RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Présenter en vue de l'obtention du diplôme

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par :

BOUKARDA LOUIZA et MAHMOUD RIMA

Thème

Sur les polynômes de Lah

Composition du jury :

Mr.	LAISSAOUI DIFFALAH,	MCA,	U.Y.F.M,	Président
Mr.	SEBAOUI MADJID,	MCB,	U.Y.F.M,	Encadreur
Mr.	RAHMANI MOURAD,	PROF,	U.S.T.H.B,	Examinateur
Mme.	GUETTAI GHANIA,	MCB,	U.Y.F.M,	Examinateur

Promotion 2023

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers ALLAH, qui m'a accordé le courage et la patience nécessaires pour achever ce modeste travail.

En premier lieu, je souhaite exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur, Mr.M.Sebaoui, *pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité tout au long de notre travail. Je tiens également à adresser mes vifs remerciements aux membres du jury : Monsieur* M. Rahmani, *Professeur à l'USTHB, Monsieur* D. Laissaoui, *Maître de conférences à l'université Yahia Fares de Médéa, et Madame* G. Guettai, *Maître de conférences à l'université Yahia Fares de Médéa, pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de faire partie du jury. Enfin, je souhaite exprimer ma sincère gratitude envers ma famille, mes amis et tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.*

Dédicace

.... Ma dédicace....

A mon cher père : Ben diffalah, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privation pour m'aider à avancer dans la vie. puisse dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; merci pour les valeurs noble, l'éducation et le soutien permanent venu de vous.

A ma mère kheira, qui m'a donnée son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils.

Et je le dédie :

A touts les membres de ma famille "Mahmoud", mes frères "Djamel" et "Houssin" et mes soeurs "wahiba" et "Khalida"et ma tante "Rim".

Á mon binôme et ma soeur, et mon intime louiza, qui a partagé avec moi tous les beaux moments.

Á touts mes amies et mes collègues que j'ai partagé avec elles de très bons moments tout au long de ces année. Je vous aime tous.

Á l'ensemble des étudiants de la promotion de la deuxième année Master. 2023.

Átous ceux qui m'ont donné la force pour continuer...
Et enfin, je n'oublie pas de me remercier, pour tous les efforts que j'ai faits.

★★★ *RIMA* ★★★

Dédicace

... Ma dédicace...

Celui qui a dit : "Je suis à elle", l'a prise, et je suis à elle, et si elle refuse contre son gré, je la prendrai.

Je dédie ce mémoire à ma famille :

À mon père "Boukarda Mahdi" et ma mère "Fartasi kheira" pour leur amour inestimable, leurs sacrifices, leur confiance, leur soutien et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquerJe prie Dieu de vous protéger et de réaliser tous vos souhaits et de vous bénir avec bonheur, santé et longue vie

À mes Mes grand-parents "Fartasi Abd Elkader", "Boukarda Abd Elkader", "Laribi Zarga" Pour leur supplication permanente, j'espère que Dieu les préserve et leur donne une longue vie et une bonne santé. Je Je n'oublierai jamais ma défunte grand-mère "Bounabal Saida". Que Dieu ait pitié de toi, tu étais la bénédiction d'une mère. Merci d'avoir donné naissance à la meilleure mère. Elle est la personne la plus importante dans mon vie. Elle est la source de ma force et de ma faiblesse

À mon cher frère "Ahmed" et mes merveilleuses soeurs "Fatiha", "Siham", "Nassira" et "hadil", et leurs enfants "Moatasem", "Ibrahim" et "Siraj", je vous donne les plus belles expressions de gratitude de mon cœur plein d'amour, de bonté, de respect et de gratitude pour vous, vous êtes mon soutien dans cette vie.

À mon amie, ma sœur, ma chère et amie dans la douleur et la joie, "Rima", tu as toujours été et tu seras toujours une personne chère à mon cœur. Je vous souhaite le meilleur.

À tous mes amis, je vous dirai tout selon votre rang élevé. L'amitié ne signifie pas que je suis avec toi pour longtemps, cela signifie que nous restons connectés malgré la distance et les ennuis de la vie.

Enfin, je rends hommage à "moi-même" qui m'a accompagné à travers toutes les difcultés, qui m'a appris à avancer malgré les chutes, qui m'a appris à remercier Dieu pour ce qui m'est arrivé et ce qui m'arrivera.

★★★ *LOUIZA* ★★★

Notation

$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels
$[\mathrm{n}]$	l'ensemble $\{1, 2, .., n\}$
$x^{\bar{n}}$	le produit $x(x+1)..(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\bar{0}} = 1$
$x^{\underline{n}}$	le produit $x(x-1)..(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\underline{0}} = 1$
$\binom{n}{k}$	le coefficient binomial
$\Gamma(x)$	la fonction Gamma
${}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, \quad \cdots \quad , a_p \\ b_1, \quad \cdots \quad , b_q \end{array}; x\right)$	la fonction hypergéometrique
${}_1F_1\left(\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array}; x\right)$	la fonction hypergéometrique confluente
$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$	le nombre de lah
$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$	le nombre r-lah
$\left\lceil {n \atop k} \right\rceil_r$	le nombre $r-$ Lah de deuxieme espéce .
$\delta_{n,k}$	symbole de Kronecker égale à 1 si $n = k$ et 0 sinon
$\mathbb{L}_n^{(k)}$	le n-ième polynôme de Laguerre
$:=$	égalité par définition (affectation).
$L_{n,s}(x)$	le n-ième polynôme s-Lah .

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace *ii*

Notation *i*

Résumé *1*

Introduction *1*

1 Notion de base *3*
1.1 Factorielle descendante . . . 3
1.2 Factorielle montante . . . 4
1.3 Coefficients binomiaux . . . 6
1.4 Fonctions génératrices . . . 8
1.5 Fonctions hypergéométriques . . . 8
1.5.1 Fonction Gamma . . . 9
1.5.2 Fonction hypergéométrique . . . 9
1.6 Fonction hypergéométrique confluente . . . 10
1.7 Transformation binomiale . . . 10
1.8 Unimodalite et Log-concavite . . . 11
1.8.1 Suites Unimodales . . . 11
1.8.2 Log-covcave . . . 11

2 Nombres et polynômes de Lah et polynomes de Laguerre *12*
2.1 Nombres et polynômes de Lah . . . 12
2.1.1 Nombres de Lah . . . 12
2.1.2 Les polynômes de Lah . . . 13
2.2 Nombres et polynômes $r-$Lah . . . 14
2.3 Transformation de Lah . . . 21
2.4 Polynomes de Laguerre et polynomes de Laguerre associés . . . 22
2.4.1 Polynomes de Laguerre . . . 22
2.4.2 Polynomes de Laguerre associés . . . 23

3 Les polynomes s-Lah *24*
3.1 La transformation de Lah généralisée . . . 24
3.1.1 Formules explicites . . . 24
3.1.2 Fonctions génératrices . . . 28
3.1.3 Étudier d'un exemple . . . 30
3.2 Sur les polynômes $s-$Lah . . . 31

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Triangle de Pascal 7

2.1 Les premières valeurs de ces nombres de Lah 13
2.2 2-Lah numbres $\lfloor {n \atop k} \rfloor_2$ pour $2 \leq n, k \leq 8$. 15
2.3 Tableau des transformations de Lah. 21

TABLE DES FIGURES

RÉSUMÉ

Ce mémoire de Master, intitulé "Sur les polynômes de Lah", porte sur l'étude de plusieurs propriétés et types de ces polynômes. L'objectif de ce mémoire est d'établir plusieurs identités et propriétés, telles que les fonctions génératrices, les récurrences et les formules explicites.

Tout au long de ce travail, nous avons introduit dans la première partie les notions de base qui seront utilisées dans les autres chapitres.

Dans la deuxième partie du mémoire, nous nous concentrons sur l'étude des polynômes de $r-$Lah et des polynômes de Laguerre. Nous y présentons leurs fonctions génératrices, leurs relations de récurrence, et d'autres propriétés importantes.

Enfin, dans la dernière partie, nous définissons les polynômes de $s-$Lah et explorons la transformation de Lah. Cette partie nous permet de comprendre les polynômes de $s-$Lah et leur relation avec polynômes de Laguerre associée.

Mots-Clés : Fonctions génératrices, relations de récurrences, polynômes de r-Lah, polynômes s-lah.

INTRODUCTION

Dans cette mémoire intitulée "Les Polynômes Lah", nous résumons certaines des méthodes utilisées pour déterminer et étudier ces polynômes, notamment les méthodes explicites, les fonctions génératrices et les relations de récurrence. L'objectif principal de ce travail est d'étudier les polynômes de Lah généralisés. Nous proposons d'étudier la relation de récurrence à trois termes suivante [21, 24] :

$$a_{n+1,m}(x) = (n+m)a_{n,m}(x) + xa_{n,m+1}(x). \tag{1}$$

Les polynômes de Lah sont une classe importante de polynômes qui trouvent leur utilité dans divers domaines des mathématiques. Ces polynômes ont été introduits pour la première fois par le mathématicien slovène Vito Lah au début du 20e siècle, et depuis lors, ils ont été étudiés en détail en raison de leurs propriétés intéressantes et de leurs applications pratiques. Les polynômes de Lah se présentent sous différentes formes, mais l'une des plus courantes est leur utilisation pour représenter les coefficients du développement binomial généralisé. Contrairement au développement binomial standard, où l'on s'intéresse aux coefficients binomiaux, les polynômes de Lah sont utilisés pour représenter les coefficients binomiaux généralisés, qui sont souvent nécessaires pour résoudre des problèmes mathématiques complexes. Ces polynômes sont également utilisés dans des domaines tels que la combinatoire. Ils offrent un outil puissant pour résoudre des problèmes de comptage et de dénombrement dans des contextes variés. Ce projet d'étude est divisé en trois chapitres :

Chapitre 01 : Notions de base

Dans le premier chapitre, nous exposons des concepts théoriques essentiels qui servent de bases fondamentales à ce mémoire. Ces notions comprennent les factorielles ascendantes et descendantes, les coefficients binomiaux, ainsi que les fonctions génératrices, les fonctions hypergéométriques, les fonctions hypergéométriques confluentes, la transformation binomiale, les suites unimodales et les fonctions log-concaves.

Chapitre 02 : Nombres et Polynômes de Lah et Polynômes de lagurre

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous abordons les nombres et les polynômes de Lah en détaillant certaines de leurs propriétés. Par la suite, nous nous penchons sur l'exploration et l'analyse des caractéristiques spécifiques des polynômes de Lah, notamment ceux désignés sous le nom de polynômes de r-Lah.

Chapitre 03 : Sur les polynômes de $s-$Lah

Dans ce chapitre, nous nous pencherons sur l'étude d'une classe de polynômes qui généralisent les polynômes de Lah, connus sous le nom de polynômes de s-Lah. Cette classe a été introduite par M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai et M. Rahmani [21].

CHAPITRE 1

NOTION DE BASE

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques concepts fondamentaux. Nous débutons par un rappel concernant les factorielles croissantes et décroissantes, les coefficients binomiaux, les fonctions génératrices, la fonction hypergéométrique ainsi que les fonctions hypergéométriques confluentes. Les sources de référence pour cette section sont citées dans [2, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24].

1.1 Factorielle descendante

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, la factorielle descendante de x d'ordre m est notée $x^{\underline{m}}$, et définie par :

$$x^{\underline{m}} = \begin{cases} 1 & si\ m = 0 \\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1) & si\ m > 0. \end{cases}$$

Si $x = m$ alors $m^{\underline{m}} = m!$ (m factorielle).

Exemple 1.1.

$$\begin{aligned} x^{\underline{0}} &= 1 \\ x^{\underline{1}} &= x \\ x^{\underline{2}} &= x(x-1) = x^2 - x \\ x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^{\underline{4}} &= x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x. \end{aligned}$$

Propriétés

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x^{\underline{m}} = \frac{x!}{(x-m)!} \tag{1.1}$$

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} \tag{1.2}$$

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+m)^{\underline{m}}} \tag{1.3}$$

$$(x+y)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{x}{m} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}} \tag{1.4}$$

$$m^{\underline{m-1}} = m! \tag{1.5}$$

$$x^{\underline{m}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-m+1)}.$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction gamma d'Euler.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} x^{\underline{m+n}} &= \prod_{j=0}^{m+n-1} (x-j) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} (x-j) \prod_{j=m}^{n-1} (x-j) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} (x-j) \prod_{j=0}^{n-1} ((x-m)-j) \\ &= x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Pour démonter la propriété (1.5) on utilise (1.1) :

$$\begin{aligned} m^{\underline{m-1}} &= \frac{m!}{(m-(m-1))!} \\ &= \frac{m!}{1!} \\ &= m!. \end{aligned}$$

□

1.2 Factorielle montante

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, la factorielle montante de x d'ordre m est notée $x^{\overline{m}}$, est définie par :

$$x^{\overline{m}} = \begin{cases} 1 & si\ m = 0 \\ x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1) & si\ m > 0. \end{cases}$$

Exemple 1.2.

$$\begin{aligned} x^{\overline{0}} &= 1 \\ x^{\overline{1}} &= x \\ x^{\overline{2}} &= x(x+1) = x^2 + x \\ x^{\overline{3}} &= x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x \\ x^{\overline{4}} &= x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x. \end{aligned}$$

Propriétes

Pour $x \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x^{\overline{m}} = \frac{(x+m-1)!}{(x-1)!} \tag{1.6}$$

$$x^{\overline{m}} = (-1)^{\overline{m}}(1-m-x)^{\overline{m}} \tag{1.7}$$

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}} \tag{1.8}$$

$$x^{\overline{m}} = (-1)^m(-x)^{\underline{m}} \tag{1.9}$$

$$x^{\overline{m}} = (x+m-1)^{\underline{m}}. \tag{1.10}$$

$$x^{\overline{m}} = \frac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x)}. \tag{1.11}$$

Démonstration. On va démontrer (1.8), on a

$$\begin{aligned} x^{\overline{m+n}} &= \prod_{j=0}^{m+n-1}(x+j) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1}(x+j)\prod_{j=m}^{n-1}(x+j) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1}(x+j)\prod_{j=0}^{n-1}((x+m)+j) \\ &= x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}, \end{aligned}$$

Maintenant, on va démontrer (1.9) et (1.10)

$$\begin{aligned} (-x)^{\underline{m}} &= \prod_{j=0}^{m-1}(-x-j) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1}(-1)(x+j) \\ &= (-1)^m\prod_{j=0}^{m-1}(x+j) \\ &= (-1)^m x^{\overline{m}}, \end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} (-1)^m(-x)^{\underline{m}} &= (-1)^m(-1)^m x^{\overline{m}} \\ (-1)^m(-x)^{\underline{m}} &= (-1)^{2m}x^{\overline{m}} \\ (-1)^m(-x)^{\underline{m}} &= x^{\overline{m}}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= \prod_{j=0}^{n-1}(x+j) \\ &= x(x+1)...(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)...(x+1)x \\ &= \prod_{j=0}^{n-1}((x+n-1)-j) \\ &= (x+n-1)^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

□

1.3 Coefficients binomiaux

Définition 1.3.

Soit $x \in \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{N}$. Le confficient binomial noté $\binom{n}{k}$, définie par la formule :

$$\binom{x}{n} = \frac{x^{\underline{n}}}{n!}. \tag{1.12}$$

En particulier, on a $\binom{x}{0} = \binom{x}{x}$=1.

Pour n et k des entiers positif, alors $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisi un sous-ensemble à k élément dans un ensemble à n élément.

Exemple 1.4. *Dans l'ensemble $[4]$, il y'a 6 sous-ensembles à deux éléments :*

$$\{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}.$$

d'autre part on a : $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Propriétés

1. Pour n et k des entiers positif, on a
$$\binom{n}{k} = \binom{-n+k-1}{k}(-1)^k. \tag{1.13}$$
2. pour $n \geq k \geq 0$, on a
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}. \tag{1.14}$$
3. Pour tout $n \geq k \geq 1$, les coefficients binomiaux satisfont la relation de récurrence de Pascal
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \tag{1.15}$$
avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Démonstration. Pour démontrer la formule de pascal (1.15), on utilise la définition (1.12) pour le deuxième membre.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!},$$

comme

$$k! = (k-1)!k,$$
$$(n-k)! = (n-k-1)!(n-k).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}+\frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

La conclusion. □

A partir de la relation (1.15) nous pouvons construire le triangle de pascal :

$n=0$					1					
$n=1$				1		1				
$n=2$			1		2		1			
$n=3$		1		3		3		1		
$n=4$	1		4		6		4		1	

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal

Théorème 1.5. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{C}$, ces coefficients binomiaux apparaissent dans le développement de la puissance n-iéme de $x+y$:*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}. \tag{1.16}$$

Démonstration. Pour démontrer la formule du binôme de Newton, on utilise la démonstration par récurrence sur n
Pour $n = 0$,

$$(x+y)^0 = 1, \text{ donc } (x+y)^0 \text{ est vraie.}$$

Maintenant, nous supposons que : $(x+y)^n$ est vraie et montrons que $(x+y)^{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire : on va démontrer

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}.$$

On a :

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n.$$

Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}\\ &= x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j} + y\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}.\end{aligned}$$

On fait un changement d'indice dans la première somme et aprèès quelques réarrangements, on obtient

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}\\ &= \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j} + \binom{n}{0}x^0 y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}\\ &= \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{n-j} + \binom{n}{j}\right)x^j y^{n+1-j} + \binom{n}{0}x^0 y^{n+1},\end{aligned}$$

d'après la formule de pascal (1.15), on obtient

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}\\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j}.\end{aligned}$$

Alors $(x+y)^{n+1}$ est vraie. D'ou $(x+y)^n$ est vraie. □

1.4 Fonctions génératrices

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit des nombres réels. On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction définie par

$$\Phi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n. \tag{1.17}$$

On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction définie par :

$$\Psi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}. \tag{1.18}$$

Remarque 1.6. *L'existence de telles fonctions nécessite la convergence de la série de terme général* $\frac{a_n}{n!}$ *et* a_n *respectivement.*

1.5 Fonctions hypergéométriques

Les fonctions hypergéométriques se présentent sous deux formes distinctes : intégrales et séries entières. Cette section se consacre à la présentation des définitions ainsi qu'à quelques propriétés de la fonction hypergéométrique. Nous amorçons cette section par la fonction gamma.

1.5.1 Fonction Gamma

Définition 1.7.

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$ et, on définit la fonction Gamma notée Γ, par

$$\Gamma(x) = \int_{x=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.19}$$

En intégrant par partie, on obtient une conséquence immédiate, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.20}$$

En particulier, on a pour $x = 1$,$\Gamma(1) = 1$, alors on peut déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1.21}$$

1.5.2 Fonction hypergéométrique

Définition 1.8.

— *La fonction hypergéométrique généralisée* ${}_pF_q\left(\begin{array}{ccc} a_1, & \cdots & ,a_p \\ b_1, & \cdots & ,b_q \end{array};x\right)$ *est définie par*

Pour $x \in \mathbb{C}$

$${}_pF_q\left(\begin{array}{ccc} a_1, & \cdots & ,a_p \\ b_1, & \cdots & ,b_q \end{array};x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_1^{\overline{n}} a_2^{\overline{n}} ... a_p^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}} b_2^{\overline{n}} ... b_q^{\overline{n}}} \frac{x^n}{n!}.$$

— *La fonction hypergéométrique fait référence en cas particulier :*
Pour $p = 2, q = 1, a_1 = a, a_2 = b, b_1 = c$, la fonction hypergéométrique est définie par

$${}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c & \end{array};x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{\overline{n}} b^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 1.9. *Pour $p = 2$, $q = 1$ $a = b = c = 1$, la fonction hypergéométrique est réduite à la série géométrique $1 + x + x^2 + ...$, i.e :*

$${}_2F_1\left(\begin{array}{cc} 1, & 1 \\ 1 & \end{array};x\right) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Théorème 1.10. *[2]*

$${}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a,b & \\ c, & \end{array};x\right) = (1-x)^{-b} {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} b,c-a & \\ c, & \end{array};x/(x-1)\right) \textbf{\textit{(Pfaff)}}, \tag{1.22}$$

$${}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a,b & \\ c, & \end{array};x\right) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} c-a,c-b & \\ c, & \end{array};x\right) \textbf{\textit{(Euler)}}. \tag{1.23}$$

Théorème 1.11. *(**Représentation intégrale d'Euler**)[2]*

Si $Re(c) > Re(a) > 0$, alors

$${}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a,b & \\ c & \end{array};x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt. \tag{1.24}$$

Théorème 1.12. *(**Formule de Gauss**) [2]*

Si $Re(c-a-b) > 0$, on a

$${}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a,b & \\ c & \end{array};1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \tag{1.25}$$

1.6 Fonction hypergéométrique confluente

Définition 1.13. *[7]*

La fonction hypergéométrique confluente notée ${}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};x\right)$ *est définie par*

$$ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};x\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{a^{\overline{n}}}{b^{\overline{n}}}\frac{x^n}{n!}. $$

Proposition 1.14. *[7]*

$$ \lim_{b\to+\infty} {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c & \end{array};\frac{x}{b}\right)={}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};x\right), \tag{1.26} $$

$$ \lim_{c\to+\infty} {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c & \end{array};cx\right)={}_2\,F_0\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ \cdot & \end{array};x\right). \tag{1.27} $$

Théorème 1.15. *[7] La fonction hypergéométrique confluente* ${}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};x\right)$ *est une solution de l'équation :*

$$ x^2\frac{d^2F}{dx^2}+(b-x)\frac{dF}{dx}-aF=0 \tag{1.28} $$

(l'équation hypergéométrique confluente ou équation de Kummer). Si b n'est pas un entier une deuxième solution indépendante est donnée par

$$ x^{1-b}\,{}_1F_1\left(\begin{array}{c} a-b+1 \\ 2-b \end{array};x\right). $$

Théorème 1.16. *(**Représentation intégrale**)[7]*

$$ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};x\right)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-a-1}\,e^{xt}dt, \tag{1.29} $$

pour $b>a>0$.

1.7 Transformation binomiale

La transformation binomiale d'une suite a_0, a_1, ... est la suite b_0, b_1, b_2, ..., donnée par

$$ a_n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}b_k, \tag{1.30} $$

et la transformation inverse

$$ b_n=\sum_{k\geq 0}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k. \tag{1.31} $$

Exemple 1.17. *Pour* $a_n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}b_k$, *les premiers termes sont*

$$ a_0=\sum_{k\geq 0}\binom{0}{k}b_k=b_0. \tag{1.32} $$

$$ a_1=\sum_{k\geq 0}\binom{1}{k}b_k=b_0+b_1. \tag{1.33} $$

$$ a_2=\sum_{k\geq 0}\binom{2}{k}b_k=b_0+2b_1+b_2. \tag{1.34} $$

1.8 Unimodalite et Log-concavite

Pour obtenir une variété de résultats concernant l'unimodalité et la log-concavité, voir [3, 9, 16, 24]

1.8.1 Suites Unimodales

Soit une suite de nombres réels positifs C_k (pour $k = 1, ..., n$) est unimodale, s'il existe deux entiers a et b (avec $1 \leq a \leq b \leq n$) où : C_k est croissante pour $1 \leq k \leq a$, décroissante pour $b \leq k \leq n$ et constante pour $a \leq k \leq b$.

En d'autres termes, le graphique de la suite C_k possède un maximum qui peut se présenter sous la forme d'un plateau s'étendant de a à b c'est-à-dire :

$$C_1 \leq ... \leq C_{a-1} \leq C_a = C_b \geq C_{b+1} \geq ... \geq C_n. \tag{1.35}$$

1.8.2 Log-covcave

La suite de nombres réels positifs C_k (pour $k = 1, ..., n$), est dite logarithmiquement concave (en abrege,log-covcave) si

$$C_k{}^2 \geq C_{k+1}C_{k-1}, \quad \textit{pour} \quad k = 2, ..., n-1. \tag{1.36}$$

Proposition 1.18. *Toute suite de nombres positifs strictement log-concave est unimodale.*

Théorème 1.19. *(Inégalité de Newton [16])*

Si le polynôme $F(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$ *,a coefficients positifs, ne possède que des racines rèelles (négatives), alors :*

$$C_k{}^2 \geq C_{k+1}C_{k-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{n-k+1}{n-k}\right), \quad \textit{pour} \quad k = 2, ..., n-1.$$

Remarque 1.20. *L'inégalité de Newton entraîne la stricte log-concavité.*

CHAPITRE 2

NOMBRES ET POLYNÔMES DE LAH ET POLYNOMES DE LAGUERRE

Dans ce chapitre, nous présentons les nombres et les polygones de Lah, ainsi que les polynômes de Laguerre et de laguerre associés.

2.1 Nombres et polynômes de Lah

2.1.1 Nombres de Lah

Les nombres de Lah (non signés), notés $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$, sont les coefficients qui permettent d'exprimer les factorielles montantes en fonction des factorielles descendentes et inversement [20, 21, 22, 24].

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\underline{k}} \quad \textit{et} \quad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor .$$

Ces nombres comptent le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en exactement k listes non vides.

Exemple 2.1. *Dans l'ensemble* $[4]$*, il y'a* 16 *sous-ensembles*

$\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}; \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,3,4\}; \{2,3,4\}; \{1,2,3,4\}.$

On a $\left\lfloor {4 \atop 3} \right\rfloor$ *comptent le nombre de partitions de l'ensemble {1, 2, 3, 4} en 3-listes non vides.*

$$\left\lfloor {4 \atop 2} \right\rfloor = \frac{4!}{3!} \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) = 12$$

$\{(1,2),(3),(4)\}$, $\{(2,1),(3),(4)\}$,$\{(1,3),(2),(4)\}$, $\{(3,1),(2),(4)\}$,$\{(1,4),(2),(3)\}$, $\{(4,1),(2),(3)\}$, $\{(2,3),(1),(4)\}$, $\{(3,2),(1),(4)\}$,$\{(2,4),(1),(3)\}$, $\{(4,2),(1),(3)\}$,$\{(3,4),(1),(2)\}$, $\{(4,3),(1),(2)\}$.

Propriétés

1. **Relation de récurrence** :
   Pour $n \geq k \geq 1$ on a la forme relation de récurrence :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right] + (n+k-1)\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right], \tag{2.1}$$

   avec $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right] = \delta_{n,0}$ pour $n \geq 0$, $\left[\begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix}\right] = \delta_{k,0}$ pour $k \geq 0$.
   En utilisant la relation de récurrence (2.1), voici le tableau représentant les premières valeurs de ces nombres :

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	1								
3	6	6	1							
4	24	36	12	1						
5	120	240	120	20	1					
6	720	1800	1200	300	30	1				
7	5040	15120	12600	4200	630	42	1			
8	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1		
9	362880	1451520	1693440	3386880	211680	28224	2016	72	1	
10	3628800	16329600	21772800	12700800	3810240	635040	60480	3240	90	1

TABLE 2.1 – Les premières valeurs de ces nombres de Lah

2. **Fonction génératrice :** La fonction génératrice exponentielle des nombres de Lah est définie comme suit :

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

3. **Formule explicite :** la formule suivante est la formule explicite pour les nombres de Lah :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}, \quad n \geq k \geq 1 \quad \textit{et} \quad \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = 1.$$

2.1.2 Les polynômes de Lah

Les polynômes de Lah notés par $L_n(x)$, sont définis par

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] x^n.$$

Les premières valeurs des polynômes de Lah

$$\begin{aligned}
L_0(x) =& 1\\
L_1(x) =& x\\
L_2(x) =& x^2 + 2x\\
L_3(x) =& x^3 + 6x^2 + 6x\\
L_4(x) =& x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 24x\\
L_5(x) =& x^5 + 20x^4 + 120x^3 + 240x^2 + 120x\\
L_6(x) =& x^6 + 30x^5 + 300x^4 + 1200x^3 + 1800x^2 + 720x\\
L_7(x) =& x^7 + 42x^6 + 630x^5 + 4200x^4 + 12600x^3 + 15120x^2 + 5040x\\
L_8(x) =& x^8 + 56x^7 + 1176x^6 + 11760x^5 + 58800x^4 + 141120x^3 + 141120x^2 + 40320x\\
L_9(x) =& x^9 + 72x^8 + 2016x^7 + 28224x^6 + 211680x^5 + 3386880x^4 + 1693440x^3\\
&+ 1451520x^2 + 362880x\\
L_{10}(x) =& x^{10} + 90x^9 + 3240x^8 + 60480x^7 + 635040x^6 + 3810240x^5 + 12700800x^4\\
&+ 21772800x^3 + 16329600x^2 + 3628800x.
\end{aligned}$$

2.2 Nombres et polynômes $r-$Lah

Soient n, k et r des entiers positifs. Les nombres $r-$Lah, notés $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $1, 2, ..., n$ en k listes non vides, telles que les éléments $1, 2, ..., r$ se trouvent dans des listes différentes.

Exemple 2.2. *Dans l'ensemble* $[4]$*, il y'a* 16 *sous-ensembles :*

$\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}; \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,3,4\}; \{2,3,4\}; \{1,2,3,4\}.$

On a $\left\lfloor {4 \atop 3} \right\rfloor_3$ *comptent le nombre de partitions de l'ensemble {1, 2, 3, 4} en 3-listes non vides, telles que les éléments* $1, 2$ *et* 3 *se trouvent dans des listes différentes. .* $\{(1,3),(2),(4)\}$, $\{(3,1),(2),(4)\}$,$\{(1,4),(2),(3)\}$, $\{(4,1),(2),(3)\}$,$\{(2,3),(1),(4)\}$, $\{(3,2),(1),(4)\}$, $\{(2,4),(1),(3)\}$, $\{(4,2),(1),(3)\}$,$\{(3,4),(1),(2)\}$, $\{(4,3),(1),(2)\}$.
Par conséquent, $\left\lfloor {4 \atop 3} \right\rfloor_2 = 10$.

Propriétes Voici quelques propriétés des nombres $r-$Lah [6, 18] :

1.
$$(x+2r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n+r \atop k+r} \right]_r x^{\underline{k}},$$
$$(x-r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \left[{n+r \atop k+r} \right]_r (x+r)^{\overline{k}}.$$

2. **Relation de récurrence :** Les nombres $r-$Lah satisfont la relation de récurrence suivante pour $n > r$:

$$\left[{n \atop k} \right]_r = \left[{n-1 \atop k-1} \right]_r + (n+k-1) \left[{n-1 \atop k} \right]_r,$$

avec $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \delta_{k,r}$ si $n = k$ et $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = 0$ si $n < r$, où $\delta_{k,r}$ est le symbole de kronecker.

Le tableau suivant represente les premières valeurs de nombres $2-$Lah :

$n\backslash k$	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	0	0	0	0	0
3	4	1	0	0	0	0	0
4	20	10	1	0	0	0	0
5	120	90	18	1	0	0	0
6	840	840	252	28	1	0	0
7	6720	8400	3360	560	40	1	0
8	60480	90720	45360	10080	1080	54	1

TABLE 2.2 – 2-Lah numbres $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_2$ pour $2 \leq n, k \leq 8$.

3. **Fonction génératrice :** La fonction génératrice exponentielle des nombres $r-$Lah est définie comme suit :

$$\sum_{n \geq k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{x^k}{(1-x)^{k+2r}}.$$

4. **Formules explicites :** La formule explicite des nombres $r-$Lah est donnée par :

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r}, n \geq k \geq r. \tag{2.2}$$

Dans [18], Théorème(3,7), la formule explicite des nombres $r-$Lah est donnée par :

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}. \tag{2.3}$$

Les polynomes de $r-$Lah notés par $L_{n,r}(x)$, sont définis par

$$L_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k.$$

Pour $r = 2$ on a les premières valeurs des polynômes de $r-$Lah [19] :

$$\begin{aligned}
L_{2,2}(x) =& x^2 \\
L_{3,2}(x) =& x^3 + 4x^2 \\
L_{4,2}(x) =& x^4 + 10x^3 + 20x^2 \\
L_{5,2}(x) =& x^5 + 18x^4 + 90x^3 + 120x^2 \\
L_{6,2}(x) =& x^6 + 28x^5 + 252x^4 + 840x^3 + 840x^2 \\
L_{7,2}(x) =& x^7 + 40x^6 + 560x^5 + 3360x^4 + 8400x^3 + 6720x^2 \\
L_{8,2}(x) =& x^8 + 54x^7 + 1080x^6 + 10080x^5 + 45360x^4 + 90720x^3 + 60480x^2.
\end{aligned}$$

Dans [18], la relation de récurrence des nombres $r-$Lah est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3.
Si $1 \leq k \leq n$ *et* $r \geq 0$, *alors*

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (n+k+2r) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r.$$

Démonstration. D'après (2.3), on a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_r &= \frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+2r}{k+2r-1} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!}\frac{(n+2r)!}{(k+2r-1)!(n-k+1)!}.\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r + (n+k+2r)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2} + (n+k+2r)\frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n+2r-1)!}{(k+2r-2)!(n-k+1)!} + (n+k+2r)\frac{n!}{k!}\frac{(n+2r-1)!}{(k+2r-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{k(k+2r-1)n!(n+2r-1)!}{k(k-1)!(k+2r-1)(k+2r-2)!(n-k+1)!} \\ &+ (n+k+2r)\frac{(n-k+1)n!(n+2r-1)!}{k!(k+2r-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+2r-1)!}{k!(k+2r-1)!(n-k+1)!}[k(k+2r-1)+(n+k+2r)(n-k+1)] \\ &= \frac{(n+1)n!(n+2r)(n+2r-1)!}{k!(k+2r-1)!(n-k+1)!} \\ &\frac{k^2+2rk-k+n^2-kn+n+nk-k^2+k+2rn-2rk+2r}{(n+1)(n+2r)} \\ &= \frac{(n+1)!(n+2r)!}{k!(k+2r-1)!(n-k+1)!}\frac{n^2+n+2rn+2r}{n^2+n+2rn+2r} \\ &= \frac{(n+1)!(n+2r)!}{k!(k+2r-1)!(n-k+1)!}.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r + (n+k+2r)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r.$$

□

Dans [18], la relation entre la factorielle descendante et la factorille montantes en fonction des polynômes $r-$Lah est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Si $n, r \geq 0$, alors*

$$(x+2r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r x^{\underline{k}}, \qquad (x-2r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r x^{\overline{k}}. \tag{2.4}$$

Théorème 2.5. *[18] Si $0 \leq k \leq n$ et $r \geq 0$, alors*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_r = \sum_{j=k}^{n}(n+k+2r+1)^{\underline{n-j}}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_r.$$

Théorème 2.6. *[18] Pour $n \geq 1$ et $r \geq 0$, la suite $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^{n}$ est strictement log-concave, par conséquent, elle est unimodale.*

Démonstration. Nous devons prouver que

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_r < \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^2. \tag{2.5}$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$, on peut supposer que $n \geq 2$.
Pour $k = 0$ et $r = 0$ on a :

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_0 \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix}_0 = 0 \times \frac{(n-1)n!}{2} = 0$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_0^2 = (n!)^2,$$

alors

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_0 \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix}_0 < \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_0^2,$$

donc (2.5) est vraie pour $k = 0$ et $r = 0$.
Pour les autres cas, nous supposons que (2.5) est vraie, et en utilisant la formule explicite (2.3), on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_r < \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^2 \quad \text{équivalent à}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2}\frac{n!}{(k+1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r} < \frac{(n!)^2}{(k!)^2}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}^2$$

$$\frac{1}{(k-1)!(k+1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2}\binom{n+2r-1}{k+2r} < \frac{1}{(k!)^2}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}^2$$

$$\frac{k!(k+1)!}{(k-1)!(k+1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2}\binom{n+2r-1}{k+2r} < \frac{k!(k+1)!}{k!k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}^2$$

$$k\binom{n+2r-1}{k+2r-2}\binom{n+2r-1}{k+2r} < (k+1)\binom{n+2r-1}{k+2r-1}^2$$

$$k\frac{(n+2r-1)!}{(k+2r-2)!(n-k+1)!}\frac{(n+2r-1)!}{(k+2r)!(n-k-1)!} < (k+1)\frac{(n+2r-1)!^2}{(k+2r-1)!^2(n-k)!^2}$$

$$k\frac{1}{(k+2r-2)!(k+2r)!(n-k+1)!(n-k-1)!} < (k+1)\frac{1}{(k+2r-1)!(k+2r-1)!(n-k)!(n-k)!}$$

$$k\frac{(k+2r-1)!(k+2r)!(n-k+1)!(n-k)!}{(k+2r-2)!(k+2r)!(n-k+1)!(n-k-1)!} < (k+1)\frac{(k+2r-1)!(k+2r)!(n-k+1)!(n-k)!}{(k+2r-1)!(k+2r-1)!(n-k)!(n-k)!}$$

$$k(k+2r-1)(n-k) < (k+1)(k+2r)(n-k+1)$$

et

$$k(k+2r-1)(n-k) < (k+1)(k+2r)(n-k+1)$$

est vraie car

$$k < (k+1), (k+2r-1) < (k+2r) \quad \text{et} \quad (n-k) < (n-k+1)$$

toujours vraie c'est-à-dire (2.5) est vraie.

Donc la suite pour $\left(\lfloor n \rfloor_r\right)_{k=0}^{n}$ est log-concave et possède un ou deux points maximum consécutifs, qui peuvent être complètement décrits, c'est-à-dire qu'elle est unimodale. □

Théorème 2.7. *[18] Soit $n \geq 1$ et $r \geq 0$. Si $n + r^2 + 1$ n'est pas un nombre carré, alors la suite $\left(\lfloor n \rfloor_r\right)_{k=0}^{n}$ atteint son maximum uniquement pour $k = \lfloor \sqrt{n + r^2 + 1} \rfloor - r$, tandis que si $n + r^2 + 1$ est un nombre carré, , alors elle atteint ses maxima à $k = \sqrt{n + r^2 + 1} - r - 1$ et $\sqrt{n + r^2 + 1} - r$.*

Démonstration. On a $\lfloor n \rfloor_0 = 0$ et $\lfloor n \rfloor_r$ est toujours positif ; il suffit donc de gérer ces valeurs.
En utilisant la formule explicite (2.3) on a :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r &\lessgtr \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r \\
\frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2} &\lessgtr \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1} \\
\frac{1}{(k-1)!}\frac{(n+2r-1)!}{(k+2r-2)!(n-k+1)!} &\lessgtr \frac{1}{k!}\frac{(n+2r-1)!}{(k+2r-1)!(n-k)!} \\
\frac{k!}{(k-1)!}\frac{1}{(k+2r-2)!(n-k+1)!} &\lessgtr \frac{k!}{k!}\frac{1}{(k+2r-1)!(n-k)!} \\
k\frac{(k+2r-1)!(n-k+1)!}{(k+2r-2)!(n-k+1)!} &\lessgtr \frac{(k+2r-1)!(n-k+1)!}{(k+2r-1)!(n-k)!} \\
k(k+2r-1) &\lessgtr (n-k+1) \\
k^2 + 2rk - k &\lessgtr n-k+1 \\
k^2 + 2rk + r^2 - r^2 &\lessgtr n+1 \\
(k+r)^2 &\lessgtr n+1+r^2 \\
k+r &\lessgtr \sqrt{n+r^2+1} \\
k &\lessgtr \sqrt{n+r^2+1} - r.
\end{aligned}$$

– Si $n + r^2 + 1$ n'est pas un nombre carré alors la suite $\left(\lfloor n \rfloor_r\right)_{k=0}^{n}$ à un seul maximum à $k = \lfloor \sqrt{n + r^2 + 1} \rfloor - r$.
– Si $n + r^2 + 1$ nombre carré alors la suite $\left(\lfloor n \rfloor_r\right)_{k=0}^{n}$ à un maximum à $k = \sqrt{n + r^2 + 1} - r - 1$ et $\sqrt{n + r^2 + 1} - r$. □

Théorème 2.8. *[18] Pour $k, r \geq 0$, la fonction génératrice exponentielle de $\left(\lfloor n \rfloor_r\right)_{n=k}^{\infty}$ est*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{2r}.$$

Démonstration. On peut supposer que k, r ne sont pas tous les deux 0. En appliquant la formule explicite (2.3), on a

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1} \frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1} x^{n-k+k}$$
$$= \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+2r-1}{k+2r-1} x^{n-k}.$$

De (1.14) on a $\binom{n+2r-1}{k+2r-1} = \binom{n+2r-1}{n-k}$ donc

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+2r-1}{n-k} x^{n-k}.$$

On fait un changement d'indice $n = n + k$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+2r-1}{n} x^n.$$

De (1.13)on a $\binom{n+k+2r-1}{n} = \binom{-(n+k+2r-1)+n-1}{n}(-1)^n = \binom{-k-2r}{n}(-1)^n$ donc

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-2r}{n} (-x)^n.$$

De (1.16) on a $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-2r}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-2r}{n}(-x)^n 1^{-k-2r-n} = (1-x)^{-k-2r}$ donc

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!}(1-x)^{-k-2r}$$
$$= \frac{x^k}{k!}(1-x)^{-k}(1-x)^{-2r}$$
$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{2r}.$$

□

Le théorème suivant représente l'expression des polynômes r-Lah en termes de polynômes $(r-s)$-Lah [19].

Théorème 2.9. *[19] Si $n, r, s \geq 0$ et $s \leq r$, alors*

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(2s)^{\overline{n-j}}.$$

Théorème 2.10. *[19] Si $m, n, r, s \geq 0$ et $s \leq r$ alors*

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(m+i+2s)^{\overline{n-j}} x^i.$$

Démonstration. D'après (2.4), on obtient

$$(x+2r)^{\overline{m+n}} = \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_r x^{\underline{k}}.$$

D'autre part, en utilisant à (1.16), (1.8) et (2.4), on a aussi

$$\begin{aligned}
(x+2r)^{\overline{m+n}} &= (x+2r)^{\overline{m}}(x+2r+m)^{\overline{n}} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r x^{\underline{i}}(x-i+2r-2s+m+i+2s)^{\overline{n}} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r x^{\underline{i}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x-i+2r-2s)^{\overline{j}}(m+i+2s)^{\overline{n-j}} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r x^{\underline{i}} \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_{r-s} (x-i)^{\underline{k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_{r-s} x^{\underline{i+k}}.
\end{aligned}$$

On fait un changement d'indice $k \to k-1$

$$\begin{aligned}
(x+2r)^{\overline{m+n}} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=i}^{i+j} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k-i \end{bmatrix}_{r-s} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{\min\{m,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{j} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k-i \end{bmatrix}_{r-s} x^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $x^{\underline{k}}$ dans les deux expressions ci-dessus donne :

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_r = \sum_{i=0}^{\min\{m,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{j} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k-i \end{bmatrix}_{r-s}.$$

Si nous multiplions les deux côtés par $x^{\underline{k}}$ et que nous faisons la somme pour k $(k=0;...;m+n)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_r x^k &= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{\min\{m,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k-i \end{bmatrix}_{r-s} x^k \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=i}^{i+j} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k-i \end{bmatrix}_{r-s} x^k.
\end{aligned}$$

On fait un changement d'indice $k \to k+1$

$$\sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_r (x)^k = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_{r-s} x^{i+k}.$$

□

2.3 Transformation de Lah

transformation de Lah [4, 18] de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est la suite $(b_n)_{n\geq 0}$, donnée par la formule suivante :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k, k \geq 0$$

et la formule de la transformation inverse est donnée par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} b_k.$$

Le tableau suivant répresente la transformation de Lah [4] :

a_n	transformer lah b_n
A000290	A103194
A104600	A121020
A000262	A025168
A000079	A052897
A000110	A084357
A000085	A049376
A000670	A084358

TABLE 2.3 – Tableau des transformations de Lah.

Exemple 2.11. *Pour la suite A000290 c'est-à-dire la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ où $a_n = n^2$, si l'on applique la transformation de Lah, on obtient la suite A103194, c'est-à-dire $(b_n)_{n\geq 0}$. Voici les premières valeurs de la suite (a_n) :*

$$\begin{aligned} a_0 &= 0^2 = 0 \\ a_1 &= 1^2 = 1 \\ a_2 &= 2^2 = 4 \\ a_3 &= 3^2 = 9 \\ a_4 &= 4^2 = 16 \\ a_5 &= 5^2 = 25 \\ a_6 &= 6^2 = 36. \end{aligned}$$

Les premières valeurs de la suite (b_n) :

$$b_0 = \sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 = 1 \times 0 = 0$$

$$b_1 = \sum_{k=0}^{1} \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 = 0 + 1 = 1$$

$$b_2 = \sum_{k=0}^{2} \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} a_2 = 0 + 2 \times 1 + 1 \times 4 = 6$$

$$b_3 = \sum_{k=0}^{3} \begin{bmatrix} 3 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} a_3 = 0 + 6 \times 1 + 6 \times 4 + 1 \times 9 = 39$$

$$b_4 = \sum_{k=0}^{4} \begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} a_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} a_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} a_4 = 0 + 24 \times 1 + 36 \times 4 + 12 \times 9 + 1 \times 16 = 292$$

$$b_5 = \sum_{k=0}^{5} \begin{bmatrix} 5 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} a_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} a_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} a_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} a_5 = 0 + 120 \times 1 + 240 \times 4 + 120 \times 9 + 20 \times 16 + 1 \times 25 = 2505$$

$$b_6 = \sum_{k=0}^{6} \begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix} a_k = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} a_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} a_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} a_4 \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} a_5 \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} a_6 = 0 + 720 \times 1 + 1800 \times 4 + 1200 \times 9 + 300 \times 16 + 30 \times 25 + 1 \times 36 = 24306.$$

2.4 Polynomes de Laguerre et polynomes de Laguerre associés

2.4.1 Polynomes de Laguerre

L'équation différentielle de laguerre est donnée par :

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, \tag{2.6}$$

ou $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Les solutions de cette équation sont les polynômes de laguerre, exprimés par l'équation différentielle suivante [24] :

$$\mathbb{L}_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{2.7}$$

Propriétes

1. **Fonction de génératrice :**

$$\frac{e^{-x/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{L}_n(x)}{n!} t^n. \tag{2.8}$$

2. **Relations de récurrences :**

$$\begin{array}{rl} \mathbb{L}_{n+1}(x) & = (2n + 1 - x)\mathbb{L}_n(x) - n^2\mathbb{L}_{n-1}(x). \\ \mathbb{L}'_n(x) - n\mathbb{L}'_{n-1} + n\mathbb{L}_{n-1} & = 0. \\ x\mathbb{L}'_{n-1}(x) & = n\mathbb{L}_n(x) - n^2\mathbb{L}_{n-1}(x). \end{array}$$

3. **Orthogonalité :**

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\mathbb{L}_m(x)\mathbb{L}_n(x)dx = \begin{cases} 0, & si\ m \neq n \\ (n!)^2, & si\ m = n. \end{cases} \tag{2.9}$$

4. **Développement en série :** Si

$$f(x) = A_0\mathbb{L}_0(x) + A_1\mathbb{L}_1(x) + A_2\mathbb{L}_2(x), \tag{2.10}$$

donc :

$$A_n = \frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty e^{-x} f(x)\mathbb{L}_n(x)dx. \tag{2.11}$$

5. **Les polynômes de Laguerre :**

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_0(x) &= 1 \\
\mathbb{L}_1(x) &= 1 - x \\
\mathbb{L}_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right) \\
\mathbb{L}_3(x) &= \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right).
\end{aligned}$$

Il faut remarquer que $\mathbb{L}_n(x)$ est un polynôme de degré n.

2.4.2 Polynomes de Laguerre associés

Les polynômes de Laguerre associés, notés par $\mathbb{L}_n^m(x)$, sont définis par la formule suivante [1, 2, 24] :

$$\mathbb{L}_n^m(x) = \frac{x^{-m}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+m}), n \geq 0, \tag{2.12}$$

et satisfaisant l'équation

$$xy'' + (m + 1 - x)y' + (n - m)y = 0. \tag{2.13}$$

$$\text{Si } m > n \text{ alors } \mathbb{L}_n^m(x) = 0.$$

Nous avons alors :

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\mathbb{L}_n^m(x)\mathbb{L}_p^m(x)dx = 0 \qquad p \neq n, \tag{2.14}$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\mathbb{L}_n^m(x)\mathbb{L}_p^m(x)dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}. \tag{2.15}$$

Propriétés

1. **Fonction génératrice :** La fonction génératrice est donnée par :

$$\sum_{n=0}^\infty \mathbb{L}_n^m(x)t^n = \frac{1}{(1-t)^m + 1}\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}. \tag{2.16}$$

2. **Relation de récurrence :** Les polynomes de laguerre généralisés satisfont

$$(n+1)\mathbb{L}_{n+1}^m(x) = (-x + m + 2n + 1)\mathbb{L}_n^m(x) - (n+m)\mathbb{L}_{n-1}^m(x) \quad \textit{pour} \quad n \geq 1. \tag{2.17}$$

3. **Formule explicite :** La formule explicite des polynômes de Laguerre associés en termes de la fonction hypergéométrique confluente est donnée par la formule suivante :

$$\mathbb{L}_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{m!n!}{}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ m+1 \end{matrix}; x\right). \tag{2.18}$$

CHAPITRE 3

LES POLYNOMES S-LAH

Dans cette partie, l'objectif principal est d'étudier la transformation de Lah généralisée [21, 24]. Pour ce faire, nous allons construire une matrice infinie $M := (a_{n,m})_{n,m\geq 0}$, où la première ligne $\alpha_m = a_{0,m}$ est la suite initiale et la première colonne de la matrice $\beta_n := a_{n,0}$ est la suite finale. Plus précisément, nous allons étudier la relation de récurrence suivante [21, 24] :

$$a_{n+1,m}(x) = (n+m)a_{n,m}(x) + xa_{n,m+1}(x). \tag{3.1}$$

Tous les résultats étudiés dans ce chapitre sont extraits des références suivantes [21, 24]. :

3.1 La transformation de Lah généralisée

Dans les deux théorèmes, nous allons fournir deux formules explicites différentes pour les éléments de la matrice M.

3.1.1 Formules explicites

Théorème 3.1. *Soit α_m une suite initiale associée à la relation de récurrence (3.1). Les éléments de la matrice M sont alors donnés par la formule explicite suivante :*

$$a_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1}x^k\alpha_{m+k}. \tag{3.2}$$

Démonstration.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le raisonnement par récurrence :
- Pour $n = 0$, par la relation (3.2) on a :

$$\begin{aligned} a_{0,m} &= \sum_{k=0}^{0} \frac{0!}{k!}\binom{m-1}{k+m-1}x^k\alpha_{m+k} \\ &= \frac{0!}{0!}\binom{m-1}{m-1}x^0\alpha_m \\ &= \alpha_m. \end{aligned}$$

Alors la relation (3.2) est vraie pour $n = 0$.

Ensuite, on suppose que la relation (3.2) est vraie pour n, et on démontre qu'elle est également vraie pour $n+1$. C'est-à-dire :

$$a_{n+1,m}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!} \binom{n+m}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k}.$$

De la relation de récurrence (3.1) :

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m}(x) &= (n+m)a_{n,m}(x) + xa_{n,m+1}(x) \\
&= (n+m)\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} + x\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m}{k+m} x^k \alpha_{m+k+1} \\
&= (n+m)\frac{n!}{0!}\binom{n+m-1}{m-1} x^0 \alpha_m + (n+m)\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} \\
&+ x\frac{n!}{n!}\binom{n+m}{n+m} x^n \alpha_{m+n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}\binom{n+m}{k+m} x^{k+1} \alpha_{m+k+1} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + (n+m)\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} \\
&+ x^{n+1}\alpha_{m+n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+m}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \left[(n+m)\frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} + \frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+m}{k+m-1}\right] x^k \alpha_{m+k} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \left((n+m)\frac{n!}{k!}\frac{(n+m-1)!}{(k+m-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n+m)!}{(k+m-1)!(n-k+1)!}\right) x^k \alpha_{m+k} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n+m)!}{(k+m-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) x^k \alpha_{m+k} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n+m)!}{(k+m-1)!(n-k)!}\frac{k+n-k+1}{(n-k+1)k} x^k \alpha_{m+k} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n+m)!}{(k+m-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{(n-k+1)k} x^k \alpha_{m+k} \\
&= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!}\frac{(n+m)!}{(k+m-1)!(n-k+1)!} x^k \alpha_{m+k}
\end{aligned}$$

$$= (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+m}{k+m-1}x^k\alpha_{m+k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+m}{k+m-1}x^k\alpha_{m+k}.$$

Donc, la relation (3.2) est vraie pour $n+1$, ce qui signifie qu'elle est également vraie pour n. □

Théorème 3.2. *Soit β_n une suite finale associée à la relation de récurrence suivante :*

$$a_{n,m+1}(x) = \frac{1}{x}(a_{n+1,m}(x) - (n+m)a_{n,m}(x)). \tag{3.3}$$

Les éléments de la matrice M sont donnés par la formule explicite suivante :

$$a_{n,m}(x) = \frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}. \tag{3.4}$$

Démonstration.

Si $m = 0$ alors, par la relation (3.4), on a :

$$a_{n,0} = \frac{1}{x^0}\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\frac{0!}{k!}\binom{n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}$$
$$= (-1)^0\frac{1}{0!}\binom{n-1}{n-1}\beta_n$$
$$= \beta_n.$$

Alors la relation (3.4) est vraie pour $m = 0$.
Maintenant, supposons que la relation (3.4) soit vraie pour m, et démontrons qu'elle est également vraie pour $m+1$. C'est-à-dire :

$$a_{n,m+1}(x) = \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^{m+k+1}\frac{(m+1)!}{k!}\binom{m+n}{k+n-1}\beta_{n+k}.$$

De la relation de récurrence (3.3) :

$$\begin{aligned}
a_{n,m+1}(x) &= \frac{1}{x}(a_{n+1,m}(x) - (n+m)a_{n,m}(x)) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n}{k+n}\beta_{n+k+1} - (n+m)\frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}\right) \\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n}{k+n}\beta_{n+k+1} - (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k} \\
&= \frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{2m}\frac{m!}{m!}\binom{m+n}{m+n}\beta_{n+m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n}{k+n}\beta_{n+k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^m\frac{m!}{0!}\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n - (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n}{k+n}\beta_{n+k+1}\\
&- (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^m m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n - (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k-1}\frac{m!}{(k-1)!}\binom{m+n}{k+n-1}\beta_{n+k}\\
&- (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^m m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n - (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\frac{m!}{(k-1)!}\binom{m+n}{k+n-1}\beta_{n+k} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\left[\frac{m!}{(k-1)!}\binom{m+n}{k+n-1} + (n+m)\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\right]\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\left(\frac{m!}{(k-1)!}\frac{(m+n)!}{(k+n-1)!(m-k+1)!} + (n+m)\frac{m!}{k!}\frac{(m+n-1)!}{(k+n-1)!(m-k)!}\right)\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\frac{m!}{(k-1)!}\frac{(m+n)!}{(k+n-1)!(m-k)!}\left(\frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{k}\right)\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\left(\frac{m!}{(k-1)!}\frac{(m+n)!}{(k+n-1)!(m-k)!}\frac{k+m-k+1}{(m-k+1)k}\right)\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\left(\frac{m!}{(k-1)!}\frac{(m+n)!}{(k+n-1)!(m-k)!}\frac{m+1}{(m-k+1)k}\right)\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\frac{(m+1)!}{k!}\frac{(m+n)!}{(k+n-1)!(m-k+1)!}\beta_{n+k}\\
&= \frac{1}{x^{m+1}}\beta_{n+m+1} + (n+m)\frac{1}{x^{m+1}}(-1)^{m+1}m!\binom{m+n-1}{n-1}\beta_n\\
&+ \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k+1}\frac{(m+1)!}{k!}\binom{m+n}{k+n-1}\beta_{n+k}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+k+1} \frac{(m+1)!}{k!} \binom{m+n}{k+n-1} \beta_{n+k}.$$

Donc, la relation (3.4) est vraie pour $m+1$, ce qui implique qu'elle est vraie pour m. □

À partir du Théorème (3.1) et du Théorème (3.2), nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Pour $n, m \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} x^{-m} \beta_{n+k}. \tag{3.5}$$

Remarque 3.4. *Pour $m = 0$ et $x = 1$, la relation (3.5) se réduit à une transformation de Lah :*

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \alpha_k.$$

Pour $n = 0$ et $x = 1$, la relation (3.5) se transforme en une inverse transformation de Lah :

$$\alpha_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{k!} \binom{m-1}{k-1} \beta_k.$$

3.1.2 Fonctions génératrices

Théorème 3.5. *On suppose que la suite initiale α_{m+s} a une fonction génératrice exponentielle :*

$$A_s(z) = \sum_{k \geq 0} \alpha_{k+s} \frac{z^k}{k!}. \tag{3.6}$$

Alors, la suite $(a_{n,s}(x))_{n \geq 0}$, correspondant à la s-ième colonne de la matrice M, possède également une fonction génératrice exponentielle.

$$B_s(z; x) = \sum_{n \geq 0} a_{n,s}(x) \frac{z^n}{n!}, \tag{3.7}$$

donnée par :

$$B_s(z; x) = \frac{1}{(1-z)^s} A_s\left(\frac{xz}{1-z}\right). \tag{3.8}$$

Démonstration.

De la relation (3.7)et (3.2), on a :

$$\begin{aligned} B_s(z; x) &= \sum_{n \geq 0} a_{n,s}(x) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+s-1}{k+s-1} x^k \alpha_{k+s} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} x^k \alpha_{k+s} \sum_{n \geq 0} \binom{n+s-1}{k+s-1} z^n. \end{aligned}$$

Car

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+s-1}{k+s-1} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+s}}.$$

On a

$$B_s(z;x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} x^k \alpha_{k+s} \frac{z^k}{(1-z)^{k+s}}$$
$$= \frac{1}{(1-z)s} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \alpha_{k+s} \left(\frac{xz}{1-z}\right)^k.$$

D'autre part, en utilisant à (3.6), on a :

$$A_s\left(\frac{xz}{1-z}\right) = \sum_{k\geq 0} \alpha_{k+s} \left(\frac{xz}{1-z}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

Donc

$$B_s(z;x) = \frac{1}{(1-z)s} A_s(\frac{xz}{1-z}).$$

□

Théorème 3.6. *On suppose que la suite finale β_{n+s} a pour fonction génératrice exponentielle,*

$$B_s(z) = \sum_{k\geq 0} \beta_{k+s} \frac{z^k}{k!}. \tag{3.9}$$

Alors, la suite $(a_{s,m}(x))_{m\geq 0}$, correspondant à la s-ième colonne de la matrice M, possède également une fonction génératrice exponentielle.

$$A_s(z;x) = \sum_{m\geq 0} a_{s,m}(x) \frac{z^m}{m!}, \tag{3.10}$$

donnée par :

$$A_s(z;x) = \frac{x^s}{(x+z)^s} B_s\left(\frac{z}{x+z}\right). \tag{3.11}$$

Démonstration.

De (3.10) et (3.4), on a :

$$A_s(z;x) = \sum_{m\geq 0} a_{s,m}(x) \frac{z^m}{m!}$$
$$= \sum_{m\geq 0} \left(\frac{1}{x^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+s-1}{k+s-1} \beta_{s+k} \right) \frac{z^m}{m!}$$
$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!} \beta_{s+k} \sum_{m\geq 0} (-1)^m \binom{m+s-1}{k+s-1} \left(\frac{z}{x}\right)^m$$

Car

$$\sum_{m\geq 0} (-1)^m \binom{m+s-1}{k+s-1} \left(\frac{z}{x}\right)^m = (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^k}{\left(1-\frac{z}{x}\right)^{k+s}}$$
$$= (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^k}{\left(\frac{x-z}{x}\right)^{k+s}}$$
$$= (-1)^k \frac{z^k}{x^k} \frac{x^{k+s}}{(x-z)^{k+s}}$$
$$= (-1)^k \left(\frac{z}{x-z}\right)^k \left(\frac{x}{x-z}\right)^s.$$

On a

$$A_s(z;x) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{1}{k!}\beta_{s+k}(-1)^k \left(\frac{z}{x-z}\right)^k \left(\frac{x}{x-z}\right)^s$$
$$= \left(\frac{x}{x-z}\right)^s \sum_{k\geq 0}(-1)^{2k}\frac{1}{k!}\beta_{s+k}\left(\frac{z}{x-z}\right)^k.$$

D'autre part, en utilisant à (3.9), on a :

$$B_s\left(\frac{z}{x-z}\right) = \sum_{k\geq 0}\beta_{k+s}\frac{1}{k!}\left(\frac{z}{x-z}\right)^k.$$

Donc

$$A_s(z;x) = \left(\frac{x}{x-z}\right)^s B_s\left(\frac{z}{x-z}\right).$$

□

3.1.3 Étudier d'un exemple

Exemple 3.7. *On pose la suite initiale $a_{0,m} = 1$. En utilisant la relation (3.1), on obtient la matrice suivante :*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ x & x+1 & x+2 & x+3 & \dots \\ x^2+2x & x^2+4x+2 & x^2+6x+6 & \vdots & \\ x^3+6x^2+6x & x^3+9x^2+18x+6 & \vdots & & \\ x^4+12x^3+36x^2+24x & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

De théorème (3.5), on a :

$$A_s(z) = \sum_{k\geq 0}\alpha_{k+s}\frac{z^k}{k!}$$
$$= \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}$$
$$= \exp(z).$$

La fonction génératrice (3.8) devient la suivante :

$$B_s(z;x) = \frac{1}{(1-z)^s}\exp\left(\frac{xz}{1-z}\right). \tag{3.12}$$

En particulier, pour $s = 0$, nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned} B_0(z;x) &= \frac{1}{(1-z)^0}\exp\left(\frac{xz}{1-z}\right) \\ &= \exp\left(\frac{xz}{1-z}\right) \\ &= A_0(z)\left(\frac{xz}{1-z}\right) \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{\left(\frac{xz}{1-z}\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{x^k z^k}{(1-z)^k}\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Car

$$\frac{z^k}{(1-z)^k} = \sum_{n\geq 0}\binom{n-1}{k-1}z^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_0(z;x) &= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0}\binom{n-1}{k-1}z^n\frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}x^k\frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x^k\right)\frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0}L_n(x)\frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Où $L_n(x)$ sont les polynômes de Lah.
Donc la relation (3.5) devient la suivante

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1}x^k = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}x^{-m}L_{n+k}(x). \tag{3.13}$$

On prend n=0, on obtient

$$x^m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor L_k(x).$$

3.2 Sur les polynômes $s-$Lah

La relation (3.13) engendre une nouvelle classe de polynômes généralisant les polynômes de Lah. Voici la définition associée :

Définition 3.8. *Les polynômes $s-$Lah sont notés $L_{n,s}(x)$ et définis comme suit :*

$$\begin{aligned} L_{n,s}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}x^k \\ &= x^{-s}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{s+k}\frac{s!}{k!}\binom{s+n-1}{s-1}L_{n+k}(x). \end{aligned}$$

Maintenant, nous discutons les deux cas où le nombre s dans la fonction génératrice exponentielle (3.12) est paire où impaire.

Pour $s = 2r$ dans (3.12), on pose $Y_{n,r}(x) = a_{n,2r}(x)$, alors

$$B_{2r}(z;x) = \sum_{k\geq 0} Y_{n,r}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Avec

$$\begin{aligned} Y_{n,r}(x) &= \sum_{k=0}^{2r} \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}x^k \\ &= x^{-2r}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{2r!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+n-1}L_{n+k}(x). \end{aligned}$$

D'où, pour $s = 2r$, $B_{2r}(z;x)$ est la fonction génératrice exponentielle des polynômes r-Lah (dans l'article [21] appelés r-Lah de première espèce). D'après le théorème 19 dans [18], on a :

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum_{k\geq 0} \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

est la formule explicite des nombres $r-$Lah.

Maintenant :

Pour $s = 2r+1$ dans (3.13), on pose $Z_{n,r}(x) = a_{n,2r+1}(x)$, alors

$$B_{2r+1}(z;x) = \sum_{k\geq 0} Z_{n,r}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Avec

$$\begin{aligned} Z_{n,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+2r}{k+2r}x^k \\ &= x^{-2r-1}\sum_{k=0}^{2r+1}(-1)^{k-1}\frac{(2r+1)!}{k!}\binom{2r+n}{k+n-1}L_{n+k}(x). \end{aligned}$$

De la même manière que les nombres r-Lah de première espèce, nous avons la définition des nombres $r-$Lah de deuxième espèce [21].

Définition 3.9. *[21] Les nombres $r-$Lah de deuxième espèce, notés par $\left\lceil {n \atop k} \right\rceil_r$, sont définis par la formule explicite suivante :*

$$\left\lceil {n \atop k} \right\rceil_r = \frac{n!}{k!}\binom{n+2r}{k+2r}, \quad \textit{pour} \quad n \geq k \geq 0 \quad \textit{et} \quad r \geq 0. \tag{3.14}$$

Propriétés :

Le théorème suivant donne quelques propriétés des nombers $r-$Lah de deuxième espèce

Théorème 3.10.

1. *Les nombres $r-$Lah de deuxième espace satisfont la relation de récurence suivante :*

$$\left\lceil {n+1 \atop k} \right\rceil_r = \left\lceil {n \atop k-1} \right\rceil_r + (n+k+2r+1)\left\lceil {n \atop k} \right\rceil_r. \tag{3.15}$$

2. *On a*

$$(x+2r+1)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right]_r x^{\underline{k}},$$

et

$$(x+2r+1)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \left[{n \atop k} \right]_r x^{\overline{k}}.$$

3. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres $r-$Lah de deuxième espace est donnée par :*

$$\sum_{n \geq k} \left[{n \atop k} \right]_r \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{z^k}{(1-z)^{k+2r+1}}. \tag{3.16}$$

Démonstration. 1.

$$\left[{n+1 \atop k} \right]_r = \left[{n \atop k-1} \right]_r + (n+k+2r+1) \left[{n \atop k} \right]_r$$

D'après (3.14) , on a

$$\begin{aligned} \left[{n+1 \atop k} \right]_r &= \frac{(n+1)!}{k!} \binom{n+2r+1}{k+2r} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!} \frac{(n+2r+1)!}{(k+2r!(n-k+1)!}, \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \left[{n \atop k-1} \right]_r + (n+k+2r+1) \left[{n \atop k} \right]_r &= \frac{n!}{(k-1)!} \binom{n+2r}{k+2r-1} + (n+k+2r+1) \frac{n!}{k!} \binom{n+2r}{k+2r} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!} \frac{(n+2r)!}{(k+2r-1)!(n-k+1)!} \\ &+ (n+k+2r+1) \frac{n!}{k!} \frac{(n+2r)!}{(k+2r)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!} \frac{(n+2r+1)!}{(k+2r)!(n-k+1)!} \\ &\left[\frac{k(k+2r)}{(n+1)(n+2r+1)} + (n+k+2r+1) \frac{(n-k+1)}{(n+1)(n+2r+1)} \right] \\ &= \frac{(n+1)!}{k!} \frac{(n+2r+1)!}{(k+2r)!(n-k+1)!} \left[\frac{n^2+2rn+2n+2r+1}{n^2+2rn+2n+2r+1} \right] \\ &= \frac{(n+1)!}{k!} \frac{(n+2r+1)!}{(k+2r)!(n-k+1)!}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\left[{n+1 \atop k} \right]_r = \left[{n \atop k-1} \right]_r + (n+k+2r+1) \left[{n \atop k} \right]_r.$$

2.

$$\sum_{n \geq k} \left[{n \atop k} \right]_r \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{z^k}{(1-z)^{k+2r+1}}. \tag{3.17}$$

On peut supposer que k, r ne sont pas tous les deux 0. En appliquant la formule explicite (3.14), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{z^n}{n!} &= \sum_{n\geq k}\frac{n!}{k!}\binom{n+2r}{k+2r}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq k}\frac{1}{k!}\binom{n+2r}{k+2r}z^{n-k+k}\\ &= \frac{z^k}{k!}\sum_{n\geq k}\binom{n+2r}{k+2r}z^{n-k}.\end{aligned}$$

De (1.14) on a

$$\binom{n+2r}{k+2r} = \binom{n+2r}{n-k},$$

donc

$$\sum_{n\geq k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{z^n}{n!} = \frac{z^k}{k!}\sum_{n\geq k}\binom{n+2r}{n-k}z^{n-k}.$$

On fait un changement d'indice $n \to n+k$

$$\sum_{n\geq k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{z^n}{n!} = \frac{z^k}{k!}\sum_{n\geq 0}\binom{n+k+2r}{n}z^n.$$

De (1.13) on a

$$\binom{n+k+2r}{n} = \binom{-(n+k+2r)+n-1}{n}(-1)^n = \binom{-k-2r-1}{n}(-1)^n,$$

Donc

$$\sum_{n\geq k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{z^n}{n!} = \frac{z^k}{k!}\sum_{n\geq 0}\binom{-k-2r-1}{n}(-z)^n.$$

De (1.16) on a

$$\sum_{n\geq 0}\binom{-k-2r-1}{n}(-z)^n = \sum_{n\geq 0}\binom{-k-2r-1}{n}(-z)^n 1^{-k-2r-1-n} = (1-x)^{-k-2r-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{z^n}{n!} &= \frac{z^k}{k!}(1-z)^{-k-2r-1}\\ &= \frac{z^k}{k!}\frac{1}{(1-z)^{k+2r+1}}\\ &= \frac{1}{k!}\frac{z^k}{(1-z)^{k+2r+1}}.\end{aligned}$$

□

Quelques propriétés des polynômes $s-$Lah

Dans cette partie, nous allons examiner certaines propriétés des polynômes $s-$Lah, telles que les relations de récurrence, les formules explicites et le lien entre ces polynômes et les polynômes de Laguerre associés...

Théorème 3.11.

Les polynômes $L_{n,s}(x)$ satisfont la relation de récurrence suivante :

$$L_{n+1,s}(x) = sL_{n,s}(x) + xL_{n,s+2}(x). \tag{3.18}$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}B_s(z;x) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^s}exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\right] \\
&= \frac{d}{dz}\left[(1-z)^{-s}exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\right] \\
&= (-1)(-s)(1-z)^{-s-1}exp\left(\frac{xz}{1-z}\right) + (1-z)^{-s}\left[\frac{x(1-z)+xz}{(1-z)^s}exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\right] \\
&= exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\left[\frac{s}{(1-z)^{s+1}} + \frac{x}{(1-z)^s(1-z)} + \frac{xz}{(1-z)^{s+2}}\right] \\
&= exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\frac{s}{(1-z)^{s+1}} + exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\left[\frac{x}{(1-z)^{s+1}}\right]\left(1+\frac{z}{1-z}\right) \\
&= sB_{s+1}(x,z) + exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\frac{x}{(1-z)^{s+1}}\frac{1}{(1-z)} \\
&= sB_{s+1}(x,z) + exp\left(\frac{xz}{1-z}\right)\frac{x}{(1-z)^{s+2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dz}B_s(z;x) = sB_{s+1}(x,z) + xB_{s+2}(x,z).) \tag{3.19}$$

Nous allons prendre la dérivée de l'équation suivante :

$$B_s(z;x) = \sum_{n\geq 0} L_{n,s}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}B_s(z;x) &= \sum_{n\geq 0} L_{n,s}(x)\frac{dz^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} L_{n,s}(x)\frac{nz^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1} L_{n,s}(x)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

On fait un changemant d'indice : $n \to n-1$

$$\frac{d}{dz}B_s(z;x) = \sum_{n\geq 0} L_{n,s}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Donc la relation (3.19) devient :

$$\sum_{n\geq 0} L_{n+1,s}(x)\frac{z^n}{n!} = s\sum_{n\geq 0} L_{n,s+1}(x)\frac{z^n}{n!} + x\sum_{n\geq 0} L_{n,s+2}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, on obtient le résultat. □

Remarque 3.12. *En particulier :*
Pour $s = 2r$ dans (3.18), on obtient

$$\begin{aligned}
L_{n+1,2r}(x) &= 2rL_{n,2r+1}(x) + xL_{n,2r+2}(x)\\
L_{n+1,2r}(x) &= 2rL_{n,2r+1}(x) + xL_{n,2(r+1)}(x)\\
\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+2r}{k+2r-1}x^k &= 2r\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+2r}{k+2r}x^k + x\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+2(r+1)-1}{k+2(r+1)-1}x^k.
\end{aligned}$$

qui est équivalente à cette relation de récurrence

$$Y_{n+1,r}(x) = 2rZ_{n,r}(x) + xY_{n,r+1}(x).$$

De même manière si $s = 2r+1$, on a

$$\begin{aligned}
L_{n+1,2r+1}(x) &= (2r+1)L_{n,2r+2}(x) + xL_{n,2r+3}(x)\\
L_{n+1,2r+1}(x) &= (2r+1)L_{n,2(r+1)}(x) + xL_{n,2(r+1)+1}(x)\\
\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+2r+1}{k+2r}x^k &= (2r+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+2r+1}{k+2r+1}x^k + x\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+2(r+1)}{k+2(r+1)}x^k.
\end{aligned}$$

qui est équivalente à cette relation de récurrence

$$Z_{n+1,r}(x) = (2r+1)Y_{n,r+1}(x) + xZ_{n,r+1}(x).$$

Ce théorème donne une formule explicite des polynômes s-Lah en termes de la fonction hypergéométrique confluente de Kummer.

Théorème 3.13. *On a*

$$L_{n,s}(x) = \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!}\cdot{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ s\end{matrix};-x\right), \tag{3.20}$$

oú ${}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ s\end{matrix};-x\right)$ est la fonction hypergèométrique confluente de paramètres complexes a, b et d'une variable complexe z.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
L_{n,s}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{(n+s-1)!}{(k+s-1)!(n-k)!}x^k.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
(k+s-1)! &= (k+s-1)(k+s-2)...(k+s-k)(s-1)(s-2)(s-3)...1\\
&= s(s+1)(s+2)...(s+k-2)(s+k-1)(s-1)(s-2)(s-3)...1\\
&= s^{\overline{k}}(s-1)!
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}(n-k)! &= (n-k)!\frac{n!}{n!}\\ &= \frac{(n-k)(n-k-1)...1}{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...1}n!\\ &= \frac{n!}{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}\\ &= \frac{n!}{(-1)^k(-n)(-n+1)(-n+2)...(-n+k-1)}\\ &= \frac{n!}{(-1)^k(-n)^{\overline{k}}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{(n-k)!} = \frac{(-1)^k(-n)^{\overline{k}}}{n!}$$

$$\begin{aligned}L_{n,s}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{(n+s-1)!(-1)^k(-n)^{\overline{k}}}{s^{\overline{k}}(s-1)!(n-k)!n!}x^k\\ &= \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)^{\overline{k}}}{s^{\overline{k}}k!}(-x)^k\\ &= \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!}\cdot{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ s\end{matrix};-x\right).\end{aligned}$$

□

Théorème 3.14. *On a*

$$\begin{aligned}L_{n,s}(x) &= n!L_n^{(s-1)}(-x)\\ &= \frac{(-1)^n d^n}{e^x x^{s-1}}\frac{d^n}{dx^n}(e^x x^{n+s-1}).\end{aligned}$$

Démonstration. De (2.18), (3.20) et (2.12), on a

$$\begin{aligned}L_n^{s-1}(-x) &= \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!n!}{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ s\end{matrix};-x\right)\\ &= \frac{1}{n!}L_{n,s}(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}L_{n,s}(x) &= n!L_n^{s-1}(-x)\\ &= n!\frac{(-x)^{-(s-1)}e^{-x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^x(-x)^{n+s-1})\\ &= (-1)^{-(s-1)}(-1)^{n+s-1}x^{-(s-1)}e^{-x}\frac{d^n}{dx^n}(e^x x^{n+s-1})\\ &= \frac{(-1)^n}{e^x x^{s-1}}\frac{d^n}{dx^n}(e^x x^{n+s-1}).\end{aligned}$$

□

Les polynômes s-Lah satisfont les propriétés suivantes :

Théorème 3.15.

$$\frac{d}{dx}L_{n,s}(x) = nL_{n-1,s+1}(x).$$

preuve

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}L_{n,s}(x) &= n!\frac{d}{dx}L_n^{s-1}(-x)\\ &= n!\frac{d}{dx}L_{n-1}^{s}(-x)\\ &= \frac{n!}{(n-1)!}L_{n-1,s+1}(x)\\ &= nL_{n-1,s+1}(x).\end{aligned}$$

□

En sachant que les racines des polynômes de Laguerre associés $L_n^m(x)$ sont positives, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.16. *Les polynômes $L_{n,s}(x)$ ne possèdent que des racines réelles négatives.*

Corollaire 3.17. *D'après le théorème (3.16) et la Proposition 1.18, la suite $\left(\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}\right)_k$ est strictement log-concave , donc est unimodale.*

Remarque 3.18. *Dans la proposition 3 [17], Mihoubi et Reggane ont démontré que les polynômes r-Lah (de première espèce) ne possèdent que des racines réelles négatives. Ainsi, si l'on pose $s = 2r$, le théorème précédent permet d'obtenir ce résultat.*

Une application du Theorémè (3.14), Barry démontre que pour $m \geq 1$,

$$\det M_m = (m-1)!L_{m-1}^{(1)}(1).$$

Où $\det M_m$ est le déterminant de la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $m_{i,i} = i$, $m_{i,j} = 1$ si $i > j$, $m_{i,j} = j - i$ si $j > i$.
En utilisant le theorémè (3.14), on obtient la formule explicite suivante, pour la suite A066668 dans [25]

$$\begin{aligned}\det M_n &= (n-1)!L_{n-1}^{(1)}(1)\\ &= L_{n-1,2}(-1)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!}\binom{n}{k+1}(-1)^k.\end{aligned}$$

On fait un changemant d'indice : $n \to n-1$

$$\begin{aligned}\det M_n &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\binom{n}{i}(-1)^{i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left\lfloor{n \atop i}\right\rfloor \quad \textit{pour} \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover Publications, Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.

[2] G.E Andrews, R Askey, and R Roy. Special functions, volume 71 of encyclopedia of Mathematics and its Applications. Combridge university press, cambbrideg 1999.

[3] M. Balazard. Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres.

[4] P. Barry. Some observations on the Lah and Laguerre transforms of integer sequences, J. Integer Seq. 10, no. 4, article 07. 4. 6, 18, 2007.

[5] M. A. Boutiche, G. Guettai, M. Rahmani, M. Sebaoui. A three-term recurrence formula for the generalized Bernoulli polynomials. Bol. Soc. Parana. Mat. 39(6), 139-145, 2021.

[6] H. Belbachir and A. Belkhir, Cross recurrence relations for r-Lah numbers, Ars combin. 110, 199–203, 2014.

[7] W. W. Bell. Special functions for scientists and engineers. Courier Corporation ; 2004.

[8] C. A. Charalambides. Enumerative combinatorics. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[9] S. Dharmadikari and K. Joag-Dev Unimodality, convexity and applications (1988), Academic Press, New york.

[10] G. Guettai. Autour de certaines propriétés analytiques des polynômes classiques. Thèse de Doctorat en Sciences, USTHB.

[11] G. Guettai, D. Laissaoui, M. Rahmani, M. Sebaoui, On poly-Bell numbers and polynomials. Quaestiones Mathematicae, 44, no. 11, 1463-1483, 2021.

[12] G. Guettai, D. Laissaoui, M. Rahmani, M. Sebaoui. Recurrence relation for the Appell sequences. Integral Transforms Spec. Funct. 34, no. 5, 414-429, 2023.

[13] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. Concrete mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.

[14] J. Kampé de Fériet. La fonction hypergéométrique, Gauthier-Villars, 1937.

[15] N. N. Lebedev. Special functions and their applications. Revised English edition. Translated and edited by Richard A. Silverman. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[16] E. H. Lieb. Concavity properties and a generating function for Stirling numbers. J. Combinatorial Theory, 5, 203–206, 1968.

[17] M. Mihoubi and L. Reggane. The $s-$degenerate $r-$Lah numbers. Ars Combin. 120, 333–340, 2015.

[18] G. Nyul and G. Rácz, The $r-$Lah numbers, Discrete Math. 338, 1660–1666, 2015.

[19] G. Nyul and G. Rácz, Sums of $r-$Lah numbers and $r-$Lah polynomials. Ars Math. Contemp. 18, 211–222, 2020.

[20] M. Petkovšek and T. Pisanski, Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers, Pi Mu Epsilon J. 12, 417–424, 2007.

[21] M. Sebaoui, D. Laissaoui,G. Guettai,M. Rahmani. On s-Lah polynomials. Ars Combin. 142, 111–118, 2019.

[22] M. Sebaoui, G. Guettai, D. Laissaoui, M. Rahmani. Degenerate Stirling numbers and a family of Bell polynomials. Mathematica 64(87), no. 2, 277–290, 2022.

[23] M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai, M. Rahmani. Generalized Fubini transform with two variables. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2023.

[24] M. Sebaoui. Sur Quelques Propriétés Analytiques des Polynômes Classiques. Thèse de Doctorat L M D, Université de Médéa, 2019.

[25] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. 2017.