République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Nouar Haitem

Etude de stabilisation dune équation dondes dégénérée avec dissipation frontière dégénérée de type fractionnaire

Soutenu publiquement le 29/06/2025, devant le jury composé de

Président :	***Mr . Khaled MALOUM***	*M.A.A* **Univ. Médéa**
Examinateur :	***Mr . Nourddine MEKDACHE***	*M.A.A* **Univ. Médéa**
Encadreur :	***Mr . Said RAFA***	*M.C.B* **Univ. Médéa**

Année universitaire 2024/2025

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Notations iv

Introduction générale 1

1 Gnéralités 3

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels 3
1.2 Opérateurs bornés et non bornés 11
1.3 Théorèmes Fredholm 13
1.4 Analyse spectrale 14
1.5 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs 15
1.6 Théorème de (Lax-Milgram) 16
1.7 Semi-groupes 17

2 Existence et unicité de la solution du système (S) 24

2.1 Position du problème 24
2.2 Existence et unicité de la solution du système 27

3 Stabilité du système 34

3.1 Manque de stabilité uniforme (exponentielle) 34
3.2 Stabilité asymptotique(polynomiale) 40

conclusion 45

Remerciement

Tout d'abord, je voudrais remercier **Allah**, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **S. RAFA**, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur **K.MALOUM**, président du jury qui a accepté de relire ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **N.MEKDACHE** qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je tiens énormément à remercier mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce travail

À celui qui m'a mis au premier plan, m'a élevé et m'a appris la bonne chose.

À mon cher père, que Dieu prolonge sa vie.

Merci mon père.

À la fontaine de tendresse qui m'a appris la fermeté et l'espérance, la personne la plus grande et la plus compatissante qui existe.

À ma mère bien-aimée, que Dieu prolonge sa vie.

Merci ma mère.

À l'honorable famille, de la petite à la grande.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions une équation des ondes unidimensionnelle faiblement dégénérée avec un feedback frontière dynamique non locale de type fractionnaire agissant en un point dégénéré.

• Tout d'abord, nous montrons que le problème est bien posé, cest à dire quil admit une solution globale faible et forte, en utilisant la théorie des semi-groupes.

• Ensuite, nous démontrons, par une analyse spectrale (méthode du domaine fréquentiel), que notre système n'est pas uniformément stable, Par conséquent, on va établir la stabilité asymptotique du système, en utilisant la méthode dArend-Batty.

Mots-clés :équation des ondes faiblement dégénérée, feedback frontière dynamique non local de type fractionnaire, fonctions de Bessel, taux de décroissance optimal, stabilisation exponentielle et polynomiale des solutions.

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω.
$\|\Omega\|$	Mesure de Lebesgue du l'ensemble Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de l'ensemble Ω.
H^1	Un espace de Sobolev.
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	Point générique de $\mathbb{R}^N$.
$D(A)$	Le domaine de définition de l'opérateur A .
$\mathfrak{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniment differentiables à support compact .
$\mathfrak{D}'(\Omega)$	L'espace de distributions .
inf	La borne inférieure.
sup	La borne supérieure.
$t\in[0,+\infty[$	Variable de temps.
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω.
ν	La normal extérieure de Ω.
$\frac{\partial}{\partial\nu}$	La dérivée normale extérieure.
$\mathscr{R}$	La partie réelle d'un nombre complexe.
p.p.	Presque partout.
E	Un espace de Banach.
$\mathscr{H}$	Un espace de Hilbert.
$\mathscr{H}'$	Le dual topologique de $\mathscr{H}$.
$\langle .,. \rangle_{\mathscr{H}\times\mathscr{H}'}$	Le crochet de dualité entre l'espace$\mathscr{H}$ et Son dual topologique$\mathscr{H}'$.
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Banach E.
$\langle .,. \rangle_{\mathscr{H}}$	Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$.
$\|.\|$	la norme sur L'espace de Hilbert $\mathscr{H}$.
$\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$	L'espace des matrices réelles carrées.

Id	L'application identique.
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues.
∂_i	La i-i ème dérivée partielle ; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$.
u	le déplacement
$\mathrm{u}_t(x,t)$	la vitesse.
$\mathrm{u}_{tt}(x,t)$	l'accélération.
$\Delta u(x,t)$	laplacien de u.
μ	la mesure générale de densité .
ϕ	fonction de diffusion.
ξ	la variable diffusive.
η	constante positive.

Introduction générale

Le but de cette thèse et d'étudier l'existence globale de la solution et la stabilisation de l'équation d'ondes avec des contrôles interne.
Le problème que l'on va étudier est donné par :

$$(S)\begin{cases} u_{tt}(x,t)-(x^{\alpha}u_x(x,t))_x=0 & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty),\\ -m\,u_{tt}(0,t)+(x^{\alpha}u_x)(0,t)=\varrho\,\partial_t^{\tau,\eta}u(0,t) & \text{in } (0,+\infty),\\ u(1,t)=0 & \text{in } (0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x) & \text{in } (0,1). \end{cases}$$

Avec

$$(x,t)\in(0,1)\times(0,+\infty), \quad \alpha\in[0,1), \quad m>0 \text{ et } \varrho>0.$$

qui s'appelle système modèle augmenté, Cette représentation permet d'avoir un système augmenté qui peut se maitre sous la forme abstraite d'un problème de Cauchy du premier ordre dans H comme suit :

$$\begin{cases} U'(t)=AU(t), & t>0,\\ U(0)=U_0 & . \end{cases} \tag{1}$$

A est le générateur infinitésimal d 'un semi-groupe ce qui rend l'application des outils de l'analyse fonctionnelle et contrôle possible notamment l'étude de la stabilité asymptotique via un théorème général d'Arendt-Batty dans pour montrer la forte stabilité du C_0-semi-groupe associé au système d'ondes (S).
Notre travail est basé principalement sur larticle intitulé ń Decay Estimates for a Degenerate Wave Equation with a Dynamic Fractional Feedback Acting on the Degenerate Boundary ż réalisé par les auteurs : ń Fatiha Chouaou, Chahira Aichi et Abbes Benaissa ż publié par Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia. 2021.

Plan de mémoire :

Notre mémoire est divisée en trois chapitres :

• **Le premier chapitre :** est consacré aux généralités et rappels de quelques théorèmes et résultats qui sont nécessaires pour le travail.

• **Le deuxième chapitre :** est consacré à létude de lexistence globale de la solution du système.

• **Le troisième chapitre :** est divisé en deux sections :
Dans la première section , on étudie le manque de stabilité exponentielle , en utilisant l'analyse spectrale.
Dans la deuxième section du chapitre trois on étudie la stabilité asymptotique, nous utilisons un théorème général d'Arendt-Batty dans pour montrer la stabilité forte du C_0-semi-groupe associé au système (S).

Chapitre 1

Gnéralités

Sommaire

1.1 *Généralités sur des espaces fonctionnels* 3
1.2 *Opérateurs bornés et non bornés* 11
1.3 *Théorèmes Fredholm* 13
1.4 *Analyse spectrale* 14
1.5 *Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs* 15
1.6 *Théorème de (Lax-Milgram)* 16
1.7 *Semi-groupes* 17

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1 :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est un produit scalaire si :
1) Pour tous (u,v) de E $f(u,v) = f(v,u)$.
2) Pour tous (u,v,w) de E $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$.
3) Pour tous (u,v,w) de E $f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w)$.
4) Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous (u,v) de E , $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v)$.
5) Pour tous u de E , $f(u,u) \geq 0$, et $f(u,u) = 0$ si , et seulement si , u=0.

Définition 1.2 : (Espaces de Hilbert)

Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme

$$\| u \| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

1.1.2 Espace de Lebesgue

Définition 1.3 : (Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$)

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ *par :*

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad , f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ *est un espace de Banach.*

2. *Pour* $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad : f \text{ mesurable,et } \exists \ C > 0 \text{ telle que } |f(x)| < C \ \ p.p. \text{ sur } \Omega \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{ C > 0, |f(x)| < C \ \ p.p \ \ x \in \Omega \right\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^{+\infty}(\Omega)}$ *est un espace de Banach.*

Remarque 1.1.
Si $f \in L^\infty(\Omega)$.
On a alors,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \ \ p.p. \ \ \text{sur} \, \Omega.$$

Théorème 1.1. .*[4]*
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, *l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach et de Hilbert pour* $p = 2$, *muni du produit scalaire :*

1. *Si* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach sur* $\mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x)\, dx.$$

2. *Si* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach sur* $\mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Notation :
Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, c'est à dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2 – [4](Inégalité de Hölder) .
Soient $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$, *et* q *l'exposant conjugué de* p . *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et de plus on a*

$$\int_\Omega |f(x) g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.
Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. *Si* $|\Omega| < +\infty$, *alors* $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Théorème 1.3 – [4](Inégalité de Cauchy-Schwartz).
pour $p = q = 2$ *si* $f \in L^2$ *et* $g \in L^2$ *alors :*

$$fg \in L^1 \quad \text{et on a} \quad \|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Théorème 1.4 – [4](Inégalité de Minkowiski).
Soient $f \in L^p$ *et* $g \in L^p$ *alors*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

1.1.3 Espaces de sobolev,résultats de densité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.4 :

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega)=\left\{v\in L^2(\Omega):\frac{\partial V}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),i=1,2,...,n\right\},$$

ou $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ *est prise au sens des distributions.*
L'espace $H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega\left(uv+\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx,$$

et la norme correspondante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left[\int_\Omega|u(x)|^2+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.2.
Par définition de la dérivation dans l'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
i) $v\in H^1(\Omega)$.
ii) $\forall v\in L^2(\Omega)$ *et il existe* $g_1,g_2,...,g_n\in L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D}'(\Omega),\ \int_\Omega v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=-\int_\Omega g_i\varphi\,dx.$$

Alors par définition $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}=g_i$ *au sens des distributions.*
La définition ci- dessus peut etre prolongeé lorsqu'on remplace l'espace $L^2(\Omega)$ *par l'espace* $L^p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.

Définition 1.5 :

Pour tout $1\leqslant p\leqslant+\infty$ *l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est defini par :*

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{v\in L^p(\Omega):\frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^p(\Omega),i=1,2,...,n\right\}.$$

Ou $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ *est prise ou sens des distributions.*
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(|v|^p + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p\right) dx\right]^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \max\left\{\|v\|_\infty, \|\frac{\partial v}{\partial x_1}\|_\infty, ..., \|\frac{\partial v}{\partial x_n}\|_\infty\right\} \text{ , pour } p = +\infty.$$

Lorsque $p = 2$, $w^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Définition 1.6 :

On prend $m \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *. L'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ , } \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ avec } |\alpha| \leqslant m\},$$

où $D^\alpha v$ *est la dérivé de* v *au sens des distributions de symboles* α *.*
On rappelle que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, *avec* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha v|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|_\infty \text{ , pour } p = +\infty.$$

Lorsque p=2

$$w^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m\right\},$$

$H^m(\Omega)$ *est muni du produit scalaire.*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx, \tag{1.1}$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *peut aussi muni de la norme équivalente*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.5. *[4]*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et tout nombre réel* p *avec* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach. Lorsque* $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition 1.1 :

i) Si $m \geq m'$ $(m, m' \in \mathbb{N})$, *alors* $H^m(\Omega)$ *est contenu, avec une injection, dans* $H^{m'}(\Omega)$.

ii) $H^m(\Omega)$ *muni du produit scalaire* (1.1) *est un espace de Hilbert.*

Définition 1.7 :

Par définition
- $H_0^1(\Omega) =$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega) =$ *sous espace de* $H^1(\Omega)$ *des fonctions nulles sur* $\partial\Omega$.
- $W_0^{1,p}(\Omega) =$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
- $W_0^{m,p}(\Omega) =$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$.

Puisque (par définition) $\mathfrak{D}(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^1(\Omega)$, *on peut identifier le dual* $H^{-1}(\Omega)$ *de* H_0^1 *à un espace de distribution sur* Ω

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' & , \\ H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega) & . \end{cases}$$

Définition 1.8 :

Pour $m \in \mathbb{N}$, *on désigne par* $H_0^m(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $H^m(\Omega)$.
De manière évidente, $H_0^m(\Omega)$ *est un sous-espace fermé de* $H^m(\Omega)$, *mais en général* $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$.
Signalons deux cas où on a bien l'égalité

i) Si $m = 0$, *alors* $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ *et donc* $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega)$.

ii) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, *alors on peut montrer que* $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.6 – [4](Inégalité de Poincaré).
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Alors il existe une constante positive* C

qui dépend seulement de Ω *et* n *telle que*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\ ,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Définition 1.9 :

Soient deux espaces de Banach E *et* F *tels que* $F \subset E$ *. On dit que* F *s'injecte de manière continue dans* E *si et seulement si l'opérateur identité*

$$Id : \begin{array}{l} F \to E \\ y \to y, \end{array}$$

est continu. De même,on dit que F *s'injecte de manière compacte dans* E *(en notation* $F \hookrightarrow_c E$*) si et seulement si l'opérateur identité de* F *dans* E *est compact.*

Notation 1.
$(F \hookrightarrow E)$ *et* $(F \hookrightarrow_c E)$

Théorème 1.7 – [4](de Relliche).
Si Ω *un ouvert borné et à bord continu, alors*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

Théorème 1.8 – [4](injection de sbolev).
Si Ω *un ouvert borné à bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes :*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant p < +\infty \ \text{ tell que } \ m - \frac{n}{2} \leqslant -\frac{n}{p},$$

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})\ ,\ \forall m \in \mathbb{N}^* \ \text{ tell que } \ m - \frac{n}{2} > 0.$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1.
Alors, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, l'estimation suivant a lieu

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},$$

avec C une constante positive indépendante de u .

Théorème 1.9 – [3](formule de Green).
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1.

(1) Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ *et* $\Delta v \in C(\overline{\Omega})$, *alors*

$$\int_{\Omega} u(x)\Delta v(x)dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}d\Gamma.$$

(2) Si $u, v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ *et* $\Delta u, \Delta v \in C(\overline{\Omega})$ *, alors*

$$\int_{\Omega} [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\Gamma.$$

1.2 Opérateurs bornés et non bornés

On commence dans ce chapitre par donner quelques résultats qui sont connus sur les opérateurs bornés et non bornés . On n'essaye pas de donner tout, mais de donner les définitions et les théorèmes de base dans la plus part on les présente sans démonstrations que l'on voit nécessaires dans notre travail. Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, et H désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$ et la norme correspondante $\|.\|_H$.

Définition 1.10 :

Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ *est dit bornée s'il existe* $C > 0$ *telle que*

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \ , \forall x \in E,$$

dans le cas contraire, T *est dit non borné.*
L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E *dans* F *est noté par* $L(E,F)$.
De plus, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E *dans* E *est noté par* $L(E)$.

Définition 1.11 :

Un opérateur linéaire non borné de E *dans* F *est un couple* $(T,D(T))$ *, avec* $D(T) \subset E$ *est un sous-espace de* E *(dit le domaine de* T*) et la transformation linéaire*

$$T : D(T) \subset E \longrightarrow F,$$

dans le cas où $E = F$ *, alors on dit que* $(T,D(T))$ *est un opérateur linéaire non borné sur* E .

Définition 1.12 :

Soit $T : (T,D(T)) \subset E \longrightarrow F$ *un opérateur linéaire non borné.*

i) L'image de T *est définie par*

$$Im(T) = \{Tx : x \in D(T)\} \subset F,$$

ii) Le noyau de T *est définie par*

$$Ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\} \subset E,$$

iii) Le graphe de T *est défini par*

$$Gr(T) = \{(x,Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F,$$

Définition 1.13 :

L'opérateur $T \in L(E,F)$ *est dit compact si de toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *avec* $\|x_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, la suite* $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente dans* F .

Notation 2.
L'ensemble de tous les opérateurs compacts de E *dans* F *est noté par* $K(E,F)$ *, et si* $E = F$ *, on écrit* $K(E,E) = K(E)$.

Définition 1.14 :

Un opérateur $T : (T, D(T)) \subset E \longrightarrow F$ *est dit fermé si* $Gr(T)$ *est fermé dans* $E \times F$.
Un opérateur linéaire non borné fermé est caractérisé par :
T *est fermé si et seulement si*

$$\left(\begin{array}{c} \text{Pour tout suite } (x_n) \text{ telle que } (x_n) \subset D(T), \\ x_n \to x \text{ dans } E, \\ \text{et } T x_n \to y \text{ dans } F. \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x \in D(T), \\ \text{et} \\ T x = y. \end{array} \right).$$

1.3 Théorèmes Fredholm

Le théorème suivant, appelé l'alternative de Fredholm permet, entre autre, de montrer l'existence et l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles de type elliptique ne vérifiant pas les conditions de coercivité.

Théorème 1.10 – (Alternative de Fredholm).
Soit $T \in K(E)$ et $\lambda \neq 0$. On considère l'équation de Fredholm : pour $y \in E$, trouver $x \in E$ tel que :

$$\lambda x - Tx = y. \tag{1.2}$$

Alors, un des deux cas suivants est possible.
1) Pour tout $y \in E$, il existe un unique $x \in E$ solution de l'équation (1.2).
2) L'équation homogène $\lambda x - Tx = 0$ admet une solution (qui est non unique) si et seulement si $y \in Im(\lambda - T)$.

Théorème 1.11 – (Alternative de Fredholm).
Soit E un espace de banach et soit T un opérateur compact de E dans lui même. Alors :

- *$Ker(I-T)$ est de dimension finie.(I est l'opérateur identité de E).*
- *$Im(I-T)$ est fermé, et plus précisément $Im(I-T) = (Ker(I-T^*))^{\perp}$.*
- *L'opérateur $I-T$ est injectif si et seulement s'il est surjectif, c'est à dire*

$$Ker(I-T) = 0 \Leftrightarrow Im(I-T) = E.$$

- *dim $Ker(I-T)$=dim $Ker(I-T^*)$.*

Remarque 1.3.
1) On emploie ce résultat dans le cas d'un opérateur de la forme $\lambda I - T$ où T est un opérateur compact et $\lambda \neq 0$ pour exprimer que deux cas, et deux seulement peuvent se présenter :
- Ou l'équation homogène $(\lambda I - T)u = 0$ n'admet que la solution nulle, et alors l'équation $(\lambda I - T)u = f$ admet ue solution unique pour tout f.
- Ou l'équation $(\lambda I - T)u = 0$ admet un nombre fini n de solutions linéairement indépendantes et alors l'équation $(\lambda I - T)u = f$ admet des solutions si et seulement si f vérifie n relations linéairement indépendantes (n conditions d'orthogonalités), auquel cas l'équation $(\lambda I - T)u = f$ admet n solutions.
2) Le même résultat est vrai pour l'opérateur $I - T$ puisque $\frac{T}{\lambda}$ est compact.

1.4 Analyse spectrale

Définition 1.15 :

Soit E un espace de Banach et $(A, D(A))$ un opérateur borné ou non borné

1) On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda I-A:\ D(A)\to E\ \text{ est inversible}\}.$$

L'ensemble résolvant est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2) Pour $\lambda\in\rho(A)$ on note, $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$.
La famille d'opérateurs linéaires $\{(\lambda I-A)^{-1}:\lambda\in\rho(A)\}$ est appelée la résolvante de A.
• *La fonction $\lambda\to R(\lambda)$ est analytique de $\rho(A)$ dans $L(E)$.*

• *D'après le théorème du graphe fermé, il résulte que l'opérateur $(\lambda I-A)^{-1}:E\longrightarrow E$ est continu sur E.*

• *L'application $(\lambda I-A)^{-1}:E\longrightarrow D(A)\subset E$ est compacte si l'injection $(D(A),\|.\|_{D(A)})\longrightarrow(E,\|.\|_E)$ est compacte.*

• *On a pour tout $(\lambda,\mu)\in\rho(A)\times\rho(A)$, l'identité de la résolvante*

$$R(\lambda)-R(\mu)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu).$$

3)On appelle spectre de A l'ensemble

$$\sigma(A)=\mathbb{C}\setminus\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-A\ \text{ non inversible}\}.$$

Un tel λ est appelle une valeur spectrale de A.
• *$\sigma(A)$ est compacte de $\mathbb{C}$.*

4)

$$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\lambda I-A:D(A)\to E\ \text{ non injectif}\},$$

$\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A. $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des $\lambda\in\mathbb{C}$ tels qu'il existe $u\in E\setminus\{0\}$ tel que :

$$Au=\lambda u.$$

5)

$$\sigma_r(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\lambda I-A:D(A)\to E\ \text{ injectif et }\ \overline{Im(\lambda I-A)}\neq E\}$$

$\sigma_r(A)$ est le spectre résiduel de A,
et

$$\sigma_c(A)=\left\{\begin{array}{c}\lambda\in\mathbb{C}\ :\lambda I-A:D(A)\to E\ \text{ injectif et }\ \overline{Im(\lambda I-A)}=E\\ \text{et }\ (\lambda I-A)^{-1}:Im(\lambda I-A)\to D(A)\ \text{ non born}\end{array}\right\},$$

$\sigma_c(A)$ est le spectre continu de A.

6) L'ensemble $\sigma_c(A)$ se décompose en l'union disjointe

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_r(A)\cup\sigma_c(A).$$

1.5 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

Définition 1.16 :

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme induite $\|.\|$. Soit A un opérateur linéaire à domaine dense sur H, c'est à dire

$$A : D(A) \subset H \longrightarrow H \quad et \quad \overline{D(A)} = H.$$

- En cas où H est de Hilbert sur $\mathbb{C}$, on dit que A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$,

$$\mathscr{R}\langle Ax, x\rangle \leqslant 0.$$

- En cas où H est de Hilbert sur $\mathbb{R}$, on dit que A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$,

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant 0.$$

Définition 1.17 :

Un opérateur linéaire A dans un espace de Banach E est dit m-dissipatif si A et dissipatif et $\lambda I - A$ est surjectif c'est à dire $Im(\lambda I - A) = E$, pour tout $\lambda > 0$.

Théorème 1.12.
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach E. Si A est dissipatif avec $Im(I - A) = E$, et E est réflexif, alors $\overline{D(A)} = E$.

Théorème 1.13.
Soit A un opérateur m-dissipatif, alors
- $Im(\lambda I - A) = E$.
- $]0, +\infty[\subseteq \rho(A)$.

1.6 Théorème de (Lax-Milgram)

Théorème 1.14 – [4](Lax Milgram).
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$ et la norme correspondante $\|.\|_H = \langle .,. \rangle_H^{\frac{1}{2}}$.

Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire qui satisfait les deux condition suivantes

i) a est continue , c'est à dire il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall u, v \in H \quad |a(u,v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H,$$

ii) a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in H \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2,$$

Alors pour tout $L \in H'$ (L est une forme linéaire continue sur H), il existe une unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

1.7 Semi-groupes

1.7.1 Concepts sur les semi-groupes

Dans cette section on va introduire quelques notions de base concernant les semi-groupes. On commence par des définitions et théorèmes de base.

Définition 1.18 :

La famille $(S(t))_{t>0}$ *d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach* E *(c'est à dire* $\forall t \geq 0,\ S(t) \in L(E)$*) est dite un semi-groupe fortement continu (en bref* C_0*-semi-groupe)si :*

1) $S(0) = I$ *(I=l'opérateur identité).*

2) $S(t+s) = S(t)S(s)\ \ \forall t,\ s \geq 0.$

3) $(S(t))_{t\geq 0}$ *est fortement continue sur* $[0, +\infty[$
(ce qui est équivalent à $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_E = 0\ ,\ \forall x \in E)$ *.*

Pour un tel C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$*, l'opérateur* A *défini sur l'ensemble :*

$$D(A) = \left\{ x \in E\ : \lim_{t\to 0^+} \frac{s(t)x - x}{t} \ \ existe \right\},$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},\ \forall x \in D(A),$$

est dit le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *et* $D(A)$ *est dit le domaine de* A*.*
Etant donné un opérateur A *, si* A *coïnside avec le générateur infinitésimal du semi -groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *, alors on dit qu'il génére le semi-groupe fortement continu* $(S(t))_{t\geq 0}$ *.*
Parfois on note également $S(t) = e^{tA}$*.*

Proposition 1.2 :

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur un espace de Banach* E*. Alors ils existent des constantes* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telles que*

$$\|S(t)\|_{L(x)} \leq M e^{\omega t},\ \forall t \geq 0.$$

Si $\omega = 0$ *alors le semi-groupe correspondant est uniformément borné , de plus, si* $M = 1$ *alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit* C_0*-semi-groupe de contraction.(c'est à dire* $\|S(t)\|_{L(x)} \leqslant 1$*)*

Théorème 1.15 – [4](Hille-Yosida).
Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H si et seulement si :

i) A est fermé et $\overline{D(A)} = H$.

ii) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.16. *[4]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach E
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|S(t)\|}{t}.$$

Théorème 1.17. *[4]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach E et $\sigma(A)$ le spectre de A.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 \geq \sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\},$$

où $\mathscr{R}(\lambda)$ désigne la partie réelle de λ et $\sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\}$ est la borne spectrale de A.

Théorème 1.18. *[4]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe analytique de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach E et $\sigma(A)$ le spectre se A.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 = \sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\},.$$

Théorème 1.19 – [4](Lumer-Phillips).
Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach E. Alors A est générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si :

i) $\overline{D(A)} = E$.

ii) A est m-dissipatif.

Corollaire 1.2.
Soit A Un opérateur linéaire sur un espace de Banach E. Alors A est générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E si et seulement si :

i) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$.

ii) A et A^* sont dissipatifs.

Corollaire 1.3.
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Hilbert H. A est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction si et seulement si A est un opérateur m-dissipatif.

Théorème 1.20. *[4]*
Soit A un opérateur linéaire à domaine dense $D(A)$ sur un espace de Hilbert H.
Si A est dissipatif et $0 \in \rho(A)$ l'ensemble résolvant de A, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur H. La majorité des équations d'évolution peuvent être réduites sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} U' = AU & t > 0, \\ U(0) = U_0 & , \end{cases} \tag{1.3}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H.

Théorème 1.21 – (Hille-Yosida).
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur H. Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors,

1)Pour $U_0 \in D(A)$, le problème (1.3) admet une solution forte unique

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H).$$

2)Pour $U_0 \in H$ le problème (1.3) admet une solution faible unique

$$U(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, H).$$

1.7.2 Stabilité des semi-groupes

Définition 1.19 :

Soit $\omega(A)=\sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda\in\sigma(A)\}$ *la borne spectrale de* A.
On dit que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *est stable si :*

$$\lim_{t\to+\infty} S(t)=0\ ,\quad \text{pour tout } x\in E.$$

Si $\omega(A)<0$ *, alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit exponentiellement stable.*

Définition 1.20 :

Supposons que A est le générateur d'un C_0*-semi-groupe de contraction* $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur un espace de Banach E. On dit que le* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est*
1) Fortement stable si

$$\lim_{t\to+\infty}\|S(t)x\|_E=0\ ,\ \text{Pour tout } x\in E.$$

2) Uniformément stable si

$$\lim_{t\to+\infty}\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)}=0.$$

3) Faiblement stable si

$$\text{Pour tout } x\in E \text{ et } y\in E',\ \langle S(t)x,y\rangle\to 0 \quad \text{lorsque} \quad t\to\infty.$$

4) Asymptotiquement stable si

$$\text{Pour tout } x\in E:\|S(t)x\|\to 0 \quad \text{lorsque} \quad t\to\infty.$$

5)Exponentiellement stable s'ils existent deux constantes $M\geq 1$ *et* $\omega>0$ *telles que*

$$\|S(t)x\|\leq Me^{-\omega t}\|x\|_E \quad \text{Pour tout} \quad t\geq 0, x\in E.$$

6) Polynomialement stable s'ils existent deux constantes positives C *et* α *telles que*

$$\|S(t)x\|\leq Ct^{-\alpha}\|x\|_E \quad \text{Pour tout} \quad t\geq 0, x\in E.$$

Définition 1.21 :

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur* H *est dit uniformément exponentiellement asymptotiquement stable si et seulement s'ils existent deux nombres positifs* $M\geq 1$ *et* ω *tell que*

$$\|S(t)\|\leq Me^{-\omega t} \quad \text{Pour tout} \quad t\geq 0.$$

Définition 1.22 :

Un C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur* H *est dit fortement* L^2*-stable si et seulement si,*

$$\|S(t)x\|\in L^2([0,+\infty[),\quad \text{Pour tout} \quad x\in H\ .$$

Définition 1.23 :

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur H est dit uniformément stable ou L_∞-stable, ou uniformément borné, si et seulement s'il existe une constante positive M telle que , pour tout $t \geq 0$

$$\|S(t)\| \leqslant M.$$

Théorème 1.22. *[4]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur E de générateur A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable . C'est à dire

$$\|S(t)\| \leqslant M e^{-\omega t}, \text{ pour tout } M \geq 1, \omega > 0.$$

ii) $(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément stable. C'est à dire

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)\|_{L(E)} = 0.$$

iii) Il existe $t_0 > 0$ tell que $\|S(t_0)\|_{\mathfrak{L}(E)} < 1$.

Théorème 1.23. *[4]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné sur un espace de Banach E et soit A son générateur . Alors

i) Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable , alors $\sigma(A)\cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(A)$ le spectre continu de A .

ii) Si $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(A)$, et $\sigma_c(A)$ est dénombrable, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable.

iii) Si $(\lambda I - A)^{-1}$ est compacte, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\Re\lambda < 0$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$.

Théorème 1.24. *[4]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert H de générateur A. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\{\lambda : \Re\lambda \geq 0\} \subset \rho(A),$$

et

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M \leqslant M \quad \text{pour tout } \lambda \text{ avec } \Re\lambda \geq 0 \text{ et } M > 0 \text{ une constante .}$$

Corollaire 1.4.
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné sur un espace de Hilbert H de générateur A. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$i\mathbb{R}\subset\rho(A) \quad et \quad M_0:=\sup_{\pi\in\mathbb{R}}\|(i\pi I-A)^{-1}\|\leq+\infty$$

Théorème 1.25.
Soit $S(t)=e^{At}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert H. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\sup\{\Re\lambda,\ \lambda\in\sigma(A)\}<0\,,$$

et

$$\sup_{\Re\lambda\geq 0}\|(\lambda I-A)^{-1}\|<\infty\,.$$

Lemme 1.1.
Soit $i\beta\in i\mathbb{R}$, pour tout fixe $\eta\geq 0$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+i\beta_n}d\xi\to 0, \quad lorsque \quad |\beta_n|\to\infty \quad (n\to\infty).$$

1.7.3 Critère du domaine fréquentiel

Théorème 1.26.
Les deux énoncés suivants sont équivalents dans le contexte d'un espace de Hilbert :

1). *Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, est exponentiellement stable :*

$$\exists M\geq 1,\exists\alpha>0,\|S(t)\|\leq Me^{-\alpha t}. \tag{1.4}$$

2).

$$\rho(A)\supseteq\{i\beta:\beta\in\mathbb{R}\}\equiv i\mathbb{R}, \tag{1.5}$$

et

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}}\|(i\beta I-A)^{-1}\|<+\infty. \tag{1.6}$$

Théorème 1.27 – [1]Théorème de Rouché .

Soient f et g deux fonctions holomorphes à l'intérieur d'un contour fermé simple

C dans le plan complexe $\mathbb{C}$.
Si, pour tout $z \in C$ on a :

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

alors f et $f+g$ ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, à l'intérieur de C.

Remarque 1.4.

- L'application du théorème de Rouché est introduit pour montrer le manque de stabilité exponentielle :

L'idée est d'utiliser ce théorème pour montrer que le spectre de l'opérateur générateur d'un semi-groupe s'approche de l'axe imaginaire, voire contient une suite de valeurs propres s'en approchant arbitrairement près. Cela implique que le semi-groupe n'est pas exponentiellement stable.

Soit A l'opérateur générateur d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H et soit $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A. Pour que le semi-groupe soit exponentiellement stable, il faut et il suffit que le spectre de A qui est $\sigma(A)$ soit contenu dans le demi-plan gauche, c'est-à-dire que

$$\sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} < 0.$$

On cherche les valeurs propres de A comme racines d'une fonction analytique $F(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$ où $f(\lambda)$ est une partie dominante dont les zéros sont bien connus, et $g(\lambda)$ est un terme de perturbation "faible".

On utilise le théorème de Rouché : on vérifie qu'il existe un contour C tel que $|g(\lambda)| < |f(\lambda)|$ sur C. Cela implique que $F(\lambda)$ et $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

On conclut que si l'on peut trouver une suite de contours C_n dont les intérieurs s'approchent de l'axe imaginaire, et sur lesquels Rouché s'applique, alors cela signifie que les zéros de F (c'est-à-dire dans notre cas les valeurs propres de A) s'approchent de l'axe imaginaire. Et cela exclut la stabilité exponentielle, car si les valeurs propres de A s'accumulent près de l'axe imaginaire, cela signifie que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ ne peut pas décroître exponentiellement pour toutes données initiales. Le meilleur que l'on puisse espérer est alors une décroissance plus lente (souvent polynomiale).

Théorème 1.28. ***[2](d'Arend-batty)***

Soit A le générateur dun C_0-semigroupe uniformément borné $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert X. Si :

(i) A na pas de valeurs propres sur $i\mathbb{R}$.

(ii) Lintersection du spectre $\sigma(A)$ avec $i\mathbb{R}$ est au plus un ensemble dénombrable,

alors le semigroupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable, cest-à-dire $\|S(t)z\|_X \to 0$ quand $t \to \infty$ pour tout $z \in X$.

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du système (S)

Sommaire

2.1 *Position du problème* 24
2.2 *Existence et unicité de la solution du système* 27

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on va établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'onde avec contrôle interne général de type diffusif .
Le système est donné par :

$$(S)\begin{cases} u_{tt}(x,t)-(x^{\alpha}u_x(x,t))_x=0 & (0,1)\times(0,+\infty),\\ -m\,u_{tt}(0,t)+(x^{\alpha}u_x)(0,t)=\varrho\,\partial_t^{\tau,\eta}u(0,t) & (0,+\infty),\\ u(1,t)=0 & (0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x) & (0,1), \end{cases}$$

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (S) .
Nous définissons l'espace suivant :

$$H^1_{0,\alpha}(0,1)=\left\{u\in AC_{\text{loc}}(0,1]\;\middle|\; x^{\alpha/2}u'\in L^2(0,1)/u(1)=0\right\}$$

et l'espace de l'énergie :

$$\mathscr{H}=H^1_{0,\alpha}(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(-\infty,+\infty)\times\mathbb{C} \tag{2.1}$$

Lemme 2.1.
L'espace $\mathscr{H}$ défini dans (2.1) est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$\left\langle U,\tilde{U}\right\rangle_{\mathscr{H}}=\int_0^1 x^{\alpha}u_x\tilde{u}_x\,dx+\int_0^1 v\tilde{v}\,dx+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\tilde{\phi}\,d\xi+m\theta\tilde{\theta}.$$

telle que : $U=(u,v,\phi)^T$, $\tilde{U}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\phi})^T$, $v=u_t$.

2.1.1 Modèle augmenté

Proposition 2.1

soit v la fonction définie par

$$v(\xi)=|\xi|^{(2\tau-1)/2},\quad -\infty<\xi<+\infty,\quad 0<\tau<1.$$

Alors, la relation entre lentrée U et la sortie O du système

$$\partial_t\phi(\xi,t)+(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)-U(t)v(\xi)=0,\quad -\infty<\xi<+\infty,\quad \eta\geq 0,\quad t>0,$$

avec la condition initiale

$$\phi(\xi,0)=0,$$

et la sortie définie par

$$O(t)=\pi^{-1}\sin(\tau\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}v(\xi)\phi(\xi,t)\,d\xi,$$

est donnée par

$$O=I^{1-\tau,\eta}U,$$

où

$$[I^{\tau,\eta}f](t)=\frac{1}{\Gamma(\tau)}\int_0^t(t-s)^{\tau-1}e^{-\eta(t-s)}f(s)\,ds.$$

Lemme 2.2.

Si $\lambda\in D_\eta=\mathbb{C}\backslash]-\infty,-\eta]$, alors

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^2(\xi)}{\lambda+\eta+\xi^2}\,d\xi=\frac{\pi}{\sin\tau\pi}(\lambda+\eta)^{\tau-1}.$$

En utilisant maintenant la Proposition (2.1.1) , le système (S) peut être reformulé en modèle augmenté comme suit :

$$(P)\begin{cases}u_{tt}(x,t)-(x^\alpha u_x(x,t))_x=0, & x\in(0,1),\\ \phi_t(\xi,t)+(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)-u_t(0,t)v(\xi)=0, & \text{in },(0,1)\times(-\infty,\infty)\times(0,+\infty),\\ -mu_{tt}(0,t)+(x^\alpha u_x)(0,t)=\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}v(\xi)\phi(\xi,t)\,d\xi,\\ u(1,t)=0,\\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\\ \phi(\xi,0)=\phi_0 & \text{in }(-\infty,\infty).\end{cases}$$

où $\zeta=\varrho\pi^{-1}\sin(\tau\pi)$.
Ainsi, le système (S) est équivalent au système augmenté (P).

Proposition 2.2

La fonction d'énergie associée à la solution du problème (P) est définie par la formule :

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1(|u_t|^2+x^\alpha|u_x|^2)dx+\frac{m}{2}|u_t(0,t)|^2+\frac{\zeta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\xi,t)|^2d\xi$$

et on a :

$$E'(t)=-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|^2d\xi\leq 0.$$

Démonstration.
En multipliant la première équation de (P) par u_t, en intégrant sur $(0,1)$ et en utilisant une intégration par parties, nous obtenons

$$\int_0^1 u_{tt}(x,t)u_t\,dx-\int_0^1(x^\alpha u_x(x,t))_x u_t\,dx=0.$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1|u_t(x,t)|^2dx\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 x^\alpha|u_x(x,t)|^2dx-\Re\left[(x^\alpha u_x)(x,t)u_t\right]_0^1=0. \tag{2.2}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(|u_t(x,t)|^2+x^\alpha|u_x(x,t)|^2\right)dx+\frac{m}{2}|u_t(0,t)|^2+\zeta\Re u_t(0,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi=0. \tag{2.3}$$

En multipliant la deuxième équation de (P) par $\zeta\phi$ et en intégrant sur $(-\infty,+\infty)$, nous obtenons :

$$\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_t(\xi,t)\phi(\xi,t)d\xi+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|^2d\xi-\zeta u_t(0,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi=0.$$

Ainsi

$$\frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\xi,t)|^2d\xi+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|^2d\xi-\zeta\Re u_t(0,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi,t)d\xi=0. \tag{2.4}$$

À partir de (2.2), (2.3) et (2.4), nous obtenons

$$E'(t)=-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(\xi,t)|^2d\xi\leq 0.$$

Ceci complète la preuve de la proposition.

Remarque 2.1. *Le systeme (P) s'appelle systeme augmenté .*

□

2.2 Existence et unicité de la solution du système

Notre ideé pour étudier l'éxistence et l'unicité de la solution, est l'utilisation du théorème des semi-groupes, Pour définir le semi-group associé (P),On considére la condition au limite droit :

$$u_t(0,t)=\theta(t), \quad t>0,$$

En remplacent dans l'equation (3) de (p),On obtient :

$$-m\theta_t(t)+(x^\alpha u_x)(0,t)-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi,t)\,d\xi=0. \tag{2.5}$$

avec la condition initiale :

$$\theta(0)=u_1(0)=\theta_0. \tag{2.6}$$

(P) est équivalente au système suivant :

$$(P_\theta)\begin{cases} u_{tt}(x,t)-(x^\alpha u_x(x,t))_x=0, & x\in(0,1)\\ \phi_t(\xi,t)+(\xi^2+\eta)\phi(\xi,t)-u_t(0,t)\nu(\xi)=0, & \text{dans } (0,1)\times(-\infty,\infty)\times(0,+\infty),\\ -m\theta_t(t)+(x^\alpha u_x)(0,t)-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi,t)\,d\xi=0.,\\ u(1,t)=0,\\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x),\\ \phi(\xi,0)=\phi_0 & \text{dans } (-\infty,\infty).\\ u_t(0,t)=\theta(t), \quad t>0,\\ \theta(0)=u_1(0)=\theta_0. \end{cases} \tag{10}$$

En posant $U=(u,u_t,\phi,\theta)^\top$ et $U_0=(u_0,u_1,0,\theta_0)^\top$, le système (P_θ) peut s'écrire sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} U'(t)=AU(t) \quad t>0,\\ U(0)=U_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

On considére l'espace de l'énergie :

$$\mathscr{H}=H^1_{0,\alpha}(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(-\infty,+\infty)\times\mathbb{C},$$

muni du produit scalaire :

$$\left\langle\begin{pmatrix}u\\ v\\ \phi\\ \theta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\\ \tilde{\phi}\\ \tilde{\theta}\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathscr{H}}=\int_0^1 x^\alpha u_x\tilde{u}_x\,dx+\int_0^1 v\tilde{v}\,dx+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\tilde{\phi}\,d\xi+m\theta\tilde{\theta}.$$

où l'opérateur A est donné par :

$$A\begin{pmatrix}u\\ v\\ \phi\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\\ (x^\alpha u_x)_x\\ -(\xi^2+\eta)\phi+v(0)\nu(\xi)\\ \dfrac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0)-\dfrac{\zeta}{m}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi)\,d\xi\end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

$$D(A)=\left\{\begin{array}{c} u\in H^2_\alpha(0,1)\cap H^1_{0,\alpha}(0,1),\, v\in H^1_{0,\alpha}(0,1),\, \theta\in\mathbb{C},\\ (u,v,\phi,\theta)\in\mathscr{H}: -(\xi^2+\eta)\phi+v(0)\nu(\xi)\in L^2(-\infty,+\infty),\, v(0)=\theta,\\ |\xi|\phi\in L^2(-\infty,+\infty)\end{array}\right\}. \tag{2.9}$$

L'operateur A est définie par :

Théorème 2.1 – (Hille-Yosida).
Pour $(u_0,u_1,0,\theta_0)\in\mathscr{H}$, le problème (2.7) admet une solution unique faible

$$(u,u_t,\phi,\theta)\in C^0(\mathbb{R}_+,\mathscr{H}).$$

Et pour $(u_0,u_1,0,\theta_0)\in D(A)$, le problème (2.7) admet une solution unique forte

$$(u,u_t,\phi,\theta)\in C^0(\mathbb{R}_+,D(A))\cap C^1(\mathbb{R}_+,\mathscr{H}).$$

Théorème 2.2.
L'opérateur A défini par (2.8) et (2.9) engendre un C_0-semi-groupe de contractions e^{tP_θ} dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$.

Démonstration. Utilisons le théorème **Lumer-Phillips** 1.19 c'est à dire on va montrer que l'operateur A est m-dissipatif .
(i) Montrans que A est dissipatif c'est à dire on montre que $\Re\langle AU,U\rangle_{\mathscr{H}}\leqslant 0$:

1. Calcul de $\Re\langle AU,U\rangle_{\mathscr{H}}$
Nous calculons le produit scalaire $\langle AU,U\rangle_{\mathscr{H}}$ et prenons sa partie réelle :

$$\langle AU,U\rangle_{\mathscr{H}}=\int_0^1 x^\alpha v_x u_x\,dx+\int_0^1 (x^\alpha u_x)_x v\,dx+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-(\xi^2+\eta)\phi+v(0)\nu(\xi)\right]\overline{\phi}\,d\xi$$
$$+m\left[\frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0)-\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi)d\xi\right]\overline{\theta}.$$

On pose :

$$I_1=\int_0^1 x^\alpha v_x u_x\,dx$$

$$I_2=\int_0^1 (x^\alpha u_x)_x v\,dx$$

$$I_3=\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-(\xi^2+\eta)\phi+v(0)\nu(\xi)\right]\overline{\phi}\,d\xi$$

$$I_4=+m\left[\frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0)-\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi)d\xi\right]\overline{\theta}.$$

• **Evalions $\mathbf{I}_1$:**

$$\int_0^1 x^\alpha v_x u_x \, dx = -\int_0^1 (x^\alpha u_x)_x v \, dx.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 x^\alpha v_x u_x \, dx + \int_0^1 (x^\alpha u_x)_x v \, dx = 0.$$

• **Evalions $\mathbf{I}_3$:**

$$I_3 = \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-(\xi^2+\eta)\phi + v(0)\nu(\xi)\right]\overline{\phi}\, d\xi = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 \, d\xi + \zeta v(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\overline{\phi}\, d\xi.$$

•**Evalions $\mathbf{I}_4$:**

$$m\left[\frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0) - \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\phi(\xi)d\xi\right]\overline{\theta} = (x^\alpha u_x)(0)\overline{\theta} - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\phi(\xi)d\xi\overline{\theta}.$$

2. On regroupe les valeurs de quatre intégrales, on obtient :

$$\Re\langle AU, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 \, d\xi.$$

Comme $\xi^2+\eta \geq 0$, on a :

$$\Re\langle AU, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi|^2 \, d\xi \leq 0.$$

Par conséquent, l'opérateur A est dissipatif dans l'espace $\mathscr{H}$.

(ii) Montrons que A est maximal, c'est à dire l'operateur $(\lambda I - A)$ est surjectif : Soit $\lambda > 0$ et soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathscr{H}$, le vecteur $U = (u, v, \phi, \theta) \in D(A)$ est une solution de l'équation $\lambda I - AU = F$ si ses composantes satisfont :

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1, \\ \lambda v - (x^\alpha u_x)_x = f_2, \\ \lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(0)\nu(\xi) = f_3, \\ \lambda\theta - \frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_4. \end{cases} \tag{2.10}$$

Supposons que u soit trouvé avec la régularité appropriée Alors, (2.10) donnee :

$$v = \lambda u - f_1 \in H^1_{0,\alpha}(0,1), \tag{2.11}$$

$$\phi(\xi) = \frac{f_3(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda} + \frac{\lambda u(0)\nu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda} - \frac{f_1(0)\nu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}. \tag{2.12}$$

En utilisant (2.10) et (2.12), on peut facilement montrer que u satisfait :

$$\lambda^2 u-(x^\alpha u_x)_x = f_2+\lambda f_1. \tag{2.13}$$

Résoudre l'équation (2.13) équivaut à trouver $u\in H^2_\alpha(0,1)\cap H^1_{0,\alpha}(0,1)$ tel que :

$$\int_0^1 (\lambda^2 u w-(x^\alpha u_x)_x w)dx = \int_0^1 (f_2+\lambda f_1)w dx, \tag{2.14}$$

pour tout $w\in H^1_{0,\alpha}(0,1)$. En utilisant (2.14), la condition aux limites (2.10), le fait que $\theta = v(0)$ et (2.12), la fonction u satisfait l'équation suivante :

(G) $\begin{cases} \int_0^1(\lambda^2 u\bar{w}+x^\alpha u_x\bar{w}_x)dx+\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta})u(0)\bar{w}(0) \\ =\int_0^1(f_2+\lambda f_1)w dx-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(\xi)d\xi\, w(0)+(m\lambda+\tilde{\zeta})f_1(0)w(0)-m f_4 w(0), \end{cases}$

où

$$\tilde{\zeta}=\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}d\xi.$$

Le problème (G) est de la forme :

$$B(u,w)=L(w),\quad \forall w\in H^1_{0,\alpha}(0,1), \tag{2.15}$$

où

$$B:[H^1_{0,\alpha}(0,1)\times H^1_{0,\alpha}(0,1)]\to\mathbb{C}$$

est la forme sesquilinéaire définie par :

$$B(u,w)=\int_0^1(\lambda^2 u\bar{w}+x^\alpha u_x\bar{w}_x)dx+\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta})u(0)\bar{w}(0),$$

et

$$L:H^1_{0,\alpha}(0,1)\to\mathbb{C}$$

est la forme antilinéaire donnée par :

$$L(w)=\int_0^1(f_2+\lambda f_1)w dx-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(\xi)d\xi\, w(0)+(m\lambda+\tilde{\zeta})f_1(0)w(0)-m f_4 w(0).$$

en utilisant le théorème de Lax-Milgram, nous concluons que (2.15) a une unique solution $u\in H^1_{0,\alpha}(0,1)$.

1. Sesquilinéarité de B

La forme B est sesquilinéaire car :

- Elle est linéaire en la première variable u :

$$B(\mu u_1+u_2,w)=\mu B(u_1,w)+B(u_2,w),\quad \forall\mu\in\mathbb{C},\ u_1,u_2,w\in H^1_{0,\alpha}(0,1).$$

- Elle est antilinéaire en la deuxième variable w :

$$B(u,\nu w_1+w_2)=\overline{\nu}B(u,w_1)+B(u,w_2),\quad \forall\nu\in\mathbb{C},\ u,w_1,w_2\in H^1_{0,\alpha}(0,1).$$

2. Continuité de B

Montrons que B est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C>0$ tel que :

$$|B(u,w)| \leq C\|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1}, \quad \forall u,w \in H^1_{0,\alpha}(0,1).$$

Estimation des termes :

1. Premier terme :

$$\left|\int_0^1 \lambda^2 u\overline{w}\,dx\right| \leq |\lambda|^2\|u\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \leq |\lambda|^2\|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1}.$$

2. Deuxième terme :

$$\left|\int_0^1 x^\alpha u_x\overline{w_x}\,dx\right| \leq \int_0^1 x^\alpha|u_x||w_x|\,dx \leq \|u_x\|_{L^2}\|w_x\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1}.$$

3. Troisième terme (inégalité de trace) :

$$|\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta})||u(0)||w(0)| \leq |\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta})|C_T^2\|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1}.$$

Ainsi, B est continue avec :

$$C = |\lambda|^2 + 1 + |\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta})|C_T^2.$$

3. Coercivité de B

La forme B est coercive s'il existe $\gamma>0$ tel que :

$$\Re(B(u,u)) \geq \gamma\|u\|^2_{H^1}, \quad \forall u \in H^1_{0,\alpha}(0,1).$$

Calcul de $\Re(B(u,u))$:

$$\Re(B(u,u)) = \Re(\lambda^2)\|u\|^2_{L^2} + \int_0^1 x^\alpha|u_x|^2dx + \Re(\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta}))|u(0)|^2.$$

Hypothèses pour la coercivité :

- $\Re(\lambda^2)>0$,
- $\Re(\lambda(m\lambda+\tilde{\zeta}))\geq 0$,
- $\alpha \geq 0$ (pour que $x^\alpha \geq 0$).

Sous ces hypothèses, en utilisant l'inégalité de Poincaré ($\|u\|_{L^2} \leq C_P\|u_x\|_{L^2}$), on obtient :

$$\Re(B(u,u)) \geq \min(\Re(\lambda^2),1)\|u\|^2_{H^1}.$$

Donc B est coercive.

1. Antilinéarité de L

Une forme L est antilinéaire si pour tout $w_1, w_2 \in H^{1,\alpha}(0,1)$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$, on a :

- $L(w_1 + w_2) = L(w_1) + L(w_2)$ (additivité),
- $L(\mu w) = \overline{\mu} L(w)$ (antilinéarité).

1. **Premier terme :**
$$\int_0^1 (f_2 + \lambda f_1) w \, dx$$
L'intégrale est linéaire en w, donc antilinéaire par conjugaison complexe.
2. **Deuxième terme :**
$$-\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} f_3(\xi) \, d\xi \cdot w(0)$$
Le coefficient est indépendant de w, et $w \mapsto w(0)$ est linéaire.
3. **Troisième terme :**
$$(m\lambda + \tilde{\zeta}) f_1(0) w(0)$$
Similaire au deuxième terme, linéaire en w.
4. **Quatrième terme :**
$$-m f_4 w(0)$$
Linéaire en w.

Donc Chaque terme est antilinéaire en w, donc L est antilinéaire.

2. Continuité de L

Pour montrer que L est continue, on cherche $C > 0$ tel que :

$$|L(w)| \leq C \|w\|_{H^{1,\alpha}}, \quad \forall w \in H^{1,\alpha}(0,1).$$

1. **Premier terme :**
$$\left| \int_0^1 (f_2 + \lambda f_1) w \, dx \right| \leq \|f_2 + \lambda f_1\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \leq C_1 \|w\|_{H^{1,\alpha}}.$$
2. **Deuxième terme :**
$$\left| -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} f_3(\xi) \, d\xi \cdot w(0) \right| \leq C_2 |w(0)| \leq C_2' \|w\|_{H^{1,\alpha}}.$$
$|w(0)| \leq C \|w\|_{H^{1,\alpha}}$.)
3. **Troisième et quatrième termes :**
$$|(m\lambda + \tilde{\zeta}) f_1(0) w(0)| \leq C_3 \|w\|_{H^{1,\alpha}}, \quad |-m f_4 w(0)| \leq C_4 \|w\|_{H^{1,\alpha}}.$$

En combinant les majorations, on obtient :

$$|L(w)| \leq \left(C_1 + C_2' + C_3 + C_4\right) \|w\|_{H^{1,\alpha}}.$$

Ainsi, L est continue sur $H^{1,\alpha}(0,1)$.
Alors $B(.,.)$ est sequilinéaire, continue et coercitif sur$H^1_{0,\alpha}(0,1) \times H^1_{0,\alpha}(0,1)$, et $L(.)$ est antilinéaire et continue sur $H^1_{0,\alpha}(0,1)$.
D'après le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que pour tout $w \in H^1_{0,\alpha}(0,1))$ le problème (2.15) admet une solution unique $u \in H^1_0(\Omega)$.

Chapitre 3

Stabilité du système

Sommaire

3.1 *Manque de stabilité uniforme (exponentielle)* 34
3.2 *Stabilité asymptotique(polynomiale)* 40

Le but de la stabilisation est de réduire les vibrations par un feedback, il s'agit de garantir la décroissance de l'énergie vers zéro plus ou moins rapide lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Plus précisément, on est intéressé de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie $E(t)$.
Il y'a divers types de stabilisation :

1). Stabilisation forte : $E(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$.
2). Stabilisation uniforme : $E(t) \leq Ce^{-\delta t}$,C, $\delta > 0$.
3). Stabilisation polynomiale : $E(t) \leqslant \frac{C}{t^{\delta}}$, C et δ>0.
4). Stabilisation logarithmique : $E(t) \leqslant \frac{C}{(\ln(t))^{\delta}}$,C, $\delta > 0$.

Dans la première section de ce chapitre, on va établir le manque de Stabilité exponentielle de la solution, où on utilise l'analyse spectrale. Et dans la deuxième section de ce chapitre, on établit la stabilité forte de la solution. .

3.1 Manque de stabilité uniforme (exponentielle)

On sait que si les valeurs propres de A sont à partie réelle constante $C < 0$,alors on a la stabilité exponentielle.
Mais si la partie réelle des valeurs propres tend vers zéro, c'est à dire sont assez proches de l'axe imaginaire, alors on a pas une stabilité exponentielle.
Dans cette section, on va établir le manque de stabilité exponentielle, pour ce but on a le théorème principal suivant :

Théorème 3.1.
Le semi-groupe engendré par l'opérateur A n'est pas exponentiellement stable.

Pour démontrer le théorème (3.1), on aura besoin du théorème (1.26) : C'est à dire on va montrer que $\sup_{\beta\in\mathbb{R}}\|(i\beta I-A)^{-1}\|<+\infty$. n'est pas satisfaite .

Démonstration.

Nous examinerons deux cas :
Cas 1 $\eta=0$:
Nous montrerons que $i\lambda=0$ n'appartient pas à l'ensemble résolvant de l'opérateur A. En effet, en notant que $F=(\sin(x-1),0,0,0)^T\in H$, et en supposant qu'il existe $U=(u,v,\phi,\theta)^T\in D(A)$ tel que $-AU=F$, nous obtenons $\phi(\xi)=|\xi|^{2\tau-5}/2\sin 1$. Mais alors $\phi\notin L^2(-\infty,+\infty)$, puisque $\tau\in]0,1[$. Donc $(u,v,\phi,\theta)^T\notin D(A)$ et l'opérateur A n'est pas inversible.
Cas 2 $\eta\neq 0$:
Nous voulons montrer qu'un nombre infini de valeurs propres de A s'approchent de l'axe imaginaire, ce qui empêche le système (P_θ) d'être exponentiellement stable. Nous calculons d'abord l'équation caractéristique donnant les valeurs propres de A. Soit λ une valeur propre de A avec le vecteur propre associé $U=(u,v,\phi,\theta)^T$. Alors $AU=\lambda U$ est équivalent à :

$$\begin{cases}\lambda u-v=0,\\ \lambda v-(x^\alpha u_x)_x=0,\\ \lambda\phi+(\xi^2+\eta)\phi-v(0)\nu(\xi)=0,\\ \lambda\theta-\frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0)+\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi)d\xi=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

Il est bien connu que les fonctions de Bessel jouent un rôle important dans ce type de problème. À partir de $(3.1)_1$ - $(3.1)_2$ pour un tel λ, nous trouvons :

$$\lambda^2 u-(x^\alpha u_x)_x=0.\tag{3.2}$$

En utilisant les conditions aux limites et $(3.1)_3$, nous déduisons que :

$$\begin{cases}\lambda^2 u-(x^\alpha u_x)_x=0,\\ (x^\alpha u_x)(0)-(m\lambda^2+\varrho\lambda(\lambda+\eta)^{\tau-1})u(0)=0,\\ u(1)=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

Supposons que u est une solution de (3.3) associée à la valeur propre $-\lambda^2$, alors on vérifie facilement que la fonction :

$$u(x)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\lambda x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)\tag{3.4}$$

est une solution du problème suivant :

$$y^2\ddot{y}+y\dot{y}+\left(y^2-\left(\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)^2\right)y=0.\tag{3.5}$$

Nous avons :

$$u(x)=c_+\tilde{u}_++c_-\tilde{u}_-,\tag{3.6}$$

où $\tilde{u}_+$ et $\tilde{u}_-$ sont définis par :

$$\tilde{u}_+(x) := x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) \tag{3.7}$$

et

$$\tilde{u}_-(x) := x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{-\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right), \tag{3.8}$$

où

$$J_\nu(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2m+\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} c^+_{\nu,m} y^{2m+\nu}. \tag{3.9}$$

$$J_{-\nu}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2m-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{-\nu,m} y^{2m-\nu} \tag{3.10}$$

$\nu_\alpha = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$, et J_{ν_α} et $J_{-\nu_\alpha}$ sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre ν_α et $-\nu_\alpha$.
Comme $\nu_\alpha \notin \mathbb{N}$, J_{ν_α} et $J_{-\nu_\alpha}$ sont linéairement indépendantes, et donc la paire $(J_{\nu_\alpha}, J_{-\nu_\alpha})$ (résultat classique) forme un système fondamental de solutions .

$\Phi_+(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}^+_{\nu_\alpha,m} x^{1-\alpha+(2-\alpha)m}$, $\quad \Phi_-(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}^-_{\nu_\alpha,m} x^{(2-\alpha)m}$,

avec

$^+_{\nu_\alpha,m} = c^+_{\nu_\alpha,m}\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda\right)^{2m+\nu_\alpha}$, $\quad \tilde{c}^-_{\nu_\alpha,m} = c^-_{\nu_\alpha,m}\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda\right)^{2m-\nu_\alpha}$.

On vérifie facilement que $\Phi_+, \Phi_- \in H^1_\alpha(0,1)$: en effet, $\Phi_+(x) \sim \tilde{c}^+_{\nu_\alpha,0} x^{1-\alpha}$, $x^{\alpha/2}\Phi'_+(x) \sim (1-\alpha)\tilde{c}^+_{\nu_\alpha,0} x^{-\alpha/2}, \Phi_-(x) \sim \tilde{c}^-_{\nu_\alpha,0}$, $\quad x^{\alpha/2}\Phi'_-(x) \sim (2-\alpha)\tilde{c}^-_{\nu_\alpha,0} x^{1-\alpha/2}$,

où on a utilisé la relation : $\mathrm{x\,J'}_\mu(x) = \mu J_\mu(x) - x J_{\mu+1}(x)$.

Ainsi, pour c^+ et c^- donnés, $u(x) = c^+\Phi_+(x) + c^-\Phi_-(x) \in H^1_\alpha(0,1)$ avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} (x^\alpha u_x)(0) - (m\lambda^2 + \varrho\lambda(\lambda+\eta)^{\tau-1})u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Alors,

$$M(\lambda)C(\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\alpha)\tilde{c}^+_{\nu_\alpha,0} & -(m\lambda^2 + \varrho\lambda(\lambda+\eta)^{\tau-1})\tilde{c}^-_{\nu_\alpha,0} \\ J_{\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda\right) & J_{-\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Une solution non triviale u existe si et seulement si $\det(M(\lambda)) = 0$.
On pose $f(\lambda) = \det(M(\lambda))$. L'équation caractéristique est donc $f(\lambda) = 0$.

Notre objectif est de prouver, grâce au théorème de Rouché, qu'il existe une sous-suite de valeurs propres dont la partie réelle tend vers 0. Comme A est dissipatif, on étudie le comportement asymptotique des grandes valeurs propres λ de A dans la bande $-\tau_0 \le \Re(\lambda) \le 0$, pour $\tau_0 > 0$ assez grand. Pour de tels λ, on remarque que Φ_+ et Φ_- restent bornées.

Lemme 3.1.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^*, |k|\ge N}$ de racines simples de $\det(M)$ *(qui sont aussi des valeurs propres simples de P).*

satisfaisant le comportement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}\lambda_k =& -\frac{2-\alpha}{2} i\left(k+\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi - i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\frac{\sin(\nu_\alpha\pi)}{(k\pi)^{2-2\nu_\alpha}}\\ &+ i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}\pi^{2-2\nu_\alpha}k^{3-2\nu_\alpha}}(2-2\nu_\alpha)\left(\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\sin(\nu_\alpha\pi)\\ &-\left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^2\left(\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\right)^2\frac{8}{(2-\alpha)^3}\frac{\sin(\nu_\alpha\pi)\cos(\nu_\alpha\pi)}{(\pi k)^{4-4\nu_\alpha}} i\\ &- i\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{3-\tau}\frac{\varrho(1-\alpha)}{m^2}\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\frac{\sin(\nu_\alpha\pi)\sin\left((1-\tau)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\frac{1}{k^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\\ &-\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{3-\tau}\frac{\varrho(1-\alpha)}{m^2}\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\frac{\sin(\nu_\alpha\pi)\cos\left((1-\tau)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\frac{1}{k^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\\ &+ o\left(\frac{1}{k^\omega}\right).\end{aligned}$$

$\lambda_k = \lambda_{-k}$ si $k \le -N$, où $\omega = \max\{4-\tau-2\nu\alpha, 4-4\nu\alpha\}$. De plus, pour tout $|k| \ge N$, les valeurs propres λ_k sont simples.

Nous étudions les racines de $f(\lambda)$. D'après (3.11), nous avons

$$f(\lambda) = (1-\alpha)\tilde{c}_{+\nu\alpha,0}J_{-\nu\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\lambda\right) + \left(m\lambda^2 + \varrho\lambda(\lambda+\eta)^{\tau-1}\right)\tilde{c}_{-\nu\alpha,0}J_{\nu\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\lambda\right) = 0.$$

Nous utilisons le développement asymptotique classique :
pour tout $\delta > 0$, le développement suivant est valable lorsque $|\arg z| \le \pi - \delta$:

$$J_\mu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos\left(z-\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin\left(z-\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{3.12}$$

Nous divisons la preuve en cinq étapes :

Étape 1.
En utilisant le développement asymptotique, nous obtenons

$$\frac{1}{(\lambda+\eta)^{1-\tau}} = \frac{1}{\lambda^{1-\tau}}\left(1+\mathcal{O}(\lambda^{-1})\right). \tag{3.13}$$

Ensuite, en utilisant (3.12) et (3.13), nous obtenons :

$$f(\lambda) = m\left(\frac{2}{\pi\tilde{z}}\right)^{1/2}\lambda^{2-\nu\alpha}c_{-\nu\alpha,0}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\right)^{-\nu\alpha}\frac{e^{-i(\tilde{z}-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2}\tilde{f}(\lambda), \tag{3.14}$$

où

$$\tilde{z} = \frac{2}{2-\alpha}i\lambda$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda) &= \left(e^{2i(\tilde{z}-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+1\right) + \frac{1-\alpha}{m}\frac{c_{+\nu\alpha,0}}{c_{-\nu\alpha,0}}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\right)^{2\nu\alpha}\frac{e^{2i(\tilde{z}-\frac{\pi}{4})}+e^{-i\nu\alpha\pi}}{\lambda^{2-2\nu\alpha}} + \frac{\varrho}{m}\frac{e^{2i(\tilde{z}-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+1}{\lambda^{2-\tau}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\\ &= f_0(\lambda) + \frac{f_1(\lambda)}{\lambda^{2-2\nu\alpha}} + \frac{f_2(\lambda)}{\lambda^{2-\tau}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\end{aligned}$$

avec $\nu_\alpha \notin \mathbb{N}$

avec

$$f_0(\lambda) = e^{2i(\tilde{z}-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+1, \tag{3.15}$$

$$f_1(\lambda) = \frac{1-\alpha}{m}\frac{c_{+\nu\alpha,0}}{c_{-\nu\alpha,0}}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\right)^{2\nu\alpha}\left(e^{2i(\tilde{z}-\frac{\pi}{4})}+e^{-i\nu\alpha\pi}\right), \tag{3.16}$$

$$f_2(\lambda) = \frac{\varrho}{m}\left(e^{2i(\tilde{z}-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+1\right). \tag{3.17}$$

Remarquons que f_0, f_1 et f_2 restent bornées dans la bande $-\tau_0 \le \Re(\lambda) \le 0$.

Étape 2.

Nous cherchons les racines de f_0. D'après (3.17), f_0 possède une famille de racines que nous notons λ_k^0.

$$f_0(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^{2i(\tilde{z}-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+1 = 0.$$

Ainsi

$$2i\left(\frac{2}{2-\alpha}i\lambda - \nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = i(2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

i.e.

$$\lambda_0^k = -\frac{2-\alpha}{2}i\left(k+\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Maintenant, à l'aide du théorème de Rouché et de l'équation asymptotique (3.16), nous allons montrer que les racines de $\tilde{f}$ sont proches de celles de f_0. Commençons par la première famille. En changeant dans $(\tilde{f}(\lambda))$ l'inconnue λ par $u = 2iz$, alors (3.16) devient :

$$\tilde{f}(u) = (e^u+1)+O\left(\frac{1}{u^\varpi}\right) = f_0(u)+O\left(\frac{1}{u^\varpi}\right),$$

où $\varpi = \max\{2-2\nu\alpha, 2-\tau\}$. Les racines de f_0 sont $u_k = -\frac{2-\alpha}{2}i\left(k+\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, et en posant $u = u_k + re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, on peut facilement vérifier qu'il existe une constante $C>0$ indépendante de k telle que $|e^u+1| \ge Cr$ pour r assez petit. Cela permet d'appliquer le théorème de Rouché 1.27. Par conséquent, il existe une sous-suite de racines de $\tilde{f}$ qui tend vers les racines u_k de f_0. Équivalemment, cela signifie qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ et une sous-suite $\{\lambda_k\}_{|k|\ge N}$ de racines de $f(\lambda)$, telle que $\lambda_k = \lambda_0^k + o(1)$ qui tend vers les racines $-\frac{2-\alpha}{2}i\left(k+\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi$ de f_0. Enfin, pour $|k|\ge N$, λ_k est simple puisque λ_0^k l'est.

Étape 3.

D'après l'étape 2, on peut écrire :

$$\lambda_k = -\frac{2-\alpha}{2}i\left(k+\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi+\varepsilon_k. \tag{3.18}$$

En utilisant (3.18), on obtient :

$$e^{2i\left(\left(\frac{2}{2-\alpha}i\lambda_k\right)-\nu\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = -e^{-\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k} = -1+\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k+O(\varepsilon_k^2). \tag{3.19}$$

En substituant (3.19) dans (3.16), et en utilisant que $\tilde{f}(\lambda_k)=0$, on obtient :

$$\tilde{f}(\lambda_k) = \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k+\frac{1-\alpha}{m}\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2\frac{2i\sin\nu\alpha\pi}{(k\pi)^{2-2\nu\alpha}}+o(\varepsilon_k)+o\left(\frac{1}{k^{2-2\nu\alpha}}\right)=0 \tag{3.20}$$

et donc :

$$\varepsilon_k = -\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\, i\, \frac{\sin \nu\alpha\pi}{(k\pi)^{2-2\nu\alpha}}.$$

Étape 4.
D'après l'étape 3, on peut écrire :

$$\lambda_k = -\frac{2-\alpha}{2} i\left(k+\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi - i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\frac{\sin \nu\alpha\pi}{(k\pi)^{2-2\nu\alpha}} + \varepsilon_k. \tag{3.21}$$

En utilisant (3.18), on obtient :

$$e^{2i\left(\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda_k\right) - \nu\alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = -e^{-\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k + \frac{4c}{2-\alpha}\frac{1}{k^{2-2\nu\alpha}}} = -1 + \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k - \frac{4c}{2-\alpha}\frac{1}{k^{2-2\nu\alpha}} + O(\varepsilon_k^2), \tag{3.22}$$

où :

$$c = \frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\frac{\sin \nu\alpha\pi}{\pi^{2-2\nu\alpha}}\, i.$$

En substituant (3.22) dans (3.16), et en utilisant que $\tilde{f}(\lambda_k)=0$, on obtient :

$$\tilde{f}(\lambda_k) = \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k - i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{8}{(2-\alpha)^2}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\frac{(2-2\nu\alpha)\left(\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\pi^{2-2\nu\alpha}k^{3-2\nu\alpha}}\sin \nu\alpha\pi + o(\varepsilon_k) + o\left(\frac{1}{k^{3-2\nu\alpha}}\right) = 0$$

et donc :

$$\varepsilon_k = i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\frac{(2-2\nu\alpha)\left(\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\pi^{2-2\nu\alpha}k^{3-2\nu\alpha}}\sin \nu\alpha\pi.$$

Étape 5.
D'après l'étape 4, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\lambda_k = &-\frac{2-\alpha}{2} i\left(k+\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi - i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c^+_{\nu_{\alpha,0}}}{c^-_{\nu_{\alpha,0}}}\frac{\sin \nu_\alpha\pi}{(k\pi)^{2-2\nu_\alpha}} \\ &+ i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c^+_{\nu_{\alpha,0}}}{c^-_{\nu_{\alpha,0}}}\frac{(2-2\nu_\alpha)(\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{3}{4})}{\pi^{2-2\nu_\alpha}K^{3-2\nu_\alpha}}\sin \nu\alpha\pi + \varepsilon_k\end{aligned} \tag{3.23}$$

En utilisant (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned}e^{2i\left(\left(\frac{2}{2-\alpha} i\lambda_k\right) - \nu\alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} &= -e^{-\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k + \frac{4c}{2-\alpha}\frac{1}{k^{2-2\nu\alpha}} - \frac{4\tilde{c}}{2-\alpha}\frac{1}{k^{3-2\nu\alpha}}} \\ &= -1 + \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k - \frac{4c}{2-\alpha}\frac{1}{k^{2-2\nu\alpha}} + \frac{4\tilde{c}}{2-\alpha}\frac{1}{k^{3-2\nu\alpha}} - \frac{1}{2}\left(\frac{4c}{2-\alpha}\right)^2\frac{1}{k^{4-4\nu\alpha}} + O(\varepsilon_k^2)\end{aligned} \tag{3.24}$$

où :

$$c = \frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\frac{\sin \nu\alpha\pi}{\pi^{2-2\nu\alpha}}\, i,$$

$$\tilde{c} = i\frac{1-\alpha}{m}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)\frac{c_+^{\nu\alpha,0}}{c_-^{\nu\alpha,0}}\frac{(2-2\nu\alpha)\left(\frac{\nu\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\pi^{2-2\nu\alpha}k^{3-2\nu\alpha}}\sin \nu\alpha\pi.$$

En substituant (3.24) dans $\tilde{f}(\lambda_k)$, et en utilisant que $\tilde{f}(\lambda_k)=0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda_k)=&\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k-\frac{4c}{2-\alpha}\frac{1}{k^{2-2\nu\alpha}}+\frac{4\tilde{c}}{2-\alpha}\frac{1}{k^{3-2\nu\alpha}}-\frac{1}{2}\left(\frac{4c}{2-\alpha}\right)^2\frac{1}{k^{4-4\nu\alpha}}.\\
-2i\frac{\tilde{e}\,c\,\delta^{2-2\nu_\alpha}\sin\nu_\alpha\pi}{k^{2-2\nu_\alpha}}&+2i(2-2\nu_\alpha)\left(\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\frac{\tilde{e}\,c\,\delta^{2-2\nu_\alpha}\sin\nu_\alpha\pi}{k^{3-2\nu_\alpha}}\\
&-\frac{\tilde{e}\,c\,c\,\delta^{2-2\nu_\alpha}}{4}\frac{2-\alpha e^{i\nu_\alpha\pi}}{k^{4-4\nu_\alpha}}-\frac{\varrho}{m}\frac{4}{2-\alpha}\frac{c}{k^{4-\tau-2\nu_\alpha}\delta^{2-\tau}}\\
&+o(\varepsilon_k)+o\left(\frac{1}{k^\omega}\right)\\
&=\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k+\left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^2\left(\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\right)^2\frac{32}{(2-\alpha)^4}\frac{\sin\nu_\alpha\cos\nu_\alpha}{(\pi k)^{4-4\nu_\alpha}}i\\
&-\frac{\varrho}{m}\frac{4}{2-\alpha}\frac{c\,\delta^{2-\tau}}{k^{4-\tau-2\nu_\alpha}}+o(\varepsilon_k)+o\left(\frac{1}{k^\omega}\right)=0,\end{aligned}$$

où $\omega=\max\{4-\tau-2\nu_\alpha,4-4\nu_\alpha\}$ et

$$\delta=-\frac{2-\alpha}{2}i\pi,\quad \tilde{e}_c=\frac{1-\alpha}{m}\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\left(\frac{2}{2-\alpha}i\right)^{2\nu_\alpha},$$

et donc

$$\begin{aligned}\varepsilon_k=&-\left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^2\left(\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\right)^2\frac{8}{(2-\alpha)^3}\frac{\sin\nu_\alpha\cos\nu_\alpha}{(\pi k)^{4-4\nu_\alpha}}i\\
&-i\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{3-\tau}\frac{\varrho(1-\alpha)}{m^2}\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\frac{\sin\nu_\alpha\pi\sin\left((1-\tau)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\frac{1}{k^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\\
&-\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{3-\tau}\frac{\varrho(1-\alpha)}{m^2}\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\frac{\sin\nu_\alpha\pi\cos\left((1-\tau)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^{4-\tau-2\nu_\alpha}}\frac{1}{k^{4-\tau-2\nu_\alpha}}+o\left(\frac{1}{k^\omega}\right).\end{aligned}$$

Comme (3.12) le montre, les valeurs propres λ_k de A approchent l'axe imaginaire lorsque k tend vers l'infini, Ainsi, le système (2.7) n'est pas uniformément stable. D'après (λ_k), nous avons :

$$|k|^{4-\tau-2\nu_\alpha}\Re\lambda_k\approx-\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{3-\tau}\frac{\varrho(1-\alpha)}{m^2}\frac{c^+_{\nu_\alpha,0}}{c^-_{\nu_\alpha,0}}\frac{\sin\nu_\alpha\pi\cos\left((1-\tau)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^{4-\tau-2\nu_\alpha}}.$$

L'opérateur A possède une branche de valeurs propres qui ne décroît pas exponentiellement. Ainsi, la preuve est complète.

3.2 Stabilité asymptotique(polynomiale)

3.2.1 Stabilité forte

Théorème 3.2.

Le C_0-semigroupe e^{tP_θ} est fortement stable dans H ; cest-à-dire que pour tout $U_0\in$

H, la solution de (2.7) vérifie

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{tP_\theta} U_0\|_H = 0.$$

Pour demontrer ce théorème, on utilise le théorème d'Arend-batty (1.28) :
Notre résultat principal est le théorème suivant :
Pour la preuve du(Théorème 3.2), nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.

A na pas de valeurs propres sur $i\mathbb{R}$.

Preuve

Nous distinguons les cas $i\lambda = 0$ et $i\lambda \neq 0$.
Étape 1.

La résolution de $AU = 0$ conduit au système

$$\begin{cases} v = 0, \\ (x^\alpha u_x)_x = 0, \\ (\xi^2+\eta)\phi - v(0)\nu(\xi) = 0, \\ -\frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 0. \end{cases}$$

Alors, $v = 0$, $\phi = 0$, $(x^\alpha u_x)(0) = 0$, et

$$(x^\alpha u_x)(x) = c.$$

Comme $(x^\alpha u_x)(0) = 0$, on a $(x^\alpha u_x)(x) = 0$. Ainsi,

$$u_x(x) = 0 \quad \text{pour } x \in (0,1).$$

Puisque $u(1) = 0$, alors $u = 0$. Donc, $U = 0$. Par conséquent, $i\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A.
Étape 2.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nous montrons que $i\lambda$ n'est pas une valeur propre de A en prouvant que la seule solution $U \in D(A)$ de l'équation

$$AU = i\lambda U \tag{3.25}$$

est $U = 0$. Soit $U = (u, v, \phi, \theta)^T$. L'équation (3.25) signifie que

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0, \\ i\lambda v - (x^\alpha u_x)_x = 0, \\ i\lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(0)\nu(\xi) = 0, \\ i\lambda\theta - \frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0) + \frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

En utilisant (3.25), on trouve

$$\phi \equiv 0, \tag{3.27}$$

puis, en utilisant la troisième équation de (3.26), on déduit que

$$v(0)=0. \tag{3.28}$$

Par conséquent, à partir de la première et de la dernière équation de (3.26), on obtient

$$u(0)=0 \quad \text{et} \quad (x^\alpha u_x)(0)=0. \tag{3.29}$$

Ainsi, en éliminant v, le système (3.26) implique que

$$\begin{cases} \lambda^2 u+(x^\alpha u_x)_x=0 \quad \text{sur } (0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \\ (x^\alpha u_x)(0)=0. \end{cases} \tag{3.30}$$

La solution de l'équation (3.30) est donnée par

$$u(x)=C_1\psi_+(x)+C_2\psi_-(x),$$

où ψ_+ et ψ_- sont définies par

$$\psi_+(x)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}\lambda x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right), \quad \psi_-(x)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{-\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}\lambda x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right). \tag{3.31}$$

À partir des conditions aux limites $(3.30)_2$ et $(3.30)_3$, on déduit que $u\equiv 0$. Par conséquent, $U=0$. Ainsi, P ne possède pas de valeurs propres purement imaginaires.

Lemme 3.3.

1. *Si $\lambda\neq 0$, l'opérateur $i\lambda I-A$ est surjectif.*
2. *Si $\lambda=0$ et $\eta\neq 0$, l'opérateur $i\lambda I-A$ est surjectif.*

Démonstration.

Cas 1 : $\lambda\neq 0$. Soit $F=(f_1,f_2,f_3,f_4)^\top\in H$ donné, et soit $U=(u,v,\phi,\theta)^\top\in D(A)$ tel que

$$(i\lambda I-A)U=F. \tag{3.32}$$

De manière équivalente, on a :

$$\begin{cases} i\lambda u-v=f_1, \\ i\lambda v-(x^\alpha u_x)_x=f_2, \\ i\lambda\phi+(\xi^2+\eta)\phi-v(0)\nu(\xi)=f_3, \\ i\lambda\theta-\frac{1}{m}(x^\alpha u_x)(0)+\frac{\zeta}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(\xi)\phi(\xi)\,d\xi=f_4, \end{cases} \tag{3.33}$$

avec les conditions aux limites, On en déduit une formulation faible :

$$B(u,w)=l(w), \quad \forall w\in H^1_{0,\alpha}(0,1), \tag{3.34}$$

où

$$B(u,w)=B_1(u,w)+B_2(u,w), \tag{3.35}$$

avec

$$\begin{cases} B_1(u,w) = \int_0^1 x^\alpha u_x w_x \, dx + i\lambda\rho(i\lambda+\eta)\tau^{-1} u(0)w(0), \\ B_2(u,w) = -\int_0^1 \lambda^2 u w \, dx - m\lambda^2 u(0)w(0), \end{cases} \tag{3.36}$$

et

$$l(w) = \int_0^1 (f_2 + i\lambda f_1) w \, dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\xi)}{\xi^2+\eta+i\lambda} f_3(\xi)\, d\xi \, w(0) + (mi\lambda + \rho(i\lambda+\eta)\tau^{-1}) f_1(0)w(0) - m f_4 w(0). \tag{3.37}$$

Soit $(H^1_{0,\alpha}(0,1))'$ l'espace dual de $H^1_{0,\alpha}(0,1)$, On définit les opérateurs suivants :

$$B : H^1_{0,\alpha}(0,1) \to (H^1_{0,\alpha}(0,1))', \quad u \mapsto Bu, B_i : H^1_{0,\alpha}(0,1) \to (H^1_{0,\alpha}(0,1))', \quad i \in \{1,2\}, \quad u \mapsto B_i u, \tag{3.38}$$

tels que

$$(Bu)w = B(u,w), \quad \forall w \in H^1_{0,\alpha}(0,1), (B_i u)w = B_i(u,w), \quad \forall w \in H^1_{0,\alpha}(0,1), \quad i \in \{1,2\}. \tag{3.39}$$

On doit prouver que l'opérateur B est un isomorphisme, Pour cela, la preuve se décompose en trois étapes :

Étape 1.

Montrons que B_1 est un isomorphisme, Il est clair que B_1 est une forme sesquilinéaire continue sur $H^1_{0,\alpha}(0,1)$, De plus,

$$\Re B_1(u,u) = \|x^{\alpha/2} u_x\|_2^2 + \varrho\lambda\Re\left(i(i\lambda+\eta)\tau^{-1}\right)|u(0)|^2 \geq \|x^{\alpha/2} u_x\|_2^2, \tag{3.40}$$

Où nous avons utilisé le fait que :

$$\varrho\lambda\Re\left(i(i\lambda+\eta)^{\tau-1}\right) = \zeta\lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\xi)^2}{\lambda^2+(\eta+\xi^2)^2}\, d\xi > 0.$$

Ainsi, B_1 est coercif Alors, d'après 3.38 et le théorème de Lax-Milgram, l'opérateur B_1 est un isomorphisme.

Étape 2.

Dans cette étape, nous voulons prouver que l'opérateur B_2 est compact. Pour cela, à partir de 3.36 et 3.39, nous avons :

$$|B_2(u,w)| \leq c\|u\|_{L^2(0,1)}\|w\|_{L^2(0,1)} + c'|u|_{H^1_{0,\alpha}(0,1)}|w|_{H^1_{0,\alpha}(0,1)},$$

et par conséquent, en utilisant l'injection compacte de $H^1_{0,\alpha}(0,1)$ dans $L^2(0,1)$, nous déduisons que B_2 est un opérateur compact.

Par conséquent, à partir des étapes précédentes, nous obtenons que l'opérateur $B = B_1 + B_2$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, Maintenant, suivant l'alternative de Fredholm, il nous reste à prouver que l'opérateur B est injectif pour obtenir que B est un isomorphisme.

Étape 3.

Soit $u \in \ker(B)$, alors :

$$B(u,w) = 0 \quad \forall w \in H^1_{0,\alpha}(0,1). \tag{3.41}$$

En particulier, pour $w = u$, il suit que :

$$\lambda^2 \|u\|^2_{L^2(0,1)} + m\lambda^2 |u(0)|^2 - i\varrho\lambda(i\lambda+\eta)^{\tau-1}|u(0)|^2 = \|x^{\alpha/2}u_x\|^2_{L^2(0,1)}.$$

D'où, nous avons :

$$u(0) = 0. \tag{3.42}$$

De (3.42), nous obtenons :

$$(x^{\alpha/2}u_x)(0) = 0 \tag{3.43}$$

et ensuite :

$$\begin{cases} -\lambda^2 u - (x^\alpha u_x)_x = 0, \\ u(0) = (x^{\alpha/2}u_x)(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Alors, d'après le Lemme 3.3, nous déduisons que $u = 0$ et par conséquent $\ker(B) = \{0\}$. Finalement, à partir de l'Étape 3 et de l'alternative de Fredholm, nous déduisons que l'opérateur B est un isomorphisme, et on a que l'opérateur l est une forme antilinéaire et continue sur $H^1_{0,\alpha}(0,1)$, Par conséquent, 3.34 admet une unique solution $u \in H^1_{0,\alpha}(0,1)$. En utilisant la régularité elliptique classique, nous déduisons que $U \in D(A)$ est une solution unique de 3.32. Ainsi, $i\lambda - A$ est surjectif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

conclusion

Ce mémoire a démontré que l'équation d'onde dégénérée avec dissipation frontière fractionnaire admet des solutions stables bien que non exponentiellement stables. L'analyse spectrale a révélé l'absence de stabilité exponentielle due au comportement asymptotique des valeurs propres, tandis que le théorème d'Arendt-Batty a permis d'établir une stabilisation polynomiale, Ces résultats, obtenus par une combinaison d'analyse fonctionnelle, de théorie des semi-groupes et de méthodes spectrales, ouvrent des perspectives intéressantes pour le contrôle des systèmes à mémoire longue et les applications en physique mathématique, La méthodologie employée, s'appuyant notamment sur les fonctions de Bessel et le théorème de Rouché, pourrait être étendue à des cas plus généraux de dégénérescence.

Bibliographie

[1] Abbes. B, Chahira. A, Fatiha. C , *"Decay Estimates for a Degenerate Wave Equation with a Dynamic Fractional Feedback Acting on the Degenerate Boundary Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia. October 2021, 3219- 3239.*

[2] Arendt, W. and Batty, C. J. K. *(1988), Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups Trans. Am. Math. Soc., 306, 837-852.*

[3] Barbu.V, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Springer-Science+ Business Media, B.V 1998.*

[4] Brézis.H, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.*

[5] Dautray.R, Jacques-Louis Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tehnology, Volume 2 Functional and variational methods, Springer.2000.*

[6] Kais, A., Hassein, F. and Robbiano, L. *(2020),"Fractional-feedback stabilization for a class of evolution systems ", 220 Journal of Differential Equations, 268(1), 5751-5791.*

[7] Mbodje, B. *(2006),"Wave energy decay under fractional derivative controls ", IMA Journal of Mathematical Control and 216 Information, 23, 237-257.*

[8] Partington.J.R , *Linear operators and linear systems An analytical approach to control theory, (2004, CUP)- London Mathematical Society student Texts 60.*

[9] Rozendaal, J., Seifert, D. and Stahn, R. *(2019), Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces, Adv. Math., 346, 359-388*