = 12\%$

ب. المعدلات المتكافئة:

المعدلات المتكافئة أو المتعادلة هي عكس المعدلات المتناسبة، إذ تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة في حالة الفائدة المركبة. فنقول عن معدلين أنهما متكافئان إذا اختلفا في قيمتهما وفي فترة رسملتهما، لكنهما ينتجان نفس الجملة المكتسبة لأي فترة زمنية مشتركة محددة. إذ يمكن تحديد الصيغة العامة للمعدل المكافئ كما يلي[9]:

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1$$

حيث: k تمثل عدد مرات التوظيف خلال السنة الواحدة.

مثال رقم 12:

احسب المعدلات المتكافئة مع المعدلات التالية:

- معدل سداسي مكافئ لمعدل سنوي 10%. $t_S = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1 = (1.1)^{\frac{1}{2}} - 1 = 4.8\%$
- معدل فصلي مكافئ المعدل سنوي 9.5 %. $t_t = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1 = (1.095)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.29\%$
- معدل شهري مكافئ لمعدل سنوي 6%. $t_m = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1 = (1.06)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.48\%$
- معدل ثلاثي مكافئ المعدل سداسي 6%. $t_t = (1+t_s)^{\frac{1}{k}} - 1 = (1.06)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2.95\%$
- معدل سنوي مكافئ المعدل شهري 1%. $t_a = (1+t_m)^{K} - 1 = (1.01)^{12} - 1 = 12.68\%$

تمارين المحور الأول: الفائدة المركبة.

التمرين الأول:

قام شخص بتوظيف ثلاث مبالغ لمدة 12 سنة لدى أحد البنوك التي تقدم فائدة مركبة بمعدل 7% سنويا، هذه المبالغ على النحو التالي:

- قرض بقيمة 12300 دج؛
- قرض بقيمة 8400 دج؛
- قرض بقيمة 7200 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة كل من الفائدة والجملة المحصلة بأكثر من طريقة؟

التمرين الثاني:

أودع شخص مبلغ 70000 دج في أحد البنوك لاستثماره بالفائدة المركبة، فوجد أن جملة ماله في البنك بعد 11 سنة قد بلغت 142900 دج.

المطلوب:

- أحسب معدل التوظيف المستخدم من طرف البنك؟

التمرين الثالث:

قام شخص في تاريخ 27 أفريل 2021 باقتراض مبلغ مالي قدره 2800 دج بمعدل فائدة 5% سنويا، فإذا دفع ما عليه في نهاية المدة مبلغ 4156.62 دج واتفق على أن تضاف الفائدة كل نصف سنة.

المطلوب:

- أوجد تاريخ سداد القرض؟

التمرين الرابع:

أوجد المدة اللازمة التي يصل مبلغ 1000 دج إلى ضعف قيمته، علما أن الفائدة المركبة تحسب على الأساس التالي:

- 3% سنويا مرة في السنة؛
- 6% سنويا مرتين في السنة؛
- 9% ثلاث مرات في السنة.

التمرين الخامس:

اقترض شخص مبلغ مالي من أحد البنوك بمعدل فائدة 5% سنويا، لمدة 5 سنوات، وبعد سنة ونصف أعاد توظيف أصل المبلغ المقترض في بنك آخر برسملة نصف سنوية لمدة ثلاث سنوات ونصف، وبمعدل فائدة 8% سنويا.

فإذا علمت أن هذا الشخص حقق من العمليتين عائد قدره 1784,3 دج.

المطلوب:

- ما هي قيمة المبلغ المقترض؟

التمرين السادس:

قام شخص بتوظيف مبلغ 80000 دج بمعدل فائدة مركبة سنوي لمدة 10 سنة، بثلاث طرق مختلفة على النحو التالي:

- الطريقة الأولى: يوظف المبلغ بمعدل 5% والفائدة تضاف مرتين بالسنة؛
- الطريقة الثانية: يوظف المبلغ بمعدل فائدة 4% سنويا للست سنوات الأولى، و6% على أن تضاف الفائدة كل ثلث سنة للسنوات الأربع المتبقية؛
- الطريقة الثالثة: يوظف المبلغ بمعدل فائدة سنوية متزايدة: الأربع سنوات الأولى بمعدل 5%، الأربع سنوات الثانية بمعدل 6%، وباقي السنوات بمعدل 7%.

المطلوب:

- ما هي طريقة التوظيف التي تحقيق أحسن محصلة وأحسن فائدة؟

التمرين السابع:

أحسب بطريقتين الجملة المحصلة عن توظيف مبلغ 80000 دج، بمعدل 6% لمدة 8 سنة و3 أشهر؟

التمرين الثامن:

إحدى البنوك التجارية تتعامل مع عملائها على أساس معدل فائدة مركبة 8% سنويا، على أن تضاف الفائدة نهاية كل سنة، طلب أحد العملاء أن تضاف له الفائدة شهريا بدل من إضافتها سنويا.

المطلوب:

- أوجد معدل الفائدة الشهري الذي يعرضه البنك على عميله شرط أن يحقق البنك نفس المعدل الحقيقي السابق الذي يتعامل به مع باقي عملائه؟

المحور الثاني: خصم واستبدال الديون طويلة الأجل.

Long-term debt discounting and replacement

إن مفاهيم وتعاريف الخصم واستبدال الديون طويلة المدى، لا تختلف كثيراً عن مفاهيم وتعاريف الخصم واستبدال الأوراق التجارية في الفائدة البسيطة، باستثناء أنه في الأولى تتم على أساس فائدة مركبة أو بمعدل خصم مركب، بينها في الثانية تتم على أساس فائدة بسيطة أو بمعدل خصم بسيط، وعليه يمكننا التطرق إلى:

أولا: الخصم والقيمة الحالية (معدل فائدة مركب):

يعبر خصم الديون طويلة الأجل عن المقابل الذي يخصمه المدين أو (البنك) في نظير سداد قيمة الدين أو (قيمة السند) قبل ميعاد الاستحقاق الأصلي، يطبق هذا الخصم على الأصول ذات آجال استحقاق تزيد عن سنة واحدة، ويتم حسابه من خلال طرح القيمة الحالية من القيمة الاسمية للسند، مثلما هو معمول به في الفائدة البسيطة باستثناء أن القيمة الحالية تأخذ بالفائدة المركبة على النحو التالي:[10]

$$\mathbf{E = V_n - V_a}$$

حيث:

$$\mathbf{V_a = V_n(1+t)^{-n}}$$

بتعويض علاقة القيمة الحالية في علاقة الخصم نجد:

$$E = V_n - V_a = V_n - V_n(1+t)^{-n}$$

$$\mathbf{E = V_n[1-(1+t)^{-n}]}$$

مثال رقم 01:

أوجد القيمة الحالية وقيمة الخصم لسند قيمته الاسمية 100000 دج يستحق بعد 5 سنوات، إذا كان معدل الخصم 7.5%؟

الحل:

$Vn = 100000DA$

$n = 5ans$

$t = 7.5\%$

- إيجاد القيمة الحالية:

$$\mathbf{V_a = V_n(1+t)^{-n}} = 100000(1.075)^{-5}$$

$$\boxed{\mathbf{V_a} = 69655.86DA}$$

- إيجاد قيمة الخصم:

- الطريقة الأولى: $\mathbf{E = V_n - V_a} = 100000 - 69555.86 = 30344.14DA$
- الطريقة الثانية: $\mathbf{E = V_n[1-(1+t)^{-n}]} = 100000\left[1-(1.075)^{-5}\right] = 30344.14DA$

مثال رقم 02:

حسبت القيمة الحالية لدين قدره 5000 دج يستحق الدفع بعد 7 سنوات فبلغت قيمتها 2531.811دج.

المطلوب:

- حدد معدل الفائدة الذي حسبت على أساسه؟

الحل:

$Vn = 5000DA$

$Va = 2531.811DA$

$n = 7ans$

- إيجاد معدل الفائدة:

لدينا:

$$\mathbf{V_a = V_n(1+t)^{-n}}$$

$$\mathbf{V_a = \frac{V_n}{(1+t)^n}}$$

وعليه:

$$\mathbf{(1+t)^n = \frac{V_n}{V_a}}$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{V_n}{V_a}} - 1 = \sqrt[7]{\frac{5000}{2531,811}} - 1$$

$$\boxed{t = 10.21\%}$$

ثانيا: استبدال الديون طويلة الأجل.

1. تعريف استبدال الديون طويلة الأجل:

يعدّ استبدال الديون لأكثر من سنة تطبيقًا مباشرًا للفائدة المركبة، على غرار استبدال الأوراق التجارية بالفائدة البسيطة، وذلك من خلال تساوي القيم الحالية القديمة مع القيم الحالية الجديدة. إذ يلجأ العديد من المدينين إلى استبدال السندات المالية بسند مالي واحد أو عدة سندات مالية جديدة تستحق في تواريخ تختلف عن تاريخ سداد السندات المالية القديمة، سواء قبل أو بعد تاريخ استحقاقها، وبنفس المعدل. وفي كلتا الحالتين تكون للسند أو السندات المالية الجديدة قيمة مغايرة لقيمة السند أو السندات المالية الأصلية، ويعود هذا الاختلاف إلى الفترة الزمنية وإلى تاريخ الاستحقاق الجديد، سواء كان قبل أو بعد تاريخ سداد السندات المالية الأصلية.

وإذا وجدت عدة ديون متساوية أو مختلفة القيمة تستحق في تواريخ محددة، ورغبنا في استبدالها بدين واحد أو بعدة ديون جديدة تختلف من حيث القيمة أو تاريخ الاستحقاق أو كليهما معًا، فإنه لتفادي الإضرار بالمدين أو الدائن نتيجة عملية الاستبدال، يجب أن يتساوى مجموع القيم الحالية للديون الأصلية (القديمة) في تاريخ معين مع مجموع القيم الحالية للديون المعدلة (الجديدة) في نفس التاريخ. وتعرف هذه المساواة بمعادلة القيمة، والتي يمكن من خلالها تحديد قيم المبالغ أو الديون المجهولة.

2. طرق تسوية واستبدال الديون طويلة الأجل:

في الحالات الغير متوقعة قد تتغير ظروف كل من المدينين والدائنين مما يدفعهم إلى الاتفاق على تغيير شروط السندات المالية واستبدالها بطرق وتواريخ جديدة تتناسب وظروف الطرفين المتفق عليها، كل هذا من خلال استبدال وتكافؤ الديون طويلة المدى.

أ. **التكافؤ سندين ماليين:**

نقول عن سندين ماليين قيمتها الاسمية V_{n1}، وV_{n2} أنهما متكافئتين إذا تساوت قيمتهما الحالية $V_{a1} = V_{a2}$، وذلك بعد خصمهما بمعدل خصم t، ولفترتي استحقاقn_1، وn_2 على التوالي:[11]

لدينا: $$V_{a1} = V_{a2}$$

$$V_{n1}(1+t)^{-n1} = V_{n2}(1+t)^{-n2}$$

مثال رقم 03:

سند مالي قيمته الاسمية 600000 دج يستحق بعد 6 سنوات نريد استبداله بسند مالي قيمته الاسمية 503772 دج.

المطلوب:

- أحسب موعد الاستحقاق للسند المالي الجديد إذا كان معدل الخصم 6% بفائدة مركبة؟

الحل:

$Vn1 = 600000DA \qquad Vn2 = 503772DA$

$t = 6\%$

$n_1 = 6ans \qquad n_2 = ?$

- إيجاد موعد استحقاق الورقة الجديدة:

لدينا: $$V_{a1} = V_{a2}$$

$$V_{n1}(1+t)^{-n1} = V_{n2}(1+t)^{-n2}$$

$$(1+t)^{-n2} = \frac{V_{n1}(1+t)^{-n1}}{V_{n2}}$$

ندخل اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\log(1+t)^{-n2} = \log\frac{V_{n1}(1+t)^{-n1}}{V_{n2}}$$

$$-n \times \log(1+t) = \log\frac{V_{n1}(1+t)^{-n1}}{V_{n2}}$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\log \frac{V_{n1}(\mathbf{1}+\mathbf{t})^{-\mathbf{n1}}}{V_{n2}}}{\mathbf{log}(\mathbf{1}+\mathbf{t})}$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\log \frac{600000(1{,}06)^{-\mathbf{6}}}{503772}}{\mathbf{log}(1{,}06)}$$

$$\boxed{\mathbf{n} = 4\text{ans}}$$

ب. تكافؤ عدة سندات مالية:

عند وجود عدة ديون أو سندات مالية فإن تسوية واستبدال هذه الديون لا تخرج عن إحدى الحالات التالية:

- –استبدال ورقة دين جديدة واحدة بتاريخ سابق لتواريخ استحقاق الديون القديمة؛
- –استبدال ورقة دين جديدة واحدة بتاريخ لاحق لتواريخ استحقاق الديون القديمة؛
- استبدال مجموعة من الديون القديمة بدين جديد واحد بتاريخ سابق لتواريخ استحقاق بعض الديون القديمة، ولاحق للبعض الآخر من الديون؛
- استبدال ورقة دين واحدة تستحق خلال تواريخ استحقاق الديون القديمة؛
- استبدال عدة ديون تستحق خلال تواريخ استحقاق ديون قديمة؛
- سداد جزء من الدين الأصلي نقدا على أن يتم تحرير سند جديد للدين المتبقي يستحق في تواريخ جديدة بما يسمح للمدين بتسديد القيم الجديدة وفق تواريخها الجديدة.

لأجل استبدال عدة ديون بديون أخرى نعتمد طريقتين تختلفان عن بعضهما كما يلي:[12]

- **التسوية في تاريخ الاستحقاق المشترك:** هي الحالة التي لا تتساوى فيها القيمة الاسمية للورقة الوحيدة مع مجموع القيم الاسمية للديون أو الأوراق الأخرى كما يلي:

$$V'_N \neq V_{n1} + V_{n2} + \cdots + V_{nk}$$

وعليه يحصل التكافؤ (التسوية) وفق العلاقة التالية:

$$V'_a = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ai}$$

مثال رقم 04:

ثلاث سندات قيمتها الاسمية لكل منها (50000) تستحق بعد (6/4/3) سنوات على الترتيب، نريد استبدالها بسند واحد يستحق بعد ٣ سنوات.

المطلوب:

- أوجد القيمة الاسمية للسند، إذا علمت أن معدل الخصم 4.8؟

الحل:

$V_{n1} = V_{n2} = V_{n3} = 50000DA$

$t = 4.8\%$

$n_1 = 3ans \quad n_2 = 4an \quad n_3 = 6ans$

$V'_a = ? \quad N' = 3ans$

- إيجاد القيمة الاسمية للورقة الجديدة:

شرط التكافؤ: $V'_a = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ai}$

وعليه:

$$V'_n(1+t)^{-n'} = V_{n1}(1+t)^{-n1} + V_{n2}(1+t)^{-n2} + V_{n3}(1+t)^{-n3}$$

$$V'_n = \frac{V_{n1}(1+t)^{-n1} + V_{n2}(1+t)^{-n2} + V_{n3}(1+t)^{-n3}}{(1+t)^{-n'}}$$

$$V'_n = \frac{V_{n1}[(1+t)^{-n1}+(1+t)^{-n2}+(1+t)^{-n3}]}{(1+t)^{-n'}} = \frac{50000[(1.048)^{-3}+(1.048)^{-4}+(1.048)^{-6}]}{(1.048)^{-3}}$$

$$\boxed{V'_n = 14114.955DA}$$

➢ **التسوية في تاريخ الاستحقاق المتوسط:** هي الحالة التي تتساوى فيها القيمة الاسمية للورقة الجديدة مع مجموع القيم الاسمية للديون أو الأوراق الأخرى كما يلي:

$$V'_n = V_{n1} + V_{n2} + \cdots + V_{nk}$$

فحالة الاستحقاق الوسطي (المتوسط) تقوم على فكرة استبدال أوراق السندات أو ديون قديمة بدين أو ورقة دين قيمتها الاسمية تعادل مجموع القيم الاسمية للديون القديمة، ويسمى تاريخ استحقاق الدين الجديد بتاريخ الاستحقاق المتوسط، حيث يتوسط تاريخ استحقاق الدين الجديد تواريخ استحقاق الديون القديمة، بمعنى أنه يقع بين تاريخ استحقاق أول دين وتاريخ استحقاق آخر دين.

بافتراض أن لدينا مجموعة من السندات القديمة قيمها الاسمية هي V_{nk}، ... ،V_{n2}،V_{n1}، وأن تواريخ استحقاقها هيn_1، ... ،n_1،n_1، على التوالي، ويراد استبدالها بدين واحد قيمته الاسمية تعادل مجموع القيم الاسمية لها.

لتحقيق التكافؤ لابد من تحقق الشرط التالي: $V'_a = \sum_{i=1}^{i=k} V_{ai}$

$$\mathbf{V'_n - V'_n(1+t)^{-n'} = V_{n1} - V_{n1}(1+t)^{-n1} + V_{n2} - V_{n2}(1+t)^{-n1} + \cdots + V_{nk} - V_{nk}(1+t)^{-n1}}$$

بما أن القيم الاسمية متساوية في الطرفين، يمكن اختزالها لتصبح العلاقة كما يلي:

$$\mathbf{V'_n(1+t)^{-n'} = V_{n1}(1+t)^{-n1} + V_{n2}(1+t)^{-n1} + \cdots + V_{nk}(1+t)^{-n1}}$$

ومن هذه الأخيرة يمكن استخراج العلاقة المختصرة لحساب تاريخ الاستحقاق المتوسط $\mathbf{(1+t)^{-n'}}$، مع أخذ معدل الخصم بعين الاعتبار:

$$\mathbf{(1+t)^{-n'} = \frac{V_{n1}(1+t)^{-n1} + V_{n2}(1+t)^{-n1} + \cdots + V_{nk}(1+t)^{-n1}}{V'_n}}$$

$$\mathbf{(1+t)^{-n'} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{V_{ni}(1+t)^{-ni}}{V_{ni}}}$$

بعد استخراج قيمة $\mathbf{(1+t)^{-n'}}$ يمكن إيجاد قيمة $\mathbf{n'}$ باستخدام الطريقة اللوغاريتمية أو طريقة الجداول المالية (الجدول رقم 02).

مثال رقم 05:

أحسب تاريخ الاستحقاق المتوسط، الذي في نهايته يمكن للتاجر أن يستبدل الديون التالية، بدين واحد مبلغه يساوي مجموع القيم الإسمية للديون الثلاثة كما يلي:

- 30000دج تستحق بعد 2 سنة.

- 32000دج تستحق بعد 04 سنوات.
- 53000دج تستحق بعد 05 سنوات.

علما بأن الفائدة المركبة تحسب بمعدل 06% سنويا.

الحل:

$V_{n1} = 30000DA \quad V_{n2} = 32000DA \quad V_{n3} = 53000DA$

$n_1 = 2ans \quad n_2 = 4ans \quad n_3 = 5ans$

$V'_n = 115000DA \quad N = ? \quad t = 6\%$

- إيجاد تاريخ الاستحقاق المتوسط للورقة الجديدة:

$$(1+t)^{-n'} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{V_{ni}(1+t)^{-ni}}{V_{ni}}$$

$$(1+t)^{-n'} = \frac{V_{n1}(1+t)^{-n1} + V_{n2}(1+t)^{-n1} + \cdots + V_{nk}(1+t)^{-n1}}{V'_n}$$

$$(1.06)^{-n'} = \frac{30000(1.06)^{-2} + 32000(1.06)^{-4} + 53000(1.06)^{-5}}{115000}$$

ندخل اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\log(1.06)^{-n'} = \log\frac{30000(1.06)^{-2} + 32000(1.06)^{-4} + 53000(1.06)^{-5}}{115000}$$

$$-n' \times \log(1.06) = \log\frac{30000(1.06)^{-2} + 32000(1.06)^{-4} + 53000(1.06)^{-5}}{115000}$$

$$n' = -\frac{\log\frac{30000(1.06)^{-2} + 32000(1.06)^{-4} + 53000(1.06)^{-5}}{115000}}{\log(1.06)}$$

$$\boxed{N \simeq 4ans}$$

وعليه مدة الاستحقاق المتوسط هي أربع سنوات بالتقريب.

تمارين المحور الثاني: خصم واستبدال الديون طويلة الأجل.

أولا: تمارين خاصة بخصم الديون طويلة الأجل.

التمرين الاول:

أوجد القيمة الحالية وقيمة الخصم لسند قيمته الاسمية 100000 دج يستحق بعد 5 سنوات، إذا كان معدل الخصم 7.5%؟

التمرين الثاني:

ما هو مبلغ الخصم لورقة مالية قيمتها الاسمية 95000 دج تستحق بعد 6 سنوات تم خصمها بمعدل فائدة سنوي 5% وما هي القيمة الحالية لهذه الورقة؟

التمرين الثالث:

أوجد القيمة الاسمية لدين يسدد بعد 6 سنوات، علما أن قيمته الحالية 10000 دج بمعدل خصم 10%؟

التمرين الرابع:

تاجر مدين بمبلغ 45000 دج يستحق في نهاية 6 سنوات، فإذا قام هذا التاجر بخصم هذا الدين بمعدل فائدة مركب 4% سنويا.

المطلوب:

- أوجد القيمة الحالية الحقيقية لهذا الدين؟
- أحسب مقدار الخصم الحقيقي المركب؟

التمرين الخامس:

ثلاث ديون قيمتها الإسمية 30.000 دج ، 40.000 دج 50.000 دج على التوالي تستحق بعد (6/5/3) سنوات على التوالي.

المطلوب:

- أوجد كل من القيمة الحالية وقيمة الخصم للديون الثلاثة، مع العلم أن قيمة الفائدة المركبة هي 7% سنويا؟

التمرين السادس:

أوجد القيمة الحالية لدين مبلغه 85000 دج يستحق في نهاية 7 سنوات، وذلك بمعدل فائدة 5% سنويا، إذا كانت الفائدة تضاف كل 6 شهور؟

التمرين السابع:

أوجد مدة دين قيمته الإسمية 10000 دج خصم بمعدل فائدة مركبة تقدر ب 4% سنويا، فبلغت القيمة الحالية ما مقداره 8889.96336 دج؟

ثانيا: تمارين خاصة باستبدال الديون طويلة الأجل.

التمرين الأول:

سند قيمته الاسمية 600000 دج يستحق بعد 6 سنوات، نريد استبداله بسند قيمته الاسمية 503772 دج.

المطلوب:

- أحسب موعد الاستحقاق للسند الجديد إذا كان معدل الخصم 6% بفائدة مركبة؟

التمرين الثاني:

اتفق مدين مع دائن على تعويض الدين الذي تبلغ قيمته 175000 دج والذي يستحق بعد 6 سنوات بدين آخر قيمته 215000 دج يستحق بعد 8 سنوات.

المطلوب:

- ما هو معدل الخصم المركب الذي يسمح بتكافؤ هذين الدينين؟

التمرين الثالث:

ثلاث سندات قيمتها الاسمية لكل منها (50000) تستحق بعد (6/4/3) سنوات على الترتيب، نريد استبدالها بسند واحد يستحق بعد ٣ سنوات.

المطلوب:

- أوجد القيمة الاسمية للسند، إذا علمت أن معدل الخصم 4.8%؟

التمرين الرابع:

ثلاثة رؤوس أموال قيمها على التوالي 65000 دج، 110000 دج 160000 دج تستحق بعد 4، 6، 8 سنوات على الترتيب بمعدل فائدة مركبة 8% عوضت برأسمالين قيمتهما 85000 دج و275000 دج يستحقان بعد 5 سنوات و n سنة على الترتيب.

المطلوب:

- أوجد قيمة n؟

التمرين الخامس:

مؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

- الدين الأول قيمته 5000000 دج يستحق بعد 4 سنوات
- الدين الثاني قيمته 7000000 دج يستحق بعد 6 سنوات.

إذا أرادت المؤسسة سداد ديونها بدين واحد قيمته الاسمية تساوي مجموع القيم الاسمية للدينين.

المطلوب:

- أحسب تاريخ استحقاق الدين الجديد إذا كان معدل الفائدة المركبة 8% سنويا؟

التمرين السادس:

أحسب مدة استحقاق دين وحيد يقدر ب 9625دج يسمح بتسديد الديون التالية:

- 2500 دج يستحق الدفع بعد 02 سنة.
- 6000 دج يستحق الدفع بعد 03 سنوات.

مع العلم أن معدل الفائدة المطبق يقدر ب 10% سنويا.

التمرين السابع:

أحسب تاريخ الاستحقاق المتوسط، الذي في نهايته يمكن للتاجر أن يستبدل الديون التالية، بدين واحد مبلغه يساوي مجموع القيم الإسمية للديون الثلاثة كما يلي:

- 30000دج تستحق بعد 2 سنة.
- 32000دج تستحق بعد 04 سنوات.
- 53000دج تستحق بعد 05 سنوات.

علما بأن الفائدة المركبة تحسب بمعدل 06% سنويا.

التمرين الثامن:

لنفرض أن المؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

- 20.000 دج بعد 5 سنوات.
- 30.000 دج بعد 7 سنوات.
- 45.000 دج بعد 8 سنوات.

المطلوب:

- حدد مدة الاستحقاق المتوسط لهذه الديون مع العلم أن معدل الفائدة المركب هو 8% سنويا؟

بعد مدة سدد الدين الأول وعوض الدينين الباقيين بدين وحيد يسدد بعد 6 سنوات.

المطلوب:

- حدد قيمة هذا الدين بنفس المعدل السابق؟

التمرين التاسع:

شخص مدين للبنك الجزائري الخارجي بالمبالغ التالية: مبلغ 32000 دج أستحق قبل سنة (لم يسدد)، مبلغ 55000 دج يستحق بعد 4 سنوات.

اتفق هذا الشخص مع دائنه على تعويض الدين بثلاثة مبالغ كما يلي: مبلغ 19000 دج يستحق اليوم، مبلغ ثاني يستحق بعد سنتين، ومبلغ ثالث يستحق بعد 4 سنوات، وذلك بمعدل خصم مركب سنوي 8% (الفائدة تحتسب كل ست أشهر).

المطلوب:

- أحسب قيمة المبلغ الثاني والثالث إذا علمت أن المبلغ الثالث يساوي ضعف المبلغ الثاني؟

هوامش الفصل الثاني:

1 - منصور بن عوف عبد الكريم، مرجع سبق ذكره، ص45.

2 - Walid Khoufi & Ines Dami; le calcul financier et la notation la valeur temporelle de l'argent; école supérieure de commerce de safex; TUNISIE; on line: https://coursexamens.org/images/Etudes_superieures/Marketing/math_financiere/Cours_et_exocours2valeurtemporelle.pdf ; p9; consulte le: 13-11-2020.

3 – مناضل الجواري، مرجع سبق ذكره، ص113-115.

4 – مناضل الجواري، مرجع سبق ذكره، ص115.

5 – باديس بوعزة، مرجع سبق ذكره، ص140-141.

6 – منصور بن عوف، مرجع سابق ذكره، ص54.

7 – منصور بن عوف، مرجع سابق ذكره، ص55.

8 – عبد الله توفيق الهلباوي، مرجع سبق ذكره، ص98.

9 – عبد الله توفيق الهلباوي، مرجع سبق ذكره، ص99.

10 – قنان ابراهيم، الرياضيات المالية-دروس وتمارين محلولة-، الصفحات الزرقاء العالمية للنشر والتوزيع، الجزائر، 2016، ص74.

11 – بن طلحة صليحة، مرجع سبق ذكره، 107.

12 – منصور بن عوف عبد الكريم، مرجع سبق ذكره، ص66-69.

الفصل الثالث: الدفعات المتساوية بالفائدة المركبة.

الدفعات المتساوية بالفائدة المركبة:

Equal payments with compound interest

الدفعات هي مبالغ مالية متساوية يتكرر دفعها على فترات منتظمة، أي أن الفاصل الزمني بين كل مبلغ والمبلغ الذي يليه ثابت، يطلق على المبلغ الذي يدفع دوريا بمبلغ الدفعة، ومثال ذلك أقساط (دفعات) بوليصة التأمين على الحياة التي تتوقف بوفاة المؤمن عليه، ويسمى هذا الفاصل الزمني بالمدة التي غالبا ما تكون سنوية، سداسية، ثلاثية، شهرية أو حسب معيار الاتفاق، كما يجب أن يكون معدل الفائدة ثابت بالنسبة لكل الأقساط.[1]

تصنف الدفعات المالية المتساوية بالفائدة المركبة حسب تاريخ دفعها إلى:

- ✓ دفعات نهاية المدة: هي الدفعات التي تدفع في نهاية الفترات الزمنية وتسمى بدفعات السداد؛
- ✓ دفعات بداية المدة: هي الدفعات التي تدفع في بداية الفترات الزمنية وتسمى بدفعات التوظيف أو الاستثمار.

المحور الأول: دفعات آخر المدة (دفعات السداد).

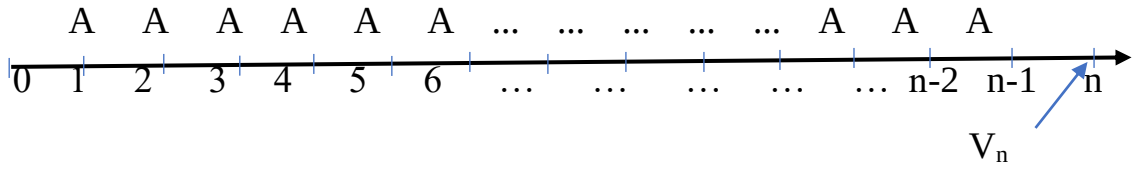
.End-of-term payments (payment installments)

دفعات آخر المدة هي دفعات عادية تسدد في آخر المدة بصفة دورية منتظمة، وتستخدم غالباً كدفعات لسداد القروض (دفعات استهلاك).

1. جملة الدفعات لآخر المدة:

لإيجاد جملة الدفعات العادية، نقوم بحساب جملة كل دفعة مع الأخذ بعين الاعتبار بأنها تدفع في نهاية المدة. ومجموع جملة هذه الدفعات تعبر عن مجموع الدفعات من الدفعة الأولى إلى غاية الدفعة الأخيرة حتى نهاية مدة الدفعات مجتمعة.

فإذا رمزنا بـ A لقيمة الدفعة، وt المعدل الفائدة وn لعدد الفترات الزمنية وبالتالي عدد الدفعات، فإننا نعبر عن ذلك بالشكل التالي:



إن استخلاص القانون الأساسي لحساب جملة الدفعات العادية يتطلب منا بداية حساب جملة كل دفعة، كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول رقم (04): القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة.

الفترة	القيمة المحصلة
الدفعة الأولى: ستدفع في نهاية الوحدة الزمنية الأولى، أي أنها ستوظف لمدة $\mathbf{n-1}$	$\mathbf{A(1+t)^{n-1}}$
الدفعة الثانية: ستدفع في نهاية الوحدة الزمنية الثانية، أي أنها ستوظف لمدة $\mathbf{n-2}$	$\mathbf{A(1+t)^{n-2}}$
الدفعة الثالثة: ستدفع في نهاية الوحدة الزمنية الثالثة، أي أنها ستوظف لمدة $\mathbf{n-3}$	$\mathbf{A(1+t)^{n-3}}$
.....	.....
.....	.....
الدفعة ما قبل الأخيرة: ستدفع قبل نهاية المدة بفترة واحدة	$\mathbf{A(1+t)^{n-(n-1)}}$
الدفعة الأخيرة: ستدفع في نهاية المدة أي لا توظف نهائيا	$\mathbf{A(1+t)^{n-n}}$

المصدر: انظر: ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص: 79.

بملاحظة عناصر الجدول يتبين أنها تعبر عن متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول (U_0) أي A وأساسها (r) أي $(1+t)$ وعدد حدودها n، في شكل: $\boldsymbol{S = U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n}$

$$\mathbf{V = A[1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \cdots + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}]}$$

وعليه فجملة دفعات متساوية عادية لآخر المدة تحسب وفق علاقة مجموع متتالية هندسية، كما يلي:[2]

$$S = U_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

أي:

$$\mathbf{V = A\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

ملاحظة: يتم حساب قيمة العلاقة $\frac{\mathbf{(1+t)^n-1}}{\mathbf{t}}$ بالآلة الحاسبة أو من خلال الجدول المالي رقم 3.

مثال رقم 01:

يسدد شخص ثمان دفعات متساوية كل نهاية سنة، قيمة الدفعة الواحدة 2500 دج.

المطلوب:

- أحسب جملة ما يدفعه إذا كان معدل الفائدة 5%؟

الحل:

$\mathbf{A} = 2500DA$

$t = 5\%$

$n = 8ans$

- إيجاد جملة ما يدفعه هذا الشخص:

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 2500\frac{(1.05)^8 - 1}{0.05} = 2500(9.459109)$$

$$\boxed{V = 23647.77DA}$$

حسب الجدول المالي رقم 03 فإن القيمة المقابلة لمعدل سنوي 5% وعدد دفعات ثمانية، تكون قيمة $\frac{(1+t)^n-1}{t} = 9.459109$، لتكون قيمة الجملة بذلك مساوية لـ 23647.77 دج.

مثال رقم 02:

شخص يدفع لمدة 10 سنوات مبلغ 15000 دج في نهاية كل سنة لتسديد قيمة منزله الذي اشتراه بالتقسيط.

المطلوب:

- أحسب قيمة المنزل في نهاية المدة إذا كان معدل الفائدة المطبق هو 6,5%؟

الحل:

$\mathbf{A} = 15000DA$

$t = 6{,}5\%$

$n = 10ans$

- إيجاد جملة الدفعات:

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 15000\frac{(1.065)^{10} - 1}{0.065} = 15000(13.494423)$$

$$\boxed{V = 202416.345DA}$$

2. تطبيقات على عناصر جملة دفعات آخر المدة:

باستخدام قانون جملة الدفعات المتساوية لآخر المدة، يمكن اجراء العمليات التالية:[3]

أ. **حساب قيمة الدفعة:**

اعتمادا على قانون القيمة المكتسبة لدفعات آخر المدة، يمكن استخلاص قانون قيمة الدفعة (القانون الأول لحساب قيمة الدفعة) كما يلي:

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\mathbf{A = V\frac{t}{(1+t)^n - 1}}$$

ملاحظة: يتم حساب قيمة العلاقة $\frac{t}{(1+t)^n-1}$ بالآلة الحاسبة أو مقلوب العلاقة بالاعتماد على الجدول المالي رقم 3.

كما يمكن حساب مبلغ الدفعة باستخدام الطريقة التالية:

لدينا:

$$A = V\frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

نضرب العلاقة في الكسر $\frac{(1+t)^{-n}}{(1+t)^{-n}}$ فتصبح العلاقة على النحو التالي:

$$A = V\frac{t}{(1+t)^n - 1} \times \frac{(1+t)^{-n}}{(1+t)^{-n}}$$

$$A = V\left[\frac{t(1+t)^{-n}}{(1+t)^n \times (1+t)^{-n} - (1+t)^{-n}}\right]$$

لدينا: $1 = (1+t)^n \times (1+t)^{-n}$

تصبح العلاقة من الشكل:

$$A = V\left[\frac{t(1+t)^{-n}}{1 - (1+t)^{-n}}\right]$$

نضيف في البسط $t - t$ نجد:

$$A = V\left[\frac{t - t + t(1+t)^{-n}}{1 - (1+t)^{-n}}\right]$$

نخرج t عامل مشترك نجد:

$$A = V\left[\frac{t - t(1-(1+t)^{-n})}{1-(1+t)^{-n}}\right]$$

وعليه تصبح العلاقة (القانون الثاني لحساب قيمة الدفعة) على النحو التالي:

$$\mathbf{A = V\left[\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t\right]}$$

حيث يمكن استخراج مقلوب مقدار $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 04، أو استخراج أو نفس القيمة $(\frac{t}{1-(1+t)^{-n}})$ من الجدول رقم 05.

مثال رقم 03:

إذا كانت جملة 7 دفعات سنوية لآخر المدة بلغت في نهاية المدة 21955.24 دج، وذلك بمعدل فائدة مركبة 9,5%.

المطلوب:

- أحسب قيمة الدفعة؟

الحل:

$\mathbf{V} = 21955{,}24DA$

$t = 7.5\%$

$n = 7ans$

- إيجاد قيمة الدفعة:

$$A = V\frac{t}{(1+t)^n - 1} = 21955{,}24\frac{0.075}{(1.075)^7 - 1} = 21955{,}24 \times (0{,}1138003)$$

$$\boxed{A = 2498{,}51DA}$$

حسب الجدول المالي رقم 03 فإن القيمة المقابلة لمعدل سنوي 5% وعدد دفعات ثمانية، تكون قيمة $\frac{t}{(1+t)^n-1} = 0{,}1138003$، لتكون قيمة الجملة بذلك مساوية لـ 2498.51 دج.

ب. حساب معدل الفائدة:

لأجل ايجاد معدل الفائدة المطبق عند توظيف دفعات متساوية لآخر المدة، نقوم بإيجاد حاصل قسمة $\frac{V}{A}$ التي تعبر عن قيمة $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ الموجودة في الجدول المالي رقم (3)، كما يلي:

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\frac{V}{A} = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

بعد حساب $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ يمكننا استخراج قيمة t المقابلة لعدد السنوات المعلومة من الجدول رقم (3).

مثال رقم 04:

في نهاية كل سنة يتم تسديد دفعة بقيمة 29000 دج لمدة 9 سنوات، فأنتجت جملة قدرها 326431,54 دج.

المطلوب:

- أحسب معدل الفائدة؟

الحل:

$\mathbf{V} = 326431{,}54\text{DA}$

$A = 29000\text{DA}$

$n = 9\text{ans}$

- إيجاد معدل الفائدة:

$$\frac{V}{A} = \frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{326431{,}54}{29000} = 11{,}256260$$

بالرجوع للجدول المالي رقم (03) والبحث عن القيمة 11,256260 المقابلة لـ 9 فترات نجدها تقابل معدل الفائدة 5.5%.

ت. حساب عدد الدفعات (عدد الفترات):

لأجل ايجاد عدد فترات توظيف دفعات السداد، نقوم بإيجاد حاصل قسمة $\frac{V}{A}$ التي تعبر عن قيمة $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ الموجودة في الجدول المالي رقم (3)، كما يلي:

$$\frac{V}{A} = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

بعد حساب $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ يمكننا استخراج قيمة n المقابلة لمعدل الفائدة المعلوم من الجدول رقم (3).

أما إذا أردنا استخراج n بالطريقة الحسابية فإننا نكمل الحساب الرياضي عل النحو التالي:

$$\frac{V \times t}{A} = (1+t)^n - 1$$

$$(1+t)^n = \frac{V \times t}{A} + 1$$

هنا يمكن استعمال الجدول المالي رقم (01) الذي يعطينا قيمة n المقابلة لمعدل الفائدة المعلوم الذي يعبر عنه بالعلاقة $(1+t)^n$ التي يتم حسابها من قيمة $\frac{V \times t}{A} + 1$.

بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\log(1+t)^n = \log\left(\frac{V \times t}{A} + 1\right)$$

$$n \times \log(1+t) = \log\left(\frac{V \times t}{A} + 1\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{V \times t}{A} + 1\right)}{\log(1+t)}$$

مثال رقم 05:

إذا كانت دفعات تسديد آخر المدة، قيمة الواحدة منها 36000 دج أنتجت بعد عدد من الفترات جملة 356308,81 دج بمعدل فائدة 6%.

المطلوب:

- أحسب عدد الدفعات.

الحل:

$$\mathbf{V} = 356308{,}81\text{DA}$$

$$\text{A} = 36000\text{DA}$$

$$\text{t} = 6\%$$

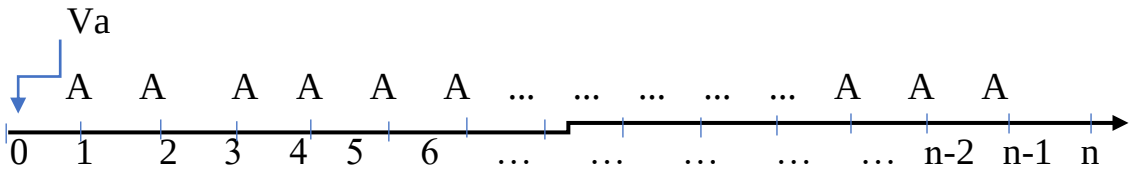
- إيجاد عدد الدفعات:

$$\text{n} = \frac{\log\left(\frac{\text{V}\times\text{t}}{\text{A}}+1\right)}{\log(1+\text{t})} = \frac{\log\left(\frac{356308{,}81\times 0.06}{36000}+1\right)}{\log(1.06)} \qquad \boxed{\text{n} = 10\text{ans}}$$

3. القيمة الحالية لدفعات آخر المدة:

القيمة الحالية للدفعات المتساوية لنهاية المدة هي قيمة الدفعات في بداية أول دفعة، يعني في بداية مدة أول دفعة (في الزمن 0) على أساس معدل فائدة مركبة معين، ونرمز لها بالرمز V_a، للحصول على هذه القيمة يجب إيجاد القيمة الحالية لكل دفعة على حدا في بداية المدة، ومن ثم جمعها فينتج لنا القيمة الحالية للدفعات.

فلو فرضنا أن لدينا n دفعة لآخر المدة وأن t معدل الفائدة المركبة، فإن القيمة الحالية لكل دفعة يمكن تمثيلها كما يلي:



إن استخلاص القانون الأساسي لحساب القيمة الحالية للدفعات العادية يتطلب منا بداية حساب القيمة الحالية لكل دفعة. نلخصها في الجدول التالي:

الجدول رقم (05): القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة.

الفترة	القيمة الحالية
الدفعة الأولى	$\mathbf{V_{a_1} = a(1+t)^{-1}}$
الدفعة الثانية	$\mathbf{V_{a_2} = a(1+t)^{-2}}$

الدفعة الثالثة	$\mathbf{V_{a_3} = a(1+t)^{-3}}$
.....	.....
.....	.....
الدفعة ما قبل الأخيرة $\mathbf{(n-1)}$	$\mathbf{V_{a_{n-1}} = a(1+t)^{-(n-1)}}$
الدفعة الأخيرة $\mathbf{n}$	$\mathbf{V_{a_n} = a(1+t)^{-n}}$

المصدر: انظر: ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص: 80.

لحساب القيمة الحالية الإجمالية **Va** يكفي جمع القيم الحالية لهذه الدفعات عند اللحظة 0 وبالتالي:

$$\mathbf{Va} = A[(1+t)^{-n} + (1+t)^{-n+1} + \cdots + (1+t)^{-3} + (1+t)^{-2} + (1+t)^{-1}]$$

وعليه فالقيمة الحالية لدفعات متساوية عادية لآخر المدة بالاعتماد على قانون متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول (U_0) أي $A(1+t)^{-n}$ وأساسها (r) أي $\mathbf{(1+t)}$ وعدد حدودها **n**، يعطى مجموعها على النحو التالي:[4]

$$\boldsymbol{S = U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n}$$

وعليه فالقيمة الحالية للدفعات المتساوية العادية لآخر المدة تحسب وفق علاقة مجموع متتالية هندسية، كما يلي:[5]

$$S = U_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

أي:

$$Va = A(1+t)^{-n} \times \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\mathbf{Va = A\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

حيث يستخرج المقدار $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ من الجدول المالي رقم (04) أو يمكن حسابه بالآلة الحاسبة.

مثال رقم 06:

ثماني دفعات لآخر المدة قيمة الواحدة 90000 دج طبق عليها معدل 7%.

المطلوب:

- أحسب القيمة الحالية لهذه الأقساط؟

الحل:

$\mathbf{A} = 90000\text{DA}$

$t = 7\%$

$n = 8\text{ans}$

- إيجاد القيمة الحالية للأقساط المذكورة:

$$Va = A\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 90000\frac{1-(1{,}07)^{-8}}{0{,}07} = 90000(5.971299)$$

$$\boxed{V_a = 2498{,}51\text{DA}}$$

حيث تم استخراج المقدار $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 5.971299$ من الجدول المالي رقم (04).

تمارين المحور الأول: دفعات آخر المدة (دفعات السداد).

التمرين الأول:

يودع شخص 5000 دج نهاية كل سنة لمدة 8 سنوات، يتم رسملة هذه الدفعات بمعدل فائدة مركب 7٪.

المطلوب:

- حدد القيمة المكتسبة بعد الدفعة الأخيرة؟

التمرين الثاني:

تقدر جملة 9 دفعات متساوية لآخر السنة 9990 دج، تم توظيفها بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا.

المطلوب:

- أحسب قيمة الدفعة؛
- أحسب معدل الفائدة الجديد إذا وظفت هذه الدفعات بنفس المدة فأنتجت جملة قدرها 10863.58 دج.

التمرين الثالث:

من أجل تسديد قيمة عقار قرر شخص إيداع مبلغ 150000 دج في نهاية كل سنة، ولمدة 8 سنوات بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا.

المطلوب:

- أحسب قيمة هذا العقار؟

التمرين الرابع:

تودع مؤسسة في نهاية كل سداسي مبلغ 60000 دج في حسابها البنكي لمدة ثماني سنوات متتالية.

المطلوب:

- ما هي جملة ما ترسل لهذه المؤسسة في حسابها البنكي في نهاية مدة الإيداع إذا كان البنك يمنح فوائد مركبة بمعدل 12% سنويا؟

التمرين الخامس:

قررت إحدى المؤسسات أن تودع في نهاية كل سنة مبلغ 10000 دج من أرباحها السنوية في حسابها البنكي، وبعد أن أودعت الدفعة السادسة، اتفقت مع البنك بأن تودع في بداية كل سداسي مبلغ 5000 دج ولمدة 6 سنوات.

المطلوب:

- أحسب جملة ما تحصل عليه المؤسسة في نهاية مدة الإيداع إذا كان البنك يحتسب فوائد بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا؟

التمرين السادس:

قررت إحدى المؤسسات أن تودع في حسابها البنكي مبلغ 16000 دج في نهاية كل سنة لمدة عشر سنوات متتالية بمعدل فائدة مركبة 10% سنوياً.

المطلوب:

- أحسب قيمة الجملة المحصل عليها لصالح المؤسسة في حسابها؟
- استنتج رصيد هذه المؤسسة إذا كانت هذه الدفعات فورية؟

التمرين السابع:

اتفق شخص مع دائنه على أن يدفع في نهاية كل سنة مبلغ 150000 دج لمدة 8 سنوات، لكنه أراد التخلص من هذا الدين فورا.

المطلوب:

- أحسب قيمة ما عليه دفعه، إذا كان معدل الفائدة المركبة 10% سنويا؟

المحور الثاني: دفعات أول المدة (دفعات الاستثمار).

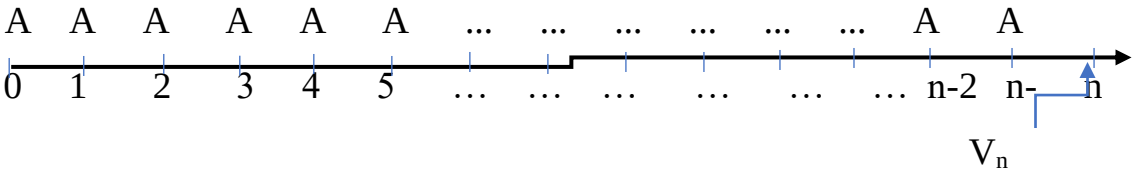
.Early term payments (investment payments)

الدفعات الغير عادية الفورية أو دفعات توظيف (دفعات الاستثمار) هي دفعات تسدد في بداية المدة بصفة دورية منتظمة، تستخدم غالبا كدفعات لحساب التوفير أو أقساط التأمين.

1. جملة الدفعات لأول المدة:

لإيجاد جملة الدفعات غير العادية أو الفورية نقوم بحساب جملة كل دفعة، مع الأخذ بعين الاعتبار بأنها تدفع في بداية المدة. ومجموع جملة هذه الدفعات تعبر عن مجموع الدفعات من الدفعة الأولى إلى غاية الدفعة الأخيرة حتى نهاية مدة الدفعات مجتمعة.

فإذا رمزنا بـ A لقيمة الدفعة، وt المعدل الفائدة وn لعدد الفترات الزمنية وبالتالي عدد الدفعات، فإننا نعبر عن ذلك بالشكل التالي:



إن استخلاص القانون الأساسي لحساب جملة الدفعات غير العادية يتطلب منا بداية حساب جملة كل دفعة، كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول رقم (06): القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة.

الفترة	القيمة المحصلة
الدفعة الأولى: ستدفع في بداية الوحدة الزمنية الأولى، أي أنها ستوظف لمدة $\mathbf{n}$	$\mathbf{A(1+t)^n}$
الدفعة الثانية: ستدفع في بداية الوحدة الزمنية الثانية، أي أنها ستوظف لمدة $\mathbf{n-1}$	$\mathbf{A(1+t)^{n-1}}$
الدفعة الثالثة: ستدفع في بداية الوحدة الزمنية الثالثة، أي أنها ستوظف لمدة $\mathbf{n-2}$	$\mathbf{a(1+t)^{n-2}}$
.....	.....
.....	.....
الدفعة الأخيرة: ستدفع في بداية المدة الأخيرة أي توظف سنة واحدة	$\mathbf{a(1+t)^1}$

المصدر: انظر: ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص: 82.

بملاحظة عناصر الجدول نلاحظ أنها تعبر عن متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول (U_0) أي $A(1+t)$ وأساسها (r) أي $(1+t)$ وعدد حدودها n. يعطى مجموعها كما يلي:

$$\boldsymbol{S} = U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$\mathbf{V} = A[(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \cdots + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1} + (1+t)^n]$$

وعليه فجملة دفعات متساوية غير عادية لأول المدة تحسب وفق علاقة مجموع متتالية هندسية، كما يلي:[6]

$$S = U_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\mathbf{V' = A(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

يمكن حساب القيمة بالآلة الحاسبة أو باستخدام الجدول المالي رقم (03)

نلاحظ أن جملة دفعات بداية المدة تساوي جملة دفعات نهاية المدة مضروبة في المقدار $(1+t)$ أي:

$$\mathbf{V' = V(1+t)}$$

كما يمكن حساب جملة دفعات بداية المدة بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{V' = A\left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1\right]}$$

مثال رقم 01: نريد حساب جملة ست دفعات سنوية مبلغ الدفعة الواحدة 80000 دج في حالتين:

- الدفعة في نهاية المدية؛
- الدفعة في بداية المدة.

علما أن معدل الفائدة المركبة هو 8%.

الحل:

$\mathbf{A} = 80000DA$

$t = 8\%$

$n = 6ans$

- إيجاد الجملة المحصلة في الحالتين:
  - الحالة الأولى دفعات آخر المدة:

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 80000\frac{(1{,}08)^6 - 1}{0{,}08} = 80000(7.335929)$$

$$\boxed{V = 586874.32DA}$$

- الحالة الثانية دفعات أول المدة:

طريقة أولى:

$$V' = V(1+t) = 586874.32 \times 1.08 = 633824.27DA$$

طريقة ثانية:

$$V' = A\left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1\right] = 80000\left[\frac{(1.08)^7 - 1}{0.08} - 1\right] = 80000(7.928035)$$

$$\boxed{V' = 633824.27DA}$$

2. تطبيقات على عناصر جملة دفعات أول المدة:

باستخدام قانون جملة الدفعات المتساوية لأول المدة، يمكن إجراء العمليات التالية:[7]

أ. حساب قيمة الدفعة:

اعتمادا على قانون القيمة المكتسبة لدفعات أول المدة، يمكن استخلاص قانون قيمة الدفعة كما يلي:

$$V' = A(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\mathbf{A = V'\frac{t}{(1+t)[(1+t)^n - 1]}}$$

مثال رقم 02:

أودع شخص دفعات متساوية في بداية كل سنة لمدة 10 سنوات، بمعدل فائدة سنوي 5%، فحصل في نهاية مدة الإيداع على جملة قدرها 300000 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة الدفعة؟

الحل:

$$\mathbf{V' = 300000DA}$$

$t = 5\%$

$n = 10ans$

- إيجاد قيمة الدفعة:

$$A = V' \frac{t}{(1+t)[(1+t)^n - 1]} = 300000 \frac{0.05}{(1.05)[(1.05)^{10} - 1]}$$

$\boxed{A = 2715.59DA}$

ب. حساب معدل الفائدة:

لأجل ايجاد معدل الفائدة المطبق عند توظيف دفعات متساوية لبداية المدة، نقوم بإيجاد حاصل قسمة $\frac{V'}{A} + 1$ التي تعبر عن قيمة $\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}$ الموجودة في الجدول المالي رقم (3)، كما يلي:

$$V' = A(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\frac{V'}{A} + 1 = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t}$$

بعد حساب $\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}$ يمكننا استخراج قيمة t المقابلة لعدد السنوات المعلومة من الجدول رقم (3).

مثال رقم 03:

كون أحد الأشخاص مبلغ قدره 54684.09 دج بواسطة 5 دفعات استثمار قيمة كل واحدة منها 10000 دج.

المطلوب:

- ما هو معدل الفائدة المعمول به؟

الحل:

$V' = 54684.09DA$

$A = 10000DA$

$n = 5ans$

- إيجاد معدل الفائدة:

$$\frac{V'}{A}+1=\frac{(1+t)^{5+1}-1}{t}=\frac{54684.09}{10000}+1=6.468409$$

بالرجوع للجدول المالي رقم (03) وبالبحث عن القيمة 6.468409 المقابلة لـ 6 فترات نجدها تقابل معدل الفائدة 3%.

ت. حساب عدد الدفعات:

لأجل ايجاد عدد فترات توظيف دفعات الاستثمار، نقوم بإيجاد حاصل قسمة $\frac{V'}{A}+1$، التي تعبر عن قيمة $\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}$ الموجودة في الجدول المالي رقم (3)، كما يلي:

$$V'=A(1+t)\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

$$\frac{V'}{A}+1=\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}$$

بعد حساب $\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}$ يمكننا استخراج قيمة n المقابلة لمعدل الفائدة المعلوم من الجدول رقم (3).

أما إذا أردنا استخراج n بالطريقة الحسابية فإننا نكمل الحساب الرياضي عل النحو التالي:

$$\left(\frac{V'}{A}+1\right)t=(1+t)^{n+1}-1$$

$$(1+t)^{n+1}=\left(\frac{V'\times t}{A}+t+1\right)$$

هنا يمكن استعمال الجدول المالي رقم (01) الذي يعطينا قيمة n المقابلة لمعدل الفائدة المعلوم، الذي يعبر عنه بالعلاقة $(1+t)^{n+1}$ التي يتم حسابها من قيمة $\frac{V'\times t}{A}+t+1$.

بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\log(1+t)^{n+1}=\log\left(\frac{V'\times t}{A}+t+1\right)$$

$$(n+1)\log(1+t)=\log\left(\frac{V'\times t}{A}+t+1\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{V' \times t}{A} + t + 1\right)}{\log(1+t)} - 1$$

مثال رقم 04:

يريد تاجر تكوين رأس مال قدره 11659.5092 دج بدفعات متساوية تدفع في بداية كل سنة قدرها 20000 دج بمعدل فائدة سنوي 4%.

المطلوب:

- أحسب المدة التي تحقق تصور التاجر؟

الحل:

$$V' = 11659.5092DA$$

$$A = 20000DA$$

$$t = 4\%$$

- إيجاد عدد الدفعات:
  - الطريقة الحسابية (اللوغاريتمية):

$$n = \frac{\log\left(\frac{V' \times t}{A} + t + 1\right)}{\log(1+t)} - 1 = \frac{\log\left(\frac{11659{,}5092 \times 0.04}{20000} + 1.05\right)}{\log(1.05)} - 1$$

$\boxed{n = 5ans}$

  - طريقة الجداول المالية:

$$\frac{V}{A} + 1 = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} = \frac{11659{,}5092}{20000} + 1 = 6.632975$$

بالرجوع للجدول المالي رقم (03) نجد أن القيمة 6.632975 المقابلة المعدل 4% تقابل عدد الفترات 6. وعليه نجد أن عدد الدفعات هو 5 دفعات ($n + 1 = 6$ معناه $n = 5$).

3. القيمة الحالية لدفعات أول المدة:

القيمة الحالية للدفعات المتساوية لبداية المدة هي قيمة الدفعات في بداية أول دفعة، يعني في بداية مدة أول دفعة (في الزمن 0) على أساس معدل فائدة مركبة معين، ونرمز لها بالرمز V'_a، للحصول على هذه القيمة يجب إيجاد القيمة الحالية لكل دفعة على حدا في بداية المدة، ومن ثم جمعها فينتج لنا القيمة الحالية للدفعات.

فلو فرضنا أن لدينا n دفعة لأول المدة وأن t معدل الفائدة المركبة، فإن القيمة الحالية لكل دفعة يمكن تمثيلها كما يلي:



إن استخلاص القانون الأساسي لحساب القيمة الحالية للدفعات غير العادية يتطلب منا بداية حساب القيمة الحالية لكل دفعة. نلخصها في الجدول التالي:

الجدول رقم (07): القيمة الحالية لدفعات بداية المدة.

الفترة	القيمة الحالية
الدفعة الأولى	$V'_1 = a$
الدفعة الثانية	$V'_2 = a(1+t)^{-1}$
الدفعة الثالثة	$V'_3 = a(1+t)^{-2}$
.....	.....
.....	.....
الدفعة ما قبل الأخيرة	$V'_{n-1} = a(1+t)^{-(n-2)}$
الدفعة الأخيرة	$V'_n = a(1+t)^{-(n-1)}$

المصدر: ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، الجزء1، دار المحمدية، الجزائر، 1995، ص: 85.

لحساب القيمة الحالية الإجمالية V'_a يكفي جمع القيم الحالية لهذه الدفعات عند اللحظة 0 وبالتالي:

$$V'_a = A[(1+t)^{-n+1} + (1+t)^{-n+2} + \cdots + (1+t)^{-2} + (1+t)^{-1} + 1]$$

وعليه فالقيمة الحالية لدفعات متساوية غير عادية لأول المدة بالاعتماد على قانون متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول (U_0) أي $\mathrm{A}(1+\mathrm{t})^{-(\mathrm{n}-1)}$ وأساسها (r) أي $(\mathbf{1}+\mathbf{t})$ وعدد حدودها $\mathbf{n}$، فهو مجموع من الشكل: $\boldsymbol{S} = U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n$

وعليه فالقيمة الحالية الاجمالية تحسب وفق علاقة مجموع متتالية هندسية، كما يلي:[8]

$$S = U_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

أي:

$$\mathrm{V}'_a = \mathrm{A}(1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}+1} \times \frac{(1+\mathrm{t})^{\mathrm{n}} - 1}{(1+\mathrm{t}) - 1}$$

$$\mathrm{V}'_a = \mathrm{A}\left[\frac{(1+\mathrm{t}) - (1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}+1}}{\mathrm{t}}\right]$$

$$\mathrm{V}'_a = \mathrm{A}\left[\frac{t}{t} + \frac{1 - (1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}+1}}{\mathrm{t}}\right]$$

$$\mathrm{V}'_a = \mathrm{A}\left[1 + \frac{1 - (1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}+1}}{\mathrm{t}}\right]$$

يمكن الاعتماد على علاقة القيمة الحالية لدفعات آخر المدة لحساب القيمة الحالية لدفعات أول المدة، حيث يتبين أن الفرق بين النوعين هو فترة زمنية واحدة، فتطبيق علاقة القيمة الحالية لدفعات آخر المدة ترجع بدفعات أول المدة إلى الفترة (-1) وعليه يتعين الانتقال من هذه الأخيرة إلى الفترة 0، بضرب معامل القيمة الحالية لدفعات آخر المدة في المعامل $(1+\mathrm{t})$.

وعليه تحسب القيمة الحالية لدفعات أول المدة وفق العلاقة التالية:

$$\mathrm{V}'_a = \mathrm{A}\frac{1 - (1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{t}}(1+\mathrm{t})$$

تمارين المحور الثاني: دفعات أول المدة (دفعات الاستثمار).

التمرين الأول:

قرر أحد الأشخاص أن يودع بحسابه المصرفي في بداية كل سنة مبلغ 20000 دج ولمدة 8 سنوات. فإذا علمت أن البنك يمنحه فوائد مركبة بمعدل فائدة 10% سنوياً.

المطلوب:

- ما هو رصيد هذا الشخص بعد 10 سنوات من بداية إيداع أول دفعة. ثم استنتج رصيد هذا الشخص في حالة كون هذه الدفعات عادية؟

التمرين الثاني:

تودع سيدة مبلغ 15000 دج بداية كل 3 شهور بأحد البنوك.

المطلوب:

- احسب جملة مالها من مستحقات بعد خمس سنوات إذا كان معدل الفائدة المركبة 10% سنويا؟
- استنتج الرصيد في حالة كون هذه الدفعات عادية؟

التمرين الثالث:

قرر أحد التجار أن يودع في حسابه البنكي مبلغ 10000 دج في بداية كل ثلاثي لمدة خمس سنوات، ثم يودع بعد ذلك مبلغ 20000 دج في نهاية كل سداسي لمدة خمس سنوات أخرى.

المطلوب:

- أحسب رصيد هذا التاجر في نهاية مدة الإيداع، إذا كان معدل الفائدة المركبة 12% سنويا؟

التمرين الرابع:

قرر أحد الطلبة أن يودع مبلغ 5000 دج في بداية كل شهر في حسابه البنكي.

المطلوب:

- أحسب رصيده بعد ثلاث (3) سنوات (أثناء التخرج) إذا كان معدل الفائدة المركبة 12% سنويا؟
- أحسب جملة مستحقاته في حالة كون هذه الدفعات عادية؟

التمرين الخامس:

إذا كنت تحتاج مبلغ 50000 دج بعد ثلاث سنوات من الآن.

المطلوب:

- ما هي قيمة كل دفعة يجب عليك إيداعها شهرياً بأحد البنوك التي تحتسب لك فوائد مركبة بمعدل 9% سنويا وذلك في الحالتين الآتيتين:
  - إذا كان الإيداع أول كل شهر؛
  - إذا كان الإيداع نهاية كل شهر.

التمرين السادس:

أحسب القيمة الحالية لجملة دفعات قيمة الدفعة الواحدة 15000 دج تدفع في أول كل شهر ولمدة 5 سنوات، إذا كان معدل الفائدة المركبة 12% سنويا؟

التمرين السابع:

لشراء عقار تقترح عليك إحدى الوكالات التجارية أن تسدد قيمته خلال عشر سنوات قادمة على النحو التالي:

- أن تسدد فورا مبلغ 500000 دج؛
- أن تسدد خلال هذه المدة في شكل أقساط سنوية قيمة القسط الواحد 50000 دج، على أن تكون الدفعات الخمس الأولى فورية والباقي من المدة في شكل دفعات عادية؛

المطلوب:

- أحسب قيمة العقار، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة والخصم هو 10% سنويا؟

التمرين الثامن:

لشراء جهاز كومبيوتر يقترح عليك التاجر أن تسدد قيمته بأحد الأساليب التالية:

- الأسلوب الأول: أن تسدد قيمته نقدا بمبلغ 78250 دج؛
- الأسلوب الثاني: تدفع مبلغ 34510.56 دج فوراً والباقي يسدد على 5 أقساط سنوية مبلغها 12000 دج، تدفع أولها بعد سنة من الآن؛
- الأسلوب الثالث: تدفع مبلغ 42276.4 دج بعد ثلاث سنوات من الآن والباقي في شكل دفعات فورية سنوية قيمتها 15000 دج لمدة 3 سنوات من الآن.

المطلوب:

- أي الأساليب أفضل بالنسبة لك إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة في هذه الحالة هو 10% سنوياً؟

تهميش الفصل الثالث:

1 – مناضل الجواري، مرجع سبق ذكره، ص116.

2 – ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية دروس وتمارين، مرجع سابق، ص79.

3 – باديس بوعزة، مرجع سبق ذكره، ص169-171.

4 – مناضل الجواري، مرجع سبق ذكره، ص122.

5 – بلحمري خيرة، محاضرات في مادة رياضيات مالية، مطبوعات مقدمة لطلبة السنة ثانية علوم التسيير، جامعة المدية، الجزائر، 2022-2023، ص68-69.

6 – مناضل الجواري، مرجع سبق ذكره، ص120-121.

7 – بلحمري خيرة، مرجع سبق ذكره، ص81-83.

8 – مناضل الجواري، مرجع سبق ذكره، ص123.

يلجأ الأفراد والمؤسسات في العديد من الحالات إلى الاقتراض بهدف توفير السيولة اللازمة لمواجهة احتياجات التمويل، سواء عند إنشاء مؤسسة جديدة أو توسيع نشاطها أو تسوية ديون سابقة. إذ يتم إثبات القرض بموجب وثيقة قانونية تتضمن مجموعة من البيانات الأساسية، من بينها مبلغ القرض، تاريخ إبرام العقد، معدل الفائدة وطبيعتها، إضافة إلى نوع وقيمة الضمانات المقدمة.[1] ويطلق على عملية تسديد هذه القروض مصطلح **استهلاك القروض**، الذي يقصد به قيام المقترض بتسوية التزاماته المالية تجاه المقرض من خلال سداد أصل القرض مرفقا بالفوائد المستحقة، سواء تم ذلك دفعة واحدة أو على شكل أقساط متساوية أو غير متساوية[2].

يتفق أغلب المتعاقدين على تسوية واستهلاك القروض في شكل أقساط متساوية تضم الأصل دون الفائدة أو ما تسمى بطريقة القسط المتناقص، أو بأقساط متساوية تضم الأصل والفوائد تحت مسمى طريقة القسط المتساوي، كما سيأتي:

المحور الأول: طريقة القسط المتناقص (الاستهلاك الثابت).

The Declining Balance Method (Straight-Line Depreciation).

يتم في هذه الطريقة تسديد القرض على دفعات دورية تتألف كل منها من جزئين: جزء يمثل أقساط متساوية تدفع خلال مدة استهلاك القرض وجزء يتمثل في الفائدة على القرض المتبقي.

1. حساب قسط الاستهلاك الثابت:

يحسب قسط الاستهلاك الثابت بقسمة أصل أو مبلغ القرض على عدد الأقساط التي تتوافق مع الفترات الزمنية التي تسدد فيها، فإذا اعتبرنا أن العناصر الأساسية المستعملة في إعداد جدول استهلاك القرض هي:[3]

C_0 : قيمة أصل القرض؛

M : قسط الاستهلاك الثابت؛

A_i: القسط المتناقص؛

n : عدد الفترات الزمنية لاستهلاك القرض؛

I_i: الفائدة السنوية المتناقصة.

يمكن التعبير عما سبق بالعلاقة التالية:

$$M = \frac{C_0}{n}$$

2. جدول استهلاك القرض:

جدول استهلاك القرض يمثل كشف حساب يتم فيه متابعة القرض وكيفية استهلاكه، يمكن إعداده بواسطة الطرف الدائن (البنك)، حيث يستحق قسط الاستهلاك الثابت في نهاية كل فترة زمنية من فترات استهلاك القرض، أما الفائدة المستحقة في نهاية كل فترة يتم حسابها من قيمة القرض المتبقي (بعد خصم قسط الاستهلاك المتساوي) من كل فترة، إذ يتم حساب الفوائد (بافتراض تساوي الفترات الزمنية) على النحو التالي:

$$I_1 = C_0 \times t \times n_1$$
$$I_2 = (C_0 - M) \times t \times n_2$$
$$I_3 = (C_0 - 2M) \times t \times n_3$$

.....

.....

$$I_n = M \times t \times n_n$$

الجدول رقم (08): جدول استهلاك القرض (الفترات متساوية تدفع كل سنة).

N	أصل القرض في بداية السنة C_0	الفائدة I_i	القسط المتناقص A_i	قسط الاستهلاك الثابت M	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)
1	C_0	$I_1 = C_0 \times t$	$A_1 = C_0 \times t + M$	M	$C_1 = C_0 - M$
2	$C_1 = C_0 - M$	$I_2 = C_1 \times t$	$A_2 = C_1 \times t + M$	M	$C_2 = C_1 - 2M$
3	$C_2 = C_1 - M$	$I_3 = C_2 \times t$	$A_3 = C_2 \times t + M$	M	$C_3 = C_2 - 3M$
	.....	.....	.....	.....	.....
n_i	.....	.....	.....	....	.....
	$C_n = C_{n-1} - M$	$I_n = C_{n-1} \times t$	$A_n = C_{n-1} \times t + M$	M	0
مج	-	$\sum I$	$\sum A$	C_0	-

Source: Walid Khoufi & Ines Dami; le calcul financier et la notation la valeur temporelle de l'argent; école supérieure de commerce de safex; TUNISIE; on line: https://coursexamens.org/images/Etudes_superieures/Marketing/math_financiere/Cours_et_exocours2valeurtemporelle.pdf ; P50; consulte le: 13-11-202.

مثال رقم 01:

اقترض شخص مبلغا من المال قيمته 90000 دج من بنك CPA، واتفق على تسديده بطريقة الأقساط المتساوية والثابت، بحيث يدفع القسط في نهاية كل سنة بمعدل فائدة 8% لمدة 3 سنوات.

المطلوب:

- أحسب بنود الاستهلاك لهذا القرض خلال مدة التسديد؟
- أنجز جدول استهلاك القرض؟

الحل:

$n = 3ans$

$t = 8\%$

- حساب قسط الاستهلاك السنوي الثابت:

$$M = \frac{C_0}{n} = \frac{90000}{3} = 30000DA$$

- حساب الفوائد المستحقة سنويا:

$$I_1 = C_0 \times \mathrm{t} \times \mathrm{n} \implies I_1 = 90000 \times \frac{8}{100} \times 1 = 7200DA$$

$$I_2 = (C_0 - \mathrm{M}) \times \mathrm{t} \times \mathrm{n} \implies I_2 = 60000 \times \frac{8}{100} \times 1 = 4800DA$$

$$I_3 = (C_0 - 2\mathrm{M}) \times \mathrm{t} \times \mathrm{n} \implies I_3 = 30000 \times \frac{8}{100} \times 1 = 2400DA$$

- الأقساط الواجب سدادها سنويا:

$$A_1 = C_0 \times t \times n + M = 90000 * 0{,}08 \times 1 + 30000 = 37200DA$$

$$A_2 = C_1 \times t \times n + M = 60000 * 0{,}08 \times 1 + 30000 = 34800DA$$

$$A_3 = C_2 \times t \times n + M = 30000 * 0{,}08 \times 1 + 30000 = 32400DA$$

- إعداد جدول استهلاك القرض:

N	أصل القرض في بداية السنة C_0	الفائدة I_i	القسط المتناقص A_i	قسط الاستهلاك الثابت M	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)
1	90000	7200	37200	30000	60000
2	60000	4800	34800	30000	30000

0	30000	32400	2400	30000	3
-	$C_0 \equiv 90000$	$\sum A = 104400$	$\sum I = 14400$	-	مج

3. العلاقات العامة من جدول الاستهلاك:

هناك العديد من العلاقات الموجودة بجدول القرض تمكننا من استخراج علاقات تربط مختلف عناصره على النحو التالي:

أ. أصل القرض:

بما أن قسط الاستهلاك السنوي الثابت يعطى بالعلاقة التالية:

$$M = \frac{C_0}{n}$$

فإن أصل القرض في بداية المدة يكون وفق العلاقة التالية:

$$C_0 = M * n$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n} M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

ب. علاقة الدفعات فيما بينها:

لدينا: (n بالسنوات ودفع الأقساط يكون في نهاية كل سنة)

$$A_1 = M + I_1 = C_0 \times t + M = C_0 \times t + \frac{C_0}{n}$$

$$A_2 = M + I_2 = C_1 \times t + M = C_1 \times t + \frac{C_0}{n}$$

$$A_3 = M + I_3 = C_2 \times t + M = C_2 \times t + \frac{C_0}{n}$$

.....

.....

$$A_n = M + I_n = C_{n-1} \times t + M = C_{n-1} \times t + \frac{C_0}{n}$$

$$A_{n+1} = M + I_{n+1} = C_n \times t + M = C_n \times t + \frac{C_0}{n}$$

ولدينا:

$$C_n = C_{n-1} - \frac{C_0}{n}$$

أي:

$$A_{n+1} = \frac{C_0}{n} + \left(C_{n-1} - \frac{C_0}{n}\right) \times t$$

$$A_{n+1} = \frac{C_0}{n} + C_n \times t - \frac{C_0}{n} \times t$$

وعليه تصبح العلاقة من الشكل:

$$\boldsymbol{A_{n+1} = A_n - \frac{C_0}{n} \times t}$$

ت. مجموع الدفعات:

من العلاقة السابقة نلاحظ أن الدفعات تشكل فيما بينها متتالية حسابية حدها الأول A_1 وأساسها $\frac{C_0}{n} \times t$ (فائدة الاستهلاك) وعدد حدودها n من الشكل:

$$\sum_{K=1}^{n} A_K = \left(\frac{A_1 + A_n}{2}\right) * n$$

حالة المثال السابق:

$$\sum A = \left(\frac{37200 + 34800}{2}\right) \times 3 = 104400DA$$

ث. الدفعة الأخيرة في الجدول:

$$A_n = M \times t + M$$

$$\boldsymbol{A_n = M(t+1)}$$

حالة المثال السابق:

$$A_n = 30000(1.08) = 322400DA$$

ج. مجموع الفوائد:

من خلال جدول استهلاك القرض نلاحظ أن الفوائد تكون فيما بينها متتالية حسابية، حدها الأول $I_1 = C_0 \times t$ وحدها الأخير $I_n = C_{n-1} \times t$ وأساسها $\frac{C_0}{n} \times t$ (فائدة الاستهلاك) وعدد حدودها n، من الشكل:

$$\sum_{K=1}^{n} I_K = \left(\frac{C_0 \times t + C_{n-1} \times t}{2}\right) \times n$$

$$\sum_{K=1}^{n} \mathrm{I_K} = \left(\frac{\mathrm{C_0}\times \mathrm{t}+\frac{\mathrm{C_0}}{\mathrm{n}}\times t}{2}\right)\times \mathrm{n}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \mathrm{I_K} = \left(\frac{1+\frac{1}{\mathrm{n}}}{2}\right)\mathrm{C_0}\times t\times \mathrm{n}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \mathrm{I_K} = \left(\frac{\frac{1+\mathrm{n}}{\mathrm{n}}}{2}\right)\mathrm{C_0}\times \mathrm{t}\times \mathrm{n}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \mathrm{I_K} = \left(\frac{1+\mathrm{n}}{2\mathrm{n}}\right)\mathrm{C_0}\times \mathrm{t}\times \mathrm{n}$$

$$\boldsymbol{\sum_{K=1}^{n} \mathrm{I_K} = \left(\frac{1+\mathrm{n}}{2}\right)\mathrm{C_0}\times t}$$

حالة المثال السابق:

$$\sum \mathrm{I} = \left(\frac{1+3}{2}\right)90000\times 0.08 = 14400DA$$

ح. الفرق بين دفعتين:

لدينا:

$$A_{n-1} - A_n = (\mathrm{M}+\mathrm{I_{n-1}}) - (\mathrm{M}+\mathrm{I_n})$$

$$A_{n-1} - A_n = \mathrm{M}+\mathrm{I_{n-1}} - \mathrm{M} - \mathrm{I_n}$$

$$\boldsymbol{A_{n-1} - A_n = \mathrm{I_{n-1}} - \mathrm{I_n}}$$

حالة المثال السابق:

$$34800 - 32400 = 4800 - 2400$$

المحور الثاني: طريقة استهلاك القرض بدفعات متساوية (طريقة التقسيط المتساوي).

The Loan Amortization Method with Equal Installments (Equal Payment Method).

وفق هذه الطريقة يقوم المدين بسداد أصل القرض والفوائد على شكل دفعات متساوية في نهاية كل فترة (سنوية، سداسية، شهرية، .....الخ) زمنية متساوية، وفي نهاية مدة التسديد يكون المقترض قد سدد ما عليه من دين إضافة إلى الفوائد، أي أن الدفعة تشمل جزء من قيمة القرض الأصلي، وجزء من الفوائد المستحقة على القرض.[4]

1. حساب القسط المتساوي (قيمة الدفعة):

تعتبر الأقساط دفعات عادية، بحيث في نهاية مدة القرض مجموع الدفعات تمثل جملة القرض المدفوع، أما أصل القرض في بداية السنة فتساوي القيمة الحالية للدفعات، وتعطى قيمة الدفعة بالعلاقة التالية:

يمكن إيجاد قيمة القسط المتساوي من خلال مساواة قيمة أصل القرض بالقيمة الحالية لمجموع الأقساط الدورية المتساوية، من الشكل:[5]

$$C_0 = \mathrm{A}\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$A = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

حيث:

C_0 : قيمة أصل القرض؛

A: القسط المتساوي وهو يتكون من الاستهلاك والفائدة؛

n : عدد الفترات الزمنية لاستهلاك القرض.

كما يمكن إيجاد قيمة القسط من خلال مساواة جملة أصل القرض بجملة الأقساط المخصصة لاستهلاك هذا القرض كما يلي:

$$C_0(1+t)^n = \mathrm{A}\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$A = C_0 \frac{t(1+t)^n}{(1+t)^n-1}$$

بالضرب الطرفين في $(1+t)^{-n}$ نحصل على العلاقة التالية:

$$A = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

كما تعبر I_i عن الفائدة السنوية التي تتناقص حسب السنوات، فهي تطبق على أصل القرض كل سنة حسب العلاقة التالية:

$$I_1 = C_0 * i$$

2. جدول استهلاك القرض:

جدول استهلاك القرض للقسط المتساوي يشمل على رصيد أصل القرض في بداية الفترات وفي نهايتها، وأيضا الفوائد المستحقة كل فترة، كما يضم قيمة الاستهلاكات والأقساط الدورية المتساوية. كل ذلك موجود في الجدول أدناه على النحو التالي:

الجدول رقم (09): جدول استهلاك القرض (الفترات متساوية تدفع كل سنة).

N	أصل القرض في بداية السنة C_0	الفائدة I_i	القسط المتساوي A_i	قسط الاستهلاك الثابت M	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1	C_0	$I_1 = C_0 \times t$	A_1	$M_1 = A - I_1$	M_1	$C_1 = C_0 - M_1$
2	$C_1 = C_0 - M_1$	$I_2 = C_1 \times t$	A_2	$M_2 = A - I_2$	$M_1 + M_2$	$C_2 = C_1 - M_2$
3	$C_2 = C_1 - M_1$	$I_3 = C_2 \times t$	A_3	$M_3 = A - I_3$	$M_1 + M_2 + M_3$	$C_3 = C_2 - M_3$
	.....	.....	....	.....	.....	.....
n_i	$C_n = C_{n-1} - M_1$	$I_n = C_{n-1} \times t$	A_n	$M_n = A - I_n$	$\sum M_1 + ... + M_n$	0
مج	-	$\sum I$	$\sum A$	$\sum M$	-	-

Source: Walid Khoufi & Ines Dami; le calcul financier et la notation la valeur temporelle de l'argent; école supérieure de commerce de safex; TUNISIE; on line: https://coursexamens.org/images/Etudes_superieures/Marketing/math_financiere/Cours_et_exocours2valeurtemporelle.pdf ; P50; consulte le: 13-11-2020.

مثال رقم 02:

اشترى تاجر بضاعة من أحد المؤسسات بمقدار 100000 دج واتفق مع المؤسسة على سداد قيمة البضاعة بدفعات سنوية ثابتة من أصل القرض والفوائد معا خلال خمس سنوات.

فإذا علمت أن معدل الفائدة السنوي 5%.

المطلوب:

- أحسب قيمة الدفعة الثابتة؟
- قم بإعداد جدول استهلاك القرض؟

الحل:

$C_0 = 100000DA$

$n = 5ans$

$t = 5\%$

- حساب قيمة الدفعة:

$$A = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

$$A = 100000 \frac{0.05}{1-(1.05)^{-5}}$$

$$A = 23097.5DA$$

- اعداد جدول استهلاك القرض:

N	أصل القرض في بداية السنة C_0	الفائدة I_i	القسط المتساوي A_i	قسط الاستهلاك الثابت M	القرض في نهاية السنة (الدين المستهلك)	الدين المتبقي في نهاية الفترة
1	100000	5000	23097.5	18097.5	18097.5	81902.5
2	81902.5	4095.125	23997.5	19002.375	37099.875	62900.125
3	62900.125	3145.00	23097.5	19952.5	57052.375	42947.625
4	42947.625	2147.381	23097.5	20950	78002.375	21997.506
5	21997.506	1099.875	23097.5	21997.625	100000	0
مج	-	$\sum I = 15487.5$	$\sum A = 115487.5$	$\sum M = 100000$	-	-

3. العلاقات العامة من جدول الاستهلاك:

من خلال جدول استهلاك القرض يمكننا استخراج علاقات تربط مختلف عناصره على النحو التالي: [6]

أ. العلاقة بين الدفعات وأصل القرض:

هناك العديد من العلاقات التي تربط الدفعات بأصل القرض على النحو التالي:

- أصل القرض يساوي القيمة الحالية للدفعات:

$$C_0 = A \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

- مجموع الدفعات = أصل القرض + مجموع الفوائد:

$$\sum A = \sum I + C_0$$

$$A = \frac{\sum I + C_0}{n}$$

ب. العلاقة بين الاهتلاكات:

هناك علاقة تربط بين الاهتلاكات فيما بينها على النحو التالي:

لدينا:

$$\left.\begin{matrix} I_1 = C_0 \times t \\ M_1 = A - I_1 \end{matrix}\right] \Rightarrow M_1 = A - (C_0 \times t) \dots (1)$$

كما لدينا:

$$\left.\begin{matrix} I_2 = C_1 \times t \\ M_2 = A - I_2 \\ C_1 = C_0 - M_1 \end{matrix}\right] \Rightarrow M_2 = A - (C_1 \times t) = A - \big((C_0 - M_1) \times t\big)$$

وعليه فإن:

$$\Rightarrow M_2 = A - C_0 \times t + M_1 \times t$$
$$\Rightarrow M_2 = M_1 + M_1 \times t$$
$$\Rightarrow M_2 = M_1(1 + t) \dots (2)$$

نفس الشيء لاستهلاكات السنوات الموالية:

$$M_3 = M_2(1 + t) = M_1(1 + t)^2$$
$$M_n = M_1(1 + t)^{n-1}$$

أما بدلالة الفترة السابقة نجد:

$$M_n = M_{n-1}(1 + t)$$

ت. العلاقة بين الاستهلاكات واصل القرض:

هناك علاقة تربط بين أصل القرض ومجموع الاهتلاكات على النحو التالي:

$$C_0 = \sum M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

وبتعويض المعادلة في العلاقة بين الاهتلاكات نجد:

$$C_0 = M_1 + M_1(1 + t) + \cdots M_1(1 + t)^{n-1}$$

هذه المتتالية تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $(1 + i)$ يعطى مجموعها بالشكل التالي:

$$C_0 = M_1 \frac{(1+t)^n - 1}{i}$$

ث. العلاقة بين استهلاكين متتاليين:

يرتبط كل استهلاكين متتاليين من خلال العلاقة التالية:

$$M_{n+1} - M_n = (A - I_{n+1}) - (A - I_n)$$
$$M_{n+1} - M_n = A - I_{n+1} - A + I_n$$
$$M_{n+1} - M_n = I_n - I_{n+1}$$

ج. العلاقة بين فائدتين متتاليتين:

هناك علاقة ربط بين فائدتين متتاليتين على النحو التالي:

$$I_n - I_{n+1} = (A - M_n) - (A - M_{n+1})$$
$$I_n - I_{n+1} = A - M_n - A + M_{n+1}$$
$$I_n - I_{n+1} = -M_n + M_{n+1}$$
$$I_n - I_{n+1} = M_n(1+t) - M_n$$
$$I_n - I_{n+1} = M_n + M_n t - M_n$$
$$I_n - I_{n+1} = M_n \times t$$

ح. العلاقة بين الدين المدفوع والمتبقي:

يرتبط الدين المدفوع بالدين المتبقي من خلال ما يلي:

$$I_n - I_{n+1} = M_n \times t$$
$$I_{n+1} - I_{n+2} = M_{n+1} \times t$$
$$I_{n+1} - I_{n+2} = M_n \times t(1+t)$$
$$I_{n+2} - I_{n+3} = M_{n+2} \times t$$
$$\boldsymbol{I_{n+2} - I_{n+3} = M_n \times t(1+t)^2}$$

مثال رقم 03:

اقترض شخص مبلغ ما من أحد البنوك على أن يسدده على خمسة أقساط سنوية متساوية من الأصل والفوائد معا، الدفعة الأولى بعد سنة، فإذا علمت أن الاستهلاك الأول 864.807دج والاستهلاك الثاني لنفس القرض 916.965دج.

المطلوب:

- أوجد المعدل وقيمة القرض والقسط السنوي المتساوي؟

الحل:

لدينا:

$$M_1 = 864.807DA$$
$$M_2 = 916.965DA$$
$$n = 5ans$$

- حساب المعدل:

$$M_n = M_{n-1}(1+t) \Rightarrow (1+t) = \frac{M_n}{M_{n-1}}$$
$$t = \frac{M_n}{M_{n-1}} - 1$$
$$t = \frac{916.965}{864.807} - 1$$
$$t = 6\%$$

- حساب باقي الاستهلاكات:

$$M_3 = M_2(1+t) = 916.965(1.06)$$
$$\boldsymbol{M_3 = 971.982DA}$$
$$M_4 = M_3(1+t) = 971.982(1.06)$$
$$\boldsymbol{M_4 = 1030.3DA}$$
$$M_5 = M_4(1+t) = 1030.3(1.06)$$
$$\boldsymbol{M_5 = 1092.119DA}$$

- حساب قيمة القرض:

قيمة القرض تمثل مجموع الاستهلاكات:

$$C_0 = \sum M$$
$$C_0 = 864.807 + 916.965 + 971.982 + 1030.3 + 1092.119$$
$$C_0 = 4876DA$$

- حساب القسط السنوي المتساوي:

$$A = C_0 \frac{t}{(1+t)^{-n}-1} = \frac{0.06}{(1.06)^{-5}-1}$$
$$A = 1157.54DA$$

تمارين الفصل الرابع: استهلاك القروض طويلة الأجل.

التمرين الأول:

إذا علمت أن مبلغ الاستهلاك الرابع يقدر بـ 179589.68 دج، ومبلغ الدفعة هو 201786.97 دج، مع العلم أن القرض يسدد بعد 5 دفعات ثابتة لنهاية المدة.

المطلوب:

- أوجد معدل الفائدة؟
- أحسب مبلغ القرض الأصلي؟
- قيد السطر الأول والأخير من جدول استهلاك القرض؟

التمرين الثاني:

من جدول استهلاك قرض عادي يسدد بواسطة دفعات ثابتة، تحصلنا على المعلومات التالية:

- فائدة السنة الأولى: 1000 دج؛
- الاستهلاك الثاني: 3087.37 دج
- الفرق بين فائدة السنة الاولى وفائدة السنة الثانية هي 147.02 دج

المطلوب:

- أحسب معدل القرض؟
- ابحث عن مبلغ الدفعة الثابتة؟
- أوجد مبلغ القرض الأصلي؟

التمرين الثالث:

دين قيمته 500000 دج يسدد خلال 20 سنة بواسطة دفعات ثابتة، الأولى تدفع سنه بعد الاقتراض، فإذا كان معدل الاقراض 6%.

المطلوب:

- أوجد قيمة الدفعة الثابتة؟

- أحسب الاهتلاك الأخير؟
- أحسب المبلغ الكلي المهتلك (المسدد بعد الدفعة العاشرة)؟

التمرين الرابع:

تريد مؤسسة اقتناء تجهيزات انتاج لزيادة طاقتها الانتاجية، فقامت باقتراض مبلغ مالي، يسدد على تسعة أقساط سنوية متساوية بمعدل فائدة مركبة 15 %، إذا علمت أن رصيد القرض في نهاية السنة الأولى 564255.6دج، والفرق بين فائدتي السنة الأولى والسنة الثانية يساوي 5361.66 دج.

المطلوب:

- أوجد مبلغ الدفعة الثابتة؟
- قيد السطر الأول والأخير من جدول استهلاك القرض؟

تهميش الفصل الرابع:

1 – محمد علي أحمد البنا، القرض المصرفي، دار الكتب العلمية، مصر، 2006، ص543.

2 – طارق عبد الباري، عيد أبو بكر، تطبيقات الرياضيات المالية في العلوم المالية والادارية، دار النعر الأردنية زمزم، الجامعة الاردنية، 2009، ص247.

3 – بلحمري خيرة، مرجع سبق ذكره، ص90-91.

4 – احمد كامل، مقدمة في رياضيات الاستثمار والتمويل، دون سنة نشر، متاح على الموقع الالكتروني: تاريخ الاطلاع 27-03-2026، ص91-95،

https://fr.scribd.com/document/386413883/Math#page=91.

5 – بلحمري خيرة، مرجع سبق ذكره، ص94.

6 – باديس بوغرة مرجع سابق، ص214-217.

يقصد باختيار المشاريع الاستثمارية تحديد المشروع الأمثل من بين مجموعة من المشاريع المقترحة، بالاعتماد على المفاضلة وفق مقاييس علمية، مع مراعاة العوامل الاقتصادية، الاجتماعية والسياسية، وتوظيف التقنيات المالية والرياضية بما يضمن تحقيق الأهداف المرجوة. ويرتكز هذا الاختيار على جملة من المبادئ الأساسية، تتمثل في مبدأ الاختيار من خلال البحث عن فرص استثمارية متعددة، مبدأ المقارنة للمفاضلة بين البدائل المتاحة، مبدأ الملاءمة الذي يراعي تفضيلات المستثمر من حيث العائد، المخاطرة والسيولة، فضلا عن مبدأ التنويع الذي يهدف إلى الحد من المخاطر الاستثمارية عبر توزيع الاستثمارات.[1]

إذ يعرف الاستثمار بأنه التزام بإنفاق مالي طويل الأجل وغير قابل للتراجع، يتمثل في تخصيص موارد مالية في الحاضر بهدف تحقيق عوائد أو إيرادات مستقبلية تفوق قيمة الإنفاق الأولي. ويعكس هذا المفهوم توظيف الأموال في أصول أو مشاريع قادرة على تحقيق منفعة مستمرة، ويرتبط بعناصر أساسية تتمثل في المردودية، المدة الزمنية ومستوى المخاطرة[2].

تتحدد عملية اختيار الاستثمارات بناءً على مجموعة من العوامل الجوهرية التي تساعد على تقييم جدواها واتخاذ القرار الأمثل، ومن أهمها:[3]

- **تكلفة الاستثمار**: تشمل مختلف النفقات المرتبطة باقتناء وتشغيل الاستثمار طوال مدة استغلاله؛
- **الإيرادات المتوقعة**: تتمثل في التدفقات النقدية التي يحققها الاستثمار خلال فترة حياته، إضافة إلى قيمته المتبقية في نهايتها؛
- **مدة الاستثمار**: تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لاسترجاع الأموال وتحقيق العوائد، وتختلف حسب طبيعة المشروع؛
- **معدل الخصم (سعر الفائدة)**: يستخدم في تقييم الاستثمارات من خلال احتساب القيمة الحالية للتدفقات النقدية، ويعكس تكلفة رأس المال ومستوى المخاطرة؛
- **درجة المخاطرة**: ترتبط بحالة عدم التأكد حول تحقيق العوائد المتوقعة، مما يستدعي الموازنة بين العائد والمخاطرة؛

- **السيولة:** تشير إلى قدرة المستثمر على تحويل الاستثمار إلى نقد في الوقت المناسب دون خسائر كبيرة؛

- **الظروف الاقتصادية والبيئية:** تشمل تأثير العوامل الخارجية كالتضخم، الضرائب، السياسات الاقتصادية التي تؤثر على تكاليف وعوائد الاستثمار؛

- **الربحية:** يتم تفضيل الاستثمارات التي تحقق عوائد إيجابية وتساهم في تعظيم قيمة المؤسسة، مع استبعاد الاستثمارات غير المجدية.

توجد عدة طرق لتقييم المشاريع الاستثمارية، يمكن تصنيفها إلى نوعين: أساليب لا تراعي القيمة الزمنية للنقود، وأساليب تأخذ هذه القيمة بعين الاعتبار. نوجزها فيما يلي:

المحور الأول: المعايير التي لا تأخذ بعين الاعتبار القيمة الزمنية للنقود.

Criteria That Do Not Take into Account the Time Value of Money.

يعتمد تقييم المشاريع الاستثمارية وفق هذا المعيار أساليب وطرق تقليدية لا تراعي القيمة الزمنية للنقود، بل تعتمد على البيانات المحاسبية مثل تكلفة اقتناء الاستثمار (النفقة الأولية)، القيمة الدفترية المتبقية والإيرادات المحاسبية الناتجة عن تشغيل الاستثمار. وتستند هذه الطرق إلى معيارين رئيسيين يستخدمان للمقارنة بين البدائل الاستثمارية.

1. معيار فترة الاسترداد DR:

يعد معيار فترة الاسترداد من أبسط المعايير المستخدمة في تقييم الاستثمارات، فهو يقيس الوقت اللازم لاسترجاع رأس المال المستثمر بالكامل من صافي التدفقات النقدية التي يولّدها المشروع. ويستخدم لتقييم مدى سرعة استرداد الأموال وتقليل المخاطر المرتبطة بالاستثمار، إذ يفضل الاستثمار الذي يتميز بفترة استرداد أقصر، لما يعكسه ذلك من انخفاض درجة المخاطرة وتحقيق السيولة بشكل أسرع.

يمكن حساب هذه الأخيرة وفقا لحالتين وهما[4]:

أ. حالة التدفقات النقدية الثابتة:

في هذه الحالة، تكون التدفقات النقدية للمشروع متساوية وثابتة طوال فترة الاستغلال. ويمكن حساب فترة الاسترداد **(DR)** باستخدام العلاقة التالية:

$$D_r = \frac{I_0}{CFA}$$

حيث: I_0: التكلفة الأولية للمشروع؛

$\mathrm{CF}A$: التدفقات النقدية السنوية

مثال رقم 01:

تقوم مؤسسة بدراسة مشروعين لاختيار الأفضل وفق معيار فترة الاسترداد:

المشروع	التدفق النقدي السنوي CFA	القيمة الأصلية للمشروع I_0
1	95000	332500
2	125000	312500

المطلوب:

- ما هو المشروع الأفضل حسب معيار فترة السداد؟

الحل:

$$D_{r1} = \frac{I_0}{CFA} = \frac{332500}{95000} = 3.5ans$$

$$D_{r1} = \frac{I_0}{CFA} = \frac{312500}{255000} = 2.5ans$$

نستنتج أن المشروع الثاني هو الأفضل، لأنه يسترد تكاليفه في فترة أقصر مقارنة بالمشروع الأول، مما يقلل المخاطر ويعزز السيولة.

ب. حالة التدفقات النقدية غير ثابتة:

عندما تكون التدفقات النقدية للمشروع غير متساوية على مدار السنوات، تحسب فترة الاسترداد من خلال **جمع التدفقات النقدية السنوية المتراكمة** حتى تصل إلى قيمة الاستثمار الأصلي، ويعتبر الاستثمار قد استرد رأس ماله بالكامل عند تحقيق هذا التساوي، وهو ما تفسره العلاقة التالية:

$$I_0 = \sum_{t=1}^{n} \mathrm{CF_t}$$.

مثال رقم 02:

تقوم مؤسسة بدراسة مشروعين من أجل اختيار أحسنهما على أساس طريقة فترة الاسترداد حيث:

المشروع	القيمة الأصلية للمشروع I_0	التدفق النقدي السنوي CFA			
1	120000	30000	40000	25000	35000
2	100000	25000	35000	30000	20000

الحل:

- حساب فترة الاسترداد:

المشروع 1:

- نهاية السنة 1: 30,000 ⟶ المتبقي = 120,000 − 30,000 = 90,000
- نهاية السنة 2: 30,000 + 40,000 = 70,000 مسترد ⟶ المتبقي = 50,000
- نهاية السنة 3: 70,000 + 25,000 = 95,000 مسترد ⟶ المتبقي = 25,000
- السنة 4: التدفق = 35,000 ⟶ جزء السنة = 25,000 ÷ 35,000 ≈ 0.71

$$DR_1 = 3 + 0.71 \approx 3.71 \text{ans}$$

المشروع 2:

- نهاية السنة 1: 25,000 ⟶ المتبقي = 100,000 − 25,000 = 75,000
- نهاية السنة 2: 25,000 + 35,000 = 60,000 مسترد ⟶ المتبقي = 40,000
- نهاية السنة 3: 60,000 + 30,000 = 90,000 مسترد ⟶ المبلغ المطلوب = 10,000
- السنة 4: التدفق = 20,000 ⟶ جزء السنة = 10,000 ÷ 20,000 = 0.5

$$DR_2 = 3 + 0.5 = 3.5$$

المشروع 1 يحتاج إلى حوالي 3.71سنوات لاسترداد الاستثمار .

المشروع 2 يحتاج إلى حوالي 3.5سنوات فقط .

إذن فالمشروع الثاني أفضل من المشروع الأول وفق معيار فترة الاسترداد، لأنه يسترجع رأس المال المستثمر في مدة أقصر، مما يقلل المخاطر ويزيد السيولة.

ت. مزايا وعيوب طريقة فترة الاسترداد

تعد طريقة فترة الاسترداد إحدى الأدوات التحليلية المهمة في تقييم المشاريع الاستثمارية، إذ تتيح للمؤسسات قياس الزمن اللازم لاسترجاع رأس المال المستثمر، وتقديم رؤية أولية حول درجة السيولة والمخاطر المرتبطة بالمشروع. وتتميز هذه الطريقة بعدة مزايا من أبرزها:

- تركيزها على **السيولة** أكثر من الربحية، مما يجعلها مناسبة للمؤسسات التي تواجه قيودًا نقدية؛
- **سهولة الحساب** وبساطتها، مما يجعلها شائعة الاستخدام في التقييم المالي الأولي؛
- الحد من **المخاطر المرتبطة بالاستثمار**، إذ توضح المدة المطلوبة لاسترداد الأموال؛
- تمكين المؤسسة من **إعادة استثمار الأموال المستردة** في مشاريع أخرى أو لتجديد الاستثمار عند اختيار البدائل ذات فترة استرداد أقصر.

مع ذلك، تتسم هذه الطريقة بعدة قيود مهمة:

- تجاهل التدفقات النقدية بعد فترة الاسترداد، رغم أن هذه التدفقات قد تكون ذات قيمة كبيرة وتؤثر على الربحية الإجمالية للمشروع؛
- عدم مراعاة القيمة الزمنية للنقود، حيث تجمع التدفقات النقدية بنفس القيمة بغض النظر عن توقيت تحصيلها، متجاهلة التغير في القيمة الشرائية للنقود بمرور الوقت؛ فمثلا القيمة الحالية لمبلغ مستلم اليوم تختلف عن قيمته بعد ثلاث سنوات.

2. معيار المعدل المتوسط للعائد *TRM*:

يعرف **المعدل المتوسط للعائد (TRM)** باسم **معدل العائد المحاسبي**، وهو مؤشر يستخدم لتقييم ربحية المشاريع الاستثمارية استنادًا إلى النتائج المحاسبية، إذ يعبر هذا المعيار عن النسبة المئوية للعائد السنوي

المتوسط مقارنة بالتكاليف الاستثمارية، سواء بعد خصم الاستهلاك والضرائب أو بالنسبة للتكاليف الاستثمارية الإجمالية، مما يوفر للمستثمر رؤية سريعة وواضحة عن مدى ربحية المشروع على أساس المحاسبة التقليدية. ويعطى بالعلاقة التالية:[5]

$$\boldsymbol{TRM} = \frac{MRN}{\text{MIN}} \times 100$$

حيث:

- **(MRN):** متوسط العائد الصافي هو ناتج قسمة مجموع الأرباح الصافية على العمر الافتراضي للأصل المستثمر؛
- **(MIN):** متوسط الاستثمار الصافي حاصل قسمة مجموع قيمة الأصل في بداية الفترة وقيمته في نهايتها على اثنين.

يتم تقييم جدوى المشروع من خلال مقارنة **المعدل المتوسط للعائد** بمعدل الفائدة السائد في السوق؛ فإذا تجاوز معدل العائد معدل الفائدة يعتبر الاستثمار مقبولًا، ويفضل اختيار المشروع الذي يحقق أعلى معدل متوسط للعائد لضمان أفضل ربحية ممكنة.

مثال رقم 03: أمام مؤسسة مشروعين للمفاضلة بينهما باستخدام طريقة المعدل المتوسط للعائد كما يوضحه الجدول الموالي.

المشروع	رأس المال المستثمر	الأرباح السنوي المتوقعة		العمر الافتراضي	القيمة المتبقية للأصل دج
1	500000	100000	120000	4	50000
		130000	150000		
2	400000	90000	110000	4	40000
		120000	130000		

الحل:

- حساب متوسط العائد السنوي الصافي لكل مشروع (MRN):

$$\text{متوسط العائد السنوي الصافي (MRN)} = \frac{\sum \text{الأرباح السنوية} + \text{القيمة المتبقية}}{\text{العمر الافتراضي}}$$

المشروع 1:

$$\text{MRN}_1 = \frac{100000 + 120000 + 130000 + 150000 + 50000}{4} = \frac{550000}{4} = 137500$$

المشروع 2:

$$\text{MRN}_2 = \frac{90000 + 110000 + 120000 + 130000 + 40000}{4} = \frac{490000}{4} = 122500$$

- حساب متوسط الاستثمار الصافي (MIN):

$$\textbf{MIN} = \frac{\text{القيمة المتبقية} + \text{قيمة الأصل في البداية}}{\textbf{2}}$$

المشروع 1:

$$\textbf{MIN} = \frac{\textbf{500000} + 50000}{2} = 275000$$

المشروع 2:

$$\textbf{MIN} = \frac{400000 + 40000}{2}$$

- حساب المعدل المتوسط للعائد (TRM):

$$\boldsymbol{TRM} = \frac{MRN}{\text{MIN}} \times 100$$

المشروع 1:

$$\boldsymbol{TRM} = \frac{137500}{275000} \times 100 = 50\%$$

المشروع 2:

$$\boldsymbol{TRM} = \frac{122500}{220000} \times 100 = 55.7\%$$

رغم أن المشروع 1 يولد أرباحًا سنوية أكبر، إلا أن **المشروع 2 يحقق معدل متوسط للعائد أعلى (55.7% مقابل 50%)**، مما يجعله الاختيار الأمثل من منظور TRM، لأنه يوفر ربحية أعلى نسبة إلى متوسط الاستثمار الصافي.

تتميز طريقة المعدل المتوسط للعائد بعدة مزايا، من أبرزها:

- سهولة الحساب والاستخدام، مما يجعلها أداة شائعة بين المؤسسات، لكونها تعتمد على البيانات المحاسبية المتوفرة؛
- أخذ القيمة المتبقية للمشروع بعين الاعتبار، حيث تساعد على تحديد العائد المحقق من المشروع عند إعادة استثمار الأموال في مشاريع أخرى؛
- الربط بمعدل الفائدة في السوق، مما يتيح تقييم الاستثمار وفق المعايير المالية السائدة.

ورغم هذه المزايا، فإن الطريقة تتسم بعدة قيود مهمة:

- تجاهل القيمة الزمنية للنقود، حيث لا يفرق المعيار بين التدفقات النقدية المحققة اليوم أو في المستقبل؛
- عدم مراعاة التغيرات المحتملة في معدل الفائدة بالسوق، والذي قد يؤثر على جدوى الاستثمار؛
- عدم التمييز بين المشاريع ذات الأعمار المختلفة، إذ يؤدي طول عمر المشروع إلى خفض متوسط الإيراد السنوي الصافي، مما قد يعطي صورة أقل دقة عن ربحية المشروع طويل الأجل مقارنة بالمشاريع الأقصر.

المحور الثاني: المعايير التي تأخذ بعين الاعتبار القيمة الزمنية للنقود.

Criteria That Take into Account the Time Value of Money.

ظهرت هذه الأساليب الحديثة لتجاوز أهم أوجه القصور في الطرق التقليدية لتقييم المشاريع، والتي كانت تتجاهل **القيمة الزمنية للنقود** .إذ تركز هذه الطرق على تقييم جميع التدفقات النقدية الداخلة والخارجة وفق توقيتها وتأثيرها على القيمة الحالية للاستثمار، وتندرج ضمن هذه الأساليب ثلاثة مقاييس رئيسية، نوجزها فيما يلي:

1. معيار صافي القيمة الحالية ***VAN*** :

يستخدم معيار صافي القيمة الحالية **(VAN)** في المفاضلة بين المشاريع الاستثمارية من خلال احتساب صافي القيمة الحالية لكل مشروع، الذي يمثل الفرق بين القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة والقيمة الحالية للتدفقات النقدية الخارجة المرتبطة به. إذ يتطلب تطبيق هذا المعيار اعتماد معدل خصم مناسب، يستخدم لتحويل التدفقات النقدية المستقبلية إلى قيمتها الحالية.

كما يوظف معيار صافي القيمة الحالية في اتخاذ القرار الاستثماري وفق حالتين أساسيتين:

- معيار للقبول أو الرفض: حيث يقبل المشروع إذا كان صافي قيمته الحالية موجبا، ويرفض إذا كان سالبا؛
- معيار للمفاضلة: حيث يتم اختيار المشروع الذي يحقق أكبر صافي قيمة حالية موجبة من بين البدائل الاستثمارية المتاحة.[6]

تجدر الإشارة هنا أنه يتم الاختيار على أساس الاستثمار الذي يحقق أكبر قيمة حالية.

ويمكن حساب القيمة الحالية الصافية باستعمال التدفقات النقدية الخارجة أو الداخلة كما يلي:[7]

$$VAN = VAR - VAD$$

أي أن صافي القيمة الحالية تساوي القيمة الحالية للتدفقات الداخلة مطروح منها القيمة الحالية للتدفقات الخارجة. وهنا نميز نوعين من التدفقات إما الثابتة أو المتغيرة، تعطي العلاقات على النحو التالي:

أ. حالة التدفقات النقدية ثابتة:

$$VAN = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - I_0$$

حيث: R : قيمة صافي التدفق النقدي السنوي المتساوي؛

n : عدد الدفعات (عدد التدفقات النقدية السنوية) وهي تمثل عمر المشروع؛

r: معدل الفائدة السائد في السوق؛

I_0: الاستثمار الأولي.

مثال رقم 04:

تدرس مؤسسة الاختيار بين مشروعين (A) و(B)، بالمعطيات التالية:

البيان	المشروع A	المشروع B
الاستثمار الأولي I_0	200000 دج	200000 دج
التدفق السنوي R	60000 دج	40000 دج
مدة الاستثمار n	5 سنوات	5 سنوات
معدل الخصم r	%10	%10

المطلوب:

- ما هو المشروع الأفضل الذي تختاره المؤسسة باستخدام طريقة صافي القيمة الحالية؟

الحل:

- إيجاد صافي القيمة الحالية للمشروعين:

نستعمل القانون:

$$VAN = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - I_0$$

نقوم بحساب المعامل لكلا المشروعين:

$$\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = \frac{1-(1.1)^{-5}}{0.1} = 3.79$$

- إيجاد VAN المشروع الأول:

$$VAN_A = VAR_A - VAD_A = 60000 \times 3.79 - 200000 = 227400 - 200000 = 27400$$

$$\boldsymbol{VAN_A = 24000 > 0}$$

- إيجاد VAN المشروع الثاني:

$$VAN_B = VAR_B - VAD_B = 40000 \times 3.79 - 200000 = 151600 - 200000 = -48400$$

$$\boldsymbol{VAN_B = -48400 < 0}$$

نستنتج أن المشروع **A** يحقق قيمة حالية صافية موجبة فهو مقبول، أما المشروع **B** يحقق قيمة حالية صافية سالبة فهو مرفوض، لذلك عند المفاضلة بين المشروعين يتم اختيار المشروع **A** لأنه الأفضل اقتصاديًا.

ب. حالة التدفقات النقدية غير ثابتة:

تعبر التدفقات النقدية غير الثابتة عن الوضعية التي تختلف فيها قيم التدفقات النقدية الصافية عبر الفترات الزمنية المتعاقبة، حيث لا يحتفظ المشروع بنفس مستوى العوائد السنوية، بل تتباين هذه التدفقات تبعًا لظروف التشغيل، حجم النشاط والتغيرات الاقتصادية المحيطة. تعطى علاقة القيمة الحالية الصافية في حالة التدفقات غير الثابتة كما يلي:

$$VAN = R_1(1+r)^{-1} + R_2(1+r)^{-2} + \cdots + R_n(1+r)^{-n} - I_0$$

مثال رقم 05:

تدرس مؤسسة مشروعًا استثماريًا بالمعطيات التالية:

- الاستثمار الأولي: 150000 دج؛
- معدل الخصم: 10%.

التدفقات النقدية غير ثابتة لمدة أربع سنوات كما يلي:

- 30000دج - 40000 دج - 50000 دج - 45000 دج.

المطلوب:

- هل يتم قبول المشروع من طرف المؤسسة؟

الحل:

لدينا:

$$VAN = R_1(1+r)^{-1} + R_2(1+r)^{-2} + \cdots + R_n(1+r)^{-n} - I_0$$

- حساب القيمة الحالية لكل تدفق:

$$R_1(1+r)^{-1} = 30000(1.1)^{-1} = 27272$$
$$R_2(1+r)^{-2} = 40000(1.1)^{-2} = 33058$$
$$R_3(1+r)^{-3} = 50000(1.1)^{-3} = 37566$$
$$R_4(1+r)^{-4} = 45000(1.1)^{-4} = 30735$$

- إيجاد مجموع القيم الحالية الداخلة:

$$VAR = 27272 + 33058 + 37566 + 30735 = 128631$$

- إيجاد صافي القيمة الحالية للمشروع:

$$\boldsymbol{VAN = 128631 - 150000 = -21369 < 0}$$

المشروع مرفوض لأن القيمة الحالية للتدفقات النقدية أقل من تكلفة الاستثمار، بالرغم من أن التدفقات النقدية موجبة، إلا أن عدم انتظامها وتأخر جزء منها أدى إلى انخفاض قيمتها الحالية بعد الخصم، مما يجعل المشروع غير مربح وفق معيار صافي القيمة الحالية.

ت. مزايا وعيوب معيار صافي القيمة الحالية (VAN):

تتميز طريقة معيار صافي القيمة الحالية بعدة مزايا، من أبرزها:

- يأخذ القيمة الزمنية للنقود بعين الاعتبار، مما يعكس الأثر المالي الحقيقي للاستثمار؛
- يشمل جميع التدفقات النقدية الداخلة والخارجة، سواء كانت ثابتة أو متغيرة، مما يوفر تقييمًا شاملاً للجدوى الاقتصادية؛
- يتيح المقارنة بين المشاريع واختيار المشروع الأكثر ربحية بدقة؛
- قابل للتطبيق مع المشاريع ذات التدفقات النقدية غير الثابتة .

رغم هذه المزايا، فإن الطريقة تتسم بعدة قيود مهمة:

- صعوبة تحديد معدل الخصم الأمثل، خاصة في المشاريع طويلة الأجل؛
- حساسية النتائج للتوقعات المستقبلية، ما قد يؤدي إلى تقديرات غير دقيقة؛
- لا يوفر مؤشرًا مباشرًا للسيولة أو سرعة استرداد رأس المال؛
- قد يتجاهل بعض العوامل النوعية مثل الاستراتيجية أو الأثر الاجتماعي.

2. معيار دليل الربحية Ip :

مؤشر الربحية (IP) هو مقياس لتقييم كفاءة وجاذبية الاستثمار، ويحدد مقدار الأرباح الناتجة عن كل وحدة مستثمرة خلال فترة حياة المشروع، بما في ذلك القيمة المتبقية بعد انتهاء استخدام الاستثمار. وكما في طريقة صافي القيمة الحالية، يأخذ مؤشر الربحية **القيمة الزمنية للنقود** بعين الاعتبار، لكنه يختلف في طريقة الحساب، إذ يعتمد على **النسبة بين القيمة الحالية للإيرادات المستقبلية والقيمة الحالية للنفقات الاستثمارية** وليس الفرق بينهما. أي: [8]

$$IP = \frac{VAN}{I_0}$$

يعتبر الاستثمار مقبولًا إذا كان المؤشر أكبر من 1، أي أن الإيرادات المخصومة تتجاوز تكلفة الاستثمار. أما إذا كان أقل من 1، فهذا يعني أن صافي الإيرادات لا تغطي تكلفة المشروع، وبالتالي لا يمكن قبوله. وعند المفاضلة بين عدة استثمارات، يختار المشروع الذي يحقق **أعلى مؤشر للربحية** لأنه الأكثر مردودية مقارنة بالخيارات الأخرى.

يتم حساب مؤشر الربحية حسب الحالات التالية:

أ. **في حالة التدفقات النقدية غير متساوية:**

$$Ip = \frac{R_1(1+r)^{-1} + R_2(1+r)^{-2} + \cdots + R_n(1+r)^{-n}}{I_0}$$

ب. **في حالة التدفقات النقدية متساوية:**

$$Ip = R\frac{\frac{1+(1+r)^{-n}}{r}}{I_0}$$

مثال رقم 06:

إليك البيانات الخاصة بمشروعين أحدهما تدفقاته النقدية ثابتة والأخر تدفقاته غير ثابتة مبينة في الجدول التالي:

البند	المشروع A	المشروع B		
الاستثمار الأولي I_0	200000 دج	120000 دج		
التدفق النقدي CFA	50000 دج ثابت	40000 دج السنة 1	50000 دج السنة 2	60000 دج السنة 3
معدل الخصم r	%10	%10		
العمر الافتراضي n	4 سنوات	3 سنوات		

المطلوب:

- أوجد المشروع الأمثل حسب معيار دليل الربحية؟

الحل:

لايجاد المشروع الأمثل حسب معيار دليل الربحية:

- **المشروع A**: التدفقات النقدية الثابتة.

صيغة حساب **مؤشر الربحية (IP)** للتدفقات الثابتة:

لدينا:

$$\boldsymbol{Ip_A} = R\frac{\frac{1+(1+r)^{-n}}{\mathrm{r}}}{I_0} = 50000\frac{\frac{1+(1.1)^{-4}}{0.1}}{200000} = 0.795$$

- **المشروع** B: التدفقات النقدية غير الثابتة.

صيغة حساب **مؤشر الربحية** (IP) للتدفقات غير الثابتة:

لدينا:

$$\boldsymbol{Ip_B} = \frac{R_1(1+r)^{-1} + R_2(1+r)^{-2} + \cdots + R_n(1+r)^{-n}}{I_0}$$

$$\boldsymbol{Ip_B} = \frac{40000(1.1)^{-1} + 50000(1.1)^{-2} + 60000(1.1)^{-3}}{120000} = \frac{122778}{120000} = 1.02315$$

باستخدام معيار دليل الربحية نلاحظ أن المشروع **A** مرفوض ماليا $(1 > 0.795)$، أما المشروع **B** فهو مقبول ماليا $(1 < 1.02315)$ ومفضل اقتصاديا.

ت. **مزايا وعيوب معيار دليل الربحية *Ip*:**

يتميز معيار دليل الربحية بمجموعة من المزايا نذكرها فيما يلي:

- تأخذ القيمة الزمنية للنقود بعين الاعتبار، مما يعكس بدقة الأثر المالي للاستثمار على المدى الطويل؛
- تراعي القيمة المتبقية للاستثمار بعد نهاية فترة استخدامه، ما يسمح بتقييم كامل للجدوى الاقتصادية؛
- تسهّل المقارنة بين المشاريع الاستثمارية المختلفة بغض النظر عن حجمها أو مدة تنفيذها، إذ يفضل المشروع ذو مؤشر الربحية الأعلى؛
- تتيح تحديد مستوى الكفاءة والعائد لكل وحدة مستثمرة، مما يساعد على تحسين تخصيص الموارد المالية؛
- مفيدة في اختيار المشاريع متعددة المراحل أو التدفقات المعقدة، حيث تجمع بين شمولية التقييم وسهولة التفسير .

هذه المزايا لا تمنع وجود بعض العيوب نذكر منها:

- صعوبة تحديد معدل الخصم المناسب، خاصة في المشاريع طويلة الأجل، إذ أن أي تقدير خاطئ قد يؤدي إلى نتائج غير دقيقة؛
- لا توفر مؤشرًا مباشرًا عن سرعة استرداد رأس المال أو السيولة على المدى القصير؛
- تعتمد على تقديرات التدفقات المستقبلية، ما يجعلها حساسة لأي تغييرات غير متوقعة في الإيرادات أو المصاريف؛
- قد تتجاهل العوامل النوعية أو الاستراتيجية للمشروع مثل الأثر الاجتماعي أو البيئي، إذ يركز الحساب على الجوانب المالية فقط؛
- يمكن أن تعطي نتائج مضللة للمشاريع القصيرة الأجل أو منخفضة التكلفة، إذ أن المؤشر قد يبدو مرتفعًا بينما الربح الكلي محدود.

3. معيار معدل العائد الداخلي TRI:

معيار معدل العائد الداخلي**(TRI)** الذي يعرف بالمعدل الداخلي للمردودية أو المعدل الأدنى للمردودية أو المعدل الحقيقي للعائد الاقتصادي، فهو يمثل معدل الخصم الذي يجعل صافي القيمة الحالية للاستثمار صفرًا. بعبارة أخرى هو المعدل الذي يساوي فيه مجموع القيم الحالية للتدفقات النقدية الداخلة صافيًا مع مجموع القيم الحالية للتكاليف أو الاستثمار الأصلي. عند هذا المعدل يلغى الفرق بين الإيرادات المتوقعة والتكاليف، مما يجعل القيمة الحالية الصافية **(VAN)** مساوية للصفر. يستخدم معدل العائد الداخلي كمعيار لمقارنة الاستثمارات، حيث يختار المشروع ذو أعلى معدل عائد داخلي باعتباره الأكثر جدوى وربحية مقارنة بالبدائل المتاحة. كما يلي: 9

$$VAN = 0 \Longrightarrow VAR - VAD = 0$$

يتم حساب المؤشر حسب الحالات التالية:

أ. في حالة التدفقات النقدية غير متساوية:

$$\boldsymbol{TRI = R_1(1+\mathrm{TR})^{-1} + R_2(1+\mathrm{TR})^{-2} + \cdots + R_n(1+\mathrm{TR})^{-n} - I_0 = 0}$$

ب. في حالة التدفقات النقدية متساوية:

$$\boldsymbol{TRI = R\frac{1-(1+\mathrm{TR})^{-n}}{TR} - I_0 = 0}$$

ويعتمد قرار اختيار المشروع من عدمه على مستوى معدل الخصم المحدد ومعدل العائد الداخلي، فاذا كان:

$TRI >$ معدل الخصم: المشروع مرفوض

$TRI <$ معدل الخصم: المشروع مقبول لأنه يمكن تغطية تكلفة الموارد

مثال رقم 07:

إليك البيانات الخاصة بمشروع استثماري تدفقاته النقدية ثابتة على النحو التالي:

- الاستثمار الأولي: 120000 دج؛
- التدفق النقدي السنوي: 30000 دج ثابت{
- العمر الافتراضي: 5 سنوات؛
- معدل الخصم: 6%.

المطلوب:

- أوجد معدل العائد الداخلي لهذا استثمار، وهل هو مقبول اقتصاديا؟

الحل:

لدينا:

$$TRI = R\frac{1-(1+\mathrm{TR})^{-n}}{TR} - I_0 = 0$$

$$R\frac{1-(1+\mathrm{TR})^{-n}}{TR} = I_0$$

- إيجاد معدل العائد الداخلي للمشروع:

$$\frac{1-(1+\mathrm{TR})^{-n}}{TR} = \frac{I_0}{R}$$

نقوم بإيجاد حصل قسمة $\frac{I_0}{C}$ ثم نستخدم الجدول المالي رقم (04) لمعرفة معدل العائد الداخلي للمشروع على النحو التالي:

$$\frac{I_0}{R} = \frac{120000}{30000} = 4$$

هذه القيمة بعد اسقاطها على الجدول المالي رقم (04) حصلنا على معدل 8 %.

بما أن معدل العائد الداخلي للمشروع قدر ب 8% وهي نسبة تفوق معدل الخصم الموجود في السوق المالي فإن المشروع مقبول اقتصاديا.

ت. مزايا وعيوب معدل العائد الداخلي (TRI) :

يعد معيار معدل العائد الداخلي إحدى الأدوات التحليلية المهمة في تقييم المشاريع الاستثمارية، لما يمنحه من مزايا في قياس جدوى الاستثمار كما يلي:

- يراعي القيمة الزمنية للنقود، ما يمنح كل تدفق نقدي أهميته المالية الحقيقية؛
- يوفر مقياسًا نسبيًا لجدوى الاستثمار، مما يسهل المقارنة بين المشاريع المختلفة الأحجام والفترات؛
- يساعد في تحديد المشروع الأكثر ربحية واتخاذ قرارات استثمارية مدروسة؛
- يعد أداة فعالة لتقييم الاستثمارات طويلة الأجل وتحليل العائد على رأس المال المستثمر .

كما لا يخلو هذا المعيا من العيوب التي نذكر منه:

- لا يأخذ بعين الاعتبار التدفقات النقدية التي تتحقق بعد نهاية عمر المشروع، ما قد يقلل دقة التقييم في المشاريع الطويلة؛
- قد يظهر أكثر من معدل داخلي في حالة التدفقات النقدية غير الثابتة، مما يعقد اتخاذ القرار؛
- يعتمد بشكل كبير على دقة التقديرات المستقبلية للتدفقات النقدية، ويفترض إمكانية إعادة استثمارها بنفس معدل **TRI**، وهو افتراض قد لا يكون واقعيًا دائمًا.؛
- لا يعكس القيمة المطلقة للعوائد، لذا يفضل استخدامه مع معايير مكملة مثل صافي القيمة الحالية.

تمارين الفصل الخامس: تقييم واختيار المشاريع الاستثمارية.

التمرين رقم 01:

تدرس مؤسسة مشروعين استثماريين كما يلي:

- المشروع (A): تكلفة الاستثمار: 400,000 دج، التدفق النقدي السنوي: 80,000 دج.
- المشروع (B): تكلفة الاستثمار: 360,000 دج، التدفق النقدي السنوي: 90,000 دج.

المطلوب:

- أحسب فترة الاسترداد لكل مشروع؟
- حدّد المشروع الأفضل وفق هذا المعيار؟

التمرين رقم 02:

مشروع استثماري تكلفته الأولية 250,000 دج، تدفقاته النقدية لأربع سنوات على التوالي 60000دج، 70000دج، 80000دج، 90000دج.

المطلوب:

- أحسب فترة الاسترداد؟
- فسر النتيجة المتحصل عليها؟

التمرين رقم 03:

مشروع استثماري يتطلب استثمارًا أوليًا قدره 300,000 دج، ويحقق تدفقات نقدية غير ثابتة 100000دج، 120000دج، 130000دج لثلاث سنوات على التوالي.

فإذا علمت أن معدل الخصم 10%.

المطلوب:

- أحسب صافي القيمة الحالية؟

- ما هو القرار الواجب اتخاذه؟

التمرين رقم 04:

لدينا مشروعان:

- المشروع **(A)**:
  - الاستثمار الأولي: 200,000 دج.
  - التدفقات السنوية: 90,000 دج لمدة 3 سنوات.
- المشروع **(B)**:
  - الاستثمار الأولي: 220,000 دج.
  - التدفقات السنوية: 100,000 دج لمدة 3 سنوات.

فإذا بلغ معدل الخصم 12%.

المطلوب:

- أحسب صافي القيمة الحالية لكل مشروع؟
- ما هو المشروع الأفضل مع التبرير؟

التمرين رقم 05:

مشروع يتطلب استثمارًا أوليًا قدره 150,000 دج، ويحقق تدفقات نقدية حالية (بعد الخصم) بقيمة 195,000 دج.

المطلوب:

- أحسب مؤشر الربحية؟
- كيف تفسر النتيجة؟

التمرين رقم 06:

لدينا مشروعان:

- المشروع **(A)**: القيمة الحالية للتدفقات: 300,000 دج، الاستثمار: 250,000 دج.
- المشروع **(B):** القيمة الحالية للتدفقات: 280,000 دج، الاستثمار: 200,000 دج.

المطلوب:

- أحسب مؤشر الربحية لكل مشروع؟
- أي المشروعين أفضل؟

التمرين رقم 07:

مشروع استثماري تكلفته 100,000 دج ويحقق تدفقات نقدية سنوية ثابتة قدرها 30,000 دج لمدة 5 سنوات.

المطلوب:

- أحسب معدل العائد الداخلي باستخدام الجداول المالية؟
- ما هو القرار الذي ستتخذه، علما أن معدل الفائدة في السوق 12%؟

التمرين رقم 08:

مشروع استثماري يتميز بالخصائص التالية:

- تكلفة الاستثمار 500,000 دج.
- العمر الإنتاجي 5 سنوات.
- الأرباح الصافية السنوية 80,000 دج.
- القيمة المتبقية 100,000 دج.

المطلوب:

- أحسب معدل العائد المحاسبي؟
- ما هو تفسيرك للنتيجة؟

التمرين رقم 09:

لدى مؤسسة مشروعان استثماريان:

- المشروع **(A):**
  - الاستثمار الأولي: 500,000 دج.
  - العمر: 4 سنوات.
  - التدفقات السنوية: 160,000 دج.
- المشروع **(B):**
  - الاستثمار الأولي: 650,000 دج.
  - العمر: 6 سنوات.
  - التدفقات السنوية: 180,000 دج.

علما أن معدل الخصم 10%.

المطلوب:

- أحسب صافي القيمة الحالية لكل مشروع؟
- ما هو المشروع الأفضل مع التبرير؟

التمرين رقم 10:

مشروع استثماري يمكن وصفه من خلال النقاط التالية:

- الاستثمار الأولي: 400,000 دج.
- التدفقات السنوية: 120,000 دج لمدة 5 سنوات.
- معدل الخصم: 10 %.

المطلوب:

- أحسب صافي القيمة الحالية؟
- أدرس أثر تغير التدفقات النقدية بـ ±20%؟
- حدد ما مدى حساسية المشروع لهذه التغيرات؟

التمرين 11:

لدى المؤسسة ميزانية استثمارية قدرها 700,000 دج، ولديها المشاريع التالية:

المشروع	الاستثمار	VAN
A	300000	80000
B	250000	70000
C	200000	60000
D	150000	50000

المطلوب:

- أحسب مؤشر الربحية لكل مشروع؟
- اختر مجموعة المشاريع المثلى في ظل القيد المالي؟
- ما هو تبريرك لقرار الاختيار؟

التمرين رقم 12:

لدينا مشروعان استثماريان:

- المشروع **(A)**:
  - الاستثمار: 100,000 دج.
  - التدفقات: 70,000 دج لمدة سنتين.
- المشروع **(B)**:
  - الاستثمار: 100,000 دج
  - التدفقات: 20,000 ثم 120,000دج.

علما أن معدل الخصم 10%.

المطلوب:

- أحسب VAN و TRI لكل مشروع؟
- هل هناك تعارض في القرار؟
- أي معيار يجب الاعتماد عليه؟ ولماذا؟

التمرين رقم 13:

مشروعان لهما نفس التدفقات النقدية:

- الاستثمار: 300,000 دج.
- التدفقات: 100,000 دج لمدة 5 سنوات.

غير أن:

- المشروع (A): أقل مخاطرة ⟶ معدل الخصم 8%.
- المشروع **(B):** أعلى مخاطرة ⟶ معدل الخصم 14%.

المطلوب:

- أحسب VAN لكل مشروع؟
- ما هو أثر المخاطرة على القرار الاستثماري؟

هوامش الفصل الخامس:

1 – سمير محمد عبد العزيز، الاقتصاد الإداري، مؤسسة شباب جامعة الإسكندرية، مصر، 1991 ، ص34.

2 - Patrick Epingard, Investir face aux enjeux technologiques et informationnels. Edition ellipses, Paris, 1991, P 1 - 3.

3 - E.Djuatio, Management des Projets Techniques d'Evaluation : Analyse, Choix & Planification, Edition

Harmattan Innoval, Paris, France, 2004, p 18.

4 – أحمد فريد مصطفى، **دراسة الجدوى الاقتصادية للمشروعات الاستثمارية**، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، مصر، 2009، ص9.

5 – كاظم جاسم العيساوي، دراسات الجدوى الاقتصادية وتقييم المشروعات، دار المناهج، بدون سنة نشر، الاردن، ص132.

6 – باديس بوغرة، مرجع سبق ذكره، ص256.

7 – صليحة بن طلحة، مرجع سبق ذكره، ص177.

8 - Armelle mathé, l'essentiel des mathématiques financiers, 1er edition; gualino lextenso editions, 2015, p144.

9 - Armelle mathé, opcit, p147.

قائمة المراجع:

مراجع باللغة العربية:

1. أحمد فريد مصطفى، دراسة الجدوى الاقتصادية للمشروعات الاستثمارية، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، مصر، 2009؛
2. أحمد كامل، مقدمة في رياضيات الاستثمار والتمويل، دون سنة نشر، متاح على الموقع الالكتروني: تاريخ الاطلاع 27-03-2026؛ https://fr.scribd.com/document/386413883/Math#page=91 ؛
3. إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، أساسيات الرياضيات (المالية. والبحثية)، مكتبة الاشعاع، الطبعة الثانية، مصر، 1998؛
4. باديس بوغرة، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، دار الهدى، الطبعة الأولى، الجزائر، 2012؛
5. بلحمري خيرة، محاضرات في مادة رياضيات مالية، مطبوعات مقدمة لطلبة السنة ثانية علوم التسيير، جامعة المدية، الجزائر، 2022-2023؛
6. جون بيارفادز، الرياضيات المالية والاكتوازية، دار النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود، السعودية، 2015؛
7. صليحة بن طلحة، الرياضيات المالية، منشورات الدار الجزائرية، الطبعة 1 ، 2015، الجزائر؛
8. طارق عبد الباري، عيد أبو بكر، تطبيقات الرياضيات المالية في العلوم المالية والادارية، دار النعر الأردنية زمزم، الجامعة الاردنية، 2009؛
9. سمير محمد عبد العزيز، الاقتصاد الإداري، مؤسسة شباب جامعة الإسكندرية، مصر، 1991؛
10. شقيري موسى نوري واخرون، الرياضيات المالية، الطبعة الاولى، دار اهل المعرفة، الجزائر، 2106؛
11. عبد الله توفيق الهلباوي، الرياضيات المالية، مكتبة الحرية للنشر والتوزيع، القاهرة، مصر، 2119؛
12. علي جمال الدين عوض، الأوراق التجارية السند الأدنى-الكمبيالة –الشيك دراسة للقضاء، مطبعة جامعة القاهرة (مصر)، 1995؛

قائمة المراجع:

13. قنان ابراهيم، الرياضيات المالية–دروس وتمارين محلولة–، الصفحات الزرقاء العالمية للنشر والتوزيع، الجزائر، 2016.

14. محمد علي أحمد البنا، القرض المصرفي، دار الكتب العلمية، مصر، 2006.

15. منصور بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011؛

16. مناضل الجواري، مقدمة في الرياضيات المالية، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2024؛

17. كاظم جاسم العيساوي، دراسات الجدوى الاقتصادية وتقييم المشروعات، دار المناهج، بدون سنة نشر، الاردن

مراجع باللغة الأجنبية:

18. Armelle mathé, l'essentiel des mathématiques financiers, 1er edition; gualino lextenso editions, 2015.

19. Benjamin Lagros, Mini Mannel de Mathématique financières, Edition Dunod, France, 2011.

20. E.Djuatio, Management des Projets Techniques d'Evaluation : Analyse, Choix & Planification, Edition Harmattan Innoval, Paris, France, 2004.

21. Patrick Epingard, Investir face aux enjeux technologiques et informationnels. Edition ellipses, Paris, 1991, P.

22. Walid Khoufi & Ines Dami; le calcul financier et la notation la valeur temporelle de l'argent; école supérieure de commerce de safex; TUNISIE; on line: https://coursexamens.org/images/Etudes_superieures/Marketing/math_financiere/Cours_et_exocours2valeurtemporelle.pdf ; consulte le: 13-11-2020.