الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة المدية
كلية العلوم
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مذكرة تخرج

مقدمة من طرف

عمر بوعسلة

للحصول على شهادة الماستر في الرياضيات

التخصص: التحليل الرياضي والتطبيقات

بعنوان

معادلات هيون وتطبيقاتها في الفيزياء
(معادلة كلين غوردن)

نوقشت علنا سنة 2026 أمام لجنة المناقشة المكونة من :

الاستاذ معلوم خالد رئيساً

الاستاذ لنقار عمر مشرفاً

الاستاذ عيادي حسين مشرفاً مساعدا

الاستاذ حمزة بيبي ممتحنا

الاستاذ بوزفران محمد ممتحنا

السنة الجامعية 2026/2025

ملخص

معظم المشاكل الفيزيائية الكمومية والنسبية التي تتميز بـ أربعة نقاط مفردة ، تؤدي إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية لا يمكن حلها بالدوال الخاصة التقليدية.

معادلة هيون هي الأداة الرياضية الطبيعية لهذه المشاكل، حيث يمكن لدوال هيون وصف الحالات الكمومية في هذه الأنظمة المعقدة بدقة.

و في مذكرتنا هذه لدينا 5 فصول، ففي الفصل الأول تحدثنا عن بعض المبرهنات والتعريفات التي قد تفيد موضوعنا ، وفي الفصل الثاني تحدثنا عن تاريخ معادلة هيون و بعض استعمالاتها في الفيزياء، وفي الفصل الثالث تحدثنا عن معادلة هيون العامة من حلول و غيرها، وفي الفصل الرابع تحدثنا باختصار عن معادلات هيون الأخرى كالمدمجة و ثنائية الاندماج ، وفي الفصل الخامس قمنا بحل معادلة كلين غوردن لكمون و كتلة متغيرين مع الموضع.

- **المشكلة** وصف جسيم كمومي في وسط له كتلة و كمون متغيران هو مشكلة معقدة تتجاوز قدرة الدوال الخاصة التقليدية.
- **الأداة:** معادلة هيون (وبالأخص أشكالها المدمجة) هي اللغة الرياضية الطبيعية لهذه الأنظمة الفيزيائية غير المتجانسة.
- **الحل:** الدوال الموجية ليست أسية أو جيبية بسيطة، بل هي دوال هيون الخاصة (HeunC, HeunB, ...).

Résumé

La plupart des problèmes physiques, quantiques et relativistes, qui se caractérisent par quatre points singuliers, conduisent à une équation différentielle du second ordre qui ne peut pas être résolue par les fonctions spéciales classiques.

L'équation de Heun est l'outil mathématique naturel pour ces problèmes, car les fonctions de Heun permettent de décrire avec précision les états quantiques dans ces systèmes complexes.

Dans notre mémoire, nous avons cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons parlé de certains théorèmes et définitions qui pourraient être utiles à notre sujet. Dans le deuxième chapitre, nous avons parlé de l'histoire de l'équation de Heun et de certaines de ses applications en physique. Dans le troisième chapitre, nous avons parlé de l'équation générale de Heun, de ses solutions et d'autres aspects. Dans le quatrième chapitre, nous avons parlé brièvement des autres équations de Heun, telles que la confluente et la double confluente. Dans le cinquième chapitre, nous avons résolu l'équation de Klein-Gordon pour un potentiel et une masse variables avec la position.

- **Le problème :** Décrire une particule quantique dans un milieu ayant une masse et un potentiel variables est un problème complexe qui dépasse la capacité des fonctions spéciales classiques.

- **L'outil :** L'équation de Heun (et plus particulièrement ses formes fusionnées) est le langage mathématique naturel pour ces systèmes physiques hétérogènes.
- **La solution :** Les fonctions d'onde ne sont pas de simples fonctions exponentielles ou sinusoïdales, mais ce sont des fonctions de Heun spéciales (HeunC, HeunB, …).

Abstract

Most quantum and relativistic physical problems, which are characterized by four singular points, lead to a second-order differential equation that cannot be solved by classical special functions.

The Heun equation is the natural mathematical tool for these problems, as Heun functions can accurately describe quantum states in these complex systems.

In our thesis, we have five chapters. In the first chapter, we talked about some theorems and definitions that might be useful for our topic. In the second chapter, we talked about the history of the Heun equation and some of its applications in physics. In the third chapter, we talked about the general Heun equation, its solutions, and other aspects. In the fourth chapter, we briefly talked about other Heun equations, such as the confluent and double confluent ones. In the fifth chapter, we solved the Klein-Gordon equation for a position-dependent potential and mass.

- **The Problem :** Describing a quantum particle in a medium with variable mass and potential is a complex problem that exceeds the capability of classical special functions.
- **The Tool :** The Heun equation (and particularly its confluent forms) is the natural mathematical language for these heterogeneous physical systems.
- **The Solution :** The wave functions are not simple exponential or sinusoidal functions, but rather special Heun functions (HeunC, HeunB, …).

شكر وعرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، والصلاة والسلام على معلّم البشرية الخير وعلى آله وصحبه أجمعين.

امتثالاً لقول الرسول الكريم ﷺ: (مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ)، ووفاءً بالعهد واعترافاً بالفضل؛ نتقدم بجزيل الشكر وعظيم الامتنان إلى كافة أساتذتنا الأجلاء الذين أشرفوا على تعليمنا وتوجيهنا خلال سنواتنا الجامعية.

لقد كنتم لنا السند والقدوة، ومن فيض علمكم وحرصكم استمددنا العزيمة لتخطي كل الصعاب والوصول إلى هذا اليوم. نسأل الله العلي القدير أن يبارك في أعماركم وفي علمكم، وأن يجعل ما قدمتموه لنا في ميزان حسناتكم و أن يزيدكم رفعةً ومقاماً.

إهداء

إلى كل من دعمني طوال مسيرتي الأكاديمية، وأضاء لي دروب العلم والمعرفة بكلمة، أو دعاء، أو توجيه... أتقدم إليكم بجزيل الشكر، وأخص بالإهداء عائلتي الغالية، وأساتذتي الأجلاء، وأصدقائي الأوفياء، لقد كنتم لي سنداً وعوناً في كل خطوة، واليوم أهديكم ثمرة هذا الجهد.

الترميز :

البيان / الشرح	الرمز الرياضي
مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق N مرة	$\mathcal{C}^N(X,Y)$
التكميم الشامل (من أجل أي)	$\forall$
التكميم الوجودي (يوجد على الأقل)	$\exists$
مجموعة المصفوفات المربعة العقدية	$\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$
مؤثر الاشتقاق العادي m مرة	$\frac{d^m}{dz^m}$
مؤثر الاشتقاق الجزئي m مرة	$\frac{\partial^m}{\partial z^m}$
تكامل على المسار C من $\mathbb{C}$	$\int_C$
مؤثرات تفاضلية	$\Lambda_1, \Lambda_2, L_1, L_2, M_1, M_2$
كرة طوبولوجية مركزها z_0 ونصف قطرها r	$B_{\mathbb{K}^N}(z_0, r)$
تكامل مزدوج على المسارين C_1 و C_2	$\iint_{C_1C_2}$
تكافؤ تقاربي	$\sim$
دالة الوزن	W
حل محلي لمعادلة هيون العامة بجوار 0	Hl
حل محلي لمعادلة هيون المندمجة بجوار 0	HeunC
حل محلي لمعادلة هيون ثنائية الاندماج بجوار 0	HeunB

الفهرس

- **الفصل 1 : بعض المعلومات عن معادلات هيون**
  - 1.1 دوال هيون وبعض تطبيقاتها في الفيزياء
    - 1.1.1 مقدمة تاريخية
  - 2.1 السيرة الذاتية: كارل هيون (1859-1929)
    - 1.2.1 النشأة والتعليم
    - 2.2.1 المسار المهني المبكر والحياة الأسرية
    - 3.2.1 التحول نحو الميكانيكا والنجاح في برلين
    - 4.2.1 الأستاذية في كارلسروه (1902-1922)
    - 5.2.1 نتاج هيون العلمي (ثلاث فترات رئيسية)
    - 6.2.1 السنوات الأخيرة والوفاة
  - 3.1 الخصائص الرياضية لمعادلة هيون
  - 4.1 الأشكال المدمجة والخاصة
  - 5.1 تطبيقات معادلات هيون في الفيزياء

- **الفصل 2: (الإطار النظري والأدوات الرياضية)**
  - 1.2 الدوال التحليلية
  - 2.2 رمز ريمان P
  - 3.2 الدالة فوق الهندسية المعممة
  - 4.2 دالة غاما
  - 5.2 كثيرات حدود بل غير المكتملة
  - 6.2 صيغة فا دي برون
  - 7.2 الدوال الإهليلجية اليعقوبية
  - 8.2 مبرهنة بيانو
  - 9.2 مبرهنة بيكار ليندلوف
  - 10.2 مبرهنة

- **الفصل 3: معادلة هيون العامة**
  - 1.3 الصيغة الأساسية لمعادلة هيون

2.3 تحويلات معادلة هيون

1.2.3 تحويل المتغير

2.2.3 تحويل القوة للدالة y

3.2.3 تحويل النقاط المفردة الأربع

4.2.3 معادلة ذات ثلاث نقاط مفردة محدودة ونقطة مفردة عند اللانهاية

5.2.3 التحويل الأسي للدالة

6.2.3 التحويل التربيعي

7.2.3 التحويل التربيعي العكسي

8.2.3 تحويل بعض المعادلات المثلثية

9.2.3 تحويل بعض المعادلات الجبرية الخاصة

10.2.3 التحويل إلى الصورة الإهليلجية اليعقوبية

3.3 الحلول

1.3.3 الحلول كدوال فوق هندسية

2.3.3 متسلسلة القوى

3.3.3 متعددة الحدود

4.3.3 كثيرات حدود هيون

5.3.3 الحلول كمتسلسلات من دوال فوق هندسية

6.3.3 الحلول المتقاربة

7.3.3 بناء دوال هيون من أصناف أخرى

8.3.3 حل شميدت لمعادلة هيون التفاضلية

4.3 علاقات التعامد

1.4.3 علاقة التعامد الفردية لدوال هيون

2.4.3 علاقات التعامد الزوجية لدوال هيون

3.4.3 المعادلات التكاملية والعلاقات التكاملية

1.3.4.3 النواة التكاملية

2.3.4.3 التطور الشكلي للنواة

4.4.3 علاقات التعامد لأنوية ثلاثية

1.4.4.3 البحث عن الأنوية

2.4.4.3 التوسع الشكلي للنواة

الفصل 4: معادلات هيون الأخرى

1.4 معادلة هيون المندمجة
2.4 معادلة هيون ثنائية الاندماج
3.4 معادلة هيون مزدوجة الاندماج
4.4 معادلة هيون ثلاثية الاندماج

الفصل 5: تطبيقات حول استعمالات معادلات هيون في الفيزياء

1.5 الحالة 1: كتلة وكمون متغيرين بشكل أسي مع الموضع
2.5 الحالة 2: كتلة وكمون متغيرين بشكل خطي مع الموضع

المقدمة

تُعد المعادلات التفاضلية العادية من الأدوات الرياضية الأساسية في وصف الظواهر الفيزيائية. وقد توجت الجهود الرياضية في هذا المجال باكتشاف دوال خاصة تحل هذه المعادلات، مثل دوال بيسل و ليجيندر و الفوق هندسية الفائقة، التي وجدت تطبيقات واسعة في ميكانيكا الكم والديناميكا الحرارية ونظرية المجال.

إلا أن العديد من المسائل الفيزيائية الحديثة، لا سيما تلك التي تنطوي على أنظمة كمومية ذات جسيمات في أوساط غير متجانسة أو ذات جهد معقد، تقود إلى معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية بأكثر من ثلاث نقاط شاذة منتظمة. في هذا السياق، تبرز معادلة هيون كأداة رياضية طبيعية وأكثر شمولاً، حيث تعتبر تعميماً للمعادلة فوق هندسية ، إذ تحتوي على أربع نقاط شاذة منتظمة، مما يمنحها مرونة فائقة في نمذجة ظواهر فيزيائية متنوعة، ابتداءً من مسائل الانتثار في ميكانيكا الكم إلى دراسة تموجات الثقوب السوداء في النسبية العامة.

تستكشف هذه المذكرة، التي تُعد جزءاً من متطلبات نيل شهادة الماستر في الرياضيات، الجوانب الرياضية لهذه المعادلة وحلولها المتنوعة، وتسلط الضوء على قوتها التطبيقية من خلال حل معادلة كلاين-غوردون في حالات خاصة تعكس أنظمة فيزيائية واقعية. ينقسم العمل إلى خمسة فصول، تبدأ بتقديم الأسس والنتائج الأولية التي تشكل الركيزة الرياضية للرسالة، كتعريف الدوال الخاصة ونظريات الوجود والوحدة للحلول. ثم يتعمق الفصل الثاني في الخلفية التاريخية لمعادلة هيون، متتبعاً تطورها منذ صياغتها على يد كارل هيون واستكشاف تطبيقاتها الباكرة في الفيزياء.

يمثل الفصل الثالث جوهر العمل النظري في هذه المذكرة، حيث يُعنى بالمعادلة العامة لهيون بصيغتها الأساسية:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)}y = 0,$$

مع شرط $\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1$ الذي يضمن أن تكون النقاط $z = 0, 1, a, \infty$ نقاطاً شاذة منتظمة من نوع فوكس. يستعرض هذا الفصل بشكل موسع تحويلات معادلة هيون المتعددة، والتي تشمل قائمة ضخمة تضم 24 تحويلاً للمتغير مثل $z \to 1 - z$، و $z \to \frac{1}{z}$، و $z \to \frac{z}{z-1}$، وغيرها من التحويلات التي تعيد صياغة المعادلة في سياقات رياضية مختلفة. كما يتطرق إلى تحويل القوة للدالة حيث يُفترض حل بالشكل $y(z) = z^\rho(z-1)^\sigma(z-a)^\tau\tilde{y}(z)$ بهدف تبسيط المعادلة أو إلغاء بعض الحدود.

ولا يقتصر الفصل على ذلك، بل يقدم منهجية تحويل معادلة ذات أربع نقاط مفردة منتظمة إلى صيغة هيون القياسية من خلال تحويل أربع نقاط مختلفة (a_1, a_2, a_3, a_4) إلى $(0, a, 1, \infty)$. كما يستعرض التحويل الأسي للدالة والتحويل التربيعي وعكسه، و يخصص مبحثاً مهماً لتحويل بعض المعادلات المثلثية والجبرية الخاصة إلى صيغة هيون، مثل المعادلة:

$$(1 + A\cos 2\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2} + B\sin(2\theta)\frac{dy}{d\theta} + (C + D\cos 2\theta)y = 0$$

والتي تصبح بعد تحويل $z = \sin^2\theta$ إلى معادلة هيون بمعاملات $\gamma = \delta = \frac{1}{2}$ و $\varepsilon = (\frac{1}{2} - a)B$. كما لدينا التحويل إلى الصورة الإهليلجية اليعقوبية باستخدام $z = \mathrm{sn}^2(u, K)$ حيث $a = K^{-2}$، مما ينتج عنه معادلة تفاضلية بدلالة دوال sn و cn و dn اليعقوبية.

أما بالنسبة للحلول, فيقدم الفصل ثروة من الطرق المتنوعة، بدءاً من الحلول المعبر عنها بدوال فوق هندسية في جوار كل نقطة شاذة. كما يعرض الحلول على شكل متسلسلات قوى $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ حول الصفر، حيث تخضع المعاملات لعلاقة استقرار ثلاثية بالشكل $R_r c_{r+1} - (Q_r + q)c_r + P_r c_{r-1} = 0$.

و يهتم الفصل كذلك بحالة حدوث انقطاع في المتسلسلة عند شروط معينة مما يؤدي إلى ظهور كثيرات حدود هيون والتي تُعرف بالشكل $H_p(z) = z^{\sigma_1}(1-z)^{\sigma_2}(z-a)^{\sigma_3}P(z)$ حيث
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \{0, 1-\gamma\} \times \{0, 1-\delta\} \times \{0, 1-\varepsilon\}$ و P كثيرة حدود من الدرجة N. كما يقدم الفصل الحلول كتسلسلات من دوال فوق هندسية باستخدام دوال توسع بالشكل $y_v(z) = {}_2F_1(-v, v+\omega; \gamma; z)$ حيث $\omega = \gamma + \delta - 1$، وتُصاغ علاقات الاستقرار بدلالة المعاملات D_v و E_v و F_v. و لا يغفل الفصل الجانب التحليلي العميق المتمثل في علاقات التعامد لدوال هيون، حيث يكون لدينا مؤثر ذاتي : $L_z := \frac{d}{dz}\left(P(z)\frac{d}{dz}\right) + \alpha\beta z$ مع دالة الوزن $W(z) = z^{\gamma-1}(z-1)^{\delta-1}(z-a)^{\varepsilon-1}$، و يُستنتج أن $(q_1 - q_2)\int_C W y_1 y_2 dz = 0$ في حالة الشروط المناسبة، مما يثبت تعامد الحلول. كما يُعنى ببناء دوال هيون من أصناف أخرى من خلال تحويل الدالة بالشكل $y(z) = z^{\sigma_1}(z-1)^{\sigma_2}f(z)$ والحصول على معادلة هيون جديدة بمعاملات معدلة $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}, \hat{q}$، مؤكداً على مرونة هذه المعادلة و غنائها الرياضي. وفي نهاية المطاف، يُشكل هذا الفصل أداة رياضية متكاملة تجمع بين الجانب البنائي والتحليلي، وتهيئ الأرضية لتطبيقات فيزيائية متقدمة.

أما الفصل الرابع، فيوسع الآفاق بتقديم لمحة شاملة عن الأشكال المندمجة لمعادلة هيون، والتي تظهر بشكل متكرر عند التعامل مع أنظمة ذات نقاط شاذة غير منتظمة. فيستعرض معادلة هيون المندمجة بصيغتها القانونية:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon\right)\frac{du}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)}u = 0,$$

ويعرض حلها المحلي بدالة هيون المندمجة $\mathrm{HeunC}(q, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon; z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. كما يتناول أيضا معادلة هيون مزدوجة الاندماج و ثنائية الاندماج و ثلاثية الاندماج.

ويختتم الفصل الخامس العمل بالتطبيق الأبرز، حيث يتم حل معادلة كلاين-غوردون لجسيم كمومي في حالة كون كتلته $m(x)$ وجهده $V(x)$ متغيرين مع الموضع . ففي الحالة الأولى، حيث تتغير الكتلة والجهد بشكل أُسي مع الموضع:

$$m(x) = m_0 + \frac{S_0}{2}\exp\left(\frac{x}{a}\right), \quad V(x) = \frac{V_0}{2}\exp\left(\frac{x}{a}\right),$$

يتم تحويل المتغير $y = -\frac{S_0}{2m_0}\exp(\frac{x}{a})$ وتحويل الدالة $\tilde{\phi}(y) = e^{i\eta y}y^{iq}(1-y)^{\nu}\Theta(y)$ لتتحول إلى معادلة هيون المندمجة بالشكل:

$$y(1-y)\frac{d^2\Theta}{dy^2} + (1+2iq-2(iq+2)y+2i\eta y(1-y))\frac{d\Theta}{dy} + (i\eta(iq-1)+\tau-2-(i\eta(iq+2)+\tau)y)\Theta = 0,$$

وبالتالي يُعطى الحل النهائي بدالة هيون المندمجة:

$$\phi(x) = \left(-\frac{S_0}{2m_0}e^{\frac{x}{a}}\right)^{iq}\left(1+\frac{S_0}{2m_0}e^{\frac{x}{a}}\right)^{\nu}\exp\left(-i\eta\frac{S_0}{2m_0}e^{\frac{x}{a}}\right)$$
$$\times\left[C_1\mathrm{HeunC}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon;-\frac{S_0}{2m_0}e^{\frac{x}{a}}\right) + C_2\left(-\frac{S_0}{2m_0}e^{\frac{x}{a}}\right)^{-\beta}\mathrm{HeunC}\left(\alpha,-\beta,\gamma,\delta,\varepsilon;-\frac{S_0}{2m_0}e^{\frac{x}{a}}\right)\right]$$

مع معاملات محددة بدلالة ثوابت المسألة.
وفي الحالة الثانية، حيث تتغير الكتلة والكمون بشكل خطي مع الموضع:

$$V(x) = V_0 x, \quad m(x) = S_0 x + m_0,$$

يتم اللجوء إلى تحويلات متتالية للمتغير والدالة للوصول إلى صيغة معادلة هيون ثنائية الاندماج:

$$\frac{d^2\xi}{dy^2}+\left(\frac{\alpha+1}{y}-2y-\beta\right)\frac{d\xi}{dy}+\left((\gamma-\alpha-2)-\frac{\delta+\beta(\alpha+1)}{2y}\right)\xi=0,$$

ليكون حل معادلة كلين غوردن كالآتي :

$$\Psi(x)=\exp\left(-\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\eta}{\mu}x\right)\right)\cdot\left[C_1\text{HeunB}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta;\mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{S_0A_E}{m_0}\right)\right)\right.$$
$$\left.+C_2\left(\mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{S_0A_E}{m_0}\right)\right)^{-\alpha}\text{HeunB}\left(-\alpha,\beta,\gamma,\delta;\mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{S_0A_E}{m_0}\right)\right)\right].$$

هذا التطبيق يؤكد الفعالية العالية لدوال هيون الخاصة في معالجة مسائل فيزيائية كانت تُعتبر عصية على الحل باستخدام الدوال التقليدية مثل الدوال الهندسية الفائقة أو الدوال الأسية أو المثلثية، ويفتح آفاقاً جديدة لاستخدام هذه الدوال في فيزياء الكم والنسبية وفيزياء المواد المكثفة.

من خلال هذا الجهد، تسعى هذه المذكرة إلى تقديم مساهمة متواضعة في فهم وتطبيق معادلة هيون، وترسيخ مكانتها كأداة رياضية لا غنى عنها في الفيزياء النظرية الحديثة، وفتح آفاق جديدة لاستخدامها في وصف أنظمة فيزيائية أكثر تعقيداً.

الفصل 1:تطبيقات معادلات هيون في الفيزياء و سيرة ذاتية لكارل هيون

1.1 دوال هيون وبعض تطبيقاتها في الفيزياء (Heun Functions and Some of Their Applications in Physics)

1.1.1مقدمة تاريخية

صيغت هذه المعادلة لأول مرة من قبل عالم الرياضيات الألماني كارل هيون (Karl Heun) في عام 1889 في ورقة بحثية أساسية بعنوان "Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale durch Kettenbrüche darstellbar sind" (حول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التي يمكن تمثيل تكاملاتها بكسور مستمرة). كان هدف "هيون" هو دراسة المعادلات التفاضلية الخطية التي تمتلك أربع نقاط منفردة منتظمة (Regular Singular Points) على الكرة الريمانية (غالباً ما تُحول لتكون عند 0، 1، a، و ∞).

إن الاهتمام بها تزايد بشكل انفجاري مؤخراً، حيث تضاعف عدد الأبحاث المنشورة حولها في العقد الأخير مقارنة بكل الفترة السابقة منذ عام 1889 وحتى 2008.

و من بين أسباب عودة معادلات هيون إلى واجهة البحث العلمي بقوة في العقود الأخير هي :

١. **التقدم في الفيزياء النظرية:** وجد الفيزيائيون أن معادلات هيون بأشكالها المختلفة تظهر بشكل طبيعي عند حل بعض المسائل الفيزيائية .

٢. **تطور الحوسبة الرمزية (Symbolic Computation):** بفضل أنظمة الجبر الحاسوبي الحديثة (مثل Maple وMathematica)، أصبح من الممكن حساب حلول معادلات هيون وتوليد متسلسلاتها والتعامل مع خواصها التحليلية بدقة وسرعة، مما جعلها متاحة للتطبيق العملي بعد أن كانت حبيسة التعقيد النظري.

1.2 السيرة الذاتية: كارل هيون (1859–1929)

كان **كارل هيون** عالم رياضيات وميكانيكا ألمانيًا بارزًا، اشتهر بإسهاماته في المعادلات التفاضلية والميكانيكا النظرية، ولا يزال اسمه حيّاً حتى اليوم من خلال ``طريقة هيون" و``معادلات هيون".

1.2.1النشأة والتعليم

- **الميلاد:** ولد في 3 أبريل 1859 في مدينة **فيسبادن** (Wiesbaden)، التي كانت حينها عاصمة دوقية ناسو.
- **التعليم المدرسي:** التحق بالمدرسة الثانوية (Realschule) في فيسبادن.
- **الدراسة الجامعية (1878--1881):** درس الرياضيات والفيزياء في جامعتي **هاله وغوتنغن.**
  - في هاله: عمل مع **إدوارد هاين** في مجال التوافقيات الكروية.
  - في غوتنغن: درس تحت إشراف **إرنست شيرينغ وهيرمان أماندوس شوارتز.**
- **الدكتوراه (1881):** حصل على شهادته في التوافقيات الكروية والوظائف اللامعة.

1.2.2المسار المهني المبكر والحياة الأسرية

- **التدريس في إنجلترا:** بعد حصوله على لقب مدرس في جامعة ماربورغ، انتقل إلى إنجلترا ليعمل مدرساً في مدرسة ``أوبينغهام" لمدة عامين.
- **الحياة الأسرية:** تزوج من **هنرييت جاثو** (كانت تكبره بـ 14 عاماً وأرملة ولديها ولدان). أنجب منها طفلين: هوارد (1884) وتشارلوت (1891).
- **فترة ميونيخ (1886--1890):** عاد إلى ألمانيا وحصل على درجة الأستاذية (venia legendi) من جامعة ميونيخ، حيث عمل كمحاضر خاص (Privatdozent).
  - **التحديات:** لم يكن يتقاضى راتباً ثابتاً، بل اعتمد على رسوم الطلاب الضئيلة، مما اضطره لترك الجامعة لإعالة أسرته.

1.2.3 التحول نحو الميكانيكا والنجاح في برلين

في عام 1890، انتقل إلى **برلين** ليعمل مدرساً مدرسياً، وهناك بدأت ملامح مسيرته الثانية:

١. **الخلفية النظرية:** درس أعمال كبار العلماء مثل أويلر، لاغرانج، طومسون، وكلاين لتعميق فهمه للميكانيكا.

٢. **التأثير العلمي:** ألقى محاضرة في الجمعية الألمانية للرياضيات (DMV) عام 1886 حول التطبيقات التكنولوجية للميكانيكا، مما أثار إعجاب المجتمع العلمي.

٣. **تقرير DMV (1900):** كتب بحثاً مفصلاً تجاوز 100 صفحة حول المشكلات الحركية، وكان هذا البحث سبباً رئيسياً في ترشيحه لكرسي الأستاذية.

1.2.4الأستاذية في كارلسروه (1902--1922)

بناءً على توصية من **فيليكس كلاين**، عُين هيون أستاذاً للميكانيكا النظرية في جامعة كارلسروه التقنية.

أبرز طلابه ومساعديه:

- **جورج هامل:** أصبح لاحقاً عضواً في الأكاديمية البروسية للعلوم.
- **ماكس فينكلمان:** أصبح أستاذاً في جامعة يينا.
- **كورت فون ساندن:** خلفَ هيون في كرسيه العلمي في كارلسروه عام 1923.
- **فريتز نويثر:** (شقيق عالمة الجبر الشهيرة إيمي نويثر)، عمل مساعداً لهيون قبل انتقاله إلى بريسلاو ثم الاتحاد السوفيتي.

1.2.5 نتاج هيون العلمي (ثلاث فترات رئيسية)

الفترة	المكان	التركيز العلمي
1881--1889	ميونيخ	المعادلات التفاضلية الخطية ونظرية فوكس (نشر 12 ورقة بحثية).
1890--1902	برلين	التكامل العددي (طريقة **رونج-كوتا-هيون**) والميكانيكا الحركية.
1902--1922	كارلسروه	التركيز على **علم الحركة** (Kinematics) وتطبيقاته في الثورة الصناعية (مثل محركات الديزل).

ملاحظة تاريخية: طور هيون طريقة للتكامل العددي قام ``كوتا" بتحسينها لاحقاً، وهي المعروفة اليوم بطريقة ``رونج-كوتا"، وغالباً ما يُظلم اسم هيون بحذفه من المراجع التعليمية.

1.2.6 السنوات الأخيرة والوفاة

- **التكريم:** حصل على لقب (Geheimer Hofrat) عام 1912، والدكتوراه الفخرية من جامعة برلين التقنية عام 1921.
- **الأزمة الصحية:** أصيب بسكتة دماغية في عام 1921 أدت إلى شلله، مما أجبره على التقاعد المبكر في عام 1922.
- **الوفاة:** توفي في 10 يناير 1929 في مدينة **كارلسروه**، ولحقت به زوجته بعد ثلاث سنوات.

1.3الخصائص الرياضية لمعادلة هيون

- **بنية النقاط المفردة:** تتميز معادلة هيون بأنها معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تمتلك **أربع نقاط مفردة منتظمة** (Regular Singular Points) عند (0، 1، a، ومالانهاية).
- **علاقات التكرار:** على عكس المعادلات الأبسط، لا يمكن الحصول على علاقة تكرار بين معاملين متتاليين في حل المتسلسلة؛ بل توجد علاقة بين **ثلاثة معاملات أو أكثر.**

- **الحلول المحلية:** توجد مجموعة من 192 حلاً محلياً لمعادلة هيون، ناتجة عن تحويلات مختلفة للنقاط المفردة.
- **التمثيل التكاملي:** لا يوجد حتى الآن تمثيل لمعادلة هيون في شكل تكامل محدد يتضمن دوالاً أبسط، مما يزيد من تعقيدها الرياضي.

1.4 الأشكال المدمجة والخاصة (Confluent Forms)

تنتج أشكال مختلفة من المعادلة عند ``اندماج" نقاطها المفردة، ومن أبرزها:

- **المعادلة المدمجة (Confluent Heun):** وتظهر في حلول معادلة الموجة في خلفية مقياس ``كير" (Kerr metric).
- **المعادلة المدمجة الثنائية (Biconfluent):** وتستخدم في مسائل الذرة في وجود مجالات كهربائية (تأثير ستارك).
- **أشكال خاصة شهيرة:** تندرج تحت عائلة دوال هيون دوال أخرى معروفة في الفيزياء مثل دوال ``ماتيو" (Mathieu)، ودوال ``لاميه" (Lamé)، ودوال ``كولوم" الكروية.

1.5 تطبيقات معادلات هيون في الفيزياء

يرجع اهتمام الفيزيائيين المتزايد بهذه الدوال إلى عدم وجود مسائل ``بسيطة" متبقية، مما يضطرهم للتعامل مع مقاييس مكانية أكثر تعقيداً أو أبعاد أعلى. ومن أهم تطبيقاتها:

- **النسبية العامة وعلم الكون:**
  - تعد ضرورية لإيجاد حلول دقيقة لمعادلات الموجة في خلفيات هندسية معينة مثل مقياس ``كير" (Kerr) ومقياس ``شوارزشيلد" (Schwarzschild).
  - تظهر عند دراسة الاضطرابات المحورية في الثقوب السوداء، وفي الأبعاد الأعلى (مثل الأبعاد الخمسة).
- **الفيزياء الذرية وميكانيكا الكم:**
  - تستخدم في دراسة جزيء الهيدروجين الأيوني وتأثير ``ستارك" (Stark effect).
  - تظهر في حلول معادلة ``شرودنجر" لجهود فيزيائية معينة، مثل جهد ``مورس" المزدوج والجهود التي تتضمن قوى عكسية من رتب مختلفة.
- **فيزياء المادة المكثفة:**
  - تساعد في نمذجة الظواهر المتعلقة بحركة الاضطرابات (Dislocations) في المواد البلورية والانتشار الكمي فيها.

الفصل 2: بعض المبرهنات و التعريفات

2.1 الدالة f تحليلية عند z_0:

تعريف: نقول عن f أنها تحليلية عند z_0 إذا تحقق:

$$\exists r > 0,\ \exists (C_n)_{n\in\mathbb{N}^N},\ \forall z \in B_{\mathbb{K}^N}(z_0, r) : f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^N} C_n (z - z_0)^n$$

$$f : B_{\mathbb{K}^N}(z_0, r) \subset \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{C}$$

(تقارب مطلق)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^N} |C_n||z - z_0|^n < +\infty \quad \forall z \in B_{\mathbb{K}^N}(z_0, r) \tag{1}$$

$\mathbb{K}$ حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

$$(z - z_0)^n = \prod_{k=1}^{N} (z_k - z_{0,k})^{\eta_k}, \quad n = (\eta_k)_{k=1}^{T\ k=N} \in \mathbb{N}^N \tag{2}$$

2.2 التركيب العام لمخطط ريمان : Riemann P-symbol

$$P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n & \infty & \\ \rho_1^{(1)} & \rho_2^{(1)} & \dots & \rho_n^{(1)} & \lambda_1 & z \quad q \\ \rho_1^{(2)} & \rho_2^{(2)} & \dots & \rho_n^{(2)} & \lambda_2 & \end{matrix} \right\} \tag{٣}$$

وهي خاصة بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية .

$$\left(\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 \right) \tag{٤}$$

• **الصف الأول : مواقع نقاط التفرد المنتظمة z_i ولكي نقول عن z_i أنه نقطة تفرد منتظمة إذا تحقق :**

$$\begin{pmatrix} \lim_{z\to z_i}(z-z_i)p(z) \\ \lim_{z\to z_i}(z-z_i)^2 q(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \qquad (٥)$$

• **أما عن ∞ فيجب التحقق من كون :**

$$\begin{pmatrix} \lim_{|z|\to\infty} \frac{1/z}{\frac{p(z)}{1/z^2}} \\ \\ \lim_{|z|\to\infty} \frac{1/z^2}{q(z)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \qquad (٦)$$

الصف الثاني والثالث : حلول معادلة فروبنيوس لكل نقطة منتظمة وذلك بفرض

$$y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_i)^{n+\lambda} \qquad (٧)$$

وتعويضها في المعادلة التفاضلية نجد :

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_i)^{n+\rho_i-2} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (z-z_i)p(z)(n+\lambda) + (z-z_i)^2 q(z)\right] \qquad (٨)$$

$$(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (z-z_i)p(z)(n+\lambda) + (z-z_i)^2 q(z) = 0 \quad \forall z, \forall n \in \mathbb{N} \qquad (٩)$$

إذن :

$$\rho_i(\rho_i-1) + \rho_i \lim_{z\to z_i}(z-z_i)p(z) + \lim_{z\to z_i}(z-z_i)^2 q(z) = 0 \qquad (١٠)$$

أما إذا كانت ∞ نقطة تفرد منتظمة فإننا نقوم بتبديل المتغير :

$$y(z) = u(t) \quad \text{و} \quad z = \frac{1}{t} \qquad (١١)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dt}{dz}\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{du}{dt} = -t^2\dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dz^2} = 2t^3\dfrac{du}{dt} + t^4\dfrac{d^2u}{dt^2} \end{cases} \qquad (١٢)$$

فتصبح لدينا معادلة تفاضلية مكافئة لسابقتها :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \tilde{p}(t)\frac{du}{dt} + \tilde{q}(t)u = 0 \qquad (١٣)$$

ثم نحل المعادلة الآتية :

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda \lim_{t\to 0} t\tilde{p}(t) + \lim_{t\to 0} t^2\tilde{q}(t) = 0 \qquad (١٤)$$

2.3 الدالة فوق هندسية المعممة (Generalized Hypergeometric function) :

التعريف : يرمز لها بـ ${}_pF_q$ وتعرف بـ :

$${}_pF_q(a;b;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^{p}(a_k)_n}{\prod_{k=1}^{q}(b_k)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} \qquad (١٥)$$

$$(p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad (a,b) \in \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^q/-\mathbb{N}^q) \quad \textbf{حيث :} \qquad (١٦)$$

الخصائص الرئيسية :

- إذا كان $p \leq q$ السلسلة متقاربة من أجل كل $z \in \mathbb{C}$.
- إذا كان $p = q+1$ السلسلة متقاربة من أجل $|z| < 1$.يحدث لهذه المتسلسلة انقطاع إذا كان a_k عدداً صحيحاً سالباً
- إذا كان $p > q+1$ يجب أن يوجد k بحيث a_k عدد صحيح سالب .
- هي أحد حلول المعادلة التفاضلية الآتية بجوار 0 :

$$\left[z\prod_{i=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz} + b_i - 1\right) - z\prod_{j=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz} + a_j\right)\right] y(z) = 0 \qquad (١٧)$$

2.4الدالة غاما (Gamma function) :

التعريف :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t}dt, \quad Re(z) > 0 \qquad (١٨)$$

ونعرفها على $z \in \mathbb{C}$ حيث $-n-1 < Re(z) < -n$ مع $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)} \tag{١٩}$$

بعض الخصائص الرئيسية :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} \quad \forall z \notin -\mathbb{N} \tag{٢٠}$$

(تعريف غاوس)

$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}} \tag{٢١}$$

(تعريف فايرشتراس)

$$\zeta(s) \cdot \Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad Re(s) > 1 \tag{٢٢}$$

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{٢٣}$$

•

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)} \sqrt{\pi} \tag{٢٤}$$

صيغة ستيرلينغ :

$$\Gamma(x) \quad \sim_{x\to\infty} \quad \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x \exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)x^{2m-1}}\right) \tag{٢٥}$$

و x عدد حقيقي ، B_m أعداد برنولي حيث :

$$B_0 = 1, \quad \sum_{K=0}^{n} \binom{n+1}{K} B_K = 0 \tag{٢٦}$$

2.5 كثيرات حدود بيل غير المكتملة $B_{n,k}$: تعريف : ليكن $x \in \mathbb{C}^{n-k+1}$ منه :

$$B_{n,k}(x) = \sum_{j \in \mathcal{M}_{n,k}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n-k+1}(j_i!)} \cdot \prod_{i=1}^{n-k+1} \left(\frac{x_i}{i!}\right)^{j_i} \tag{٢٧}$$

$$\mathcal{M}_{n,k} = \left\{ \{j_i\}_{i=1,\dots,n-k+1} \subset \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} j_i = k \quad , \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} i j_i = n \right\} \tag{٢٨}$$

$B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}$ كثيرات حدود بيل المكتملة

2.6 صيغة فا دي برونو (Bruno's Formula Faa di) :

الصيغة : ليكن $(f,g) \in \mathcal{C}^n(Y,A) \times \mathcal{C}^n(X,Y)$
حيث A, X, Y **مجموعات مفتوحة في** $\mathbb{K}$ **.**

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \circ g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d^k f}{dg^k} \right) (g(x)) \cdot B_{n,k}(G_{n,k})(x) \tag{٢٩}$$

$$, \quad G_{n,k} = \left\{ \frac{d^i}{dx^i} g \right\}_{i=1,\dots,n-k+1} \quad , \quad x \in X \tag{٣٠}$$

و منه نستنتج أن :

$$\frac{(d^n f)_{(x)}}{(dg)^n_{(x)}} = \frac{\frac{d^n}{dx^n}(f \circ g^{-1})(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d^k f}{dg^k}(g^{-1})(x) \cdot B_{n,k}(G_{n,k})(x)}{B_{n,n}(G_{n,n})(x)} \tag{٣١}$$

$$n \in \mathbb{N}^*/\{1\}$$

$$\frac{(df)_{(x)}}{(dg)_{(x)}} = \left(\frac{1}{\frac{dg}{dx}(x)} \right) \left(\frac{d(f \circ g^{-1})}{dg} \right) (x) \tag{٣٢}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{df^{-1}}{df} \right) (f)(x) = \dfrac{1}{\frac{df}{dx}(x)} \\ \\ \left(\dfrac{df}{df^{-1}} \right) (f^{-1})(x) = \dfrac{1}{\frac{df^{-1}}{dx}(x)} \end{cases} \tag{٣٣}$$

2.7الدالة الإهليجية اليعقوبية (Elliptic functions Jacobi) : التعريف :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_k(\phi) = \displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = u \in \mathbb{R} \\ \\ \mathcal{F}_k^{-1}(u) = \phi \in \mathbb{R} \quad , \quad k \in [0,1] \end{cases} \tag{٣٤}$$

الدوال اليعقوبية هي كالآتي :

$$\begin{cases} sn(u,k) = \sin\phi \\ cn(u,k) = \cos\phi \\ dn(u,k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} \end{cases} \tag{٣٥}$$

<u>حالات خاصة :</u>

- $k = 0$:

$$sn(u,0) = \sin u \quad , \quad cn(u,0) = \cos u \quad , \quad dn(u,0) = 1 \tag{٣٦}$$

- **إذا كان** $k = 1$ **و** $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **منه :**

$$sn(u,1) = \tanh u \quad , \quad cn(u,0) = dn(u,0) = \operatorname{sech} u \tag{٣٧}$$

<u>المشتقات :</u>

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du} sn(u,k) = cn(u,k)\, dn(u,k) \\ \dfrac{d}{du} cn(u,k) = -sn(u,k)\, dn(u,k) \end{cases} \tag{٣٨}$$

<u>تعريفها بواسطة دوال ثيتا :</u>

$$\begin{cases} sn(u,k) = \dfrac{\theta_3(0,q)\cdot\theta_1(\hat{u},q)}{\theta_2(0,q)\cdot\theta_4(\hat{u},q)} \\ cn(u,k) = \dfrac{\theta_4(0,q)\cdot\theta_2(\hat{u},q)}{\theta_2(0,q)\cdot\theta_4(\hat{u},q)} \\ dn(u,k) = \dfrac{\theta_4(0,q)\cdot\theta_3(\hat{u},q)}{\theta_3(0,q)\cdot\theta_4(\hat{u},q)} \end{cases} \tag{٣٩}$$

$$q = e^{i\pi\tau} \quad , \quad \tau = i\frac{K'}{K} \quad , \quad \hat{u} = \frac{u}{2K} \quad \textbf{حيث} \tag{٤٠}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad , \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}} \quad , \quad 0 < k < 1 \tag{٤١}$$

مع

$$\begin{cases} \theta_1(z,q) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin((2n+1)\pi z) \\ \theta_2(z,q) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos((2n+1)\pi z) \\ \theta_3(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2n\pi z) \\ \theta_4(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi z) \end{cases} \tag{٤٢}$$

ملاحظة : بواسطة هذا التعريف يمكننا تمديد الدوال الإهليجية اليعقوبية على $\mathbb{C}$.

2.8مبرهنة بيانو (Peano's Existence Theorem) : ليكن

$$\forall a,b>0,\ \forall (t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \forall f\in\mathcal{C}\left([t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]\right) \tag{٤٣}$$

$$\exists y\in\mathcal{C}^1\left([t_0-h,t_0+h],[-M,M]\right)\ \cap\ \mathcal{C}\left([t_0-a,t_0+a],[y_0-b,y_0+b]\right)\ : \tag{٤٤}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = f(t,y(t))\ , \quad \forall t\in[t_0-h,t_0+h] \\ y(t_0)=y_0\ , \quad h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right). \\ M=\max\left\{|f(t,y)|\ :\ (t,y)\in[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]\right\} \end{cases} \tag{٤٥}$$

2.9نظرية بيكار - ليندلوف (Picard-Lindelöf Theorem) :

$$\forall a,b>0,\ \forall (t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \forall f\in\mathcal{C}\left([t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b],\mathbb{R}\right) \tag{٤٦}$$

$$, \ M_f<+\infty,\ \exists!\ y\in\mathcal{C}^1\left([t_0-h,t_0+h],[-M,M]\right)\ \cap\ \mathcal{C}\left([t_0-a,t_0+a],[y_0-b,y_0+b]\right)\ : \tag{٤٧}$$

(٤٨)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \\ \\ y(t_0) = y_0 \ , \quad h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right). \\ \\ M = \max\left\{|f(t,y)| \ : \ (t,y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]\right\} \\ \\ M_f = \sup\left\{\left|\dfrac{f(t,y_1) - f(t,y_2)}{y_1 - y_2}\right| \ : \ (t, y_1, y_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]^2\right\} \end{cases}$$

2.10 مبرهنة :

$$\forall r > 0, \ \forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N, \ \forall A \in \mathcal{C}\left([-r + t_0, t_0 + r], \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}^N)\right) \tag{٤٩}$$

$$, \ \exists! \ y \in \mathcal{C}^1([-r + t_0, t_0 + r], \mathbb{C}^N) \ : \ \begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = A(t) \cdot y(t) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{٥٠}$$

مع

$$\begin{cases} y(t) = \left(I + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t, t_0)\right) \cdot y_0 \\ \\ \Phi_n(t, t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \prod_{k=1}^{n} A(t_k)\, dt_n \ldots dt_2\, dt_1 \\ \\ \|\Phi_n(t, t_0)\| \leq \dfrac{|t - t_0|^n}{n!} \left(\sup\left\{\|A(t)\| \ : \ t \in [t_0 - r, t_0 + r]\right\}\right)^n \end{cases} \tag{٥١}$$

الفصل 3:معادلة هيون العامة

3.1 الصيغة الأساسية لمعادلة هيون $Heun$:

معادلة هيون العامة هي على النحو الآتي :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right)\frac{dy}{dz}+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-a)}y=0 \qquad (1)\dots \quad (٥٢)$$

حيث :

$$\begin{cases}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,q,a)\in\mathbb{C}^6\times\mathbb{C}/\{0,1\} \quad (parameters)\\ \gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1\end{cases}$$

نقاط التفرد المنتظمة عند $z=0,1,a,\infty$ والمعادلة من النوع الفوكسي $(Fuchsian\ type)$.

المعلم a يحدد موقع نقطة التفرد الثالثة ويمكن تسميتها بمعلم التفرد $(singularity\ parameter)$.

$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ الأسس عند نقاط التفرد ويمكن تسميتها معلمات الأسس $(exponent\ parameters)$.

أما q تسمى المعلم الإضافي أو المساعد $(accessory\ or\ auxiliary)^{parameter}$.

المعادلة (1) تكافئ (2) :

$$z(z-1)(z-a)\frac{d^2y}{dz^2}(z)+\left[\gamma(z-1)(z-a)+\delta z(z-a)+\varepsilon z(z-1)\right]\frac{dy}{dz}(z) \qquad (٥٣)$$

$$+(\alpha\beta z-q)y(z)=0 \quad \dots(2) \qquad (٥٤)$$

3.2 تحويلات معادلة هيون :

3.2.1تحويل المتغير :

$$z \longrightarrow$$

z (1)	$1-z$ (2)	$\frac{1}{z}$ (3)	$\frac{1}{1-z}$ (4)
$\frac{z}{z-1}$ (5)	$\frac{z-1}{z}$ (6)	$\frac{z}{a}$ (7)	$\frac{a-z}{a}$ (8)
$\frac{a}{z}$ (9)	$\frac{a}{a-z}$ (10)	$\frac{z}{z-a}$ (11)	$\frac{z-a}{z}$ (12)
$\frac{z-a}{1-a}$ (13)	$\frac{z-1}{a-1}$ (14)	$\frac{1-a}{z-a}$ (15)	$\frac{a-1}{z-1}$ (16)
$\frac{z-a}{z-1}$ (17)	$\frac{z-1}{z-a}$ (18)	$\frac{z-a}{a(z-1)}$ (19)	$\frac{(a-1)z}{a(z-1)}$ (20)
$\frac{a(z-1)}{z-a}$ (21)	$\frac{a(z-1)}{(a-1)z}$ (22)	$\frac{z-a}{(1-a)z}$ (23)	$\frac{(1-a)z}{z-a}$ (24)

هذه التحويلات لا ينتج بشكل عام نفس نقاط التفرد لكن قد تكون هناك حالات خاصة .

3.2.2 تحويل القوة للدالة y : المقصود هو

$$y(z) = z^{\rho}(z-1)^{\sigma}(z-a)^{\tau}\widetilde{y}(z) \qquad (٥٥)$$

الفائدة من هذا التحويل هو جعل معادلة هيون أكثر ملائمة أي التحكم بالدالة $\widetilde{P}$ و $\widetilde{Q}$ حيث :

$$\frac{d^2\widetilde{y}}{dz^2}(z) + \widetilde{P}(z)\frac{d\widetilde{y}}{dz}(z) + \widetilde{Q}(z)\widetilde{y}(z) = 0 \qquad (٥٦)$$

$$\begin{cases} \tilde{P}(z) = \dfrac{\gamma+2\rho}{z} + \dfrac{\delta+2\sigma}{z-1} + \dfrac{\varepsilon+2\tau}{z-a} \\ \tilde{Q}(z) = \dfrac{\rho(\rho-1+\gamma)}{z^2} + \dfrac{\sigma(\sigma-1+\delta)}{(z-1)^2} + \dfrac{\tau(\tau-1+\varepsilon)}{(z-a)^2} \\ \qquad + \dfrac{2\rho\sigma+\gamma\sigma+\delta\rho}{z(z-1)} + \dfrac{2\rho\tau+\varepsilon\rho+\gamma\tau}{z(z-a)} + \dfrac{2\sigma\tau+\delta\tau+\varepsilon\sigma}{(z-1)(z-a)} \\ \qquad + \dfrac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} \end{cases} \qquad (٥٧)$$

فمثلاً، إذا كان $\rho = -\frac{\gamma}{2}\ ,\ \sigma = -\frac{\delta}{2}\ ,\ \tau = -\frac{\varepsilon}{2}$ فإن $\widetilde{P} = 0$

أو إذا كان $(\tau, \delta, \rho) \in \{0, 1-\varepsilon\} \times \{0, 1-\delta\} \times \{0, 1-\gamma\}$
فإن المتعلق بـ z^2 و $(1-z)^2$ و $(z-a)^2$ يصبح غير موجود في $\widetilde{Q}$.

أما إذا كان $(\tau, \sigma, \rho) \in \{0, 1-\varepsilon\} \times \{0, 1-\delta\} \times \{0, 1-\gamma\}$
فإن معلمات الأسس $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ مع المعلم الإضافي q تصبح $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}, \hat{q})$ وكلها متعلقة بالمعلمات السابقة.

3.2.3 تحويل معادلة ذات أربع نقاط مفردة منتظمة إلى صيغة هيون:

النقاط المفردة $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$ و $W : \mathbb{C}/\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \longrightarrow \mathbb{C}$
حيث :

$$\frac{d^2W}{dz^2} + P(z)\frac{dW}{dz} + q(z)W(z) = 0 \tag{٥٨}$$

$$P(z) = \sum_{r=1}^{4} \frac{1 - \alpha_r - \alpha'_r}{z - a_r} \tag{٥٩}$$

$$q(z) = \frac{1}{G(z)} \left(\lambda + \frac{\sum_{r=1}^{4} \alpha_r \alpha'_r \left. \frac{dG}{dz} \right|_{z=a_r}}{z - a_r} \right) \tag{٦٠}$$

$$\sum_{r=1}^{4} \alpha_r + \alpha'_r = 2 \ , \ G(z) = \prod_{r=1}^{4} (z - a_r)$$

لنحول النقاط (a_1, a_2, a_4) إلى $(0, 1, \infty)$ نستعمل :

$$\zeta = \frac{z - a_1}{z - a_4} \cdot \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_1} \tag{٦١}$$

فتصبح a بعد هذا التحويل إلى :

$$a := \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_4} \cdot \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_1} \tag{٦٢}$$

أما تحويل الدالة فهو :

$$W(\zeta) = \zeta^{\alpha_1}(\zeta - 1)^{\alpha_2}(\zeta - a)^{\alpha_3} y(\zeta) \tag{٦٣}$$

3.2.4معادلة ذات ثلاث نقاط مفردة محدودة ونقطة مفردة عند اللانهاية:

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^3 \times \{\infty\}$ نقاط مفردة منتظمة للمسألة

$$\frac{d^2W}{dz^2} + P(z)\frac{dW}{dz} + q(z)W = 0 \tag{٦٤}$$

$$P(z) = \sum_{r=1}^{3} \frac{1 - \alpha_r - \alpha'_r}{z - a_r} \tag{٦٥}$$

$$q(z) = \frac{1}{H(z)} \left(\alpha\alpha' z + \mu + \frac{\sum_{r=1}^{3} \alpha_r \alpha'_r \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=a_r}}{z - a_r} \right) \tag{٦٦}$$

$$H(z) = \prod_{r=1}^{3} (z - a_r) \tag{٦٧}$$

تحويل المتغير هو كالآتي :

$$\zeta = \frac{z - a_1}{a_2 - a_1} \tag{٦٨}$$

حيث نحول a_1, a_2 إلى $0, 1$ ونضع : $a := \dfrac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}$

3.2.5 التحويل الأسي للدالة :

$$y(z) = e^{\kappa z} \hat{y}(z) \quad , \quad \kappa \neq 0$$

مفيد في التعامل مع الصيغ المدمجة $C.H.E$ لكن له تأثير في جعل النقطة المفردة ∞ غير منتظمة .
عموماً هو لا ينطبق على معادلتي هان القياسية .

3.2.6التحويل التربيعي : $z = u^2$

التأثير : 1) تصبح النقطة المفردة الأولية عند $z = 0$ أو ∞ نقطة عادية.

2) تظل النقطة المفردة المنتظمة (غير أولية) منتظمة مع مضاعفة أسسها .

3) تبقى النقطة المفردة غير المنتظمة عند 0 أو ∞ غير منتظمة، مع مضاعفة رتبتها .

4) النقطة المفردة حيث $z \neq 0, \infty$ تعوض بنقطتين أخريين حيث $u_0 = \pm z^{\frac{1}{2}}$.

3.2.7التحويل التربيعي العكسي : $z = u^{\frac{1}{2}}$:

مفيدة في التعامل مع نقاط المفردة المتناظرة $(z_0 = \pm 1)$ فتصبح نقطة مفردة واحدة .
قد تظهر نقطة تفرد عنده $z_0 = 0$ لأن $\left(\dfrac{du^{\frac{1}{2}}}{dv} = \dfrac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \right)$.

3.2.8تحويل بعض المعادلات المثلثية :

لدينا المعادلة التالية:

$$(1 + A\cos 2\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2} + B\sin(2\theta)\frac{dy}{d\theta} + (C + D\cos 2\theta)y = 0 \quad \dots(\mathcal{F}) \tag{٦٩}$$

حيث A و B و C ثوابت من $\mathbb{C}$.

نقاط تفرد المعادلة $(\mathcal{F})$ قيمتها منتهية (∞ ليست نقطة تفرد) وتحقق
$1 + A\cos(2\theta) = 0$ مع $\theta \in \mathbb{C}$. إذن نستنتج أن :

$$\theta \in \mathbb{C}/\mathbb{R} \iff A \in \mathbb{C}/\,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) \tag{٧٠}$$

بالتالي المجموعة $\mathcal{S} = \{(x + iy) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ |y| < \Delta\}$ لا تحتوي على أي نقاط تفرد

$$(\forall \theta \in \mathcal{S} :\ 1 + A\cos\theta \neq 0) \quad \text{أي} \tag{٧١}$$

و $1 - A^2 = \hat{A}_2^2,\ \hat{A}_1^2$

و

$$\Delta = \frac{1}{2}\min\left(\left|\ln\left|\frac{-1 + \hat{A}_1}{A}\right|\right|,\ \left|\ln\left|\frac{-1 + \hat{A}_2}{A}\right|\right|\right) \tag{٧٢}$$

مع تحويل مناسب للدالة y حيث $y(x) = l(x)\hat{y}(x)$ يمكننا إنشاء معادلة مكافئة لـ $(\mathcal{F})$ بحيث تحقق خصائص معادلة هيل $(Hill)$ وتعريفها الأساسي هو :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}(x) + q(x)\cdot y(x) = 0 \\ \exists T > 0 \quad : \quad q(x+T) = q(x) \quad \forall x \quad (q\text{دالة دورية}) \end{cases}$$

نقوم بالتحويل الآتي : $z = \sin^2\theta$

إذن :

بعد التحويل تصبح المعادلة $(\mathcal{F})$ كالآتي :

(٧٣)

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{(1-2a)B}{2(z-a)}\right]\frac{dy}{dz} + \left[\frac{(1-2a)Dz - \frac{1}{2}(1-2a)(C+D)}{2z(z-1)(z-a)}\right]y = 0 \quad \dots(\mathcal{F}')$$

حيث

$$a = \frac{1 + A}{2A} \tag{٧٤}$$

مع العلم إذا كان $A \in \mathbb{C}/[-1,1]$ فإن $a \in \mathbb{C}/[0,1]$
لدينا قيم المعلمات لمعادلة هيون العامة :

$$\gamma = \delta = \frac{1}{2} \quad , \quad \varepsilon = \left(\frac{1}{2} - a\right) B$$

و β و α هي جذور لكثير الحدود الآتي :

$$t^2 - \left(\frac{1}{2} - a\right) Bt + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a\right) D = 0 \qquad (٧٥)$$

إذا كان $A = 0$ فإن المعادلة $(\mathcal{F})$ بعد التحويل تصبح :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(B + \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right)\frac{dy}{dz} + \left(\frac{\frac{1}{2}Dz + \frac{1}{4}(C+D)}{z(z-1)}\right) y = 0 \qquad (٧٦)$$

و هذه أحد أشكال معادلة هيون المندمجة

الشكل المثلثي لمعادلة هيون العامة : بوضع $z = \sin^2\theta$

فإنها تتحول إلى :

$$(a - \sin^2\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2} + \big[(a - \sin^2\theta)(2\gamma - 1)\cot\theta - (2\delta - 1)\tan\theta \qquad (٧٧)$$

$$- \varepsilon \sin 2\theta\big]\frac{dy}{d\theta} + 4(\alpha\beta\sin^2\theta - q)y = 0 \qquad (٧٨)$$

3.2.9 تحويل بعض المعادلات الجبرية الخاصة :

المعادلة المدروسة هي :

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - Kz\frac{dy}{dz}(z) + g(z)y(z) = 0 \qquad (٧٩)$$

يمكن لـ g أن يمتلك نقاط تفرد
لدينا طريقتين لتحويل هذه المعادلة المدروسة إلى معادلة هيون عامة أو متجمعة.

الطريقة الأولى : $z = 2\xi - 1$

المعادلة بعد التحويل تصبح :

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - 1}\right)\frac{dy}{d\xi} - \frac{g(2\xi - 1)}{\xi(\xi - 1)}y = 0 \qquad (٨٠)$$

$$z = 1, -1 \quad \longrightarrow \quad \xi = 1, 0$$

وأساسات التفرد لكل من $0,1$ هي $-\frac{1}{2}K$.

الطريقة الثانية : (عندما تكون g دالة زوجية)

يمكننا استخدام التحويل التربيعي العكسي : $t = z^2$

نتيجة هذا التحويل هي :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} + \frac{\frac{1}{2}+K}{t-1}\right)\frac{dy}{dt} - \frac{\frac{1}{4}g(t^2)}{t(t-1)}y = 0 \qquad (٨١)$$

3.2.10التحويل إلى الصورة الإهليجية اليعقوبية :

نضع : $a = K^{-2}$ مع $z = \mathrm{sn}^2(u,K)$, $K \in]0,1[$

إذن

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{sn}(u,K)\,\mathrm{cn}(u,K)\,\mathrm{dn}(u,K)} \cdot \dfrac{dy}{du} \\ \\ 4z(1-z)(1-K^2z)\dfrac{d^2y}{dz^2} = \\ \dfrac{d^2y}{du^2} - \dfrac{\mathrm{cn}^2(u,K)\,\mathrm{dn}^2(u,K) - \mathrm{sn}^2(u,K)\,\mathrm{dn}^2(u,K) - K^2\,\mathrm{sn}^2(u,K)\,\mathrm{cn}^2(u,K)}{\mathrm{cn}(u,K)\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,K)} \cdot \dfrac{dy}{du} \end{cases} \qquad (٨٢)$$

بعد التحويل ينتج لدينا :

$$\frac{d^2y}{du^2} + \left[(2\gamma-1)\frac{\mathrm{cn}(u,K)\mathrm{dn}(u,K)}{\mathrm{sn}(u,K)} - (2\delta-1)\frac{\mathrm{sn}(u,K)\mathrm{dn}(u,K)}{\mathrm{cn}(u,K)} - (2\varepsilon-1)K^2 \cdot \right. \qquad (٨٣)$$

$$\left. \times \frac{\mathrm{sn}(u,K)\mathrm{cn}(u,K)}{\mathrm{dn}(u,K)}\right]\frac{dy}{du} + \left(4\alpha\beta K^2\mathrm{sn}^2(u,K) - 4K^2q\right)y = 0 \qquad (٨٤)$$

إذا كان $\varepsilon = \gamma = \delta = 0,5$ فإن المعامل $\dfrac{dy}{du}$ يصبح غير موجود في المعادلة بعد التحويل

3.3 حلول معادلة هيون :

3.3.1 حلول معادلة غوس :

لدينا المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dz^2} + \left[\dfrac{\gamma}{z} + \dfrac{\delta}{z-1}\right]\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{\alpha\beta}{z(z-1)}y = 0 \\ \alpha + \beta = \gamma + \delta + 1 \end{cases}$$

حلولها المحلية الرئيسية هي :

بجوار 0

$$y(z) = C_1\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) + C_2 z^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma;2-\gamma;z) \qquad (٨٥)$$

بجوار 1

$$y(z) = C_1\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\delta;1-z) + C_2(1-z)^{1-\delta}\,{}_2F_1(\alpha+1-\delta,\beta+1-\delta;2-\delta;1-z) \quad (٨٦)$$

بجوار ∞

$$y(z) = C_1 z^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha-\gamma+1;\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right) + \qquad (٨٧)$$

$$C_2 z^{-\beta}\,{}_2F_1\left(\beta,\beta-\gamma+1;\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right) \qquad (٨٨)$$

ملاحظة : الحلول عبارة عن دوال فوق هندسية ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ ويجب أن يكون $\gamma \notin \mathbb{N}$ و $(C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2$.

هناك تعبيرات أخرى للحلول مثل $z^{\sigma_1}(1-z)^{\sigma_2}\,{}_2F_1(\alpha^*,\beta^*;\gamma^*;\xi(z))$ حيث يتم اختيار σ_1,σ_2 بحيث $\alpha^*,\beta^*,\gamma^*$ دوال تآلفية لـ α,β,γ و $\xi(z)$ دالة تعين $(\infty,1,0)$ إلى نفسها . قد يطابق أحد أزواج حلول جوار 0 بأحد حلول جوار 1 و تسمى هذه الحلول بالدوال فوق الهندسية المتدهورة . (hypergeometric functions Degenerate)

و تأخذ الدوال فوق هندسية المتدهورة بعض هذه الأشكال الآتية : $z^{\sigma_1}(1-z)^{\sigma_2}P_n(z)$ حيث
$(\sigma_1,\sigma_2)\in\{0,1-\gamma\}\times\{0,1-\delta\}$ و P_n كثير حدود و m عدد طبيعي

$$\begin{cases} \text{الفئة I} : \sigma_1=\sigma_2=0 \quad \text{فإن} \quad \alpha=-m \text{ أو } \beta=-m \\ \text{الفئة II} : \sigma_1=1-\gamma,\ \sigma_2=0 \quad \text{فإن} \quad \gamma-\alpha=-m-1 \text{ أو } \gamma-\beta=-m-1 \\ \text{الفئة III} : \sigma_1=0,\ \sigma_2=1-\delta \quad \text{فإن} \quad \beta=m+\gamma \text{ أو } \alpha=m+\gamma \\ \text{الفئة IV} : \sigma_1=1-\gamma,\ \sigma_2=1-\delta \quad \text{فإن} \quad \beta=m+1 \text{ أو } \alpha=m+1 \end{cases}$$

3.3.2 الحلول المحلية : متسلسلة القوى الأساسية :

$$\begin{cases} r\in\mathbb{N}^*\ ,\ R_r c_{r+1} - (Q_r+q)c_r + P_r c_{r-1} = 0 : \text{إذا كان} \\ -qc_0 + a\gamma c_1 = 0 \quad , \quad c_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_r = (r+1)(r+\gamma)a \quad : \text{حيث} \qquad \gamma\notin\mathbb{N} \\ Q_r = r\left[(r-1+\gamma)(1+a)+a\delta+\varepsilon\right] \\ P_r = (r-1+\alpha)(r-1+\beta) \end{cases}$$

نضع $|a|>1$ و $\lim_{r\to\infty}\frac{c_{r+1}}{c_r}=\rho$ و منه :

$$\frac{R_r}{r^2}\cdot\frac{c_{r+1}}{c_r}-\frac{Q_r+q}{r^2}+\frac{P_r}{r^2}\cdot\frac{c_{r-1}}{c_r}=0 \qquad (٨٩)$$

$$a\rho^2-(1+a)\rho+1=0 \qquad \text{و} \qquad \rho\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho=1\ ,\ \frac{1}{a} \qquad (٩٠)$$

نستنتج أن العبارة $\sum_{r=0}^{+\infty}c_r z^r$ حل لمعادلة هيون إذا كان : $|z|<1/|a|$.

3.3.3 تحديد المتسلسلة : لنفرض أنّ $\alpha\in-\mathbb{N}$ و q اختياري بحيث $c_{-\alpha+1}=0$ و منه $P_{-\alpha+1}=0$ و $c_{-\alpha+2}=0$ و بالتالي يصبح الحل كثير حدود من الدرجة $-\alpha$.
كما نعلم إن $c_1=\frac{q_0}{ad}$, $c_0=1$ وكليهما كثير حدود بالنسبة لـ q .
لنبرهن بالتراجع على أنّ $c_n=\hat{P}_n(q)$ لنفرض أن c_n كثير حدود من الدرجة n نستنتج أن
$c_{n+1}=\left(\frac{Q_{n+1}+q}{R_{n+1}}\right)\hat{P}_n(q)-P_{n+1}\hat{P}_{n-1}(q)$ إذن $c_{n+1}=\hat{P}_{n+1}(q)$.

$c_{-\alpha+1}=0$ يعني $\hat{P}_{-\alpha+1}(q)=0$ منه يوجد $-\alpha+1$ جذر لـ $\hat{P}_{-\alpha+1}$ وهذا يبرهن على وجود $-\alpha+1$ حل لمعادلة هيون باختيار قيم محددة لـ q .
لدينا حالة خاصة أخرى إذا كان $\alpha,\beta\in-\mathbb{N}$ منه يوجد $-\max(\alpha,\beta)+1$ حل كثير حدود من الدرجة $-\max(\alpha,\beta)$
و $-\min(\alpha,\beta)+\max(\alpha,\beta)$ كثير حدود من الدرجة $-\min(\alpha,\beta)$.

نعبر عن حل المحلي بجوار 0 لمعادلة هيون بـ : $Hl(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$.

هناك حلول أخرى بجوار 0 لمعادلة هيون تكتب على الشكل $(1-z)^{\sigma_1}(z-a)^{\sigma_2}Hl\left(a^*,q^*;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\delta^*;\xi(z)\right)$ حيث :

$(\sigma_1,\sigma_2)\in\{0,1-\delta\}\times\{0,1-\varepsilon\}$ و $\xi(z)$ تلك الدوال المرقمة بـ $(1)\ldots(5)\ldots(7)\ldots(11)\ldots(20)\ldots(24)$
علما أن $a^*,q^*,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\delta^*$ ناتجة عن تحويل z إلى $\xi(z)$

3.3.4 كثيرات حدود هيون :

تعريف : كثير حدود هيون هو : $Hp(z)=z^{\sigma_1}(1-z)^{\sigma_2}(z-a)^{\sigma_3}P(z)$

مع P كثير حدود و $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\{0,1-\gamma\}\times\{0,1-\delta\}\times\{0,1-\varepsilon\}$

نضع $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ منه $Hp(z)=P(z)$ و P كثير حدود من الدرجة N

إذن $Hp(z)=\sum_{r=0}^{N}c_r z^r$ و c_r تحقق الآتي : $(r=1,2,\ldots,N-1)$

$$\begin{cases}-qc_0+a\gamma c_1=0 \quad , \quad c_0=1\\ P_r c_{r-1}-(q+Q_r)c_r+R_r c_{r+1}=0\\ P_N c_{N-1}-(Q_N+q)c_N=0\end{cases}$$

وذلك بالتحكم بـ : $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, q$ لكي نحصل على هذه النتيجة

لدينا 8 حالات يكون أحد حلول معادلة هيون كثير حدود هيون و هي كالآتي :

① $\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad$ و $\quad \alpha \in -\mathbb{N}$

② $\sigma_2 = \sigma_3 = 0\ ,\ \sigma_1 = 1-\gamma \quad$ و $\quad \gamma - a \in \mathbb{N}^*$

③ $\sigma_1 = \sigma_3 = 0\ ,\ \sigma_2 = 1-\delta \quad$ و $\quad \delta - a \in \mathbb{N}^*$

④ $\sigma_3 = 0\ ,\ \sigma_2 = 1-\delta\ ,\ \sigma_1 = 1-\varepsilon \quad$ و $\quad \varepsilon - a \in -\mathbb{N}_0^*$

⑤ $\sigma_3 = 1-\varepsilon\ ,\ \sigma_2 = \sigma_1 = 0 \quad$ و $\quad \varepsilon - a \in \mathbb{N}^*$

⑥ $\sigma_3 = 1-\varepsilon\ ,\ \sigma_1 = 1-\gamma\ ,\ \sigma_2 = 0 \quad$ و $\quad \delta - a \in -\mathbb{N}^*$

⑦ $\sigma_3 = 1-\varepsilon\ ,\ \sigma_2 = 1-\delta\ ,\ \sigma_1 = 0 \quad$ و $\quad \gamma - a \in -\mathbb{N}^*$

⑧ $\sigma_3 = 1-\varepsilon\ ,\ \sigma_2 = 1-\delta\ ,\ \sigma_1 = 1-\gamma \quad$ و $\quad \alpha \in \mathbb{N}^*/\{1\}$

3.3.5 حلول معادلة هيون :المتسلسلات فوق هندسية

نفرض أنّ $a \in \mathbb{C}/_{[}0,1]$ ونضع : $\omega = \gamma + \delta - 1$ و $\gamma \notin -\mathbb{N}$

و دالة التوسع هي : $y_v(z) := {}_2F_1(-v, v+\omega; \gamma; z)$ و $y = \sum_{r\in\mathbb{Z}} c_r y_{v_0+r}$

ولدينا المؤثرات التالية :

$$\begin{cases} \Lambda_1 := z(z-1)\dfrac{d^2}{dz^2} + (\gamma(z-1) + \delta z)\dfrac{d}{dz} \\ \Lambda_2 := z(z-1)\dfrac{d}{dz} \\ (Lg)(z) := ((z-a)\Lambda_1 g + \varepsilon\Lambda_2 g + (\alpha\beta z - q)g)(z) \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} \Lambda_1 y_v = v(v+\omega)y_v \\ Ly_v(z) = (\varepsilon\Lambda_2 y_v + zG_v y_v - H_v y_v)(z) \\ zy(z) = A_v y_{v+1}(z) + B_v y_v(z) + C_v y_{v-1}(z) \\ \Lambda_2 y_v(z) = \hat{A}_v y_{v+1}(z) + \hat{B}_v y_v(z) + \hat{C}_v y_{v-1}(z) \end{cases}$$

حيث :

$$\begin{cases} G_v = (v+\alpha)(v+\beta) - \varepsilon\omega \\ H_v = av(v+\omega) + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_v = -\dfrac{(v+\omega)(v+\gamma)}{(2v+\omega)(2v+\omega+1)} \quad , \quad \hat{A}_v = vA_v \\ B_v = \dfrac{2v(v+\omega)+\gamma(\omega-1)}{(2v+\omega+1)(2v+\omega-1)} \quad , \quad \hat{B}_v = \dfrac{v(v+\omega)(\gamma-\varepsilon)}{(2v+\omega+1)(2v+\omega-1)} \\ C_v = -\dfrac{v(v+\delta-1)}{(2v+\omega)(2v+\omega-1)} \quad , \quad \hat{C}_v = -(v+\omega)C_v \end{cases}$$

إذن : $Ly_v = D_v y_{v-1} + E_v y_v + F_v y_{v+1}$

حيث :

$$\begin{cases} D_v = -\dfrac{v(v+\omega-\alpha)(v+\omega-\beta)(v+\delta-1)}{(2v+\omega)(2v+\omega-1)} \\ E_v = \dfrac{\varepsilon v(v+\omega)(\gamma-\delta)+(v+\omega+\alpha\beta)\left(2v(v+\omega)+\gamma(\omega-1)\right)}{(2v+\omega+1)(2v+\omega-1)} - av(v+\omega)-q \\ \quad = -g_v - q \\ F_v = \dfrac{(v+\alpha)(v+\beta)(v+\gamma)(v+\omega)}{(2v+\omega)(2v+\omega+1)} \end{cases}$$

و منه إذا كان y حل لمعادلة هيون يكافئ $Ly = 0$.

$$Ly = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{r\in\mathbb{Z}} c_r L y_{v_0+r} = 0 \tag{٩١}$$

العلاقة التراجعية الخاصة بـ c_r هي كالآتي :

$$\begin{cases} F_{v_0+r-1}c_{r-1} + E_{v_0+r}c_r + D_{v_0+r+1}c_{r+1} = 0 \\ D_{v_0}c_0 = 0 \quad , \quad E_{v_0}c_0 + D_{v_0+1}c_1 = 0 \end{cases}$$

$$(D_{v_0} = 0) \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \in \{0, \alpha-\omega, \beta-\omega, 1-\delta\} = \mathcal{V}$$

إذا كان $v_0 \in \mathcal{V}$ فإن $y = \sum_{r=0}^{+\infty} c_r y_{v_0+r}$ لأن y تحليلية عند النقطة 0 .

لما $v_0 = 0$ فإن y_{v_0+r} هي كثير حدود من الدرجة r .

لما $v_0 = 1-\delta = \gamma-\omega$ فإن y_{v_0+r} هي على شكل $(1-z)^{1-\delta}P_r(z)$ حيث P_r كثير حدود من الدرجة r .

و كلا الحالتين لما $v_0 \in \{0, 1-\delta\}$ تجعل y_{v_0+r} دالة فوق هندسية متدهورة
أما الباقي لانعتبر y_{v_0+r} دالة فوق هندسية متدهورتين .

3.3.6 بناء دوال هيون من الفئة الأولى (I) :

لكي تصبح المتسلسلة الآتية $\sum_{n=0}^{\infty} c_r y_r$ كثير حدود من الدرجة n يجب أين يكون c_r متتالية تحقق العلاقة التراجعية الآتية :

$$\begin{cases} E_0 c_0 + D_1 c_1 = 0 \\ F_{r-1}c_{r-1} + E_r c_r + D_{r+1}c_{r+1} = 0 \quad r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ F_{n-1}c_{n-1} + E_n c_n = 0 \end{cases} \tag{٩٢}$$

إنّ شرط اتساق هذه المعادلات يعطي معادلة كثير حدود من الدرجة n للمعلمة q

لدينا

$$\begin{cases} z y_v(z) = A_v y_{v+1}(z) + B_v y_v(z) + C_v y_{v-1}(z) \\ \lim\limits_{v\to\infty} A_v = \lim\limits_{v\to\infty} C_v = -\frac{1}{2} \lim\limits_{v\to\infty} B_v = -\frac{1}{4} \\ \lim\limits_{v\to\infty} \left(\frac{y_{v+1}}{y_v}\right)(z) = \varphi(z) \end{cases} \qquad (٩٣)$$

و منه $\varphi^2(z) + (4z-2)\varphi(z) + 1 = 0$

إذن : $|\varphi(z)| = \left|\sqrt{z} + \sqrt{z-1}\right|^2$

و لدينا
$$\begin{cases} F_{r-1}c_{r-1} + E_r c_r + D_{r+1}c_{r+1} = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} \frac{D_r}{-\frac{1}{4}r^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{E_r}{(\frac{1}{2}-a)r^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{F_r}{-\frac{1}{4}r^2} = 1 \\ \lim\limits_{r\to\infty} \frac{c_{r+1}}{c_r} = \rho \end{cases}$$

و منه $\begin{cases} \rho^2 + 2(2a-1)\rho + 1 = 0 \\ \text{إذن} \rho = -2a - 1 \pm 2\sqrt{a(a-1)} \end{cases}$

إذا افترضنا هذا $\lim\limits_{r\to\infty} \left|\frac{c_{r+1}\, y_{r+1}(z)}{c_r\, y_r(z)}\right| < 1$ فإن هذه المتسلسلة $\sum_{r=0}^{\infty} c_r y_r$ تتقارب تقاربا مطلقا على الليماكون الإهليجي الآتي :

$$\Rightarrow \quad \left|\sqrt{z} + \sqrt{z-1}\right|^2 < \frac{1}{|\rho|_{\max}} \quad \text{(الليميكون (Limacon) الإهليجي)}$$

$$|\rho|_{\max} = \max\left(|\rho| \in \mathbb{R}^+ : \rho^2 + 2(2a-1)\rho + 1 = 0\right)$$

وبما أن $c_r = \hat{P}_r(q)$ فإنه يمكننا اختيار q بحيث يتقارب الحل تقارباً معززاً و يشمل النقطة 1 أي :

$$\left|\sqrt{z} + \sqrt{z-1}\right|^2 < \frac{1}{|\rho|_{\min}}$$
$$|\rho_{\min}| = \min\left\{|\rho| \in \mathbb{R}^+ : \rho^2 + 2(2a-1)\rho + 1 = 0\right\} \quad \text{مع}$$

يمكن الحصول على دوال هيون بالنسبة لأي زوج آخر من النطاق المفردة (singularities) عن طريق إجراء تحويل مناسب لإزاحة النقاط المفردة مما ينقل هذه النقاط إلى 0 و 1 .

أي توجد دالة g من بين 24 تحويلاً أساسياً حيث :

$$\begin{cases} (S_1, S_2) \in \{0, 1, a, \infty\}^2 \quad , \quad S_1 \neq S_2 \\ \text{و} \\ g(S_1) = 0 \quad , \quad g(S_2) = 1 \quad , \quad g(\xi) = z \\ \text{و} \\ S_1 \text{ ينتمي إلى الليميكون الإهليجي بعد التحويل} \end{cases}$$

3.3.7 بناء دوال هيون من أصناف أخرى :

إذا أردنا حلاً من هذا الشكل $y(z) = z^{\sigma_1}(z-1)^{\sigma_2} f(z)$ نقوم بتعويضها في المعادلة التفاضلية لهيون لنحصل على :

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) + \left(\frac{\hat{\gamma}}{z} + \frac{\hat{\delta}}{z-1} + \frac{\hat{\epsilon}}{z-a} \right) \frac{df}{dz}(z) + \frac{\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} z - \hat{q}}{z(z-1)(z-a)} f(z) = 0$$

حيث : $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{0, 1-\gamma\} \times \{0, 1-\delta\}$

ثم نقوم بنفس الخطوات السابقة . وقد درسنا سابقاً حالة : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

3.3.8 حل شميدت لمعادلة هيون التفاضلية :

أخذ شميدت (Schmidt) دالة التوسع كالآتي : $\hat{y}_v(z) := \frac{z^v}{\Gamma(1-\omega-2v)} \cdot {}_2F_1\left(-v, 1-\gamma-v; 1-\omega-2v; \frac{1}{z}\right)$

وقد عبّر عن الحل بـ : $y(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \hat{y}_{n+v}(z)$

- إذا حدث انقطاع من اليسار $(\forall n \in \mathbb{N} : c_{-n} = 0)$ فإن y حل لمعادلة هيون يتقارب في قطعة مستقيمة بين 0 و 1 مع التقارب المعزز يصبح قطع ناقص يكون a على حافته
- إذا حدث انقطاع من اليمين $(\forall n \in \mathbb{N} : c_n = 0)$ فإن y حل لمعادلة هيون يتقارب في ليماكون إهليجي يشمل ∞ مع التقارب المعزز قد يشمل a

3.4 علاقات التعامد :

3.4.1 علاقة التعامد الفردية لدوال هيون :

نكتب معادلة هيون بصيغة المؤثر : $M_z\, y = q\, y$

حيث :

$$M_z := z(z-1)(z-a)\frac{d^2}{dz^2} + [\gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \epsilon z(z-1)]\, \frac{d}{dz} + \ \alpha\beta z$$

W هي دالة الوزن $W(z) := z^{\gamma-1}(z-1)^{\delta-1}(z-a)^{\epsilon-1}$ و $P(z) := z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\epsilon}$

المؤثر M_z ليس مؤثراً ذاتياً بينما L_z مؤثر ذاتي و نعرفه كالآتي : $L_z := W \cdot M_z$

L_z مؤثر ذاتي أي : $\int_C W g L_z(f) = \int_C W f L_z(g)$

و بالتالي : $L_z = \frac{d}{dz}\left(P \cdot \frac{d}{dz}\right) + \alpha\beta z \cdot W$

وتأخذ معادلة هيون صيغة المؤثر الذاتي (self-adjoint form) كالآتي : $L_z\, y = q \cdot W \cdot y$

y_1 و y_2 حل لمعادلة هيون مقابل لقيم مختلفة لـ q_1 و q_2 أي :

$$\begin{cases} L_z y_1 = q_1 W y_1 \\ L_z y_2 = q_2 W y_2 \end{cases}$$

و منه نستنتج :

$$\begin{cases} y_2 L_z y_1 = q_1 W y_1 y_2 \\ y_1 L_z y_2 = q_2 W y_2 y_1 \end{cases} \quad \Rightarrow (q_1 - q_2) \int_C W y_1 y_2 = \int_C y_2 L_z y_1 - y_1 L_z y_2$$

$$\frac{d}{dz}\left(P\left(y_2 \cdot \frac{dy_1}{dz} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{dz}\right)\right) = y_2 \frac{d}{dz}\left(P\frac{dy_1}{dz}\right) - y_1 \frac{d}{dz}\left(P\frac{dy_2}{dz}\right) \quad \text{وبما أنَّ :}$$

$$(q_2 - q_1) \int_C (W y_1 y_2)(z) dz = \left[P\left(y_2 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_2}{dz}\right)(z)\right]_C \quad \text{فَإِنَّ :}$$

نفرض أنّ : (1) : $a \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$

(2) : y_1 و y_2 محدودتين عند 1 و0

(3): $Re(\gamma), Re(\delta) > 0$

إذَا تَمَّ إختيار المسار C القطعة المستقيمة $[0,1]$ و $q_1 \neq q_2$
فَإِنَّ :

$$\int_0^1 W(z) y_1(z) y_2(z)\, dz = 0$$

إذا استبدلنا المسار المستقيم $[0,1]$ بمسار حلقة بوخهامر $\mathcal{L}$ (Pochhammer loop) حول 0 و 1 فإنه يمكننا إزالة الفرض (3) .

$$\int_{\mathcal{L}} W(z) y_1(z) y_2(z)\, dz = 0 \quad \forall \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

أما إذا كان$\{(0,0)\}$

$$\begin{cases} (\sigma_1, \sigma_2) \in \Big(\{0, 1-\gamma\} \times \{0, 1-\delta\}\Big) \setminus \{(0,0)\} \\ y_i(z) = z^{\sigma_1}(z-1)^{\sigma_2} f_i(z) \qquad\qquad i = 1,2 \end{cases}$$

فنقوم بالتحويل لندرس التعامد بالنسبة ل f_1 و f_2.
لنعرف $\theta_m := \int_{\mathcal{L}} W(z) y_m^2(z)\, dz$

حيث y_m و $\dfrac{dy_m}{dz}$ محدودتين عند 0 و 1 .

لتكن g دالة حيث يمكننا كتابتها على هذا الشكل : $g = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m y_m$ و $c_m \in \mathbb{C}$ ،

إذن : $g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\dfrac{1}{\theta_m} \int_{\mathcal{L}} g(s) y_m(s) W(s)\, ds\right] y_m(z)$

أظهر العالمان "لامب" و "وارد" (Ward and Lambe) أنه من أجل قيم معينة على المعلمات فإنَّ $(\forall m \in \mathbb{N}^* : \theta_m \neq 0)$

3.4.2 علاقات التعامد المزدوج لكثيرات حدود هيون :

ليكن y_1 و y_2 كثير حدود هيون من أحد الأصناف الثمانية و $y_1 := Hp^{(X)}_{n_1,m_1}$ و $y_2 := Hp^{(X)}_{n_2,m_2}$ حيث :

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

n : درجة كثير حدود هيون (Heun) .

m : ترتيب قيم q_m التي تحقق كثير حدود هيون من الدرجة n .

دالة الوزن : $W(s,t) := (s-t)(st)^{\gamma-1}\Big[(s-1)(t-1)\Big]^{\delta-1}\Big[(s-a)(t-a)\Big]^{\epsilon-1}$

فَإِنَّ : $\iint\limits_{\mathcal{L}}\iint\limits_{\mathcal{L}'} y_1(s)y_1(t)y_2(s)y_2(t)W(s,t)\,ds\,dt = 0$

حيث $n_2 \neq n_1$ أو $q_{m_2} \neq q_{m_1}$.

$\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ كلتا كفتا حلقتي بوخهامر حول $\{0,1\}$ و $\{0,a\}$ على الترتيب .

لنفترض أنَّ F يمكن التعبير عنها بهذا الشكل :

$$F(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m} c_{n,m}y_{n,m}(t)y_{n,m}(s)$$

حيث يكون الجمع على m محدوداً، اعتماداً على عدد الحلول المستقلة خطياً ، عادة ما يكون الجمع من $m = 0$ إلى $m = n$

إذن :

$$\begin{cases} c_{n,m} = \dfrac{1}{\phi_{n,m_{\mathcal{L}}}}\iint\limits_{\mathcal{L}'} F(s,t)y_{n,m}(s)y_{n,m}(t)W(s,t)\,ds\,dt \\ \text{مع} \\ \phi_{n,m} := \iint\limits_{\mathcal{L}}\iint\limits_{\mathcal{L}'} y^2_{n,m}(s)y^2_{n,m}(t)W(s,t)\,ds\,dt \end{cases}$$

3.4.3 المعادلات التكاملية والعلاقات التكاملية

3.4.3.1 المعادلات والعلاقات التكاملية الخطية :

نكتب معادلة هيون بصيغة المؤثر : $\mathcal{M}_z\, y = q\, y$

حيث :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_z := z(z-1)(z-a)\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + [\gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \epsilon z(z-1)]\,\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \qquad\qquad + \alpha\beta z \\ W(z) = z^{\gamma-1}(z-1)^{\delta-1}(z-a)^{\epsilon-1} \\ P(z) = z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\epsilon} \end{cases} \quad \text{مع}$$

ليكن y حل لمعادلة هيون و $K(z,t)$ تحقق المعادلة التفاضلية :

$$\begin{cases} (\mathcal{M}_z - \mathcal{M}_t)K(z,t) = 0 \\ \left[P(t)\left(\dfrac{\partial K}{\partial t}y(t) - K\dfrac{dy}{dt}\right)\right]_C = 0 \end{cases}$$

. حيث C مسار تكامل في$\mathbb{C}$
فإنَّ Y المعرف بـ :

$$Y(z) := \int_C K(z,t)y(t)w(t)\,dt$$

هو حل لمعادلة هيون شرط أن يكون التكامل موجودا و متقاربا C .
الإثبات :

Y حل لمعادلة هيون يعني : $\mathcal{M}_z\, Y = q \cdot Y$

و منه :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_z(Y)(z) &= \int_C \mathcal{M}_z(K)(z,t)\cdot w(t)\cdot y(t)\,dt \\
&= \int_C \mathcal{M}_t(K)(z,t)\,w(t)\cdot y(t)\,dt \\
&= \int_C L_t(K)(z,t)\cdot y(t)\,dt \\
&= \int_C \frac{\partial}{\partial t}\left(P\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)(K)(z,t)\cdot y(t)\,dt + \alpha\beta\int_C t\cdot w(t)\cdot y(t)\,dt \\
&= \left[P(t)\left(y(t)\frac{\partial K}{\partial t}(z,t) - K(z,t)\frac{dy}{dt}(t)\right)\right]_C + \alpha\beta\int_C t\cdot w(t)y(t)\,dt \\
&\quad + \int_C \frac{d}{dt}\left(P(t)\cdot\frac{dy}{dt}(t)\right)\cdot K(z,t)\,dt \\
&= \alpha\beta\int_C t\cdot w(t)\cdot y(t)\,dt + q\int_C K(z,t)\cdot w(t)\cdot y(t)\,dt - \alpha\beta\int_C t\cdot w(t)y(t)\,dt \\
&= q\cdot Y(z)
\end{aligned}
$$

3.4.3.2 البحث عن النوى $K(z,t)$:

قام كل من لامبي ووورد وإيديلي (Lambe and Ward, Erdélyi) بالتحويل القطبي الآتي :

$$
\begin{cases}
\cos^2\theta = \dfrac{zt}{a} \\
\sin^2\theta\cos^2\phi = -\dfrac{(z-a)(t-a)}{a(1-a)} \\
\sin^2\theta\sin^2\phi = \dfrac{(z-1)(t-1)}{1-a}
\end{cases}
$$

تصبح المعادلة التفاضلية التي نشترط أن يحققها K كالآتي :

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial\phi^2} + \left[(1-2\gamma)\tan\theta + 2\left(\delta+\epsilon-\frac{1}{2}\right)\cot\theta\right]\frac{\partial K}{\partial\theta}\right. \\
\left. + \left[(1-2\delta)\cot\phi - (1-2\epsilon)\tan\phi\right]\frac{\partial K}{\partial\phi} - 4\alpha\beta K\right) = 0 \quad (٩٤)
\end{aligned}
$$

هذه المعادلة التفاضلية الجزئية قابلة للفصل أي يمكننا افتراض : $K = \Theta(\theta)\cdot\Phi(\phi)$

بعد التعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية نجد :

$$
(\mathcal{S})\begin{cases}
\dfrac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \left[(1-2\gamma)\tan\theta + (2\delta+2\epsilon-1)\cot\theta\right]\dfrac{d\Theta}{d\theta} - (4\alpha\beta+\lambda)\Theta = 0 \\
\dfrac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \left[(1-2\delta)\cot\phi - (1-2\epsilon)\tan\phi\right]\dfrac{d\Phi}{d\phi} + (\lambda-2\alpha\beta)\Phi = 0
\end{cases}
$$

حيث $\lambda \in \mathbb{C}$.

نقوم بعدها بالتحويل الآتي لـ $(\mathcal{S})$ حيث :

$$\begin{cases} \xi = \sin^2\theta \\ \psi = \sin^2\phi \end{cases}$$

بعد التحويل كلتا معادلتي $(\mathcal{S})$ تكون من الشكل :

$$\frac{d^2\Phi}{d\psi^2} + (\overline{a}\psi + b)\frac{d\Phi}{d\psi} + (c\psi^2 + d\psi + e)\,\Phi = 0$$

الثوابت a, b, c, d, e متعلقة بالمعلمات $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$.

نضع $\Phi(\psi) = e^{-\frac{\overline{a}}{2}\psi^2 - b\psi}\hat{\Phi}(\psi)$ و منه :

$$\frac{d^2\hat{\Phi}}{d\psi^2} + \left(\overline{\alpha}\psi^2 + \overline{\beta}\psi + \overline{\gamma}\right)\hat{\Phi}(\psi) = 0$$

$\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ ثوابت متعلقة بـ a, b, c, d, e .
إذا كان $\overline{\alpha}$ غير معدوم وبتحويل متغير $\psi = \hat{a}y + \hat{b}$ مناسب تصبح المعادلة لوبيير (Weber) :

$$\frac{d^2\hat{\Phi}}{dy^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^2\right)\hat{\Phi}(y) = 0$$

ν ثابت متعلق بـ $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$.

و إذا كان $\overline{\alpha}$ معدوم و $\overline{\beta}$ غير معدوم وبتحويل متغير $\psi = \hat{a}y + \hat{b}$ مناسب تصبح المعادلة لإيري (Airy) :

$$\frac{d^2\hat{\Phi}}{dy^2} - y\,\hat{\Phi}(y) = 0$$

3.4.3.3التطور الشكلي ثنائي الخطية للنواة :

لنفرض أنَّ K من هذا الشكل حيث :

$$\begin{cases} K(t,z) = \sum\limits_m c_m(t)y_m(z) \\ y_m(t) = \lambda_m \int_C K(z,t)W(z)y_m(z)\,dz \end{cases}$$

إذن :

$$K(t,z)=\sum_m \left(\lambda_m \int_C W(z)y_m^2(z)\,dz\right)^{-1} y_m(t)\cdot y_m(z)$$

وأما إذا كان

$$\begin{cases} K(z,t)=\sum_m c_m(t)\cdot y_m(z) \\ \text{و} \\ \Upsilon_m(t)=\mu_m\int_C K(z,t)W(z)y_m(z)\,dz \end{cases}$$

إذن :

$$K(z,t)=\sum_m \frac{1}{\mu_m\int_C y_m^2(z)W(z)\,dz}\cdot\Upsilon_m(t)\cdot y_m(z)$$

3.4.4 المعادلات والعلاقات التكاملية غير الخطية :

ليكن y حل لمعادلة هيون و $H(z,s,t)$ حل للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(t-z)\mathcal{M}_s(H)+(z-s)\mathcal{M}_t(H)+(s-t)\mathcal{M}_z(H)=0$$

مع

$$\begin{cases} \left[s^\gamma(s-1)^\delta(s-a)^\epsilon\left(y(s)\dfrac{\partial H}{\partial s}-H\dfrac{dy}{ds}(s)\right)\right]_{C_s}=0 \\ \left[t^\gamma(t-1)^\delta(t-a)^\epsilon\left(y(t)\dfrac{\partial H}{\partial t}-H\dfrac{dy}{dt}(t)\right)\right]_{C_t}=0 \end{cases}$$

$$Y(z):=\int_{C_1}\int_{C_2} H(z,s,t)y(s)y(t)W(s,t)\,ds\,dt$$

Y حل لمعادلة هيون التفاضلية إذا كان المسار C_1 و C_2 مناسبين والتكامل موجود و متقارب .

الإثبات : لدينا مسبقاً :

$$\int_{\mathcal{L}} L_\psi(\mathcal{C})(\varphi,\psi)\cdot f(\psi)\,d\psi =$$

$$\left[P(\psi)\left(f(\psi)\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial\psi}(\varphi,\psi)-\mathcal{C}(\varphi,\psi)\frac{df}{d\psi}(\psi)\right)\right]_{\mathcal{L}}+q\int_{\mathcal{L}}\mathcal{C}(\varphi,\psi)w(\psi)f(\psi)\,d\psi$$

إذن :

$$\begin{cases} \iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2} (t-z)y(s)w(s)y(t)w(t)\mathcal{M}_s(H)(z,s,t)\,ds\,dt \\ = \int\limits_{C_1}(t-z)y(t)w(t)\int\limits_{C_2} y(s)L_s(H)(z,s,t)\,ds\,dt \\ = q\iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2}(t-z)y(t)w(t)y(s)w(s)H(z,s,t)\,ds\,dt \end{cases}$$

مع

$$\begin{cases} \iint\limits_{C_2}\iint\limits_{C_1} (z-s)y(s)w(s)y(t)w(t)\mathcal{M}_t(z,s,t)\,dt\,ds \\ = \int\limits_{C_2}(z-s)y(s)w(s)\int\limits_{C_1} y(t)L_t(H)(z,s,t)\,dt\,ds \\ = q\iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2}(z-s)y(s)w(s)y(t)w(t)H(z,s,t)\,ds\,dt \end{cases}$$

و من المعادلات الموجودة في الحاضنتين السابقتين نستنتج ما يلي :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(Y)(z) &= \iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2} y(t)y(s)W(s,t)\mathcal{M}_z(H)(z,s,t)\,ds\,dt \\ &= \iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2}(s-t)w(s)y(s)w(t)y(t)\mathcal{M}_z(H)(z,s,t)\,ds\,dt \\ &= \iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2}(z-t)y(t)w(t)y(s)w(s)\mathcal{M}_s(H)(z,s,t)\,ds\,dt \\ &\quad + \iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2}(s-z)y(s)w(s)y(t)w(t)\mathcal{M}_t(H)(z,s,t)\,ds\,dt \\ &= q\iint\limits_{C_1}\iint\limits_{C_2}(s-t)y(s)w(s)y(t)w(t)H(z,s,t)\,ds\,dt \\ &= q\,Y(z) \end{aligned}$$

3.4.4.1 البحث عن الأنوية : لنقم بالتحويل :

$$\begin{cases} u^2 = \dfrac{s\cdot t\cdot z}{a^2} \\ v^2 = \dfrac{(s-a)(t-a)(z-a)}{a(1-a)} \\ w^2 = -\dfrac{(s-1)(t-1)(z-1)}{a^2(1-a)} \end{cases}$$

إذن المعادلة $(\mathcal{A})$ تصبح بعد التحويل :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+\frac{2\gamma-1}{u}\cdot\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{2\delta-1}{v}\cdot\frac{\partial H}{\partial v}+\frac{2\epsilon-1}{w}\cdot\frac{\partial H}{\partial w}=0 \quad \ldots(\widehat{\mathcal{A}})$$

المعادلة $(\widehat{\mathcal{A}})$ قابلة للفصل نضع : $H = U(u)\cdot V(v)\cdot \widehat{W}(w)$

بعد التعويض نجد :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{du^2} + \left(\dfrac{2\gamma - 1}{u}\right)\dfrac{dU}{du} + \lambda_1 U = 0 \\ \dfrac{d^2V}{dv^2} + \dfrac{2\delta - 1}{v}\dfrac{dV}{dv} + \lambda_2 V = 0 \\ \dfrac{d^2\widehat{W}}{dw^2} + \dfrac{2\epsilon - 1}{w} \cdot \dfrac{d\widehat{W}}{dw} + \lambda_3 \widehat{W} = 0 \end{cases} \qquad (٩٥)$$

مَعَ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

لكي نحل المعادلات التفاضلية العادية السابقة سنستعمل حل هذه المعادلة :

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{\Omega}{x}\frac{d\xi}{dx} + \lambda\xi = 0$$

نضع : $\xi(x) = x^{\frac{1-\Omega}{2}}\eta(x)$

نحصل على :

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\eta}{dx} + \left(\lambda - \frac{\left(\frac{1-\Omega}{2}\right)^2}{x^2}\right)\eta = 0$$

إذا كان $\lambda \neq 0$ نضع : $X = \sqrt{\lambda}\, x$

فإن :

$$\frac{d^2\eta}{dX^2} + \frac{1}{X}\frac{d\eta}{dX} + \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\Omega}{2}\right)^2}{X^2}\right)\eta = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية لبيسل (Bessel) .

3.4.4.2 التوسع الشكلي للنواة :

إذا أمكن كتابة H كالآتي :

$$H(z,s,t) = \sum_n \sum_m c_{m.n}(z) y_{m.n}(s) y_{m.n}(t)$$

حيث :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_z y_{m,n} = q_{m,n} y_{m,n} \\ \forall\, m \neq n \quad : \quad q_{m,n} \neq q_{n,m} \\ \phi_{m,n} = \iint\limits_{\mathcal{L}} \iint\limits_{\mathcal{L}'} W(s,t) y_{m,n}^2(s) \cdot y_{m,n}^2(t)\, ds\, dt \neq 0 \quad \forall\, m,n \end{cases} \tag{٩٦}$$

إذن

$$c_{m.n}(z) = \frac{1}{\phi_{m.n\mathcal{L}}} \iint\limits_{\mathcal{L}'} W(s,t) \cdot H(z,s,t) \cdot y_{m.n}(s) y_{m.n}(t)\, ds\, dt$$

حيث $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ حلقتي بوخهامر حول $(1,0)$ و $(a,0)$ على الترتيب .

لنبرهن إذا كان $q_1 \neq q_2$ و كان $\mathcal{M}_z y_i = q_i y_i \quad , \quad i \in \{0,1\}$

فإن : $\iint\limits_{\mathcal{L}} \iint\limits_{\mathcal{L}'} W(s,t) y_1(t) y_2(t) y_1(s) y_2(s)\, ds\, dt = 0$

الإثبات :

لدينا

$$(q_2 - q_1) \int\limits_g W(z) y_1(z) y_2(z)\, dz = \left[P\left(y_2 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_2}{dz} \right)(z) \right]_g$$

و منه:

$$(q_2 - q_1) \iint\limits_{\mathcal{L}} \iint\limits_{\mathcal{L}'} W(s,t) y_1(t) y_1(s) y_2(t) y_2(s)\, ds\, dt =$$

$$\left[P\left(y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt} \right)(t) \right]_{\mathcal{L}} \cdot \int\limits_{\mathcal{L}'} s \cdot W(s) y_1(s) y_2(s)\, ds$$

$$+ \left[P\left(y_1 \frac{dy_2}{ds} - y_2 \frac{dy_1}{ds} \right)(s) \right]_{\mathcal{L}'} \cdot \int\limits_{\mathcal{L}} t \cdot W(t) y_1(t) y_2(t)\, dt$$

وبما أنَّ $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ حلقتي بوخهامر حول $(1,0)$ و $(a,0)$ على الترتيب و $q_1 \neq q_2$ فإنَّ :

$$\iint\limits_{\mathcal{L}} \iint\limits_{\mathcal{L}'} W(s,t) y_1(t) y_1(s) y_2(t) y_2(s)\, ds\, dt = 0$$

الفصل 4 : معادلات هيون الأخرى (Other Heun Equations)

4.1معادلة هيون المندمجة : Confluent Heun equation

• الشكل القياسي لمعادلة هيون المندمجة هو :

$$\frac{d^2u}{dz^2}(z)+\left(A+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{z^2}+\frac{E}{(z-1)^2}\right)u(z)=0$$

الشكل القانوني لمعادلة هيون المندمجة هو:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\epsilon\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha z-q}{z(z-1)}u=0 \quad \dots(\mathcal{P})$$

تمتلك هذه المعادلة نقطتين شاذتين منتظمتين عندما يكون $z\in\{0,1\}$ ونقطة شاذة غير منتظمة من الرتبة 1 عند $z=\infty$.

$\text{HeunC}(q,\alpha,\gamma,\delta,\epsilon;z)$ حل محلي بجوار 0 وهي متسلسلة قوى تحليلية عندما يكون $|z|<1$ و $\gamma\notin\mathbb{Z}^-$ ، و نعرفها كالآتي :

$$\text{HeunC}(q,\alpha,\gamma,\delta,\epsilon;z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

حيث
$$\begin{cases}P_nb_n=Q_nb_{n-1}+R_nb_{n-2}\\ b_0=1 \quad , \quad b_{-1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n = n(\gamma - 1 + n) \\ Q_n = -q + (n-1)(\gamma + \delta - \epsilon + n - 2) \\ R_n = (n-2)\epsilon + \alpha \end{cases} \quad \text{مع}$$

منه حل $(\mathcal{P})$ بجوار 0 هو :

$$u(z) = C_1\,\text{HeunC}(q,\alpha,\gamma,\delta,\epsilon;z) + C_2\,z^{1-\gamma}\,\text{HeunC}(\overline{q},\overline{\alpha},\overline{\gamma},\delta,\epsilon;z) \quad , \quad |z|<1$$

$$\text{حيث :} \quad \begin{cases} \overline{q} = q - (1-\gamma)(\delta - \epsilon) \\ \overline{\alpha} = \alpha + \epsilon(1-\gamma) \\ \overline{\gamma} = 2 - \gamma \end{cases}$$

أما بالنسبة لحل المعادلة التفاضلية بجوار 1 فنقوم بتحويل المتغير الآتي :$y = 1 - z$ و
$u(1-y) = u(z) = \overline{u}(y)$ و منه تصبح المعادلة $\mathcal{P}$ كالآتي :

$$\frac{d^2\overline{u}}{dy^2} + \left(\frac{-\delta}{y} + \frac{\gamma}{y-1} - \epsilon\right)\frac{d\overline{u}}{dy} + \frac{-\alpha y + \alpha - q}{y(y-1)}\overline{u} = 0$$

ثمَّ نقوم بنفس الخطوات السابقة التي قمنا بها في جوار 0 .

<u>ملاحظة :</u>
يُعرف مشتق الدالة HeunC ذات الرتبة n لما $|z|<1$ بالعبارة الآتية:

$$\frac{d^n}{dz^n}\text{HeunC}(q,\alpha,\gamma,\delta,\epsilon;z) = \sum_{m=n}^{\infty} b_m \frac{m!}{(m-n)!} z^{m-n} \qquad (٩٧)$$

و يُعرف مشتق الدالة HeunC ذات الرتبة n لما $z \to 0$ بالعبارة الآتية:

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\text{HeunC}(q,\alpha,\gamma,\delta,\epsilon;z) = n!\,b_n \qquad (٩٨)$$

4.2 معادلة هيون ثنائية الاندماج : Biconfluent Heun Equation

الشكل القياسي لمعادلة هيون ثنائية الاندماج :

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}(z)+\left(Az^2+Bz+C+\frac{D}{z}+\frac{E}{z^2}\right)\Psi(z)=0$$

و يعرف شكل القانوني لمعادلة هيون ثنائية الاندماج كالأتي :

$$z\frac{d^2\Psi}{dz^2}+\left(1+\alpha-\beta z-2z^2\right)\frac{d\Psi}{dz}+\left((\gamma-2-\alpha)z-\frac{1}{2}(\delta+\beta(1+\alpha))\right)\Psi=0$$

تمتلك هذه المعادلة التفاضلية نقطة مفردة منتظمة عند $z=0$ ونقطة غير منتظمة من الرتبة 2 عند $z=\infty$.

$\mathrm{HeunB}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$ حل محلي بجوار 0 وهي متسلسلة قوى تحليلية نصف قطر تقاربها غير محدود وتعرف كالآتي:

$$\mathrm{HeunB}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{(1+\alpha)_m}\frac{z^m}{m!}$$

حيث :
$$\begin{cases}A_{m+1}=G_mA_m+H_mA_{m-1}\\A_{-1}=0\quad,\quad A_0=1\quad,\quad \alpha\notin\mathbb{Z}^-\end{cases}$$

مع
$$\begin{cases}G_m=\dfrac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha+2m)\right]\\H_m=m(m+\alpha)(\gamma-\alpha-2m)\end{cases}$$

و منه حلول معادلة هيون ثنائية الاندماج هي :

$$\Psi(z)=C_1\,\mathrm{HeunB}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)+C_2\,z^{-\alpha}\,\mathrm{HeunB}(-\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$$

يُعرف مشتق الدالة HeunB ذات الرتبة n و $z \in \mathbb{C}$ بالعبارة الآتية:

$$\frac{d^n}{dz^n}\text{HeunB}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{A_m(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{(1+\alpha)_m} \cdot \frac{z^{m-n}}{(m-n)!} \qquad (٩٩)$$

و يُعرف مشتق الدالة HeunB ذات الرتبة n لما $z \to 0$ بالعبارة الآتية:

$$\lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n}\text{HeunB}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z) = \frac{A_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{(1+\alpha)_n} \qquad (١٠٠)$$

4.3 معادلة هيون مزدوجة الاندماج : Double confluent Heun equation

صيغتها القياسية

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}(z) + \left(A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \frac{E}{z^4}\right)\Phi(z) = 0$$

صيغتها القانونية

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}(z) + \left(\frac{\delta}{z^2} + \frac{\gamma}{z} + 1\right)\frac{d\Phi}{dz}(z) + \left(\frac{\alpha z - q}{z^2}\right)\Phi(z) = 0$$

تمتلك هذه المعادلة نقطتين مفردتين غير منتظمتين من الرتبة الأولى وهي عند $z = 0$ و $z = \infty$.

4.4 معادلة هيون ثلاثية الاندماج : Triconfluent Heun equation

صيغتها القياسية

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2}(z) + \left(Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E\right)\Theta(z) = 0$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2}(z) - \left(3z^2 + \gamma\right)\frac{d\Theta}{dz} + (\alpha z + \beta)\,\Theta(z) = 0$$

تمتلك هذه المعادلة نقطة مفردة واحدة غير منتظمة عند $z = \infty$.

حلول معادلة هيون ثلاثية الاندماج بجوار 0:

$$\Theta(z) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} z^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} z^n \qquad (١٠١)$$

حيث تُعرّف $a_n^{(1)}$ و $a_n^{(2)}$ بالعلاقة التراجعية الآتية:
(١٠٢)

$$\begin{cases} a_{n+2}^{(i)} = \dfrac{\gamma(n+1)a_{n+1}^{(i)} - \beta a_n^{(i)} + (3n - 3 - \alpha)a_{n-1}^{(i)}}{(n+2)(n+1)} & n \geq 2,\ i = 1, 2 \\ a_2^{(i)} = \dfrac{\gamma a_1^{(i)} - \beta a_0^{(i)}}{2} & i = 1, 2 \\ \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_0^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

من أجل كل $z \in \mathbb{C}$ تتقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} z^n$ تقارباً مطلقاً مع $i = 1, 2$.

الفصل 5 : تطبيقات حول استعمالات معادلات هيون في الفيزياء

مقدمة حول تطبيقات معادلة هيون $(Heun)$ في الفيزياء بصفة خاصة معادلة كلين - غوردن $(K-G)$.
نعلم أن الشكل العام لمعادلة كلين غوردن لجسيم ذي كتلة $m(x)$ و كمون $V(x)$ متغيرين مع الموضع يعطى بالعبارة الآتية :

$$\left[m(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right)+(E-V(x))^2-m^2(x)\right]\phi(x)=0\ldots(\mathcal{O}) \quad (١٠٣)$$

$\phi(x)$حيث دالة الموجة وحل لـ $(\mathcal{O})$ بالمفهوم الكلاسيكي .

4.1 حالة 1: كتلة و كمون متغيرين بشكل أسي مع الموضع :

تعطى كل عبارة $m(x)$ كتلة الجسيم المرتبط بالموضع و $V(x)$ الكمون الذي يخضع له في هذه الحالة كالآتي :

$$\begin{cases} m(x)=m_0+\frac{S_0}{2}\exp\left(\frac{x}{a}\right) \\ V(x)=\frac{V_0}{2}\exp\left(\frac{x}{a}\right) \end{cases} \quad (١٠٤)$$

علماً أن S_0 و V_0 و a ثوابت غير معدومة و m_0 ثابت كيفي موجب .
بعد تعويض $m(x)$ و $V(x)$ في $(\mathcal{O})$ نجد :

$$\left[\left(m_0+\frac{S_0}{2}e^{\frac{x}{a}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m_0+\frac{S_0}{2}e^{\frac{x}{a}}}\cdot\frac{d}{dx}\right)+ \quad (١٠٥)$$

$$\left(E-\frac{V_0}{2}e^{\frac{x}{a}}\right)^2-\left(m_0+\frac{S_0}{2}e^{\frac{x}{a}}\right)^2\right]\phi(x)=0\ldots(\mathcal{O}_1) \quad (١٠٦)$$

• **لنقم بحل معادلة $(\mathcal{O}_1)$:**
نقوم بتبديل المتغير الآتي :

$$(\mathcal{S})\ldots\begin{cases} y=-\frac{S_0}{2m_0}\exp\left(\frac{x}{a}\right) \\ \frac{d\phi}{dx}=+\frac{y}{a}\frac{d\tilde{\phi}}{dy} \quad , \quad \frac{d^2\phi}{dx^2}=\frac{y^2}{a^2}\frac{d^2\tilde{\phi}}{dy^2}+\frac{y}{a^2}\cdot\frac{d\tilde{\phi}}{dy} \\ \tilde{\phi}(y)=\phi\left(a\ln\left(-\frac{2m_0}{S_0}y\right)\right)=\phi(x) \end{cases} \tag{١٠٧}$$

المعادلة $(\mathcal{O}_1)$ تكافئ :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}-\frac{\frac{S_0}{2a}e^{\frac{x}{a}}}{m_0+\frac{S_0}{2}e^{\frac{x}{a}}}\frac{d\phi}{dx}+\left[\left(\frac{V_0^2-S_0^2}{4}\right)e^{\frac{2x}{a}}-(EV_0+S_0m_0)e^{\frac{x}{a}}\right. \\ \left.+E^2-m_0^2\right]\phi=0 \tag{١٠٨}$$

بعد الاستعانة بالعبارات الرياضية الواردة في $(\mathcal{S})$ نستنتج أن :

$$\frac{y^2}{a^2}\frac{d^2\tilde{\phi}}{dy^2}+\frac{y}{a^2}\frac{d\tilde{\phi}}{dy}-\frac{1}{a^2}\frac{y^2}{y-1}\cdot\frac{d\tilde{\phi}}{dy}+\left[\frac{m_0^2}{S_0^2}(S_0^2-V_0^2)y^2\right. \\ \left.+2\left(\frac{S_0m_0+EV_0}{S_0}\right)m_0y+E^2-m_0^2\right]\tilde{\phi}=0 \tag{١٠٩}$$

إذن المعادلة $(\mathcal{O}_1)$ تصبح كالآتي :

$$\begin{cases} q=a\sqrt{E^2-m_0^2}=aK_0 \quad ; \quad \tau=2a^2m_0\left(\frac{EV_0}{S_0}+m_0\right) \\ \eta=\frac{am_0}{S_0}\sqrt{V_0^2-S_0^2} \end{cases} \tag{١١٠}$$

$$y^2\frac{d^2\tilde{\phi}}{dy^2}+\frac{y}{1-y}\frac{d\tilde{\phi}}{dy}+\left(q^2+\tau y+\eta^2y^2\right)\tilde{\phi}=0\ldots(\mathcal{O}_2) \tag{١١١}$$

نقوم بتحويل الدالة حيث :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(y)=e^{i\eta y}\cdot\Phi(y) \\ \frac{d\tilde{\phi}}{dy}(y)=i\eta e^{i\eta y}\Phi(y)+e^{i\eta y}\frac{d\Phi}{dy}(y) \\ \frac{d^2\tilde{\phi}}{dy^2}=e^{i\eta y}\frac{d^2\Phi}{dy^2}+2i\eta e^{i\eta y}\frac{d\Phi}{dy}-\eta^2e^{i\eta y}\Phi(y) \end{cases} \tag{١١٢}$$

بعد تبديل $\tilde{\phi}$ بـ Φ نجد :

$$y^2 e^{i\eta y}\left[\frac{d^2\Phi}{dy^2}+2i\eta\frac{d\Phi}{dy}-\eta^2\Phi\right]+ \frac{y}{1-y}e^{i\eta y}\left[i\eta\Phi+\frac{d\Phi}{dy}\right]+\left(q^2+\tau y+\eta^2y^2\right)e^{i\eta y}\Phi=0 \quad (١١٣)$$

إذن

$$\left(y^2\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\left[2i\eta y^2+\frac{y}{1-y}\right]\frac{d\Phi}{dy}+ \right. \quad (١١٤)$$

$$\left.\left[-\eta^2y^2+\frac{i\eta y}{1-y}+q^2+\tau y+\eta^2y^2\right]\Phi\right)e^{i\eta y}=0 \quad (١١٥)$$

ومن ثمّ تكون المعادلة الخاصة بـ $\Phi(y)$ هي :

$$y^2\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\left(2i\eta y^2+\frac{y}{1-y}\right)\frac{d\Phi}{dy}+\left(q^2+\frac{i\eta y}{1-y}+\tau y\right)\Phi=0\ldots(\mathcal{O}_2) \quad (١١٦)$$

نقوم بتحويل آخر للدالة Φ والمعرّف كالآتي :

$$\begin{cases}\Phi(y)=y^\mu(1-y)^\nu\Theta(y)\\ \frac{d\Phi}{dy}=\left[\left(\frac{\mu}{y}-\frac{\nu}{1-y}\right)\Theta(y)+\frac{d\Theta}{dy}\right]y^\mu(1-y)^\nu\\ \frac{d^2\Phi}{dy^2}=\left[\frac{\mu^2-\mu}{y^2}+\frac{\nu^2-\nu}{(1-y)^2}-\frac{2\mu\nu}{y(1-y)}\right]\Theta+2\left(\frac{\mu}{y}-\frac{\nu}{1-y}\right)\frac{d\Theta}{dy}\\ \qquad\quad +\ \frac{d^2\Theta}{dy^2}\Big]\,y^\mu(1-y)^\nu.\end{cases} \quad (١١٧)$$

علماً أن :

$$\begin{cases}L(y)=y^\mu(1-y)^\nu\\ \frac{dL}{dy}(y)=\left(\frac{\mu}{y}-\frac{\nu}{1-y}\right)L(y)\\ \frac{d^2L}{dy^2}(y)=\frac{d}{dy}\left(\frac{\mu}{y}-\frac{\nu}{1-y}\right)L(y)+\left(\frac{\mu}{y}-\frac{\nu}{1-y}\right)\frac{dL}{dy}(y)\\ \qquad\quad=\left[\left(\frac{\mu}{y}-\frac{\nu}{1-y}\right)^2-\left(\frac{\mu}{y^2}+\frac{\nu}{(y-1)^2}\right)\right]L(y)\\ \qquad\quad=\left[\frac{\mu^2-\mu}{y^2}+\frac{\nu^2-\nu}{(y-1)^2}-\frac{2\mu\nu}{y(1-y)}\right]L(y)\end{cases} \quad (١١٨)$$

نستخدم طريقة التعويض الآتية للعبارات الرياضية الآتية :

$$\begin{cases} \Phi(y) = L(y)\Theta(y) = y^{\mu}(1-y)^{\nu}\Theta(y) \\ \frac{d\Phi}{dy}(y) = \frac{dL}{dy}(y)\Theta(y) + \frac{d\Theta}{dy}(y)L(y) \\ \qquad = \left[\left(\frac{\mu}{y} - \frac{\nu}{1-y}\right)\Theta(y) + \frac{d\Theta}{dy}(y)\right] y^{\mu}(1-y)^{\nu} \\ \frac{d^2\Phi}{dy^2}(y) = \frac{d^2L}{dy^2}(y)\Theta(y) + 2\frac{dL}{dy}(y)\cdot\frac{d\Theta}{dy} + L(y)\cdot\frac{d^2\Theta}{dy^2} \\ \qquad = \left[\left(\frac{\mu^2-\mu}{y^2} + \frac{\nu^2-\nu}{(y-1)^2} - \frac{2\mu\nu}{y(1-y)}\right)\Theta(y) + \left(\frac{2\mu}{y} - \frac{2\nu}{1-y}\right)\frac{d\Theta}{dy}(y)\right. \\ \qquad\quad \left. + \frac{d^2\Theta}{dy^2}\right] y^{\mu}(1-y)^{\nu}. \end{cases} \tag{١١٩}$$

نعوض هذا الأخير في $(\mathcal{O}_2)$ وبعد الاستعانة به نحصل على :

$$y^2\cdot y^{\mu}(1-y)^{\nu}\left[\left(\frac{\mu^2-\mu}{y^2} + \frac{\nu^2-\nu}{(y-1)^2} - \frac{2\mu\nu}{y(1-y)}\right)\Theta(y) + \left(\frac{2\mu}{y} - \frac{2\nu}{1-y}\right)\frac{d\Theta}{dy}(y)\right. \tag{١٢٠}$$

$$\left. + \frac{d^2\Theta}{dy^2}\right] + \left(\frac{y}{1-y} + 2i\eta y^2\right)\left[\left(\frac{\mu}{y} - \frac{\nu}{1-y}\right)\Theta(y) + \frac{d\Theta}{dy}(y)\right] y^{\mu}(1-y)^{\nu} + \tag{١٢١}$$

$$y^{\mu}(1-y)^{\nu}\left(q^2 + \frac{i\eta y}{1-y} + \tau y\right)\Theta(y) = 0 \tag{١٢٢}$$

إذن

$$y^2\frac{d^2\Theta}{dy^2} + \left[\left(\frac{1}{1-y} + 2i\eta y\right) + \left(\frac{2\mu}{y} - \frac{2\nu}{1-y}\right)y\right] y\frac{d\Theta}{dy} + \tag{١٢٣}$$

$$y\left[y\left(\frac{\mu^2-\mu}{y^2} + \frac{\nu^2-\nu}{(1-y)^2} - \frac{2\mu\nu}{y(1-y)}\right) + \left(\frac{1}{1-y} + 2i\eta y\right)\left(\frac{\mu}{y} - \frac{\nu}{1-y}\right)\right. \tag{١٢٤}$$

$$\left. + \left(\frac{q^2}{y} + \frac{i\eta}{1-y} + \tau\right)\right]\Theta(y) = 0 \tag{١٢٥}$$

ومنه نحصل على

$$y\frac{d^2\Theta}{dy^2}+\left[\frac{-2\nu y+1}{1-y}+2\mu+2i\eta y\right]\frac{d\Theta}{dy}+\left[\frac{\mu^2-\mu}{y}+\frac{(\nu^2-\nu)y}{(1-y)^2}\right. \tag{١٢٦}$$

$$-\frac{2\mu\nu}{1-y}+\frac{\mu}{y(1-y)}-\frac{\nu}{(1-y)^2}+2i\eta\mu-\frac{2i\eta\nu y}{1-y}+\frac{q^2}{y} \tag{١٢٧}$$

$$\left.+\frac{i\eta}{1-y}+\tau\right]\Theta(y)=0 \tag{١٢٨}$$

و لدينا عمليات النشر والتبسيط المهمة هذه :

$$\begin{cases} \frac{q^2+\mu^2-\mu}{y}+\frac{\mu}{y(1-y)}=\frac{\mu^2+q^2}{y(1-y)}+\frac{-\mu^2-q^2+\mu}{1-y} \\ \frac{(\nu^2-\nu)y}{(1-y)^2}-\frac{\nu}{(1-y)^2}=\frac{\nu(\nu-2)}{(1-y)^2}+\frac{-\nu^2+\nu}{1-y} \\ \frac{-2\nu y+1}{1-y}+2\mu+2i\eta y=2i\eta+\frac{1+2\mu-2(\nu+\mu)y}{1-y} \\ 2i\eta\mu+\tau-\frac{2i\eta\nu y}{1-y}=\frac{\tau+2i\eta\mu}{1-y}+\frac{(\tau-2i\eta(\nu+\mu))y}{1-y} \end{cases} \tag{١٢٩}$$

و بعد التعويض بقيمها نستنتج أن :

$$y\frac{d^2\Theta}{dy^2}+\left(2i\eta y+\frac{2\mu+1-2(\nu+\mu)y}{1-y}\right)\frac{d\Theta}{dy}+\left(\frac{\mu^2+q^2}{y(1-y)}+\right. \tag{١٣٠}$$

$$\frac{-\mu^2-q^2+\mu}{1-y}+\frac{\nu(\nu-2)}{(1-y)^2}+\frac{\nu-\nu^2}{1-y}+\frac{2\mu\nu}{1-y}+\frac{\tau+2i\eta\mu}{1-y}+ \tag{١٣١}$$

$$\left.\frac{(\tau-2i\eta(\nu+\mu))y}{1-y}+\frac{i\eta}{1-y}\right)\Theta(y)=0 \tag{١٣٢}$$

إذن نحصل على

$$y\frac{d^2\Theta}{dy^2}+\left(2i\eta y+\frac{2\mu+1-2(\nu+\mu)y}{1-y}\right)\frac{d\Theta}{dy}+\left(\frac{\mu^2+q^2}{y(1-y)}+\right. \tag{١٣٣}$$

$$\frac{\nu(\nu-2)}{(1-y)^2}+\frac{\nu-\nu^2-2\mu\nu+\tau+2i\eta\mu+\mu-\mu^2-q^2+i\eta}{1-y}+ \tag{١٣٤}$$

$$\left.\frac{(\tau-2i\eta(\nu+\mu))y}{1-y}\right)\Theta(y)=0 \tag{١٣٥}$$

و منه

$$y\frac{d^2\Theta}{dy^2}+\left(2i\eta y+\frac{2\mu+1-2(\nu+\mu)y}{1-y}\right)\frac{d\Theta}{dy}+\left(\frac{\mu^2+q^2}{y(1-y)}+\right. \tag{١٣٦}$$

$$\frac{\nu(\nu-2)}{(1-y)^2}+\frac{\nu+\mu-(\nu+\mu)^2+\tau+2i\eta\mu-q^2+i\eta}{1-y}+ \tag{١٣٧}$$

$$\left.\frac{(\tau-2i\eta(\nu+\mu))y}{1-y}\right)\Theta(y)=0 \tag{١٣٨}$$

وبعد التعويض نصل إلى هذه العبارة الرياضية المهمة :

$$y(1-y)\frac{d^2\Theta}{dy^2}+(1+2\mu-2(\mu+\nu)y+2i\eta y(1-y))\frac{d\Theta}{dy}+ \tag{١٣٩}$$

$$\left(\frac{\mu^2+q^2}{y}+\frac{\nu(\nu-2)}{1-y}+(\mu+\nu)-(\mu+\nu)^2+2i\eta\mu+\tau-q^2+i\eta\right. \tag{١٤٠}$$

$$\left.-(2i\eta(\mu+\nu)+\tau)\,y\right)\Theta=0\ldots(\mathcal{O}_3) \tag{١٤١}$$

نختار μ , ν حيث تلغى المعاملات $\dfrac{\mu^2+q^2}{y}$ و $\dfrac{\nu(\nu-2)}{1-y}$ إذن $\begin{cases}\mu=iq\\ \nu=0 \text{ أو } \nu=2\end{cases}$

نضع $\mu=iq$ و $\nu=2$ فنحصل بعد التعويض في المعادلة $(\mathcal{O}_3)$ على العبارة الآتية :

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}+\left(\frac{1+2iq}{y}+\frac{-3}{1-y}+2i\eta\right)\frac{d\Theta}{dy}+ \tag{١٤٢}$$

$$\frac{i\eta(iq-1)+\tau-2-(i\eta(iq+2)+\tau)\,y}{y(1-y)}\Theta=0\ldots(\mathcal{O}_4) \tag{١٤٣}$$

و هذه الأخيرة هي معادلة هيون المدمجة
$(Confluent\ Heun\ Equation)$ و معاملاتها هي :

$$\begin{cases}\alpha=2i\eta\ ;\ \beta=2iq\ ,\ \delta=-3i\eta(iq+2)-\tau-2\\ \gamma=2\ ,\ \epsilon=2i\eta(iq+5)+1\end{cases} \tag{١٤٤}$$

و حلها يعطى بالعبارة الآتية :

$$\Theta(y) = C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, y) + C_2 y^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \epsilon, y) \quad (١٤٥)$$

في الأخير نجد أن حل معادلة الموجة لما تكون كتلة الجسيم و الكمون متغيرين بشكل أسي مع الموضع هو كالآتي :

$$\phi(x) = \left(-\frac{S_0}{2m_0} e^{\frac{x}{a}}\right)^{iq} \left(1 + \frac{S_0}{2m_0} e^{\frac{x}{a}}\right)^{\nu} \exp\left(-i\eta \frac{S_0}{2m_0} e^{\frac{x}{a}}\right) \quad (١٤٦)$$

$$\times \left[C_1 \text{ HeunC}\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon; -\frac{S_0}{2m_0} e^{\frac{x}{a}}\right)\right. \quad (١٤٧)$$

$$\left. + C_2 \left(-\frac{S_0}{2m_0} e^{\frac{x}{a}}\right)^{-\beta} \text{HeunC}\left(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \epsilon; -\frac{S_0}{2m_0} e^{\frac{x}{a}}\right)\right]. \quad (١٤٨)$$

ملاحظة : إذا كان $v = 0$ فإن المعادلة (O_3) تصبح معادلة هيون مدمجة، لكن لا يمكن تعريف الدالة $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y)$ كمتسلسلة قوى لأن γ عدد صحيح سالب، والدالة $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y)$ تُعرّف كمتسلسلة قوى إذا كان $\gamma \notin \mathbb{Z}^-$.

5.2 الحالة 2: كتلة و كمون متغرين بشكل خطي مع الموضع

في هذه الحالة تعطى عبارة $m(x)$ كتلة الجسيم المتربط بالموضع و $V(x)$ الكمون الذي يخضع له كالأتي :

$$(\mathcal{S}_1) \ldots \begin{cases} V(x) = V_0 x \\ m(x) = S_0 x + m_0 \end{cases}$$

V_0 و S_0 ثوابت غير معدومة و m_0 ثابت كيفي موجب .

إذا وضعنا العبارة $V(x)$ و $m(x)$ كما سبق $(\mathcal{S}_1)$ في $(\mathcal{G})$ فإننا نجد :

$$\left[(S_0 x + m_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m_0 + S_0 x} \cdot \frac{d}{dx}\right) + (E - V_0 x)^2 - (S_0 x + m_0)^2\right] \phi(x) = 0 \ldots (\mathcal{G}) \quad (١٤٩)$$

المعادلة $(\mathcal{G})$ تكافئ المعادلة الآتية :

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \frac{1}{x + \frac{S_0}{m_0}} \cdot \frac{d}{dx}\phi(x) - \left[\mu\left(x + \frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2\right] \phi(x) = 0 \quad (١٥٠)$$

حيث تكون قيم المعاملات كالآتي :

$$\begin{cases} \mu = (S_0^2 - V_0^2) \quad , \quad \eta = (m_0 S_0 + E V_0) \\ \\ \vartheta^2 = m_0^2 - E^2 \end{cases} \tag{١٥١}$$

باستعمال هذا التحويل الخاص بالدالة ψ :

$$\begin{cases} \Psi(x) = \exp\left(\int f(x)dx\right) \cdot \xi(x) \\ \\ \frac{d}{dx}\Psi(x) = \left(f(x)\xi(x) + \frac{d}{dx}\xi(x)\right) e^{\int f(x)dx} \\ \\ \frac{d^2\psi}{dx^2}(x) = \left[\left(\frac{df}{dx}(x) + f^2(x)\right)\xi(x) + 2f(x)\frac{d\xi}{dx} + \frac{d^2\xi}{dx^2}\right] e^{\int f(x)dx} \end{cases} \tag{١٥٢}$$

علماً أن :

$$\begin{cases} L(x) = \exp\left(\int f(x)\,dx\right) \\ \dfrac{dL}{dx}(x) = f(x)\exp\left(\int f(x)\,dx\right) \\ \dfrac{d^2L}{dx^2}(x) = \left[\dfrac{df}{dx}(x) + f^2(x)\right]\exp\left(\int f(x)\,dx\right) \end{cases}$$

فإننا نحصل على هذه المعادلة :

$$\left[\frac{d^2\xi}{dx^2} + 2\,f(x)\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{df(x)}{dx} + f^2(x)\right)\xi(x)\right] e^{\int f(x)\,dx} - \tag{١٥٣}$$

$$\frac{1}{x + \frac{S_0}{m_0}}\left[f(x)\xi(x) + \frac{d\xi}{dx}\right] e^{\int f(x)\,dx} - \left[\mu\left(x + \frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu}\right. \tag{١٥٤}$$

$$\left. - \vartheta^2\right] e^{\int f(x)\,dx}\xi(x) = 0 \tag{١٥٥}$$

إذن

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left[2\,f(x) - \frac{1}{x+\frac{S_0}{m_0}}\right]\frac{d\xi}{dx} + \left[\left(\frac{df}{dx}(x) + f^2(x)\right)\right. \tag{١٥٦}$$

$$\left. - \frac{f(x)}{x+\frac{S_0}{m_0}} - \vartheta^2 - \mu\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu}\right]\xi(x) = 0 \tag{١٥٧}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(2f(x) - \frac{1}{x+\frac{S_0}{m_0}}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left[\frac{f(x)}{x+\frac{S_0}{m_0}} + \frac{df}{dx}(x) + f^2(x) - \right. \tag{١٥٨}$$

$$\left. \mu\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2\right]\xi = 0 \ldots (\mathcal{G}'_1) \tag{١٥٩}$$

نعوض $f(x) = \mu^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)$ حتى يلغى الحد $\mu\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)^2$ في المعادلة $(\mathcal{G}'_1)$.
بعد استخدام هذا التحويل فإننا نحصل على الآتي :

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}(x) - \left(2\mu^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right) + \frac{1}{x+\frac{S_0}{m_0}}\right)\frac{d\xi}{dx}(x) + \left[\frac{-\mu^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)}{x+\frac{S_0}{m_0}} - \mu^{\frac{1}{2}}\right. \tag{١٦٠}$$

$$\left. + \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2\right]\xi(x) = 0 \ldots (\mathcal{G}_2) \tag{١٦١}$$

سنستعين في هذه الحالة بهذا التحويل للمتغير :

$$\begin{cases} y = \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{S_0}{m_0}\right) \\ \\ \dfrac{d\xi}{dx} = \mu^{\frac{1}{4}}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dy} \quad , \quad \dfrac{d^2\xi}{dx^2} = \mu^{\frac{1}{2}}\dfrac{d^2\tilde{\xi}}{dy^2} \\ \\ \xi(x) = \tilde{\xi}(y) = \xi\left(\dfrac{1}{\mu^{\frac{1}{4}}}y - \dfrac{S_0}{m_0}\right) \end{cases} \tag{١٦٢}$$

إذن

$$\mu^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2\tilde{\xi}}{dy^2}(y)-\left[2\mu^{\frac{1}{2}}\left(\mu^{-\frac{1}{4}}y-\frac{S_0}{m_0}+\frac{\eta}{\mu}\right)+\frac{\mu^{\frac{1}{4}}}{y}\right]\mu^{-\frac{1}{4}}\frac{d\tilde{\xi}}{dy}(y)+ \quad (١٦٣)$$

$$\left[\frac{-\mu^{\frac{1}{2}}\left(\mu^{-\frac{1}{4}}y-\frac{S_0}{m_0}+\frac{\eta}{\mu}\right)}{\mu^{-\frac{1}{4}}y}-\mu^{\frac{1}{2}}+\frac{\eta^2}{\mu}-\vartheta^2\right]\tilde{\xi}(y)=0 \quad (١٦٤)$$

إذن نحصل على :

$$\frac{d^2\tilde{\xi}}{dy^2}(y)-\left[2\mu^{\frac{1}{4}}\left(\mu^{-\frac{1}{4}}y-\frac{S_0}{m_0}+\frac{\eta}{\mu}\right)+\frac{1}{y}\right]\frac{d\tilde{\xi}}{dy}+ \quad (١٦٥)$$

$$\left[-\frac{\mu^{\frac{3}{4}}}{y}\left(\mu^{-\frac{1}{4}}y-\frac{S_0}{m_0}+\frac{\eta}{\mu}\right)-1+\mu^{-\frac{1}{2}}\eta^2-\mu^{-\frac{1}{2}}\vartheta^2\right]\tilde{\xi}(y)=0 \quad (١٦٦)$$

و منه

$$\frac{d^2\tilde{\xi}}{dy^2}+\left[-2y+\frac{2S_0\mu^{\frac{1}{4}}}{m_0}-2\eta\mu^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{y}\right]\frac{d\tilde{\xi}}{dy}+ \quad (١٦٧)$$

$$\left[\frac{\frac{S_0\mu^{\frac{3}{4}}}{m_0}-\mu^{-\frac{1}{4}}\eta}{y}+\mu^{-\frac{1}{2}}\eta^2-\mu^{-\frac{1}{2}}\vartheta^2-2\right]\tilde{\xi}(y)=0 \quad (١٦٨)$$

و تكون المعادلة الأخيرة هي نفسها هذه المعادلة :

$$\frac{d^2\xi}{dy^2}+\left(\frac{\alpha+1}{y}-2y-\beta\right)\frac{d\xi}{dy}+\left((\gamma-\alpha-2)-\frac{\delta+\beta(\alpha+1)}{2y}\right)\xi=0\ldots(\mathcal{G}_2) \quad (١٦٩)$$

إذا كانت قيم α , β , γ , δ كالأتي :

$$\begin{cases} \alpha + 1 = -1 \\ -\beta = \dfrac{2S_0\mu^{\frac{1}{4}}}{m_0} - 2\eta\mu^{-\frac{3}{4}} \\ \gamma - \alpha - 2 = \mu^{-\frac{1}{2}}\eta^2 - \mu^{-\frac{1}{2}}\vartheta^2 - 2 \\ \delta + \beta(\alpha+1) = \dfrac{S_0}{m_0}\mu^{\frac{3}{4}} - \mu^{-\frac{1}{4}}\eta \end{cases}$$

وهذه الأخيرة هي معادلة هيون ثنائية الاندماج $(Biconfluent\ Heun\ Equation)$ و معاملاتها هي :

$$\begin{cases} \alpha = -2 \quad , \quad \beta = 2\mu^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{\eta}{\mu} - \dfrac{m_0}{S_0 A_E}\right), \\ \\ \gamma = \mu^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2\right) \quad , \quad \delta = 0 \end{cases}$$

و حلها هو :

$$\xi(y) = C_1\,\mathrm{HeunB}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;y) + C_2\,y^{-\alpha}\,\mathrm{HeunB}(-\alpha,\beta,\gamma,\delta;y) \qquad (١٧٠)$$

عندئذ نستنتج أن حلول معادلة الموجة حيث كتلة الجسيم والكمون متغيرين بشكل خطي مع الموضع هو :

$$\Psi(x) = \exp\left(-\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\eta}{\mu}x\right)\right)\cdot\Bigg[C_1\,\mathrm{HeunB}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta;\mu^{\frac{1}{4}}\left(x + \frac{S_0A_E}{m_0}\right)\right) \qquad (١٧١)$$

$$+C_2\left(\mu^{\frac{1}{4}}\left(x + \frac{S_0A_E}{m_0}\right)\right)^{-\alpha}\mathrm{HeunB}\left(-\alpha,\beta,\gamma,\delta;\mu^{\frac{1}{4}}\left(x + \frac{S_0A_E}{m_0}\right)\right)\Bigg]. \qquad (١٧٢)$$

الخلاصة العامة

تتناول هذه المذكرة دراسة معمقة لـ معادلة هيون وتطبيقاتها في حل مسائل فيزيائية كانت تُعتبر عصية على الحل باستخدام الدوال الخاصة التقليدية.
تنقسم الدراسة إلى خمسة فصول رئيسية:

- **الفصل الأول :** يستعرض تاريخ معادلة هيون وأهم تطبيقاتها في الفيزياء، مبيّناً أنها الأداة الرياضية الطبيعية لوصف الأنظمة الفيزيائية غير المتجانسة.
- **الفصل الثاني:** يقدّم المفاهيم والأدوات الرياضية الأساسية اللازمة لفهم الموضوع، كالدوال التحليلية، معادلات فروبينيوس، الدوال فوق الهندسية المعممة، ودالة غاما، بالإضافة إلى نظرية بيانو ونظرية بيكار-ليندلوف.
- **الفصل الثالث:** يتناول بالتفصيل معادلة هيون العامة وصيغها المختلفة، حلولها المحلية عبر متسلسلات القوى، تحويلاتها (التحويل الخطي، تحويل القوة، التحويل التربيعي)، وعلاقات التعامد الخاصة بدوال هيون.
- **الفصل الرابع:** يقدّم الصيغ المدمجة لمعادلة هيون، وهي: معادلة هيون المندمجة، معادلة هيون ثنائية الاندماج، معادلة هيون مزدوجة الاندماج، ومعادلة هيون ثلاثية الاندماج.
- **الفصل الخامس (التطبيق العملي):** يشكّل جوهر المذكرة، حيث يتم حل معادلة كلاين-غوردون النسبية في حالتين:

١. **الحالة الأولى:** كتلة الجسيم و كمون متغيران بشكل أُسّي مع الموضع، حيث يُستنتج أن الحل يُعطى بدالة هيون المندمجة.
٢. **الحالة الثانية:** كتلة الجسيم و الكمون متغيران بشكل خطي مع الموضع، حيث يُستنتج أن الحل يُعطى بدالة هيون ثمانية الاندماج.

لنتأكد في الختام أن جميع أشكال معادلات هيون مهمة في تطبيقنا الفيزيائي.

المراجع

المراجع

Ronveaux, A. (Ed.). (1995). *Heun's Differential Equations*. Oxford University Press. With contributions by F. M. Arscott, S. Yu. Slavyanov, D. Schmidt, G. Wolf, P. Maroni, and A. Duval. [كتاب معادلات هيون التفاضلية]

Langueur, O., et al. (2019). DKP Equation with Energy Dependent Potentials. *Communications in Theoretical Physics*, 71(9), 1069. [معادلة DKP في الفيزياء النظرية]

Kermezli, A., Langueur, O., & Radjai, M. (2026). The DKP Equation with Position-Dependent Mass under Smooth Barrier Potential. *Laboratory of Physics of Experimental Techniques and Their Applications (PTEA)*, University Yahia Fares, Medea, Algeria. [بحث حول كتلة الجسيمات المتغيرة]

Hortaçsu, M. (2018). Heun Functions and Some of Their Applications in Physics. *Advances in High Energy Physics*, vol. 2018, Article ID 8621573, 14 pages. Hindawi. [مقال مراجعة حول دالات هيون]

Google. (2026). *Gemini Interactive AI Assistant*. Large Language Model for academic research assistance, text optimization, and conceptual verification. Mountain View, CA : Google DeepMind. Available from : https ://gemini.google.com [جيميناي (Gemini)]

DeepSeek. (2026). *DeepSeek AI Reasoning and Code Model*. Advanced AI platform utilized for mathematical verification, research synthesis, and analytical support. Hangzhou, China : DeepSeek Inc. Available from : https ://www.deepseek.com [ديب سيك (DeepSeek)]

[١] Pergamon. *equations. dffierential Periodic* (1964a) F.M. Arscott,

[٢] dffierential in problems eigenvalue Two-parameter (1964b) F.M. Arscott, .470--459 ,**14** *Soc. Math. Lond. Proc.* equations.

[٣] F.M. Arscott, (1987) differential to solutions multiplicative in Studies *Edinburgh Soc. R. Proc.* **106A**, 277--305.

[٤] A. Darai, F.M., Arscott, (1981) which in systems coordinate Curvilinear *Appl. Math. Inst. J.* **27**, 33--70.

[٥] W.R. Shymanski, A., Lacroix, F.M., Arscott, (1978) three-term A *Manitoba 8th Proc.* functions. Mathieu of computation the and recursion *Math. Numerical on Conf.*, 107--115.

[٦] R. Zahar, P.J., Taylor, F.M., Arscott, (1983) of computation The *Comp. Math.* **40**, 367--380.

[٧] Ronveaux, A., Robert, P., Maroni, M.Cl., Dumont-Lepage, A., Decarreau, de l'équation de confluentes équations des canoniques Formes (1978a) A. *T. Bruxelles Sci. Soc. Ann.* **92**, I--II, 53--78.

[٨] A. Robert, P., Maroni, A., Decarreau, équations les Sur (1978b) *T. Bruxelles Sci. Soc. Ann.* **92**, III, 151--189.

[٩] A. Erdélyi, (1942a) four with order second of equation Fuchsian The *J. Math. Duke* **9**, 48--58.

[١٠] A. Erdélyi, (1942b) equations Integral for functions. Heun *Math. J. Q.* (*Oxford*) **13**, 107--112.

[١١] A. Erdélyi, (1944) solutions of expansions Certain equation. Heun the *Math. J. Q.* (*Oxford*) **15**, 62--69.