République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Fares -Médéa -

Faculté des sciences

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE DE MASTER

Filière Analyse Mathématique et Application

Existence et unicité de la solution et stabilité d'une équation des Ondes a dissipation frontière

Présenté par | GHERDAOUI AbdelAziz

Encadré par | Dr.RAFA Said

Soutenu publiquement devant le jury composé de |

Dr.RAFA Said.	M.A.A.	Encadreur.
Dr.BIBI Hamza.	M.C.A.	Examinateur.
Mr.MOKDACHE Nourdinne.	M.A.B.	Examinateur.

2019/2020

Remerciements

”Quand les Mathématiques parlent, les autres sciences s’entendent ”

Je dédie ce né que c’était le produit de mes années comme j’ai fais, à ma famille et surtout à més chéres parents.
En fait, sont obéissance est une valeur maximal dont je vise à l’ arriver sur un champ de définition d’amour et de satisfaction.
À tous ceux qui sont conservés dans ma mémoire et leur noms étaient écrits dans mon cahier de mémoire, je vous demande à recevoir mes mots comme un titre d’excuses et un gage d’amour.
À touts maître et enseignant qui me donnaient une petite information.

Résumé

On considère l'équation dés ondes avec condition du contrôle frontière dynamique de type dérivée fractionnaire. On étudie la stabilité du système (P), en utilisant la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires et le résultat obtenu par Borichov-Tomilov.

Mots clés : équation des ondes , dissipation dynamique , frontière à dérivée fractionnaire ,méthode du domaine fréquentiel , stabilité polynomiale.

Abstract

We consider the wave equation with a dynamic boundary control condition of fractional derivative type. We study stability of the system using the semigroup theory of linear operators and a result obtained by Borichev and Tomilov.

Keywords : . Wave equation, dynamic boundary dissipation of fractional derivative type, frequency domain method, polynomial stability , $C_0.semi-group$, Fractional Derivative, Strong Stability, Exponential Stability, Polynomial Stability, Optimality, Spectral Method.

Table des matières

Introduction **2**

1 Définition et préliminaire **4**

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels 5

1.2 Injections de Sobolev. 9

1.3 Opérateurs bornés et non bornés 10

1.4 Théorie spectrale des opérateurs 13

1.5 Opérateurs m-dissipatifs 13

1.6 Semi-groupe fortement continu 15

1.7 Stabilité pour les semi-groupes 16

1.8 Contrôle à dérivée fractionnaire 17

2 Existence et unicité **19**

2.1 Théorèmes fondamentaux 20

2.2 Position de problème 21

2.3 Modèle augmenté 21

2.4 Existence et unicité de la solution de (P') 24

2.5 Formule analytique fonctionnel 27

2.6 Exestence Globale 29

3 La stabilité **33**

3.1 Monque de la stabilité exponentielle 34

3.2 Stabilité forte 39

3.3 Stabilité polynomiale 44

Notations générales

E	Espace de Banach.
H	Espace de Hilbert.
H^1 ,H^1	Espace de Sobolev.
$\mathbb{K}$	désigne le corps de nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{K}$.
$\|.\|$	une norme.
$(.,.)$	produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.
$< .,. >$	crochet de dualité.
$\hookrightarrow$	injection continue.
$D(A)$	le domaine de définition de l'opérateur A.
Δ	le laplacien.
∇f	le gradient de la fonction f.
$\frac{\partial}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$\partial\Omega$	frontière de Ω.
inf	borne inférieure.
sup	borne supérieure.
$\overline{\lim}$	la limite supérieure.
$\overline{D(A)}$	adhérence de l'ensemble $D(A)$.
T	opérateur.
T^*	adjoint d'un opérateur T.
I	Identité.

Introduction générale

Dans notre thèse, on va étudier l'existence et les propriétés de décroissance de la solution du problème aux limites à valeurs initiales de l'équation des ondes suivant :

$$(P): \begin{cases} \varphi_{tt}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t) = 0 \quad dans \quad (0,L)\times(0,+\infty), \\ \varphi(0,t) = 0 \quad dans \quad (0,+\infty), \\ m\varphi_{tt}(L,t) - \varphi_x(L,t) = -\gamma\partial_t^{\alpha,\eta}\varphi_x(L,t) \quad dans \quad (0,+\infty) \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) \quad dans \quad (O,L), \end{cases}.$$

où $m > 0$ et $\gamma > 0$.
La notion $\gamma\partial_t^{\alpha,\eta}$ représente la dérivée fractionnaire généralisée de Cputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$ par rapport à la variable de temps t (voir [12] et [3]).
Elle est définie comme suit :

$$\partial_t^{\alpha,\eta}\omega(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{d\omega}{ds}(s)ds, \quad \eta \geq 0.$$

Les données initiales φ_0 et φ_1 appartiennent à un espace de fonctions approprie.
Le problème (P) décrit le mouvement des vibrations d'un câble pincé au bord d'une masse $m > 0$.
Le problème d'existence globale et le calcul des taux de décroissance du problème à valeurs initiales :

$$(P): \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \quad dans \ \ \Omega\times(0,+\infty), \\ u = 0, \quad dans \ \ \Gamma_0\times(0,+\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + m.\nu\sigma(t)g(u_t) = 0 \quad sur \ \ \Gamma_1\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x) \quad sur \ \ \Omega, \end{cases}$$

est intéressé dans les années récentes.
La bibliographie des travaux dans ce sens est vraiment trop long et beaucoup d'estimations d'énergie ont été découlé par des feedbacks (décroissance polynomiale , exponentielle ,ou logarithmique). Le taux de décroissance de l'énergie (lorsque t tend vers $+\infty$) dépend de la fonction σ qui représente la croissance à l'origine de g.
Dans [20] Brahima-Mabodje a étudie le taux de décroissance de l'énergie de l'équation des ondes avec un contrôle frontière à dérivée fractionnaire comme dans notre travail. Il a utilisé la méthode de l'énergie pour prouver la stabilité asymptotique sous la condition $\eta = 0$ et il a

établit le taux de décroissance polynomiale $E(t) \leq \frac{C}{t} \quad si \quad \eta \neq 0$.
Dans [17] Z.H.luo, B.Z.Guo et O.Morgule ont étudié le taux de décroissance de l'énergie de l'équation dés ondes avec une condition frontière dynamique avec un contôle feedback linéaire au lieu d'un contrôle feedback à dérivée fractionnaire.
Ils ont utilisé la méthode du domaine fréquentiel pour prouver que le système est seulement asymptotiquement stable mais non exponentiellement stable.
Les feedback frontières sous la considération est ici de type fractionnaire sont décrites par la dérivée fractionnaire

$$\partial_t^{\alpha,\eta}\omega(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{d\omega}{ds}(s)ds, \quad \eta \geq 0.$$

L'ordre de dérivée est entre 0 et 1.
Dans les années récentes, le calcule fractionnaire a été appliqué avec succès dans plusieurs domaines pour modifier beaucoup de modèles de processus physiques tels que la condition de la chaleur, diffusion, viscoélasticité ,propagation des ondes, électronique, ... ect. Caputo et Mainardi [9] ont établit la relation entre la dérivée fractionnaire et la théorie de viscoélasticité. La généralisation du concept de dérivation et intégration d'ordre non entre a été un objectif à plusieurs approches et une certaine diverse définition alternative des dérivées partielles est apparu dans [13].
Avec un développement rapide des science de polymère et l'industrie plastique, l'étude théorique et application dans le matériau viscoélastique et devenu une tâche importante pour la mécanique des solides (voir [19]). La théorie de viscoélasticité et la solution de quelques problèmes aux limites de la viscoélasticité sont intéressé par Llioushin et Pobedria [15].
Dans notre cas la dissipation fractionnaire peut décrire un amortissement viscoélastique frontière pour le but et réduction du comportement vibratoires.
Dans notre travail on va donner la stabilité globale dans des espaces de Sobolev, et les estimations de décroissance de l'énergie de la solution du problème (P) avec contrôle frontière dynamique de type dérivée fractionnaire.
Ce travail est basé principalement sur l'article de M. Abbes Benaissa et Hanane Benkhedda [2]
L'organisation de cette thèse est comme suit :

1- **premier chapitre :** dans le premier chapitre, on donne des rappelles sur des concepts d'analyse fonctionnelle qui sont nécessaires pour notre travail essentiel.

2- **Deuxième chapitre :** dans le chapitre deux, on établit l'existence globale de la solution faible et forte du système (P).

3- **Troisième chapitre :** le chapitre trois est consacré à l'étude de la stabilité du système (P), où on établit la stabilité asymptotique en utilisant le théorème d'Arend-Batty, puis on établit le manque de stabilité exponentielle, en utilisant la méthode du domaine fréquentiel. Après on établit la stabilité polynomiale du système (P), en utilisant le théorème de Borichov-Tomilov.

Chapitre 1

Définition et préliminaire

Contents

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels 5
1.2 Injections de Sobolev. 9
1.3 Opérateurs bornés et non bornés 10
1.4 Théorie spectrale des opérateurs 13
1.5 Opérateurs m-dissipatifs 13
1.6 Semi-groupe fortement continu 15
1.7 Stabilité pour les semi-groupes 16
1.8 Contrôle à dérivée fractionnaire 17

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnel que nous allons les utiliser dans cette thèse. Quelques résultats sont donnés sans démonstrations, car ils sont standards et connues chez les lecteurs comme elles peuvent êtres trouvées dans beaucoup de références de mathématiques. Néanmoins, nous allons réserver une attention particulière pour les résultats utilisés dans le chapitre suivant.

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels

Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. ***(Produit scalaire.)***
Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire $< u, v >$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ symétrique, définie positive.

Définition 1.1.2. ***(Espace de Hilbert.)***
Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $< u, v >$ et qui est complet pour la norme $||u|| =< u, v >^{\frac{1}{2}}$.

Espaces L^p.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.3. *soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$*

- ***si*** $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \ mesurable \ \ et \ \ ||f||_{L^p} < \infty \Big\},$$

avec

$$||f||_{L^p} = \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme$||.||_{L^p}$ est un espace de Banach.

- ***Si*** $p = 2$

$$L^2(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \ mesurable \ \ et ||f||_{L^2} < \infty \Big\},$$

avec

$$||f||_{L^2} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f; g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

- ***si*** $p = +\infty$

$$L^{+\infty}(\Omega) = \big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \ mesurable \ \ et \ \ \exists C > 0 \ \ telle \ \ que \ \ |f(x)| \leq C \ \ p.p. \ \ sur \ \ \Omega \big\},$$

on note

$$||f||_{L^\infty} = Inf\{C; |f(x) \leq C \quad pp.sur \quad \Omega\},$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ *muni de la norme*$||.||_{L^\infty}$ *est un espace de Banach.*

Remarque 1.1.1. *Notons que si* $f \in L^\infty(\Omega)$ *alors on a :*

$$|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty} p.p \quad x \in \Omega.$$

Notation-

soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$;on désigne par p' l'exposant conjugué de p
i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.1.1. ***(Inégalité de Hölder.)***
Soit $f \in L^p$ *et* $g \in L^{p'}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *alors.*

$$fg \in L^1 \quad et \quad ||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^{p'}}.$$

Preuve 1.1.1. *Voir [10] page 94.*

Théorème 1.1.2. ***(Inégalité de cauchy-schwarz.)***
Pour $p = p' = 2$ *si* $f \in L^2$ *et* $g \in L^2$ *alors.*

$$fg \in L^1 \quad et \quad ||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^2} ||g||_{L^2}.$$

Théorème 1.1.3. ***(Inégalité de Minkowiski.)***
soient f *et* $g \in L^p$ *alors.*

$$||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}.$$

Preuve 1.1.2. *Voir [7] page 94.*

Espace de $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Définition 1.1.4. *On appelle l'espace des fonctions indifiniment différentiables sur* Ω *, et on noté par* $\mathfrak{D}(\Omega)$.

$$\mathfrak{D}(\Omega) = \left\{\varphi \in C^\infty(\Omega); Supp(\varphi) \quad compact\right\}$$

avec $Supp(\varphi) = \{\overline{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0}\}$.

Espace de $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Définition 1.1.5. *On appelle distribution sur* Ω *toute forme linéaire continue sur l'espace* $\mathfrak{D}(\Omega)$. *On note* $\mathfrak{D}'(\Omega)$ *l'ensemble des distributions sur* Ω.
Pour $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *et* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, *on notera désormais* $< T, \varphi >$ *au lieu* $T(\varphi)$.

Prposition 1.1.1. *Si T est une forme linéaire sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ on a les équivalences entre :*

- *$T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ $\big(T$ est une distribution sur Ω .$\big)$*
- *pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tel que*

$$\begin{aligned} |<T,\varphi>| &\leqslant C p_{m,K}(\varphi) \\ &= C sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)|, x \in K, \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leqslant m\}; \end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : supp(\varphi) \subset K,$$

Définition 1.1.6. ***(la dérivées au sens des distribution.)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, u est localement intégrable sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On appelle dérivée faible de u d'ordre α, et on note $D^\alpha u$, toute fonction v localement intégrable sur Ω tel que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : \int_\Omega u \partial \varphi dx = (-1)^\alpha \int_\Omega v \varphi dx.$$

Espaces de Sobolev.

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.7. ***(espace $H^1(\Omega)$.)***
l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est déféni par

$$H^1(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega), \forall \quad 1 \leq i \leq n \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega \Big\}.$$

Remarque 1.1.2. *La dérivée dans la définition est à prise au sens des distributions .*

Théorème 1.1.4. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire :*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx,$$

et de la norme

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve 1.1.3. *Voir [6]*

Remarque 1.1.3.

1. *On sait que $\| u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u \|_{H^1(\Omega)}$ et $\| \partial u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u \|_{H^1(\Omega)}$.*
2. *Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; on a*

$$\mathfrak{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Définition 1.1.8. ***(Espace $H^m(\Omega)$).***
L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m, D^\alpha u \in L^2(\Omega \Big\};$$

on munit de la norme :

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)| dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.9. ***(Espace*** $H_0^1(\Omega)$***).***
On définit $H_0^1(\Omega)$ *comme la fermiture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$ *: Autrement dit ,*

$$H_0^1(\Omega) = \Big\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}.$$

Prposition 1.1.2. *Soit* Ω *un ouvert borné et régulier de* R^n*. On peut définir une application linéaire et continue*

$$\begin{aligned} \gamma_0 \ : H^1(\Omega) &\to L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma_0(u). \end{aligned}$$

Prolongeant l'application trace pour les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$*: pour tout*

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \gamma_0(u) \ = \ u\big|_{\partial\Omega}.$$

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\partial\Omega)$ *, ce qui signe qu'il existe une constante* C *telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega) \parallel \gamma_0(u) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \parallel u \parallel_{H^1(\Omega)} .$$

Prposition 1.1.3. ***(Inégalité de Poincaré).***
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *. Alors il existe une constante* C_Ω *telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Formule de Green.

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.1.5. *Soit* Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *et* $\partial\Omega$ *son bord. Soit* F *une fonction de* $C^1(\Omega)$ *a valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *(un champ de vecteurs). Alors :*

$$\int_\Omega div(F(x))dx = \int_\Omega F(x).\nu(x)d\Gamma. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.4. *Dans cette formule ,1.1* $\nu(x)$ *est le vecteur unitaire normal à* $\partial\Omega$ *au point* x*, dirigé vers l'extérieur de* Ω*.*

Preuve 1.1.4. *Voir [21].*

Corollaire 1.1.1. ***(Formule de Green)***
Soit Ω *un ouvert borné de classe* C^1*. Alors pour toute fonction* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *, et* $v \in C^1(\overline{\Omega})$ *on a*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds,$$

ou $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq i\leq n}$ *et* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\nu.$

Preuve 1.1.5. *Voir [21].*

1.2 Injections de Sobolev.

Définition 1.2.1. ***(Injection continue.)***
Soient X , Y deux espaces vectorielles normés, un injection continue i de X dans Y notée par $X \hookrightarrow Y$ si :

$$\begin{aligned} i \ : X &\to Y \\ u &\mapsto i(u) = u, \end{aligned}$$

et il existe $C > 0$:

$$\|i(u)\|_Y = \|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ qui est soit borné à frontière lipschitzienne, soit égal à $\mathbb{R}^n$.*

1. *Soit $1 \leq p < n$, alors $W^{1;p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de p, n et Ω) tel que*

   $$\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|u\|_{W^{1;p}}, \quad \forall u \in W^{1;p}(\Omega),$$

   on a en particulier

   $$W^{1;1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega).$$

   Pour $n = 1$, le cas $p = n$ est autorisé. On a donc aussi

   $$W^{1;1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega).$$

2. *Si $p > n$, alors*

   $$W^{1;p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\Omega),$$

   où , pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions holderienne d'exposant α défini par

   $$C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) | \exists k \in \mathbb{R}; |u(x) - u(y)| \leq k\|x - y\|^{\alpha}, \forall (x, y) \in \Omega^2\right\}.$$

3. *Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1;N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ (et le cas $q = +\infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.*

1.3 Opérateurs bornés et non bornés

Opérateurs bornés.

Soit T un opérateur linéaire de E dans F , E et F étant des Banach on désigne par :

- $D(T)$ le domaine de définition de T , qui est donc un sous-espace de E.
- $Im(T)$ est l'image de T telle que

$$Im(T) = \{Tu, u \in E\}.$$

- $Ker(T)$ est le noyau de T tel que

$$Ker(T) = \{u \in E; Tu = 0\}.$$

Définition 1.3.1. ***(Continuité des opérateurs en un point.)***

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire T défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si :
Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to+\infty} x_n) = T(x_0).$$

Remarque 1.3.1. *L'opérateur linéaire T est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.*

L'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$

Si $(E; \| \ . \ \|_E)$ et $(F; \| \ . \ \|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel constitue par toutes les applications linéaires continues de E dans F.
Lorsque $E = F$; on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.

Définition 1.3.2. *On appelle dual topologique de l'espace E et que l'on note E' l'espace de Banach des opérateurs linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

Opérateurs bornés

Définition 1.3.3. ***(Opérateur borné).***

Un opérateur linéaire T défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\| T(x) \|_F \leq C \| x \|_E \quad , \forall x \in E \tag{1.2}$$

Prposition 1.3.1. ***(Norme d'un opérateur)*** *La plus petite des constante C vérifiant la relation 1.2 est appelée norme de T notée $\|T\|$ et donnée par :*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, \|x\|\neq 0} \|T(x)\|_F.$$

Théorème 1.3.1. *Un opérateur linéaire T est continu, si et seulement s'il est borné.*

Opérateurs adjoints

Théorème 1.3.2. ***(Représentation de Riesz).***
Soit H un espace de Hilbert, alors,

$$\forall f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K}), \exists! y \in H : \quad f(x) =< y; x >, \quad \forall x \in H.$$

Définition 1.3.4. ***(Opérateur adjoint).***
Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(H_2; H_1)$ tel que pour tous $x \in H_1$, $y \in H_2$ on ait

$$< Tx, y >_{H_2} =< x, T^* y >_{H_1},$$

est appelée l'adjoint de T.

Définition 1.3.5. ***(Domaine de l'adjoint)***
Soit $T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur dont le domaine est dense dans H . Le domaine de l'adjoint T^* de T est par définition

$$D(T^*) = \Big\{ y \in H_2 | \exists C \geq 0 \ \ telle \ \ que \ \ | < Tx, y >_{H_2} | \leq C\|x\|, \forall x \in D(T) \Big\}.$$

Opérateurs compacts

Définition 1.3.6. ***(Ensembles relativement compacts).***
Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans E.

Définition 1.3.7. ***(Opérateurs linéaires compacts).***
Soit T un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $T(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{T(G)}$ est compacte.
On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F.
On pose $K(E) = K(E, E)$

Opérateurs non bornés

Définition 1.3.8. *Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(T), T)$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire définie de $D(T)$ dans H, on dit que T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.*
Dans la suite, on suppose que $D(T)$ est dense dans H.

Opérateurs fermés

Définition 1.3.9. ***(Le graphe d'un opérateur)***
Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H, le graphe de T est le sous espace vectoriel noté : $G(T)$ de$H \times H$ défini par :

$$G(T) = \big\{(x, Tx) \quad , x \in D(T)\big\}.$$

Définition 1.3.10. ***(Norme du graphe).***
Soit $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$. La topologie des normes nous pouvons fournir $D(T)$ avec le soi-disant graphe topologie. Pour les espaces de Banach, il est habituellement défini par la norme de graphe suivante :

$$\|x\|'_{D(T)} = \|x\|_E + \|Tx\|_F,$$

et pour les espaces de Hilbert par la norme équivalente

$$\|x\|_{D(T)} = \big(\|x\|^2_{H_1} + \|Tx\|^2_{H_2}\big)^{\frac{1}{2}},$$

qui a le produit scalaire associé

$$< x, y >_{D(T)} = < x, y >_{H_1} + < Tx, Ty >_{H_2} .$$

Définition 1.3.11. ***(Opérateur fermé).***
Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que T est un opérateur fermé si son graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

Prposition 1.3.2. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est fermé.*
2. *$\forall (x_n) \in D(T)\big\{x_n \longrightarrow x_0 \quad dans \quad E \quad et \quad Tx_n \longrightarrow y_0 \quad dans \quad F\big\} alors,$ $x_0 \in D(T) \quad et \quad Tx_0 = y_0.$*
3. *$\Big(D(T), \|x\|'_{D(T)}\Big)$ est complet.*

Théorème 1.3.3. ***(Théorème du graphe fermé).***
Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que le graphe de T est fermé de $E \times F$. Alors T est continue.

Prposition 1.3.3. *Soient E et F deux espaces de Banach, si $T \in L(E; F)$ et $D(T) = E$, alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Prposition 1.3.4. *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur H de domaine $D(T)$ dense. On définit l'adjoint T^* de T par :*

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*), < Tx, y > = < x, T^*y > .$$

Si l'application $x \longrightarrow < Tx; y >$ est continue de $D(T)$ dans $\mathbb{C}$ elle possède alors une extension continue à H ce qui permet de définir l'élément T^*y dans H par la théorème de Riesz.

1.4 Théorie spectrale des opérateurs

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$

Définition 1.4.1. ***(Valeur propre).***
On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres

$$Vp(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \quad : \quad ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\},$$

$ker(\lambda I - T)$ est l'espace propre associé à λ.

Définition 1.4.2. *:*

1. ***ensemble résolvant de T :*** *on appelle ensemble résolvant de T l'ensemble*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - T \quad est \quad inversible\}.$$

Un élément de $\rho(T)$, est appelé valeur résolvante de T.

2. ***Résolvante de T :*** *si $\lambda \in \rho(T)$, on définit la résolvante $R_\lambda(T)$ de T au point λ par*

$$R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(T)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur T.

3. ***Spectre de T:*** *le spectre $\sigma(T)$ de T est l'ensemble*

$$\sigma(T) := \mathbb{C}/\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad : \quad \lambda I - T \quad non \quad inversible\}.$$

Un élément $\sigma(T)$ est une valeur spectrale de T.

Définition 1.4.3. ***(Rayon spectral).***
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On définit le rayon spectral $r(T)$ de T par

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \neq 0.$$

Si $\sigma(T) = \varnothing$; par convention, on pose $r(T) := 0$.

1.5 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.5.1. ***(Opérateur dissipatif).***
Un opérateur linéaire A dans E est dit dissipatif si on a

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\|_E \geq \lambda \|x\|_E$$

A est dit $m-dissipatif$ si :

- *A est dissipatif .*
- *Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif, i.e*

$$\forall y \in E, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A), \lambda x - Ax = y.$$

Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Théorème 1.5.1. *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A) :< Ax; x >\leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A) : Re < Ax; x >\leq 0.$$

Preuve 1.5.1. *Supposons que A est dissipatif. Pour tout $x \in D(A)$, non nul, et tout $\lambda > 0$, posons*

$$y_{x,\lambda} = \lambda x - Ax.$$
$$z_{x\lambda} = \frac{y_{x,\lambda}}{\|y_{x,\lambda}\|}.$$

L'opérateur A étant dissipatif, on a

$$\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = (\lambda x - Ax, z_{x\lambda}) = \lambda Re(x, z_{x\lambda}) - Re(Ax, z_{x\lambda}) \leq \lambda\|x\| - Re(Ax, z_{x\lambda}).$$

Par conséquent, nous avons

$$Re(Ax, z_{x,\lambda}) \leq 0.$$
$$Re(Ax, z_{x,\lambda}) \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

La suite $(z_{x;\lambda})_\lambda$ étant bornée dans H, il existe $z_x \in H$ et une suite $(\lambda_n)_n$ convergeant vers l'infinitif tels que

$$\lim_{n\to\infty} z_{x;\lambda_n} = z_x.$$

Avec les inégalités précédentes, par passage à la limite, nous obtenons

$$Re(Ax, z_x) \leq 0.$$
$$Re(x, z_x) \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

Comme

$$Re(x, z_x) \leq |(x, z_x)| \leq \|x\|,$$

nous avons donc

$$Re(x, z_x) \leq 0.$$

Réciproquement, supposons que $Re(Ax; x) \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$. Alors nous avons

$$\|\lambda x - Ax\| \geq |(\lambda x - Ax, x)| \geq Re(\lambda x - Ax, x) \geq \lambda\|x\|^2.$$

La condition de dissipativité en découle.

Théorème 1.5.2. *Si A est $m-$dissipatif alors $D(A)$ est dense dans H.*

Preuve 1.5.2. *Soit $y_0 \in H$ tel que $(y_0; x) = 0$ pour tout $x \in D(A)$. On a $(I-A)^{-1}y_0 \in D(A)$,*

$$(y_0, (I-A)^{-1}y_0) = 0,$$

et

$$((I-A)(I-A)^{-1}y_0, (I-A)^{-1}y_0) = 0,$$

L'opérateur A étant m-dissipatif, il vient

$$\|(I-A)^{-1}y_0\|^2 = (A(I-A)^{-1}y_0, (I-A)^{-1}y_0) \leq 0.$$

Donc $(I-A)_y^{-1}0 = 0$; $y_0 = 0 =$, et $D(A)$ est dense dans H.

1.6 Semi-groupe fortement continu

Tout au long de cette section, $(E; \|.\|)$ désignera un espace de Banach.

Définition 1.6.1. ***(Semi-groupe fortement continu).***
Une famille $\big(S(t)\big)_{t>0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach E est appelée semi-groupe fortement continue si

1. *$S(0) = I$(I est l'opérateur identité sur E).*
2. *$S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$ (Propriété de semi-groupe).*
3. *Pour chaque $x \in E$, $S(t)x$ est continue en t sur $[0; +\infty)$.*
   Ce type de semi groupe sera simplement appelé un $C_0.semi-groupe$.

Définition 1.6.2. *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit :*

1. *uniformément continu si $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0$.*
2. *Fortement continu ou de classe C_0 si $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = x$.*
3. *Semi-groupe de contraction de classe C_0 s'il est de classe C_0 et $\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$.*

Remarque 1.6.1. *Si $\big(S(t)\big)_{t>0}$ est un semi-groupe uniformément continu,alors,*

$$\lim_{t\to s} \|S(t) - S(s)\| = 0.$$

Définition 1.6.3. ***(Générateur infinitésimal).***
Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire A de domaine.

$$D(A) = \Big\{x \in H : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad existe\Big\},$$

défini par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} A_t x = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A).$$

Prposition 1.6.1. *Soit $S(t)$ un C_0-semigroupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}; \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.6.2.

1. *Dans le cas oú $\|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0$: on dit que $\big(S(t)\big)_{t>0}$ est de type (M, ω).*
2. *Si $(M, \omega) = (1, 0)$, on dit que $\big(S(t)\big)_{t>0}$ est un C_0.semi-groupe de contraction.*

Preuve 1.6.1. *Voir [16].*

Définition 1.6.4. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur fermé. Alors*

$$T(A) = \big\{ \sup \lambda, \quad \lambda \in \sigma(T) \big\},$$

est appelée la borne spectrale de A.

Prposition 1.6.2. *Soient $\big(S(t)\big)_{t>0}$ un C_0.semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :*

$$S(t)Ax = AS(t)x \quad , t \geq 0.$$

Preuve 1.6.2. *Voir [14].*

1.7 Stabilité pour les semi-groupes

Dans cette section nous commençons par produire une certaine définition de type de stabilité uniforme, exponentielle, uniformément exponentielle, nous avons encore cité deux théorèmes équivalents et démontrer leurs équivalence et un parmi eux.

Notions de stabilité

Définition 1.7.1. *Le semi-groupe $S(t) = e^{At}$ est dit être exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\omega > 0$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.7.2. *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0.semi-groupe de générateur A dans un espace de Banach E : $\big(S(t)\big)_{t>0}$ est dit :*

1. *Uniformément stable si $\lim\limits_{t\to+\infty} \|S(t)\| = 0$.*
2. *Fortement stable si $\lim\limits_{t\to+\infty} \|S(t)x\| = 0, \quad \forall x \in E$.*
3. *Uniformément exponentiellement stable s'il existe $\omega > 0$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\omega t}\|S(t)\| = 0$.*
4. *Faiblement stable si $\lim\limits_{t\to+\infty} < S(t)x, x^* >= 0, \quad \forall x \in E, \forall x^* \in E'$.*

5. *Polynomialement stable s'il existe deux constantes positives C et α telles que*

$$\|S(t)x\|_X \leq Ct^{-\alpha}\|x\|_E, \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in E.$$

Prposition 1.7.1. *Pour un C_0.semi-groupe $\big(S(t)\big)_{t>0}$ dans un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\big(S(t)\big)_{t>0}$ *est uniformément exponentiellement stable.*
2. $\big(S(t)\big)_{t>0}$ *est uniformément stable.*
3. *Il existe $\omega > 0$ tel que,*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\omega t}\|S(t)x\| = 0, \quad \forall x \in E.$$

1.8 Contrôle à dérivée fractionnaire

Définition 1.8.1. *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, au sens où Riemann-Liouville est donnée*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t > a.$$

Définition 1.8.2. *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, au sens de Riemann-Liouville d'un la fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par*

$$D_{RL,a}^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \quad n = [\alpha] + 1, \quad t > a.$$

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$D_{RL,a}^0 f(t) = I_a^0 f(t) = f(t),$$

si $\alpha = n$, alors

$$D_{RL,a}^n f(t) = f^n(t).$$

De plus, si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, alors

$$D_{RL,a}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds, \quad t > a.$$

Exemple 1.8.1. *Soit $\alpha > 0$, $\gamma > -1$ et $f(t) = (t-a)^\gamma$, puis*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}(t-a)^{\gamma+\alpha},$$

$$D_{RL,a}^\alpha f(t)) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha}.$$

En particulier, si $\gamma = 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$D_{RL,a}^\alpha (C)) = C\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Les dérivés de Riemann-Liouville présentent certains inconvénients lorsqu'ils tentent de modéliser phénomènes mondiaux. Les problèmes étudiés nécessitent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables dont y (0), y (0), etc. les lacunes ont conduit à une définition alternative des dérivés fractionnaires qui satisfait ces demandes dans les dernières années soixante. Il a été introduit par Caputo. En fait, Caputo et Minardi ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la viscoélasticité. Maintenant, nous donnons la définition des dérivés fractionnaires dans le sens de Caputo ainsi que certains propriétés essentielles.

Définition 1.8.3. *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, au sens de Caputo, définie sur la l'intervalle [a, b], est donné par*

$$D^{\alpha}_{C,a} f(t) = D^{\alpha}_{RL,a}\Big(f(t) - \frac{\sum_{k=0}^{n+1}}{k!}(t-a)^k\Big),$$

avec

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1 \quad si \quad \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha \quad si \quad \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En particulier, où $0 < \alpha < 1$, la relation prend la forme

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{C,a} f(t) &= D^{\alpha}_{C,a}\Big([f(t) - f(a)]\Big) \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds. \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $f^{(n)}(t)$ et $D^{\alpha}_{C,a} f(t)$ coïncide i.e.

$$f^{(n)}(t) = D^{\alpha}_{C,a} f(t).$$

Exemple 1.8.2. *Soit $\alpha > 0$ et $f(t) = (t-a)^{\sigma}$ où $\sigma > -1$. alors*

$$D^{\alpha}_{C,a} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha}.$$

En particulier, si $\gamma = 0$ et $\alpha > 0$, alors $D^{\alpha}_{C,a} C = 0$.

Chapitre 2

Existence et unicité

Contents

2.1 Théorèmes fondamentaux 20
2.2 Position de problème 21
2.3 Modèle augmenté 21
2.4 Existence et unicité de la solution de (P') 24
2.5 Formule analytique fonctionnel 27
2.6 Exestence Globale 29

Dans ce chapitre on va établir l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une équation linéaire des Ondes à dissipation frontière .

Pour ce but nous avons besoin d'introduire d'abord les théorèmes fondamentaux et les propriété élémentaires pour cette étude.

2.1 Théorèmes fondamentaux

Définition 2.1.1. *Une forme bilinéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est :*

- *Continue s'il existe C tel que pour tout (u, v),*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|.$$

- *coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in H$,*

$$|a(u, u)| \geq \alpha\|u\|^2.$$

Théorème 2.1.1. ***(Lax-Milgram).***

Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Pour $F \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = F(v).$$

Si A est symétrique, alors u est caractérisé par

$$u \in H : \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = \min_{v \in \mathbb{K}} \big(\frac{1}{2}a(v, v) - F(v)\big).$$

Preuve 2.1.1. *Voir [10] page 164.*

Théorème 2.1.2. ***(théorème de Lumer-Phillips).***

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach E. Alors $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un $\big(S(t)\big)_{t>0}$ de contraction si et seulement si

1. $\overline{D(\mathcal{A})} = E$.
2. *$\mathcal{A}$ est m-dissipatif.*

Preuve 2.1.2. *Voir [22].*

Problème de cauchy.

Dans cette section, nous commençons par introduire quelques concepts de base concernant les semi-groupes.

La grande majorité des équations d'évolution peuvent être réduites à la forme

$$(P_1) \qquad \begin{cases} U' = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0.semi-groupe $\big(S(t)\big)_{t>0}$ sur un espace de Hilbert H.

Théorème 2.1.3. ***(théorème de Hille-Yosida).***

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ Un opérateur linéaire non borné sur H. supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0.semi-groupe de contractions $\big(S(t)\big)_{t>0}$.

1. *Pour $U_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (P_1) admet une solution forte unique .*

$$U(t) = S(t)U_0 \in \Big(C^0\big(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})\big) \cap C^1\big(\mathbb{R}_+, H\big)\Big).$$

2. *Pour $U_0 \in H$, le problème (P_1) admet une solution faible le unique .*

$$U(t) \in C^0\big(\mathbb{R}_+, H\big).$$

2.2 Position de problème

On considère le problème linéaire des ondes (P) suivant

$$(P) : \begin{cases} \varphi_{tt}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t) = 0 \quad dans \quad (0,L) \times (0,+\infty), \\ \varphi(0,t) = 0 \quad dans \quad (0,+\infty), \\ m\varphi_{tt}(L,t) - \varphi_x(L,t) = -\gamma \partial_t^{\alpha,\eta} \varphi_x(L,t) \quad dans \quad (0,+\infty) \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) \quad dans \quad (O,L), \end{cases}$$

avec

$$\varphi(0,t) = 0 \quad t \in (0,+\infty),$$

et

$$m\varphi_{tt}(L,t) - \varphi_x(L,t) = -\gamma \partial_t^{\alpha,\eta} \varphi_x(L,t) \quad t \in (0,+\infty),$$

sont des conditions aux limites .

et $\varphi(x,0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x)$ sont des conditions initiales

où $m > 0$ et $\gamma > 0$.

La notation $\partial_t^{\alpha,\eta}$ représente la dérivée fractionnaire généralisée de Caputo d'ordre $\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$ par rapport à la variable de temps (voir Choi et MacCamy [12] et E. Blanc, G. Chiavassa et B. Lombard [3]). Il est défini comme suit

$$\partial_t^{\alpha,\eta}\omega(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{d\omega}{ds}(s) ds, \quad \eta \geq 0.$$

2.3 Modèle augmenté

Cette section concerne la re-formulation du modèle (P) en un système augmenté . en re-décrivant le terme dérivé fractionnaire au moyen d'un équation de diffusion, le modèle original est transformé à un système augmenté qui peut être plus facilement abordé par la méthode énergétique.

Théorème 2.3.1. *[20] Soit μ est une fonction :*

$$\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.1}$$

Puis la relation entre l'"entrée" U et " la sortie " O du système

$$\partial_t \phi(\xi,t) + (\xi+\eta)\phi(\xi,t) - U(t)\mu(\xi) = 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \eta \geq 0, t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$\phi(\xi,0) = 0 \tag{2.3}$$

$$O(t) = \left(\pi\right)^{-1} \sin(\alpha\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi \tag{2.4}$$

La relation entre l'entrée "O" et sortie "O" du système précédent est

$$O = I^{1-\alpha,\eta}U = D^{\alpha,\eta}U \tag{2.5}$$

avec

$$[I^{\alpha,\eta}f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau)d\tau.$$

Preuve 2.3.1. *On a*

$$\begin{cases} \partial_t \phi(\xi,t) + (\xi+\eta)\phi(\xi,t) = U(t)\mu(\xi).....(I) \\ \phi(\xi,0) = 0, \end{cases}$$

alors

$$\partial_t \phi(\xi,t) = -(\xi+\eta)\phi(\xi,t).$$

L'équation homogène de (I) i.e

$$\phi(\xi,t) = K_\xi e^{-(\xi+\eta)t},$$

alors $\phi'(\xi,t) = K'_\xi e^{-(\xi+\eta)t} - (\xi+\eta)K_\xi e^{-(\xi+\eta)t}$, *i.e*

$$K'_\xi e^{-(\xi+\eta)t} - (\xi+\eta)K_\xi e^{-(\xi+\eta)t} + (\xi+\eta)K_\xi e^{-(\xi+\eta)t} = U(t)\mu(\xi).$$

$$K'_\xi e^{-(\xi+\eta)t} = U(t)\mu(\xi).$$

i.e

$$K'_\xi = U(t)\mu(\xi)e^{(\xi+\eta)t}.$$

i.e

$$K_\xi = \int_0^t U(\tau)\mu(\xi)e^{(\xi+\eta)\tau} + c.$$

Donc

$$\phi(\xi,t) = \Big[\int_0^t U(\tau)\mu(\xi)e^{(\xi+\eta)\tau} + c\Big] e^{-(\xi+\eta)t}.$$

On a $\phi(\xi,0) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$
Alors $\phi(\xi,t) = \int_0^t \mu(\xi)e^{-(\xi^2+\eta)\tau}e^{-(\xi^2+\eta)t}U(\tau)d\tau.$

$$\phi(\xi,t) = \int_0^t \mu(\xi)e^{-(\xi^2+\eta)(t-\tau)}U(\tau)d\tau. \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
O(t) &= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi\\
&= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\Big[\int_0^t \mu(\xi)e^{-(\xi^2+\eta)(t-\tau)}U(\tau)d\tau\Big]d\xi\\
&= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu^2(\xi)\Big[\int_0^t U(\tau)e^{-\xi^2(t-\tau)}e^{-\eta t}e^{\eta\tau}d\tau\Big]d\xi\\
&= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)e^{-\eta t}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi|^{2\alpha-1}\Big[\int_0^t U(\tau)e^{-\xi^2(t-\tau)}e^{\eta\tau}d\tau\Big]d\xi\\
&= 2\big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)e^{-\eta t}\int_{0}^{+\infty}|\xi|^{2\alpha-1}\Big[\int_0^t U(\tau)e^{-\xi^2(t-\tau)}e^{\eta\tau}d\tau\Big]d\xi.
\end{aligned}
$$

$$
O(t) = \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)e^{-\eta t}\int_0^t\Big[2\int_0^{+\infty}|\xi|^{2\alpha-1}e^{-\xi^2(t-s)}d\xi\Big]e^{\eta\tau}U(\tau)d\tau. \tag{2.7}
$$

i.e

$$
O(t) = \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)e^{-\eta t}\int_0^t\Big[2\int_0^{+\infty}\xi^{2\alpha-1}e^{-\xi^2(t-s)}d\xi\Big]e^{\eta\tau}U(\tau)d\tau.
$$

Un changement de variable : $z=-\xi^2(t-\tau$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
O(t) &= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)e^{-\eta t}\int_0^t\Big[\int_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}(t-\tau)^{-\alpha}dz\Big]e^{\eta\tau}U(\tau)d\tau\\
&= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)e^{-\eta t}\int_0^t\Big[\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{-\alpha}\Big]e^{\eta\tau}U(\tau)d\tau,
\end{aligned}
$$

où $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}dz$. Alors

$$
O(t) = \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)\int_0^t\big[(t-\tau)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\big]e^{-\eta(t-\tau)}U(\tau)d\tau. \tag{2.8}
$$

On sait que $\big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$. Donc

$$
O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}e^{-\eta(t-\tau)}U(\tau)d\tau.
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
O(t) &= \Big[I^{1-\alpha,\eta}U\Big](t)\\
&= D^{\alpha,\eta}U(t).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
m\varphi_{tt}(L,t)+\varphi_x(L,t) &= -\gamma\partial_t^{\alpha,\eta}\varphi_x(L,t)\\
&= -\gamma O(t)\\
&= \big(\pi\big)^{-1}\sin(\alpha\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi.
\end{aligned}
$$

D'où

$$(P) \Leftrightarrow (P') : \begin{cases} \varphi_{tt}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty), \\ \partial_t \phi(\xi,t) + (\xi^2 + \eta)\phi(\xi,t) - \varphi_t(L,t)\mu(\xi) = 0, \\ \varphi(0,t) = 0 \quad t \in (0,+\infty), \\ m\varphi_{tt}(L,t) + \varphi_x(L,t) = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi, \quad \zeta = (\pi)^{-1}\sin(\alpha\pi)\gamma, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

Montons que

$$U(\tau) = \varphi_t(L,t).$$

On a

$$\partial_t^{\alpha,\eta}\varphi(L,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \varphi_s(L,s)ds.$$

D'autre part :

$$O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} e^{-\eta(t-\tau)} U(\tau)d\tau.$$

Donc

$$U(t) = \varphi_t(L,t).$$

2.4 Existence et unicité de la solution de (P')

Lemme 2.4.1. *La fonction de l'énergie du système (P') est donnée par :*

$$E(t) = \frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 + \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2 + \frac{\zeta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi,t)|^2 d\xi \tag{2.9}$$

Preuve 2.4.1. *On multiplie la première équation du système (P') par $\overline{\varphi}_t$ et on entégre sur $(0,L)$ on obtient*

$$\int_0^L \varphi_{tt}(x,t)\overline{\varphi}_t dx - \int_0^L \varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi}_t dx = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \Big\{ \big[\varphi_x \overline{\varphi}_t\big]_0^L - \int_0^L \overline{\varphi}_{tx}\varphi_x dx \Big\} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 - \varphi_x(L,t)\overline{\varphi}_t(L,t)\varphi_x(0,t)\overline{\varphi}_t(0,t) + \int_0^L (\overline{\varphi_x})_t \varphi_x dx = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 - \varphi_x(L,t)\overline{\varphi}_t(L,t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 - \overline{\varphi}_t(L,t)\Big[- m\varphi_{tt}(L,t) - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi \Big] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 - \overline{\varphi}_t(L,t)\frac{m}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t(L,t)|^2 + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_t(L,t)\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi = 0.$$

On pose

$$I = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_x\|^2_{L^2} + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t(L,t)|^2,$$

et

$$J = \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_t(L,t)\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi.$$

D'après la deuxième équation de (P') *on a :*

$$\begin{aligned} J &= \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_t(L,t)\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi \\ &= \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\partial_t\phi(\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)\Big]\phi(\xi,t)d\xi \\ &= \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t\phi(\xi,t)\phi(\xi,t)d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 d\xi \\ &= \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi,t)|^2 d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Donc

$$I + J = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_x\|^2_{L^2} + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t(L,t)|^2 + \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi,t)|^2 d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 d\xi = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\|\varphi_t\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|\varphi_x\|^2_{L^2} + \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2 + \frac{\zeta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi,t)|^2 d\xi\Big] + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 d\xi = 0.$$

Donc

$$E(t) = \frac{1}{2}||\varphi_t||^2_2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||^2_2 + \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2 + \frac{\zeta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi,t)|^2 d\xi.$$

Ce qui achève La preuve du lemme 2.4.1.

Lemme 2.4.2. *pour* (φ,ϕ) *est une solution de* (P')*, alors la fonction l'énergie du système* (P') *définie dans l'équation* (2.9) *satisfais :*

$$E'(t) = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|^2 d\xi \tag{2.10}$$

Preuve 2.4.2. *Multiplier le premier équation dans* (P') *de* $\overline{\varphi_t}$ *et Nous intégrons sur* $(0,L)$ *:*

$$\int_0^L (\varphi_{tt}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx = 0.$$

Alors

$$\begin{cases} Re(\int_0^L (\varphi_{tt}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx) = 0 \\ Im(\int_0^L (\varphi_{tt}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$Re(\int_0^L (\varphi_{tt}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$Re(\int_0^L(\varphi_{tt}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t)) - Re\int_0^L(\varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$Re(\int_0^L(\frac{d}{dt}\varphi_t(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t)) - Re\int_0^L(\varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx) = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 - Re\int_0^L(\varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t)dx) = 0,$$

et ona

$$\begin{aligned}
\int_0^L(\varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t)dx) &= [\varphi_x\overline{\varphi_t}]_0^L - \int_0^L(\varphi_x(x,t)\overline{\varphi_{tx}}(x,t)dx) \\
&= \varphi_x(L,t)\overline{\varphi_t}(L,t) - \varphi_x(0,t)\overline{\varphi_t}(0,t) - \int_0^L(\varphi_x(x,t)\overline{\varphi_{tx}}(x,t))dx \\
&= \varphi_x(L,t)\overline{\varphi_t}(L,t) - \int_0^L(\varphi_x(x,t)\overline{\varphi_{tx}}(x,t))dx \\
&= -m\varphi_{tt}\overline{\varphi_t} - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi)\overline{\varphi_t\varphi_t} - \int_0^L(\frac{d}{dt}\overline{\varphi_x}\varphi_x)dx \\
&= -\frac{m}{2}\frac{d}{dt}||\varphi_t||_2^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t|_2^2 - \zeta\overline{\varphi_t}(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\Phi(\xi,t)d\xi).
\end{aligned}$$

Alors

$$Re\int_0^L(\varphi_{xx}(x,t)\overline{\varphi_t}(x,t))dx = \frac{d}{dt}(\frac{m}{2}||\varphi_t||_2^2 - \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}|\varphi_t|_2^2) - \zeta Re\overline{\varphi_t}(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\Phi(\xi,t)d\xi)$$

Donc on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2) + \zeta Re\overline{\varphi_t}(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\Phi(\xi,t)d\xi) = 0 \qquad (2.11)$$

multiplier la deuxième équation dans (P') *de* $\zeta\overline{\phi}$ *et Nous intégrons sur* $(-\infty,+\infty)$ *:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_t\phi(\xi,t)\zeta\overline{\phi} + (\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)\zeta\overline{\phi} - \varphi_t(L,t)\mu(\xi)\zeta\overline{\phi})d\xi = 0$$

Alors

$$\begin{cases} Re(\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_t\phi(\xi,t)\zeta\overline{\phi} + (\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)\zeta\overline{\phi} - \varphi_t(L,t)\mu(\xi)\zeta\overline{\phi})d\xi) = 0 \\ Im(\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_t\phi(\xi,t)\zeta\overline{\phi} + (\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)\zeta\overline{\phi} - \varphi_t(L,t)\mu(\xi)\zeta\overline{\phi})d\xi) = 0 \end{cases}$$

Alors

$$Re(\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_t\phi(\xi,t)\overline{\phi}d\xi) + \zeta Re(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)\overline{\phi}d\xi) - \zeta Re(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_t(L,t)\mu(\xi)\overline{\phi})d\xi) = 0$$

Alors

$$\frac{\zeta}{2}||\phi||_2^2 + \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|d\xi - \zeta Re\varphi_t(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\overline{\phi}d\xi = 0 \qquad (2.12)$$

D'après l'équation (2.1) *on :*

$$E'(t) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2) + \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\xi,t)|^2 d\xi$$

Et d'après l'équation (2.3)et (2.4) on :

$$\frac{\zeta}{2}||\phi||_2^2 = -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|d\xi + \zeta Re\varphi_t(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\overline{\phi}d\xi \qquad (*)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2) = -\zeta Re\overline{\varphi_t}(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi)$$

Alors

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2) + \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\xi,t)|^2 d\xi \\
&= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||\varphi_t||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_x||_2^2 - \frac{m}{2}|\varphi_t(L,t)|^2) + \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}||\phi||_2^2 \\
&= -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|d\xi + \zeta Re\varphi_t(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\overline{\phi}d\xi - \zeta Re\overline{\varphi_t}(L,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\Phi(\xi,t)d\xi) \\
&= -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|d\xi
\end{aligned}$$

Ce qui achève La preuve du lemme 2.4.2.

2.5 Formule analytique fonctionnel

Pour étudier le problème (P') par la théorie du semi-groupe.On va reformuler le système sous un problème de Cauchy associé, c'est a dire on écrit (P') sur la forme suivant :

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

On pose

$$u = \varphi_t \quad et \quad v(t) = \varphi_t(L,t), \quad t > 0 \qquad (2.13)$$

donc d'après l'équation 4 dans (P') ona

$$mv_t(t) + \varphi_x(L,t) + \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (2.14)$$

alors d'après (P') et (2,5)et (2,6) on a le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_t = u \\ \varphi_{tt}(x,t) = \varphi_{xx}(x,t) \\ \partial_t\phi(\xi,t) = -(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t) + \varphi_t(L,t)\mu(\xi) \\ \varphi_{tt}(L,t) = \frac{1}{m}\varphi_x(L,t) - \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi = u \\ \frac{d}{dt}u(x,t) = \varphi_{xx}(x,t) \\ \frac{d}{dt}\phi(\xi,t) = -(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t) + v(t)\mu(\xi) \\ \frac{d}{dt}v(t) = -\frac{1}{m}\varphi_x(L,t) - \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi\\u\\\phi\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\xi^2+\eta) & \mu(\xi) \\ -\frac{1}{m}\frac{d}{dx} & 0 & -\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)d\xi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\u\\\phi\\v\end{pmatrix}$$

où I est l'opérateur identité.

donc posons $U = (\varphi, u, \phi, v)^T$. Alors le problème (P') est réduit au problème de Cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

avec l'opérateur $\mathcal{A}$ est définit par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}\varphi\\u\\\phi\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \varphi_{xx} \\ -(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t) + u(L,t)\mu(\xi) \\ -\frac{1}{m}\varphi_x(L,t) - \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi,t)dx \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

On considère l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{H} = H_L^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(-\infty,+\infty)\times\mathbb{C},$$

on munit du produit scalaire :

$$< U, U' >= \int_0^L (u\overline{u'} + \varphi_x\overline{\varphi'_x})dx + \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\overline{\phi'}d\xi + mv\overline{v'}.$$

Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$:

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} U = (\varphi,u,\phi,v)^T \in \mathbb{H} \qquad avec, \\ \varphi \in H^2(0,L)\cap H_L^1(0,L) \\ u \in H_L^1(0,L), v \in \mathbb{C} \\ -(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t) + \varphi_t(L,t)\mu(\xi) \in L^2(-\infty,+\infty) \\ u(L) = v, |\xi|\phi \in L^2(-\infty,+\infty) \end{array} \right\} \tag{2.17}$$

2.6 Exestence Globale

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de (P') , on utilise la méthode du semi-groupe c-a-d on utilise les deux théorèmes de Lumer-Phllips et Hille-yosida .
On verifie les conditions de théorème de Lumer-Phllips :

Montrons que $\mathcal{A}$ est m-dissipatif

1- **Montrons que $\mathcal{A}$ est dissipatif.**

Montrons que pour tout $U \in D(\mathcal{A})$: $Re < \mathcal{A}U, U > \leq 0$.

Soit $U \in D(\mathcal{A})$ on a :

$< \mathcal{A}U, U >= \int_0^L \varphi_{xx}\overline{u}dx + \int_0^L u_x\overline{\varphi_x}dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\zeta^2+\eta)\phi\overline{\phi}d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} u(L)\mu(\xi)\overline{\phi}d\xi$
$- \varphi_x(L)\overline{v} - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)d\xi)\overline{v},$

on a

$$\int_0^L \varphi_{xx}\overline{u}dx = [\varphi_x\overline{u}]_0^L - \int_0^L \varphi_x\overline{u_x}dx = \varphi_x(L)\overline{u}(L) - \int_0^L \varphi_x\overline{u_x}dx$$

$\Leftrightarrow$

$$< \mathcal{A}U, U >= \int_0^L (u_x\overline{\varphi_x} - \varphi_x\overline{u_x})dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)(u\overline{\phi} - \phi\overline{u})d\xi.$$

$\Leftrightarrow$

$$Re < \mathcal{A}U, U >= \int_0^L (Reu_x\overline{\varphi_x} - Re\varphi_x\overline{u_x})dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)(Reu\overline{\phi} - Re\phi\overline{u})d\xi$$

$\Leftrightarrow$

$$Re < \mathcal{A}U, U >= \int_0^L (Reu_x\overline{\varphi_x} - Re\varphi_x\overline{u_x})dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)(Reu\overline{\phi} - Re\phi\overline{u})d\xi$$

$\Leftrightarrow$

$$Re < \mathcal{A}U, U >= \int_0^L (Reu_x\overline{\varphi_x} - Re\overline{\varphi_x\overline{u_x}})dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)(Reu\overline{\phi} - Re\overline{\phi\overline{u}})d\xi$$

$\Leftrightarrow$

$$Re < \mathcal{A}U, U >= \int_0^L (Reu_x\overline{\varphi_x} - Reu_x\overline{\varphi_x})dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)(Reu\overline{\phi} - Re\overline{\phi}u)d\xi.$$

$\Leftrightarrow$

$$Re < \mathcal{A}U, U >= -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi \leq 0. \tag{2.18}$$

Donc $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2- **Montrons que $(\lambda I - \mathcal{A})$ est surjectif :**

Montrons que pour tous F de $\mathcal{H}$, il existe U de $D(\mathcal{A})$ telle que :

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{2.19}$$

Soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ on a :
$(\lambda I - \mathcal{A})U = F \Leftrightarrow \lambda U - \mathcal{A}U = F \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda\varphi - u = f_1, \\ \lambda u - \varphi_{xx} = f_2, \\ \lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi + u(L)\mu(\xi) = f_3, \\ \lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_4. \end{cases} \tag{2.20}$$

Donc d'après $(2, 11)$ on a

$$u = \lambda\varphi - f_1. \tag{2.21}$$

$$(\lambda + \xi + \eta)\phi + u(L)\mu(\xi) = f_3 \Leftrightarrow \phi = \frac{f_3(\xi) + u(L)\mu(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta} \tag{2.22}$$

donc d'après (2,11) et (2,12) on a

$$\lambda(\lambda\varphi - f_1) - \varphi_{xx} = f_2 \Leftrightarrow \lambda^2\varphi - \varphi_{xx} = f_2 + \lambda f_1 \tag{2.23}$$

multiplie l'équation (2,14) dans $\overline{\omega} \in H_L^1(0, L)$,

$$\int_0^L (\lambda^2\varphi\overline{\omega} - \varphi_{xx}\overline{\omega})dx = \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx, \tag{2.24}$$

i.e

$$\int_0^L \lambda^2\varphi\overline{\omega}dx - \int_0^L \varphi_{xx}\overline{\omega}dx = \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx.$$

On intégré par partie :

$$\int_0^L \lambda^2\varphi\overline{\omega}dx - [\varphi_x\overline{\omega}]_0^L + \int_0^L \varphi_x\overline{\omega_x}dx = \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx,$$

i.e

$$\int_0^L (\lambda^2\varphi\overline{\omega} + \varphi_x\overline{\omega_x})dx - \varphi_x(L)\overline{\omega}(L) = \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx,$$

d'après la quatrième d' équation dans $(2, 11)$ on a

$$\varphi_x(L) = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi + mf_4 - \lambda mv.$$

On remplace dans (2,16)

$$\int_0^L (\lambda^2\varphi\overline{\omega} + \varphi_x\overline{\omega_x})dx + \zeta\overline{\omega}(L) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi + \lambda mv\overline{\omega}(L) = \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx + mf_4\overline{\omega}(L).$$

On remplace $(2, 13)$ dans $(2, 17)$; il vient

$$\begin{cases} \int_0^L (\lambda^2\varphi\overline{\omega} + \varphi_x\overline{\omega_x})dx + \lambda mv\overline{\omega}(L) + \zeta\overline{\omega}(L) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\frac{f_3 + u(L)\mu(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta}(\xi)d\xi \\ = \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx + mf_4\overline{\omega}(L) \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} \int_0^L(\lambda^2\varphi\overline{\omega}+\varphi_x\overline{\omega_x})dx+\lambda mv\overline{\omega}(L)+\zeta\overline{\omega}(L)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}f_3d\xi+\zeta\overline{\omega}(L)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}u(L)d\xi \\ = \int_0^L(f_2+\lambda f_1)\overline{\omega}dx+mf_4\overline{\omega}(L), \end{cases}$$

On pose : $\widehat{\zeta}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}d\xi$; il vient

$$\begin{cases} \int_0^L(\lambda^2\varphi\overline{\omega}+\varphi_x\overline{\omega_x})dx+\lambda mu(L)\overline{\omega}(L)+\widehat{\zeta}\overline{\omega}(L)u(L) \\ = \int_0^L(f_2+\lambda f_1)\overline{\omega}dx-\zeta\overline{\omega}(L)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}f_3d\xi+mf_4\overline{\omega}(L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^L(\lambda^2\varphi\overline{\omega}+\varphi_x\overline{\omega_x})dx+(\lambda m+\widehat{\zeta})\overline{\omega}(L)u(L) \\ = \int_0^L(f_2+\lambda f_1)\overline{\omega}dx-\zeta\overline{\omega}(L)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}f_3d\xi+mf_4\overline{\omega}(L) \end{cases} \tag{2.25}$$

d'apris $(2,12)$ ona

$$u(L)=\lambda\varphi(L)-f_1(L). \tag{2.26}$$

On remplace dans $(2,18)$, il vient :

$$\begin{cases} \int_0^L(\lambda^2\varphi\overline{\omega}+\varphi_x\overline{\omega_x})dx+\lambda(\lambda m+\widehat{\zeta})\varphi(L)\overline{\omega}(L) \\ = \int_0^L(f_2+\lambda f_1)\overline{\omega}dx-\zeta\overline{\omega}(L)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}f_3d\xi \\ +(\lambda m+\widehat{\zeta})f_1(L)\overline{\omega}(L)+mf_4\overline{\omega}(L), \end{cases} \tag{2.27}$$

donc (2,19) est équivalent au problème

$$a(\varphi,\omega)=L(\omega) \tag{2.28}$$

telle que a est une forme bilinéaire

$$a(\varphi,\omega)=\int_0^L(\lambda^2\varphi\overline{\omega}+\varphi_x\overline{\omega_x})dx+\lambda(\lambda m+\widehat{\zeta})\varphi(L)\overline{\omega}(L),$$

et $L(.)$ une forme linéaire :

$$L(\omega)=\int_0^L(f_2+\lambda f_1)\overline{\omega}dx-\zeta\overline{\omega}(L)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}f_3d\xi+(\lambda m+\widehat{\zeta})f_1(L)\overline{\omega}(L)+mf_4\overline{\omega}(L).$$

On applique le Théorème de Lax-Milgram 2.1.1, sur l'espace $\mathbb{H}$ pour la forme bilinéaire $a(\varphi,\omega)$ et la forme linéaire $L(\omega)$.

1- **La bilinéarité de $a(.,.)$ et linéarité de $L(.)$:**

grâce à la linéarité de l'intégrale.

2- **Continuité de $a(.,.)$:**

En utilisant l'inégalité de cauchy-shwartz et l'injection de Sobolev

$$\begin{aligned} |a(\varphi,\omega)| &= |\int_0^L(\lambda^2\varphi\overline{\omega}+\varphi_x\overline{\omega_x})dx+\lambda(\lambda m+\widehat{\zeta})\varphi(L)\overline{\omega}(L)| \\ &\leq \lambda^2\int_0^L|\varphi\overline{\omega}|dx+\int_0^L|\varphi_x\overline{\omega_x}|dx+|\lambda(\lambda m+\widehat{\zeta})||\varphi(L)||\overline{\omega}(L)| \\ &\leq \lambda^2\|\varphi\|_{H^1}\|\omega\|_{H^1}+\|\varphi\|_{H^1}\|\omega\|_{H^1}+K\|\varphi\|_{H^1}\|\omega\|_{H^1} \quad , \quad K=|\lambda(\lambda m+\widehat{\zeta})| \\ &\leq C\|_{H_L^1(0,L)}\|\omega\|_{H_L^1(0,L)} \quad , \quad C=max(\lambda^2,1,K). \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

3- **La coercivité de $a(.,.)$:**

$$\begin{aligned}
a(\varphi,\varphi) &= \int_0^L (\lambda^2\varphi\overline{\varphi} + \varphi_x\overline{\varphi_x})dx + \lambda(\lambda m + \widehat{\zeta})\varphi(L)\overline{\varphi}(L) \\
&= \lambda^2 \int_0^L \varphi\overline{\varphi}dx + \int_0^L \varphi_x\overline{\varphi_x}dx + \lambda(\lambda m + \widehat{\zeta})\varphi(L)\overline{\varphi}(L) \\
&= \lambda^2 \int_0^L |\varphi|^2dx + \int_0^L |\varphi_x|^2dx + \lambda(\lambda m + \widehat{\zeta})|\varphi(L)|^2 \\
&\geq \lambda^2\|\varphi\|^2_{L^2(0,L)} + \|\varphi_x\|^2_{L^2(0,L)} \\
&\geq min\big(\lambda^2,1\big)\Big(\|\varphi\|^2_{L^2(0,L)} + \|\varphi_x\|^2_{L^2(0,L)}\Big) \\
&\geq \alpha\|\varphi\|^2_{H^1_L(0,L)}, \qquad \alpha = min\big(\lambda^2,1\big).
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coircitive .

4- **Continuité de $L(.)$:**

En utilisant l'inégalité de cauchy shwartz et l'injection de Sobolev

$$\begin{cases} |L(\omega)| = | \int_0^L (f_2 + \lambda f_1)\overline{\omega}dx - \zeta\overline{\omega}(L) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta} f_3 d\xi \\ \qquad\qquad +(\lambda m + \widehat{\zeta})f_1(L)\overline{\omega}(L) + mf_4\overline{\omega}(L)| \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} |L(\omega)| \leq \Big(\|f_1\|_{H^1(0,L)} + \lambda\|f_3\|_{L^2(-\infty,+\infty)} + \big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\mu(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}|d\xi\big)^{\frac{1}{2}}\|f_3\|_{L^2(-\infty,+\infty)} \\ \qquad +(\lambda m + \widehat{\zeta})\|f_1\|_{H^1(0,L)} + m\|f_4\|_{L^2(-\infty,+\infty)}\Big)\|\omega\|_{L^2(0,L)} \\ \qquad \leq C\|\omega\|_{H^1_L(0,L)}. \end{cases}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1_0(0;L)$, et $L(.)$ est linéaire et continue sur $H^1_0(0;L)$.

D'après le théorème de Lax-Milgram,2.1.1 on conclut qu'il existe une solution unique de $(2,20)$ $\varphi \in H^1_0(0;L)$.

D'après la régularité elliptique, il résulte de (2.27) que $\varphi \in H^2(0,L)$. Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité de la solution de (p').

Chapitre 3

La stabilité

Contents

3.1 Monque de la stabilité exponentielle 34

3.2 Stabilité forte 39

3.3 Stabilité polynomiale 44

3.1 Monque de la stabilité exponentielle

Théorème 3.1.1. *[20]*
Soit $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ un C_0-semi-groupe des contractions sur un espace de Hilbert. Alors $S(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

et

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$$

Preuve 3.1.1. *Voir [20].*

Lemme 3.1.1. *[20] si $\lambda \in D_\eta = \mathbb{C}\setminus]-\infty, -\eta]$ puis*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta} d\xi = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} (\lambda + \eta)^{\alpha - 1}.$$

Preuve 3.1.2. *laisser - nous définir*

$$f_\lambda(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta} d\xi.$$

On a

$$\Big|\frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta}\Big| \leq \begin{cases} \frac{\mu^2(\xi)}{Re\lambda + \eta + \xi^2}, & ou \\ \frac{\mu^2(\xi)}{|Im\lambda| + \eta + \xi^2} \end{cases}$$

Alors la fonction f est intégrable. de plus

$$\Big|\frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta}\Big| \leq \begin{cases} \frac{\mu^2(\xi)}{\eta_0 + \eta + \xi^2}, & pour \quad tous Re\lambda \geq \eta_0 > -\eta \\ \frac{\mu^2(\xi)}{\tilde{\eta} + \xi^2}, & pour \quad tous |Im\lambda| \geq \tilde{\eta_0} > 0 \end{cases}$$

la fonction $f_\lambda D_\eta \to \mathbb{C}$ est holomorphe. Pour un real nombre $\lambda > -\eta$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta} d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi|^{2\alpha - 1}}{\lambda + \eta + \xi^2} d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{|x|^{\alpha - 1}}{\lambda + \eta + x} d\xi, \qquad avec(\xi^2 = x) \\
&= (\lambda + \eta)^{\alpha - 1} \int_1^{+\infty} y^{-1} (y - 1)^{\alpha - 1} dy; \qquad avec(y = \frac{x}{\lambda + \eta} + 1) \\
&= (\lambda + \eta)^{\alpha - 1} \int_0^{+\infty} z^{-\alpha} (1 - z)^{\alpha - 1} dz \quad avec(z = \frac{1}{y}) \\
&= (\lambda + \eta)^{\alpha - 1} B(1 - \alpha, \alpha) \\
&= (\lambda + \eta)^{\alpha - 1} \Gamma(1 - \alpha, \alpha) \Gamma(\alpha) \\
&= (\lambda + \eta)^{\alpha - 1} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}
\end{aligned}$$

Les fonctions holomorphes f_λ et $\lambda \mapsto (\lambda + \eta)^{\alpha - 1} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ coïncident sur la moitié ligne $]-\eta; +\infty[$, donc sur D_η suivant le principe des zéros isolés.

Théorème 3.1.2. *Le semi-groupe généré par l'opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas exponentiellement stable.*

Preuve 3.1.3. *Nous allons distinguer deux cas :*

1 cas. $\eta = 0$

Nous montrerons que $i\lambda = 0$ n'est pas dans l'ensemble résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}$. En effet, notant que $(\sin x; 0; 0; 0)^T \in H$, et désignant par $(\varphi, u, \phi, v)^T$ l'image de $(\sin x; 0; 0; 0)^T$ par $\mathcal{A}^{-1}$, on voit que $\phi(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-5}{2}} \sin L$
Mais alors $\phi \notin L^2(-\infty, +\infty)$, puisque $\alpha \in]0; 1[$.
Et donc $(\varphi, u, \phi, v)^T \notin D(\mathbf{A})$.

2 cas. $\eta \neq 0$.

Nous voulons de montrer qu'un nombre infini de valeurs propres de $\mathcal{A}$ s'approche de l'axe imaginaire qui empêche le système d'onde (P) d'être exponentiellement stable.
En effet, nous calculons d'abord l'équation caractéristique qui nous donne les valeurs propres de $\mathcal{A}$.

Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}$ avec un vecteur propre associé $U = (\varphi, u, \phi, v)^T$.
Alors $AU = \lambda U$ est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda\varphi - u = 0, \\ \lambda u - \varphi_{xx} = 0, \\ \lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - u(L)\mu(\xi) = 0, \\ \lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

d'après la première équation et la deuxième équation dans (3.1)

$$u = \frac{1}{\lambda}\varphi_{xx} \Leftrightarrow \lambda\varphi - \frac{1}{\lambda}\varphi_{xx} = 0,$$

$$\lambda^2\varphi - \varphi_{xx} = 0. \tag{3.2}$$

On a $v = u(L)$; utilise (3) et (4) dans (3.1)*, il vient*

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \Big(\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta}{m}\frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\lambda+\eta}d\xi\Big)u(L) + \frac{1}{m}\varphi_x(L) = 0, \\ \big(\lambda + \frac{\gamma}{m}(\lambda+\eta)^{\alpha-1}\big)\lambda\varphi(L) + \frac{1}{m}\varphi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

La matrice du système déterminant n'est pas singulière, on pose $X = \big(\varphi, \varphi_x\big)^T$, alors

$$\frac{d}{dx}X = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi \\ \varphi_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_x \\ \varphi_{xx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_x \\ \lambda^2\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ \lambda^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \varphi_x\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}X = \tilde{\mathcal{B}}X, \quad avec \quad \tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ \lambda^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Le polynôme caractéristique de $\tilde{\mathcal{B}}$ *est* $t^2-\lambda^2=0$, *Nous trouvons les racines* $t=\lambda \quad ou \quad t=-\lambda$

$$t_1(\lambda)=\lambda, \qquad t_2(\lambda)=-\lambda.$$

Ici et ci-dessous, pour simplifier, nous notons $t_i(\lambda)$ *par* t_i. *La solution* φ *est donnée par*

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{2} c_i e^{t_i x}. \tag{3.5}$$

Ainsi, les conditions aux limites peuvent s'écrire comme le système suivant :
donc on écrit le système :

$$M(\lambda)C(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h(t_1)e^{t_1 L} & h(t_2)e^{t_2 L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

avec

$$h(r)=\frac{1}{m}r+\lambda^2+\frac{\gamma}{m}\lambda(\lambda+\eta)^{\alpha-1}.$$

Il existe donc une solution non triviale φ *si et seulement si le* $det\big(M(\lambda)\big)=0$.
On pose $f(\lambda)=detM(\lambda)$, *donc l'équation caractéristique est* $f(\lambda)=0$.
Notre but dans la suite est de prouver, grâce au Théorème de Rouch'e, que il existe une sous-suite de valeurs propres pour laquelle sa partie réelle tend vers 0. *Dans la suite, puisque* $\mathcal{A}$ *est dissipatif, nous étudions le comportement asymptotique des grandes valeurs propres* λ *de* $\mathcal{A}$ *dans la bande* $-\alpha_0 \le \mathcal{R} \le 0$, *pour certain* $\alpha_0>0$ *assez grandes et pour tout* λ, *on remarque que* $e^{t_i}, i=1,2$ *reste borné pour* $i=1,2$.

Lemme 3.1.2. *Il existe* $N\in\mathbb{N}$ *telle que*

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^*,|k|\ge N}\subset\sigma(\mathcal{A}) \tag{3.7}$$

avec

$$\lambda_k=i\Big(\frac{k\pi}{L}+\frac{1}{mk\pi}\Big)+\frac{\tilde{\alpha}}{k^{3-\alpha}}+\frac{\beta}{k^{3-\alpha}}+\circ\Big(\frac{1}{k^{3-\alpha}}\Big), \quad k\ge N, \tilde{\alpha}\in i\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}, \beta<0$$

$$\lambda_k=\overline{\lambda_{-k}} \quad si \quad k\le -N$$

De plus pour tout $|k|\ge N$, *les valeurs propres* λ_k *sont simples*

Preuve 3.1.4. .

étape 1

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= h(t_2)e^{t_2 L}-h(t_1)e^{t_1 L} \\ &= -e^{-\lambda L}h(-\lambda)\Big(e^{2\lambda L}+\frac{-\frac{\lambda}{m}+\lambda^2+\frac{\gamma}{m}\lambda(\lambda+\eta)^{\alpha-1}}{\frac{\lambda}{m}+\lambda^2+\frac{\gamma}{m}\lambda(\lambda+\eta)^{\alpha-1}}\Big), \end{aligned}$$

alors

$$f(\lambda) = -e^{-\lambda L}h(-\lambda)\Big(e^{2\lambda L} - 1 - \frac{2}{1 + m\lambda + \gamma(\lambda+\eta)^{\alpha-1}}\Big). \tag{3.8}$$

On pose

$$\tilde{f}(\lambda) = e^{2\lambda L} - 1 - \frac{2}{1 + m\lambda + \gamma(\lambda+\eta)^{\alpha-1}},$$

alors

$$\tilde{f}(\lambda) = f_0(\lambda) + \frac{f_1(\lambda)}{\lambda} + \frac{f_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{f_3(\lambda)}{\lambda^{3-\alpha}} + \circ\Big(\frac{1}{\lambda^{3-\alpha}}\Big), \tag{3.9}$$

avec

$$f_0(\lambda) = e^{2\lambda L} - 1, \tag{3.10}$$

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{m}, \tag{3.11}$$

$$f_2(\lambda) = -\frac{2}{m^2}, \tag{3.12}$$

$$f_3(\lambda) = -\frac{2\gamma}{m^2}. \tag{3.13}$$

Notons que f_0, f_1, f_2 et f_3 restent borné dans $-\alpha_0 \leq \mathcal{R}(\lambda) \leq 0$

étape 2. *Nous cherchons les racines de f_0.*
D'après (3.10), f_0 a une famille de racines que l'on note λ_k^0 .

$$f_0(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^{2\lambda L} = 1,$$

alors

$$2\lambda L = i2k\pi, \quad i.e., \lambda_k^0 = \frac{ik\pi}{L}, k \in \mathbb{Z}.$$

Maintenant, avec l'aide du théorème de Rouch´e, nous montrerons que les racines de $\tilde{f}$ sont proche de celles de f_0.
On fait un changement de l'inconnu λ par $u = 2\lambda L$ alors (3.9) devient

$$\tilde{f}(u) = (e^u - 1) + \bigcirc(\frac{1}{u}) = f_0(u) + \bigcirc(\frac{1}{u}).$$

Les racines de f_0 sont $u_k = \frac{ik}{l}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ et en définissant $u = u_k + re^{it}; t \in [0; 2]$, on peut facilement vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de k telle ce jeu $|e^u - 1| \geq C_r$ pour r assez petit.
Cela permet appliquer le théorème de Rouch´e. Par conséquent, il existe une sous-suite de racines de $\tilde{f}$ qui tend aux racines u_k de f_0.
De manière équivalente, cela signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une sous-suite $\{\lambda_k\}_{|k|\geq N}$ de racines de $f(\lambda)$, telles que $\lambda_k = \lambda_k^0 + \circ(1)$ qui tend vers les racines $\frac{ik}{L}\pi$ de f_0.
Enfin pour $|k| \geq N$; λ_k est simple puisque λ_k^0 l'est

étape 3. *À partir de l'étape 2, nous pouvons écrire*

$$\lambda_k = i\frac{1}{L}k\pi + \epsilon_k \tag{3.14}$$

En utilisant (3 ;14) nous trouvons :

$$e^{2\lambda_k L} = 1 + 2L\epsilon_k + 2L^2\epsilon_k^2 + \circ(\epsilon_k^2). \tag{3.15}$$

On remplace (3,15) dans (3.9) , trouvons :

$$\tilde{f}(\lambda_k) = 2L\epsilon_k + 2L^2\epsilon_k^2 + \frac{\frac{2}{m}}{\frac{k\pi i}{L} + \epsilon_k} - \frac{\frac{2}{m^2}}{(\frac{k\pi i}{L} + \epsilon_k)^2} + \circ(\epsilon_k^2) = 2L\epsilon_k + \frac{\frac{2L}{m}}{k\pi i} + \circ(\epsilon_k) + \circ(\frac{1}{k}) = 0.$$

Et donc

$$\epsilon_k = \frac{i}{mk\pi}$$

étape 4. *À partir de l'étape 3, nous pouvons écrire*

$$\lambda_k = i\frac{1}{L}k\pi + \frac{1}{mk\pi}i + \epsilon_k \tag{3.16}$$

En utilisant (3 ;16) on trouve :

$$e^{2\lambda_k L} = 1 + \Big(\frac{2L}{mk\pi}i + 2L\epsilon_k\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{2L}{mk\pi}i + 2L\epsilon_k\Big)^2 + \circ\big(\epsilon_k^3\big) \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\lambda_k) &= \Big(\frac{2L}{mk\pi}i + 2L\epsilon_k\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{2L}{mk\pi}i + 2L\epsilon_k\Big)^2 + \frac{\frac{2}{m}}{\frac{k\pi i}{L} + \frac{1}{mk\pi}i + \epsilon_k} \\
&- \frac{\frac{2}{m^2}}{\big(\frac{k\pi i}{L} + \frac{1}{mk\pi}i + \epsilon_k\big)^2} - \frac{\frac{2\gamma}{m^3}}{\big(\frac{k\pi i}{L} + \frac{1}{mk\pi}i + \epsilon_k\big)^{3-\alpha}} + \bigcirc\big(\epsilon_k^3\big) + \bigcirc\big(\frac{1}{k^3}\big) \\
&= 2L\epsilon_k - \frac{2\gamma}{m}\Big(\frac{L}{k\pi i}\Big)^{3-\alpha} + \circ\big(\epsilon_k^3\big) + \circ\big(\frac{1}{k^3}\big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\epsilon_k = \frac{\gamma}{m^2 L^{\alpha-2}(k\pi i)^{3-\alpha}} + \circ\Big(\frac{1}{k^{3-\alpha}}\Big)$$

donc

$$\epsilon_k = \begin{cases} -\frac{\gamma}{m^2 L^{\alpha-2}(k\pi)^{3-\alpha}}\Big(\cos(1-\alpha)\frac{\pi}{2} - i\sin(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\Big) + \circ\Big(\frac{1}{k^{3-\alpha}}\Big) & si \quad k \succeq 0 \\ -\frac{\gamma}{m^2 L^{\alpha-2}(-k\pi)^{3-\alpha}}\Big(\cos(1-\alpha)\frac{\pi}{2} - i\sin(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\Big) + \circ\Big(\frac{1}{k^{3-\alpha}}\Big) & si \quad k \succeq 0. \end{cases}$$

A partir de cette équation, nous obtenons $|k|^{3-\alpha}\mathcal{R}\lambda_k \sim \beta$ *dans ce cas,*
avec

$$\beta = -\frac{\gamma}{m^2 L\alpha - 2\pi^{3-\alpha}}\cos(1-\alpha)\frac{\pi}{2}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ *a une branche de valeurs propres qui ne décroît pas exponentiellement.*
Ansi la preuve est achevée.

3.2 Stabilité forte

Théorème 3.2.1. *[1] et [5]* ***(Arendt et Batty)***
Soit $\mathcal{A}$ le générateur de C_0.semi-groupe fortement continu . $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert. Si

1. *$\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.*
2. *L'intersection du spectre $\sigma(A)$ avec $i\mathbb{R}$ est au plus un ensemble dénombrable.*

Alors le semi-groupe $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ est fortement stable, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)z\|_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}.$$

Notre résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 3.2.2. *La C_0.semi-groupe $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable sur $\mathcal{H}$, i.e, pour toute $U_0 \in \mathcal{H}$, la solution de 2.15 satisfais*

$$\lim_{t\in\infty} ||e^{t\mathcal{A}}U_0||_{\mathcal{H}} = 0$$

Pour la preuve du théorème 3.2.2, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.1. *$\mathcal{A}$ n'a pas des valeur propre dans $i\mathbb{R}$.*

Preuve 3.2.1. *Nous montrons que*

$$\begin{aligned}\ker(i\lambda I - \mathcal{A}) &= \big\{U \in D(\mathcal{A}); (i\lambda I - \mathcal{A})U = 0\big\}\\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

On distingue deux cas $i\lambda = 0$ et $i\lambda \neq 0$ $i\lambda = 0$ et $i\lambda \neq 0$.

étape 1. ***pour*** $i\lambda = 0$

On montre que $\mathcal{A}U = 0 \Rightarrow U = 0$. Grâce aux conditions aux limites dans 2.17 alors $\ker(i\lambda I - \mathcal{A}) = \{0\}$.
Par conséquent, $i\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de $\mathcal{A}$.

étape 2. ***pour*** $i\lambda \neq 0$**.**

On montre par l'absurde.
Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $U \neq 0$, tel que $(i\lambda I - \mathcal{A})U = 0$ i.e $\mathcal{A}U = i\lambda U$. Alors, nous obtenons

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - u = 0,\\ i\lambda u - \varphi_{xx} = 0,\\ i\lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi + u(L)\mu(\xi) = 0,\\ i\lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Alors, d'après de 2.18 nous avons

$$\phi \equiv 0 \tag{3.20}$$

En vertu de la troisième de $(3, 19)$ *; nous avons*

$$u(L) = 0. \tag{3.21}$$

Alors ; d'après la première équation et la quatrième équation de (3.19) *on a*

$$\varphi(L) = 0 \quad et \quad \varphi_x(L) = 0, \tag{3.22}$$

d'après la première équation et la troisième équation de $(3, 19)$*, nous avons*

$$u = \frac{1}{i\lambda}\varphi_{xx} \Rightarrow i\lambda\varphi - \frac{1}{i\lambda}\varphi_{xx} = 0 \Rightarrow -\lambda^2\varphi - \varphi_{xx} = 0. \tag{3.23}$$

On considère $X = (\varphi, \varphi_x)^T$*. Alors nous pouvons réécrire* $(3; 22)$ *et* $(3; 23)$ *comme problème à valeurs initiales*

$$\frac{d}{dx}X = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_x\\ \varphi_{xx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_x\\ -\lambda^2\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi_x\end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{d}{dx}X = \mathcal{B}X, \quad avec \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

D'après le théorème de Picard pour les équations différentielles ordinaires, le système $(3; 24)$ *a une solution unique* $X = 0$*.*
Par conséquent $\varphi = 0$*. Il résulte de* $(3; 19)$*, que* $u = 0$ *et* $v = 0$ *i.e* $(\varphi, u, \phi, v)^T = (0, 0, 0, 0)^T$ *i.e* $U = 0$*.*
Alors $\ker(i\lambda I - \mathcal{A}) = \{0\}$*.*
Par conséquent , $i\lambda \neq 0$ *n'est pas une valeur propre de* $\mathcal{A}$*.*

Finalement $\mathcal{A}$ *n'a pas de valeurs propres imaginaires pires.*
Nous concluons que $\mathcal{A}$ *n'a pas des valeur propre dans* $i\mathbb{R}$*.*
Donc la première condition du théorème 3.2.1 a lieu.

La condition (2) du théorème 3.2.1 sera satisfaite si nous montrons que $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ est tout au plus un ensemble dénombrable.
Pour cela on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.2.

1. *Si* $\lambda \neq 0$*, l'opérateur* $\lambda I - \mathcal{A}$ *est surjectif.*
2. *Si* $\lambda = 0$ *et* $\eta = 0$*, l'opérateur* $\lambda I - \mathcal{A}$ *est surjectif, telle que* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*.*

Preuve 3.2.2.

Cas 1. $\lambda \neq 0$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$ *et soit* $X = (\varphi, u, \phi, v)^T \in D(\mathcal{A})$ *tels que*

$$(i\lambda I - \mathcal{A})X = F. \tag{3.25}$$

i.e

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - u = f_1, \\ i\lambda u - \varphi_{xx} = f_2, \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi + u(L)\mu(\xi) = f_3, \\ i\lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_4. \end{cases} \tag{3.26}$$

Nous divisons la preuve en trois étapes comme suit :

étape 1. *D'après la première équation et la deuxième équation de* (3.26)*, nous trouvons*

$$\lambda^2\varphi + \varphi_{xx} = -(f_2 + i\lambda f_1).$$

Comme $\varphi(0) = 0$*, alors*

$$\varphi(x) = c_1 \sin\lambda x - \frac{1}{\lambda} - \int_0^x \big(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma)\big)\sin\lambda(x-\sigma)d\sigma. \tag{3.27}$$

Et donc

$$\varphi_x(x) = c_1\lambda \sin\lambda x - \frac{1}{\lambda} - \int_0^x \big(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma)\big)\cos\lambda(x-\sigma)d\sigma. \tag{3.28}$$

étape 2. *D'après la troisième équation de* (3.26)*, nous trouvons*

$$(i\lambda + \xi + \eta)\phi + u(L)\mu(\xi) = f_3 \Leftrightarrow \phi(\xi) = \frac{u(L)\mu(\xi) + f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}. \tag{3.29}$$

la dernière équation de (54), nous trouvons

$$i\lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\frac{u(L)\mu(\xi) + f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}.d\xi = f_4$$

i.e

$$i\lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(L)\mu(\xi)^2}{i\lambda + \xi^2 + \eta}.d\xi + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}d\xi.$$

Donc

$$\Big(i\lambda + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + xi^2 + \eta}d\xi\Big)u(L) + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}d\xi = f_4. \tag{3.30}$$

Comme $\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + xi^2 + \eta}d\xi = \frac{\gamma}{m}(i\lambda + \eta)^{\alpha - 1}$ *et* $u(L) = i\lambda\varphi(L) - f_1(L)$*, on en déduit que*

$$\Big(i\lambda + \frac{\gamma}{m}(i\lambda + \eta)^{\alpha-1}\Big)(i\lambda\varphi(L) - f_1(L)) + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}d\xi = f_4.$$

i.e

$$\begin{aligned} i\lambda\Big(i\lambda+\frac{\gamma}{m}(i\lambda+\eta)^{\alpha-1}\Big)\varphi(L)+\frac{1}{m}\varphi_x(L) &= \\ \Big(i\lambda+\frac{\gamma}{m}(i\lambda+\eta)^{\alpha-1}\Big)f_1(L)+f_4+\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}d\xi & \end{aligned} \tag{3.31}$$

étape 3. *En utilisant* (3.27) *et* (3.28) *, nous pouvons réécrire* (3.31) *comme une équation de l'inconnu* c_1 *comme suit :*

$$\begin{cases} \lambda c_1\Big[iI\sin\lambda L+\frac{1}{m}\cos\lambda L\Big]= \\ J+If_1(L)+\frac{1}{m}\int_0^L\big(f_2(\sigma)+i\lambda f_1(\sigma)\big)\cos\lambda(L-\sigma)d\sigma \\ +iI\int_0^L\big(f_2(\sigma)+i\lambda f_1(\sigma)\big)\sin\lambda(L-\sigma)d\sigma, \end{cases} \tag{3.32}$$

avec

$$I=i\lambda+\frac{\gamma}{m}(i\lambda+\eta)^{\alpha-1}\quad,\quad J=f_4-\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}d\xi$$

On pose,

$$\begin{aligned} g(\lambda)&=iI\sin\lambda L+\frac{1}{m}\cos\lambda L\\ &=i\big(i\lambda+\frac{\gamma}{m}(i\lambda+\eta)^{\alpha-1}\big)\sin\lambda L+\frac{1}{m}\cos\lambda L\\ &=\lambda\sin\lambda L+\frac{1}{m}\cos\lambda L+i\frac{\gamma}{m}(i\lambda+\eta)^{\alpha-1}\sin\lambda L. \end{aligned}$$

On a

$$(i\lambda+\eta)^{\alpha-1}=r\cos\Theta+ri\sin\Theta,$$

avec

$$r=(\lambda^2+\eta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\quad et\quad \Theta=(1-\alpha)\theta,$$

où $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *tel que*

$$\cos\theta=\frac{\eta}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}\quad,\quad \sin\theta=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(\lambda)=&-\lambda\sin\lambda L+\frac{1}{m}\cos\lambda L+\frac{\gamma}{m}(\lambda^2+\eta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\sin\lambda L\sin(1-\alpha)\theta\sin\lambda L\\ &+i\frac{\gamma}{m}(\lambda^2+\eta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cos(1-\alpha)\theta\cos\lambda L. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$g(\lambda)\neq 0,\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

Donc $\exists U=(\varphi,u,\phi,v)^T\in D(\mathcal{A})$ *tel que* $(i\lambda I-\mathcal{A})U=F$.
par conséquent $i\lambda-\mathcal{A}$ *est surjectif pour tous* $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Cas 2. $\lambda = 0$ *et* $\eta \neq 0$.

Le système $(3;26)$ *est réduit à la forme suivante :*

$$\begin{cases} u = -f_1, \\ \varphi_{xx} = -f_2, \\ (\xi^2+\eta)\phi + u(L)\mu(\xi) = f_3, \\ \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_4. \end{cases} \tag{3.33}$$

D'après la deuxième de (3.33)*, nous trouvons*

$$\varphi(x) = -\int_0^x \int_0^s f_2(r)drds + Cx.$$

En utilisant la première équation et la troisième équation et la quatrième équation de (3.61)*, nous trouvons*

$$-\frac{\gamma}{m}\eta^{\alpha-1}f_1(L) + \frac{1}{m}\varphi_x(L) = f_4 - \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{\xi^2+\eta}d\xi.$$

Nous trouvons

$$\begin{cases} \varphi_x(L) = -\int_0^L f_2(r)dr + C \\ \varphi_x(L) = \gamma\eta^{\alpha-1}f_1(L)mf_4 - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{\xi^2+\eta}d\xi \end{cases}$$

Donc $C = \int\limits_0^L f_2(r)dr + \gamma\eta^{\alpha-1}f_1(L) + mf_4 - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}d\xi$.

i.e $\exists U = (\varphi, u, \phi, v)^T \in D(\mathcal{A})$ *tel que* $-\mathcal{A}U = F$.

Finalement $\mathcal{A}$ *est surjectif .*

La preuve est donc achevée.

Preuve 3.2.3. *(théorème 3.2.2)*

D'après le lemme 3.2.1 . On en déduit que $\mathcal{A}$ *n'a pas de valeurs propres imaginaires pures. Et d'après le lemmes 3.2.2 ,*$R(i\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $Im(i\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ *pour tout* $\lambda = 0$ *et pour tout* $\eta > 0$.

Par conséquent, le théorème du graphe fermé de Banach implique que $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing, \quad \eta > 0$ *et* $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \{0\}, \quad \eta = 0$.

3.3 Stabilité polynomiale

Théorème 3.3.1. *[4] (Batty , A.Borichev and Y.Tomilov, Z. Liu and B. Rao.) Soit $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ un C_0-semi-groupe fortement continu sur un espace de Hilbert. si*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$$

et

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \frac{1}{\beta^{\delta}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < M, \quad \delta > 0$$

Alors $\exists c > 0$ telle que

$$\|e^{\mathcal{A}t}U_0\|^2 \leq \frac{c}{t^{\frac{2}{\delta}}} \|U_0\|^2_{D(\mathcal{A})}$$

Preuve 3.3.1. *Voir [4].*

Dans cette partie, nous prouvons que le système (P') est polynomialement stable lorsque $\eta > 0$.

Théorème 3.3.2. *Le semi-groupe $\left(S_{\mathcal{A}}(t)\right)_{t>0}$ est polynomialment stable et*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{t^{\frac{1}{4-2\alpha}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}.$$

Preuve 3.3.2. *On a besoin d'étudier, l'équation résolvante*

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$, à savoir

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - u = f_1, \\ i\lambda u - \varphi_{xx} = f_2, \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - u(L)\mu(\xi) = f_3, \\ i\lambda v + \frac{1}{m}\varphi_x(L) + \frac{\zeta}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_4. \end{cases} \tag{3.34}$$

Avec $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in H$.

étape 1. *D'après 2.18 , nous trouvons*

$$|Re < \mathcal{A}U, U > | \leq | < \mathcal{A}U, U > | \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.35}$$

Cela implique que

$$\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(\xi, t)|^2 d\xi \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.36}$$

Et en utilisant la première équation de (3.34), obtient

$$i\lambda\varphi(L) - f_1(L) = u(L) \Leftrightarrow |i\lambda\varphi(L) - f_1(L)| = |u(L)|.$$

Donc

$$||\lambda||\varphi(L)| - |f_1(L)||^2 \leq |u(L)|^2.$$

Nous Conclure que

$$\begin{aligned}|\lambda|^2|\varphi(L)|^2 &\leq |f_1(L)|^2 + |u(L)|^2 + 2|\lambda||\varphi(L)||f_1(L)| \\ &\leq (1 + 2|\lambda||\varphi(L)|)|f_1(L)|^2 + |u(L)|^2 \\ &\leq max(1, 1 + 2|\lambda||\varphi(L)|)(|f_1(L)|^2 + |u(L)|^2) \\ &\leq c|f_1(L)|^2 + c|u(L)|^2.\end{aligned}$$

De plus, à partir de la quatrième équation de (3.34)*, on a*

$$\varphi_x(L) = -im\lambda u(L) - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi + mf_4.$$

Alors

$$\begin{aligned}|\varphi_x(L)|^2 &\leq 2m^2|\lambda|^2|u(L)|^2 + 2m^2 f_4^2 + 2\zeta^2\Big| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi\Big|^2 \\ &\leq 2m^2|\lambda|^2|u(L)|^2 + 2m^2 f_4^2 \\ &\quad + 2\zeta^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)|^2 d\xi\Big) \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq 2m^2|\lambda|^2|u(L)|^2 + c\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c'\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned} \tag{3.37}$$

D'après la troisième équation de (3.34)*, obtient*

$$u(L)\mu(\xi) = (i\lambda + \xi^2 + \eta)\phi - f_3(\xi). \tag{3.38}$$

En multipliant l'équation (3.38) *par* $(i\lambda + \xi^2 + \eta)^{-1}$ *, nous trouvons*

$$(i\lambda + \xi^2 + \eta)^{-1}u(L)\mu^2(\xi) = \mu(\xi)\phi - (i\lambda + \xi^2 + \eta)^{-1}\mu(\xi)f_3(\xi). \tag{3.39}$$

Par conséquent, en prenant les valeurs absolues des deux membres de (3.39) *, en intégrant sur* $]-\infty, +\infty[$ *par rapport à la variable* ξ *et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz , on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{|\lambda| + \xi^2 + \eta}|u(L)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(\xi)||\phi| + \int_{-\infty}^{+\infty} (|\lambda| + \xi^2 + \eta)^{-1}|\mu(\xi)||f_3(\xi)|.$$

D'après 3.1.1, et en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{|\lambda| + \xi^2 + \eta}|u(L)| = \frac{\gamma}{\zeta}(|\lambda| + \eta)^{\alpha-1},$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(\xi)||\phi| &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)^{-2}|\mu(\xi)|(\xi^2+\eta)^2|\phi| \\ &\leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(|\lambda|+\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)||f_3(\xi)| \leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}([\lambda|+\xi^2+\eta)^{-2}|\mu(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc on obtient

$$\mathcal{S}|u(L)| \leq \mathcal{U}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{V}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.40}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int_{-\infty}^{+\infty}([\lambda|+\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)|^2d\xi = (|\lambda|+\eta)^{\alpha-1}\\
\mathcal{U} &= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\mathcal{V} &= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}([\lambda|+\xi^2+\eta)^{-2}|\mu(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big((1-\alpha)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}(|\lambda|+\eta)^{\alpha-2}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant nouveau l'inégalité $2PQ \leq P^2+Q^2, \quad \forall P \geq 0, Q \geq 0.$ *, nous trouvons*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^2|u(L)|^2 &\leq \mathcal{U}^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big) + \mathcal{V}^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big)\\
&\quad + 2\mathcal{U}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\mathcal{V}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \mathcal{U}^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big) + 2\mathcal{V}^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{S}^2|u(L)|^2 \leq 2\mathcal{U}^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big) + 2\mathcal{V}^2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big). \tag{3.41}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}
|u(L)|^2 &\leq \frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{S}^2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big) + \frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{S}^2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big)\\
&\leq c|\lambda|^{2-2\alpha}|\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi)|^2d\xi\Big) + c\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(\xi)|^2d\xi\Big).
\end{aligned}$$

Alors

$$|u(L)|^2 \leq c|\lambda|^{2-2\alpha}|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.42}$$

étape 2. *Maintenant, nous utilisons la méthode des multiplicateurs classique.*

On introduit la notation suivante

$$\mathcal{I}_\varphi(\alpha) = |u(\alpha)|^2 + |\varphi_x(\alpha)|^2, \quad \varepsilon_\varphi(L) = \int_0^L q(s)\mathcal{I}_\varphi(s)ds.$$

Lemme 3.3.1. *Soit* $q \in H^1(0,L)$*. On a*

$$\varepsilon_\varphi(L) = [q\mathcal{I}_\varphi]_0^L + R \tag{3.43}$$

où R *satisfait :*

$$R \leq C\varepsilon_\varphi(L) + \|q^{\frac{1}{2}}F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

pour C *une constante positive.*

Preuve 3.3.3. *Pour obtenir* (3.43), *multiplions la deuxième l'équation de* (3.34) *par* $q\overline{\varphi}_x$, *et en intégrant sur* $(0, L)$ *on obtient*

$$i\lambda \int_0^L uq\overline{\varphi}_x dx - \int_0^L \varphi_{xx} q\overline{\varphi}_x dx = \int_0^L f_2 q\overline{\varphi}_x dx,$$

où

$$-\int_0^L uq(\overline{i\lambda\varphi_x})dx - \int_0^L q\varphi_{xx}\overline{\varphi}_x dx = \int_0^L f_2 q\overline{\varphi}_x dx.$$

Comme $i\lambda\varphi_x = u_x + f_{1x}$, *en prenant la partie réelle dans l'égalité ci-dessus,*

$$-\frac{1}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\varphi_x|^2 dx = Re\int_0^L f_2 q\overline{\varphi}_x dx + Re\int_0^L uq\overline{f}_{1x} dx.$$

i.e

$$-\int_0^L q\frac{d}{dx}\Big[|u|^2 + |\varphi_x|^2\Big]dx = 2Re\int_0^L f_2 q\overline{\varphi}_x dx + 2Re\int_0^L uq\overline{f}_{1x} dx.$$

En utilisant l'intégration par parties, nous trouvons

$$\int_0^L q'(s)[|u(s)|^2 + |\varphi_x(s)|^2]ds = [q\mathcal{I}_\varphi]_0^L + R,$$

avec

$$R = 2Re\int_0^L f_2 q\overline{\varphi}_x dx + 2Re\int_0^L uq\overline{f}_{1x} dx.$$

Si nous prenons $q(x) = \int_0^x e^{ns}ds = \frac{e^{nx}-1}{n}$ *(ici* n *sera choisi assez grand) dans le lemme* 3.3.1 *nous arrivons à*

$$\varepsilon_\varphi(L) = q(L)\mathcal{I}_\varphi(L) + R. \tag{3.44}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} |R| &\le \int_0^L q(x)\big(|u(s)|^2 + |\varphi_x(s)|^2\big)ds + \int_0^L q(x)\big(|f_2(s)|^2 + |f_{1x}(s)|^2\big)ds \\ &\le C\frac{e^{Ln}}{n}\|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c'}{n}\int_0^L q'(s)\big(|u(s)|^2 + |\varphi_x(s)|^2\big)ds. \end{aligned} \tag{3.45}$$

En utilisant les inégalités (3.44) *et* (3.45) , *nous concluons qu'il existe une constante positive* C *telle que*

$$\int_0^L \mathcal{I}_\varphi(s)ds \le C\mathcal{I}_\varphi(L) + C'\|F_{\mathcal{I}}^2 \tag{3.46}$$

à condition que n *soit assez grand.*

étape 3. *Comme*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi)|^2 d\xi \le C\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(\xi)|^2 d\xi \le C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

On injecte l'équation (3.37) *et* (3.42) *dans* (3.46) ,*nous trouvons :*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le C\big(|\lambda|^{4-2\alpha} + |\lambda|^{2-2\alpha} + 1\big)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C'\big(|\lambda|^2 + 1\big)\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Donc nous avons

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^{4-2\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad si|\lambda| \to \infty.$$

On a

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F \Leftrightarrow U = (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F.$$

Alors

$$C|\lambda|^{4-2\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}} \geq \|U\|_{\mathcal{H}} = \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Nous concluons que

$$\frac{1}{|\lambda|^{4-2\alpha}}\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq M$$

Ensuite, en utilisant le théorème 3.3.1 avec $\delta = 4 - 2\alpha$ *, on a la conclusion du théorème. La preuve est maintenant terminée.*

Conculision

On a étudié la stabilisation frontière dynamique du système des ondes de type dérivée fractionnaire. En utilisant une analyse spectrale , on a prouvée que le système n'est pas uniformément stable.
En utilisant d'autre part le théorème d'Arend-Batty , on a prouvé la stabilité asymptotique forte. Si $\eta > 0$, en utilisant l'approche du domaine fréquentiel , on a prouvé certain taux de décroissance de l'énergie qui dépend du paramètre α.

Perspectives

Il est intéressant de développer certaines méthodes d'énergie pour traité des problème d'évolution non linéaire sous un contrôle de type dérivée fractionnaire.
Il a un problème ouvert qui représente une équation des ondes de type de Kirchhoff pour étudier l'existence globale de la solution et de la décroissance de l'énergie.

$$(P): \begin{cases} u_{tt}(x,t) - M\big(\|u_x\|^2_{L^2(0,L)}\big)u_{xx}(x,t) = 0, \quad dans \quad (0,L)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) = 0, \quad dans \quad (0,+\infty) \\ M\big(\|u_x\|^2_{L^2(0,L)}\big)u_x(L,t) = -\gamma\partial_t^{\alpha,\eta}u_x(L,t), \quad dans \quad (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad dans \quad (0,\mathrm{L}) \end{cases} .$$

Bibliographie

[1] **Arendt, W. and Batty, C. J. K.,** Tauberian theorems and stability of oneparameter semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 837 - 852.

[2] **Benaissa,A., H. Benkhedda :** Energy Decay of Solutions to a Wave Equation with a Dynamic Boundary Dissipation of Fractional Derivative Type. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen . Journal of Analysis and its Applications. Volume 37 (2018), 315-339. DOI : 10.4171/ZAA/1616.

[3] **Blanc, E., Chiavassa, G. and Lombard, B.,** Biot-JKD model : Simulation of 1D transient poroelastic waves with fractional derivatives. J. Comput. Phys., 237 (2013), 1 - 20.

[4] **Borichev, A. and Tomilov, Y.,** Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. Ann. Diff. Equ. 1 (1985), 43 - 55.

[5] **Borichev, A. and Tomilov, Y.,** Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. Math. Ann. 347 (2010) (2), 455 - 478.

[6] **Bouziad Ahmed et Jean Calbrix .** Théorie de la mesure et de l'intégration . Publication de l'unversité de Rouen N0 . 1993

[7] **Brézis, H.,** Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[8] **Brézis, H.,** Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert (in French). Notas de Matemàtica 50. Amsterdam North-Holland 1973.

[9] **Caputo, M. and Mainardi, F.,** A new dissipation model based on memory mechanism. Pure Appl. Geophys. 91 (1971), 134 - 147.

[10] **CARLIER ,G.,** ANALYSE FONCTIONNELLE, ENS, 2009-2010.

[11] **Chalendar,I.** Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, 2011

[12] **Choi, J. U. and Maccamy, R. C.** , Fractional order Volterra equations with applications to elasticity. J. Math. Anal. Appl. 139 (1989), 448 - 464.

[13] **Ignaczak, J. and Ostoja-Starzewski, M.,** Thermoelasticity with Finite Wave Speeds. Oxford : Oxford Univ. Press 2010.

[14] **Liu, Z., S. Zheng,** Semigroups Associated with Dissipative Systems, Chapman Hall, 1999

[15] **Llioushin, A. A. and Pobedria, B. E.,** Fundamentals of the Mathematical theory of Thermal Viscoelasticity (in Russian). Moscow : Nauka 1970.

[16] **LUBKIN,S.,** C0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[17] **Luo, Z. H., Guo, B. Z. and Morgul, O.,** Stability and Stabilization of In

nite Dimensional Systems with Applications. Comm. Control Engrg. Ser. London : Springer 1999

[18] **Lyubich Yu, I. and Ph´ong, V. Q.,** Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces. Studia Math. 88 (1988)(1), 37 - 42.

[19] **Mainardi, F. and Bonetti, E.,** The applications of real order derivatives in linear viscoelasticity. Rheol. Acta 26 (1988), 64 - 67.

[20] **Mbodje, B.,** Wave energy decay under fractional derivative controls. IMA J. Math. Control Inform. 23 (2006), 237 - 257.

[21] **Munnier1, A. ,** Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles Institut Elie Cartan 2007-2008

[22] **Pazy, A.,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Di¤erential Equations, Sepringer-Verlag New York, 1983.

[23] **Saint-Raymond,L.** Analyse fonctionnelle, Université Paris VI and DMA Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, FRANCE,2013-2014.

[24] **Schnaubelt,S.,** Lecture Notes Spectral theory, Kharlsruhe, 06 Août 2012