UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA

2020-UYFM-LBMPT

Doctorat en Science

T H ÈS E

Pour obtenir le grade de docteur en sciences délivré par

L'Université Yahia Farès de Médéa
Spécialité : Génie des Procédés
Option : Génie des Procédés

Présentée et soutenue publiquement par

Zohra BENHARKAT

Le 14-03-2020

MODELISATION THERMIQUE ET MASSIQUE LORS DE LA PRESENCE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE AVEC EFFET HALL

Directeur de thèse : **Mohamed Najib BOUAZIZ**

Jury

M. Saleh HANINI	Professeur, Université Y.F Médéa	Président
M. Mohamed Najib BOUAZIZ	Professeur, Université Y.F Médéa	Directeur de Thèse
M. Ali KHELIL	Professeur, Université U.H.B.B Chlef	Examinateur
M. Abdallah BENAROUS	Professeur, Université de Blida	Examinateur

Laboratoire de Biomatériaux
et Phénomènes de Transport

T H È S E

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Allah tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il ma donné durant toutes ces années d'études.

Ce Mémoire présente des résultats plus de six années de recherche au laboratoire de Biomatériaux et phénomène de Transport de l'université de MEDEA, sous la direction de Monsieur Mohamed Najib BOUAZIZ, Professeur à l'Université de Médéa, que je remercie chaleureusement, pour m'avoir accordé sa confiance en me proposant ce sujet, puis pour diriger ma thèse avec compétence et sérieux, il m'a non seulement guidé sans relâche vers le but ultime de ma thèse, mais surtout, pour sa confiance inébranlable dans mes capacités, j'ai largement profité de son immense savoir scientifique, et de sa capacité à transformer un problème apparemment compliqué en solution. En outre, il a contribué à l'ambiance sympathique et agréable dans la quelle j'ai eu la chance d'accomplir ce travail. Merci Monsieur BOUAZIZ pour la disponibilité, la gentillesse, et tes conseils toujours précieux.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur S. HANINI, Professeur à l'Université de Médéa, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse. Je tiens à remercier aussi les autres membres du jury : Monsieur A. KHELIL, Professeur à l'Université de Chlef, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail. Toute ma gratitude va également à Monsieur A. BENAROUS, Professeur à l'Université de Chlef, d'avoir accepté d'examiner ce travail. Merci à tous pour le temps consacré à la lecture de ce document et les améliorations suggérées.

Abstract

Coupled heat and mass transfer by convection of an incompressible, electrically conducting, rotating and moving fluid, in the presence of a strong magnetic field and the Hall currents are taken into account, has attracted attention in recent years. This is due to the occurrence of such fluids in various industrial and natural applications. An analytical and numerical investigation is conducted to study the effect of the magnetic field with Hall induction, the wall speed and the Coriolis force on the steady convection flow past a semi-infinite vertical flat plate moving with constant velocity of a rotating and moving ionized gases resulting from buoyancy forces which arise from a combination of heat and mass transfer. We consider the flow three-dimensional configuration, together with the used rectangular coordinate system. A strong uniform magnetic field of constant density B_0 is applied normal to the plate.

Two physical models of this problem have been studied, namely the case of thermal and mass MHD convection and that of thermal and mass MHD convection in a porous medium with first order chemical reaction.

From the basic equations of the magnétohydrodynamic, considering the conditions and the hypotheses of our problem, the flow has been modeled to give a precise evolution description of the velocity profiles, the temperature profiles and the concentration profiles. By applying the similarity transformations, the governing equations for the problem are solved without using a finite-element or finite-volume methods. The non-linear boundary layer equations with the boundary conditions are transferred to a system of non-linear ordinary differential equations with the appropriate boundary conditions. Furthermore, the similarity equations are solved numerically by using a fourth order Runge-Kutta method.

Numerical results for the velocity profiles, temperature and concentration profiles are presented graphically and are discussed for various values of the magnetic parameter, the Hall parameter, the wall speed parameter, the Coriolis force parameter and the number of dimensionless parameters governing the transport phenomena.

Keywords: Magnétohydrodynamic, Hall effect, Wall speed, Coriolis force, Heat transfer, Mass transfer, Moving plate, Rotating moving fluid.

Résumé

Le transfert de chaleur et de masse couplé par convection dans un courant de fluide électriquement conducteur, incompressible et rotatif en présence d'un fort champ magnétique en considérant les courants de Hall a suscité beaucoup d'attention ces dernières années. Cet intérêt est dû aux différentes applications de tels fluides dans l'industrie et dans la nature. Une investigation analytique et numérique est faite pour étudier les effets du champ magnétique avec Hall induction, de la vitesse de paroi et de la force Coriolis dans une configuration de convection stable pour une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante dans un courant de gaz ionisé en rotation lors de transfert thermique et de masse combinés. Nous présentons également la configuration géométrique tridimensionnelle avec les coordonnées cartésiennes rectangulaires où nous appliquons perpendiculairement à la plaque un fort champ magnétique uniforme avec une densité constante B_0.

Deux modèles physiques du problème ont été étudiés, à savoir le cas de la convection MHD thermique et massique et celui de la convection MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique du premier ordre.

A partir des équations de base de la magnétohydrodynamique, et suivant les conditions et les hypothèses de notre problème, l'écoulement est modelé pour donner une description précise de l'évolution des profils de vitesse, de température et de concentration. Une recherche poussée de transformation de similarité qui permettra de résoudre aisément le modèle sans recourir à une méthodologie de type éléments ou volume finis est également présentée. Les équations aux dérivées partielles non linéaires de la couche limite avec les conditions aux limites sont transformées à un système d'équations différentielles ordinaires, non linéaires avec les conditions aux limites appropriées. En outre, les équations de similarité sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Les résultats numériques pour les profils de vitesse, de température et de concentration sont présentés graphiquement et discutés suivant la dépendance du paramètre magnétique, du paramètre de Hall, du paramètre de la vitesse de paroi, du paramètre de force de Coriolis et des nombres liés aux phénomènes de transport.

Mots-clés: Magnétohydrodynamique, Effet Hall, Vitesse de paroi, Force de Coriolis, Transfert thermique, Transfert de masse, Plaque en mouvement, fluide tournant en mouvement.

ملخص

الانتقال الحراري و الكتلي المزدوج عن طريق الحمل عبر تيار متحرك لمائع ناقل كهربائي ا و يدور في وجود حقل مغناطيسي قوي و الأخذ بعين الاعتبار ظاهرة هال، تعرف اهتماما متزايدا في السنوات الأخيرة. هذا الاهتمام راجع للتطبيقات المختلفة للكثير من الموائع في مجالات الصناعة والظواهر الطبيعية. بحث تحليلي و رقمي قد أنجز لدراسة مفعول الحقل المغناطيسي المرفق بظاهرة هال، السرعة الجدارية و قوة كوريوليس في مجال الحمل المستقر بالنسبة لصفيحة عمودية نصف منتهية في حالة حركة بسرعة ثابتة لغاز شاردي في حالة حركة مع د وران أثناء الانتقال المزدوج الحراري و الكتلي. كذلك قمنا بتمثيل الهيكل التجريبي ثلاثي الأبعاد و الإحداثيات الكارتيزية التي تمثل المشكل المطروح أين نطبق عموديا على الصفيحة حقل مغناطيسي قوي منتظم و له شدة ثابتة B_0.

تمت دراسة نموذجين فيزيائيين لهذا المشكل و هما الحمل المغناطوهيدروديناميكي الحراري و الكتلي و كذلك الحمل المغناطوهيدروديناميكي الحراري و الكتلي في وسط مجوف مع تفاعل كيميائي من الدرجة الأولى.

من خلال المعادلا ت الرئيسية للميغناطوهيدروديناميك مع الأخذ بعين الاعتبار للشروط و التبسيطات الموضوعة للمشكل، تم تصميم النموذج الرياضي للتيار لإعطاء وصف مفصل للرسم البياني للسرعة، للحرارة و للتركيز. استعمال طريقة البحث عن تحويل التشابه يمكننا من تسهيل حل النموذج بدون اللجوء إلى طرق أخرى مثل النقط أو الحجم المنتهية. معادلات الطبقة الحدية و مع الشروط الحدية تحول إلى معادلات تفاضلية عادية مع الشروط الحدية الملائمة. وعليه، معادلات التشابه المتحصل عليها تحل رقميا باستعمال طريقة رانج-كاتا درجة4.

النتائج الرقمية بالنسبة للرسوم البيانية للسرعة، للحرارة والتركيز تناقش تبعا للعنصر المميز للحقل المغناطيسي، لعنصر هال، للعنصر المميز للسرعة الجدارية، لعنصر قوة كوريوليس و الأعداد المرتبطة بظواهر النقل.

كلمات مفاتيح : ميغناطوهيدروديناميك، ظاهرة هال، صفيحة، السرعة الجدارية، قوة كوريوليس، الانتقال الحراري، الانتقال الكتلي، صفيحة متحركة، مائع متحرك يدور.

Table des matières

Résumé
Table des matières
Nomenclature
Abréviations
Liste des figures
Liste des tableaux

Introduction générale…… 1

Chapitre I : Généralités sur la magnétohydrodynamique

I.1. Introduction…… 4
I.2. Présentation générale…… 4
I.3. Cadre de la théorie MHD…… 5
I.3.1. Gaz ionisés, Plasmas…… 5
I.3.2. Hypothèses de la MHD…… 7
I.3.3. Particules chargées en champ magnétique…… 7
I.3.4. Grandeurs caractéristiques de la MHD…… 9
I.4. Equations de la MHD…… 10
I.4.1. Origine cinétique…… 10
I.4.2. Equations de l'hydrodynamique…… 12
I.4.3. Loi d'Ohm généralisée…… 16
I.4.4. Equations de Maxwell…… 18
I.4.5. Equation d'induction…… 20
I.4.6. Force de Laplace…… 21
I.4.7. Bilan énergétique…… 23
I.5. MHD idéale…… 24
I.6. Equilibre magnétohydrostatique…… 24
I.7. Ondes MHD…… 25
I.8. Effet de Hall…… 25
I.9. Applications de la MHD…… 27
I.9.1. Génération d'électricité…… 27
1.9.1.1. Machines circulaires à plasma…… 27
1.9.1.2. Générateur à métaux liquides…… 28

1.9.1.3. Générateur à induction……..…… 28
1.9.2. Propulsion MHD…….…… 28
1.9.2.1. Propulseurs à plasma……..… 29
1.9.2.2. Propulseurs à eau salée……..…… 29
1.9.3. Applications de la MHD à la métallurgie ……...…… 29
1.9.3.1. Brassage…… 30
1.9.3.2. Lévitation……...… 30
1.9.3.3. Formage…….…… 30
1.9.3.4. Pulvérisation……..…… 30
I.10. Conclusion……..... 30

Chapitre II : Recherches bibliographiques et position de problème

II.1. Introduction……..……..…… 31
II.2. Revue bibliographique……..……..... 31
II.3. Position du problème……..…..…….…… 48
II.4. Conclusion……...……..…… 50

Chapitre III : Formulation du problème

III.1. Introduction……...……..…… 51
III.2. Problème considéré dans cette étude……..……..…. 51
III.3. Hypothèses simplificatrices……...……...……..… 52
III.4. Équations gouvernantes de la MHD thermique et massique ..……...… 53
III.4.1. Équations de continuité……...……...…..…..… 54
III.4.2. Équations du mouvement…….....……..… 54
III.4.3. Équations de conservation d’énergie..……..…..……..... 54
III.4.4. Équations de conservation de l’espèce……..…..…..... 54
III.4.5. Loi d’Ohm généralisé…….……..…..…..... 55
III.4.6. Équations de Maxwell……..…..…..... 55
III.4.7. Équations de base de la MHD thermique et massique..…..…..……. 56
III.4.8. Conditions aux limites thermiques et massiques …..…..……... 59
III.5. Équations gouvernantes de la MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique…….……..…..……..... 59
III.6. Taux de transfert thermique et massique…….…..……..……..…. 60
III.6.1. Le nombre de Nusselt…….…..……..……..…..… 60
III.6.2. Le nombre de Sherwood…….…..……..……..…..… 61
III.7. Conclusion……..…..……...……..…..… 61

Chapitre IV : Transformation du modèle

IV.1. Introduction……...…….…..…….…….. 62

IV.2. Transformation du modèle…….……...…..… 62

IV.2.1. MHD thermique et massique…….…..…… 63

IV.2.1.1. Équations de base de similarité……...…… 63

IV.2.1.2. Conditions aux limites…… 65

IV.2.2. MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique…….…… 65

IV.2.2.1. Équations de base de similarité……..…..…… 65

IV.2.2.2. Conditions aux limites…… 66

IV.2.3. Taux de transfert thermique et massique……...…… 66

IV.2.3.1. Le nombre de Nusselt…….…… 66

IV.2.3.2. Le nombre de Sherwood……..… 67

IV.3. Conclusion……...…… 67

Chapitre V : Résultats et discussion

V.1. Introduction……...……...… 69

V.2. Méthode numérique de résolution……..……...… 69

V.2.1. Description de la méthode numérique de résolution……...… 69

V.2.2. Validation du code numérique……..…..…… 70

V.3. Résultats et discussion……..……...…..…… 71

V.3.1. MHD thermique et massique……..…… 71

V.3.1.1. Influence du paramètre magnétique, *M*…..…… 71

V.3.1.2. Influence du paramètre de Hall, *m*…….…… 74

V.3.1.3. Influence du paramètre de la vitesse de paroi, λ……..... 77

V.3.1.4. Influence du paramètre de la force de Coriolis, ξ …….. 79

V.3.2. MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique……..……..…… 82

V.3.2.1. Influence du paramètre magnétique, *M*..…… 82

V.3.2.2. Influence du paramètre de Hall, *m*..……..….. 82

V.3.2.3. Influence du paramètre de la vitesse à la paroi, λ……... 87

V.3.2.4. Influence du paramètre de la force de Coriolis, ξ….... 89

V.3.2.5. Influence du paramètre de perméabilité, *K*……..... 92

V.3.2.6. Influence du paramètre de la réaction chimique, γ……. 94

V.3.3. Comparaison……..……..…..…..…..…..…… 97

V.3.4. Taux de transfert thermique et solutale…..……...……..…..…… 100

V.3.5. Conclusion……..…….……... 103

Conclusion générale……..……..…..….…..... 104

Annexe

Publication internationale……..……..…..….…..... 105

Références bibliographiques

Nomenclature

Symboles	Signification	Unités
B	induction magnétique	(T)
C	concentration	($kg.m^{-3}$)
C_p	chaleur spécifique à pression constante	($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
C_v	chaleur spécifique à volume constant	($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
c	célérité de la lumière dans le vide	($m.s^{-1}$)
D	coefficient de diffusion massique	($m^2.s^{-1}$)
d	distance interparticulaire	(m)
E	intensité de champ électrique	($V.m^{-1}$)
e	charge électronique	(C)
F	fonction de distribution	
$f(\eta), h(\eta), \theta(\eta)\ \phi(\eta)$	fonctions de similarité correspondant aux vitesses *u* et *w*, la température et la concentration	
$\vec{F}$	vecteur de force	(N)
$\vec{\mathcal{F}}$	champs de forces extérieurs dus à la gravité	(N)
f	fonction de distribution élémentaire	
Gc	nombre de Grashof massique	
Gr	nombre de Grashof thermique	
g	accélération de gravité	($m.s^{-2}$)
H	intensité magnétique	($A.m^{-1}$)
h_c	coefficient de transfert de chaleur par convection	($W.m^{-2}.K$)
h_m	coefficient de transfert de masse	($m.s^{-1}$)
I	intensité de courant électrique	(A)
$\overline{I}$	tenseur unité	
j	densité de courant électrique	($A.m^{-2}$)
K	paramètre de perméabilité	
k	conductivité thermique	($W.m^{-1}.K^{-1}$)
k_p	perméabilité du milieu poreux	(m^2)
L	longueur caractéristique de l'écoulement	(m)
$ln\,\Lambda$	logarithme coulombien	
M	paramètre magnétique	
Ma	nombre de Mach	

m	masse de particule	(Kg)
m	Paramètre de Hall	
N	nombre de particules	
Nu	nombre de Nusselt	
n	densité numérique des particules	(m^{-3})
Pr	nombre de Prandtl	
p	pression de fluide	($N.m^{-2}$)
p_m	pression magnétique	($N.m^{-2}$)
$\vec{P}$	vecteur d'impulsion	
$\overline{\mathcal{P}}$	tenseur de pression cinétique	($N.m^{-2}$)
q	charge des particules	(C)
q_c	flux de chaleur	($W.m^{-2}$)
q_m	flux de masse	($W.m^{-2}$)
$\vec{q}$	vecteur de flux de chaleur	($W.m^{-2}$)
R_H	résistance de Hall	(Ω)
R_l	rayon de Larmor	(m)
R_r	taux de réaction chimique	(J)
Re	nombre de Reynolds	
Re_m	nombre de Reynolds magnétique	
r_0	longueur de Landau	(m)
Sc	nombre de Schmidt	
Sh	nombre de Sherwood	
$\vec{S}$	flux de Poynting	
T	température du fluide	(K)
$\vec{T}$	vecteur de tension	(N)
t	temps	(s)
U	vitesse de courant libre	($m.s^{-1}$)
U_H	tension de Hall	(V)
U_1	vitesse de plaque	($m.s^{-1}$)
U_2	vitesse de courant libre	($m.s^{-1}$)
$\vec{U}$	vecteur de vitesse macroscopique	($m.s^{-1}$)
V	vitesse de fluide	($m.s^{-1}$)
V_A	vitesse d'Alfvén	($m.s^{-1}$)
V_s	vitesse du son	($m.s^{-1}$)
$v_\perp$	vitesse caractéristique des particules	($m.s^{-1}$)
$\overline{v}$	vitesse d'agitation thermique	($m.s^{-1}$)

(u, v, w)	composantes de vitesse suivant les axes (x, y, z)	(m.s^{-1})
(x, y, z)	coordonnées cartésiennes	(m)
$\vec{x}$	vecteur de position	(m)

Symboles grecs

β	coefficient d'expansion thermique	(K^{-1})
β^*	coefficient d'expansion de concentration	(K^{-1})
γ'	coefficient adiabatique	
γ	paramètre adimensionnel de réaction chimique	
δ_{ij}	symbole de Kroenecker	
ε	permittivité diélectrique	(F.m^{-1})
ε_0	permittivité diélectrique du vide	(F.m^{-1})
ε_e	énergie électrique	(J)
ε_i	énergie interne spécifique	(J)
ε_m	énergie magnétique	(J)
ε_t	énergie cinétique totale	(J)
ζ	viscosité seconde du milieu	(kg.m^{-1}.s^{-1})
η	variable de similarité	
$\overline{\eta}$	résistivité du fluide	
$\tilde{\eta}$	viscosité dynamique	(kg.m^{-1}.s^{-1})
λ	vitesse adimensionnelle de paroi	
λ_e	longueur de Debye électronique	(m)
μ	perméabilité magnétique du fluide	(H.m^{-1})
μ_0	perméabilité magnétique du vide	(H.m^{-1})
ν	viscosité cinématique	(m^2.s^{-1})
ν_{ei}	fréquence de collision entre les électrons et les ions	(Hz)
ν_m	diffusivité magnétique	(Ω.H^{-1}.m^2)
$\nu_{\alpha\beta}$	fréquence de collision entre les espèces α et β	(Hz)
ξ	force adimensionnelle de Coriolis	
$\overline{\Pi}$	tenseur de pression interparticulaire	
ρ	densité du fluide	(m^{-3})
ρ_ϕ	densité instantanée du fluide	(m^{-3})
Σ	puissance électromagnétique	(W)
σ	conductivité électrique	(Ω^{-1}.m^{-1})
τ	temps de collision	(s)
ψ	fonction de courant	

Ω	vitesse angulaire	(s^{-1})
ω	fréquence cyclotron	(Hz)
$\phi(\vec{P})$	pondérée par la densité de particules	
χ	variables	
χ'	fonctions	

Indices

e	référence aux électrons
i	référence aux ions
ext	condition externe
int	condition interne
α	référence aux espèces chimiques
β	référence aux espèces chimiques
w	condition à la paroi
∞	condition loin de la paroi
0	condition constante
coll	collisions

Exposants

$'$	différentiation par rapport η
$*$	charge du plasma

Abréviations

ETL	Equilibre Thermodynamique Local
MHD	Magnétohydrodynamique
MKSA	système d'unité: Mètre-Kilogramme-Seconde-Ampère
MPD	Magnéto Plasma Dynamique

Liste des figures

Fig. I.1 : Diagramme de classification des plasmas et position de quelques plasmas types……..... 6

Fig. I.2 : Dérive, avec une vitesse $\vec{V}$, du mouvement cyclotron d'une particule soumise à une force $\vec{F}$ perpendiculaire à un champ magnétique $\vec{B}$……...… 8

Fig. I.3 : Schéma montrant la décomposition de la force de Laplace en force pression et de tension, $\vec{T}$.……...…… 22

Fig. I.4 : Système à effet Hall.……...…… 26

Fig. I.5 : Schéma d'une tuyère MHD…… 27

Fig. I.6 : Principe de pompage de l'eau salée par la MHD…… 28

Fig. III.1 : Représentation graphique du modèle physique et du système d'axes……. 52

Fig. V.1 : Comparaison graphique entre les vitesses suivant *x*, f', de Takhar et al. [43] et la présente étude pour $Gr = Gc = 0$, $Pr = Sc = 0$, $M = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0.25$.…….…… 70

Fig. V.2 : Profils de la vitesse f' à *m*=0.5, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *M*.…… 72

Fig. V.3 : Profils de la vitesse h à *m*=0.5, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *M*.……. 72

Fig. V.4 : Profils de la température θ à *m*=0.5, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *M*.…… 73

Fig. V.5 : Profils de la concentration ϕ à *m*=0.5, *Gc*=0.5, *Gr* = 0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *M*.…… 73

Fig. V.6 : Profils de la vitesse f' à *M* =0.3, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *m*.…….…… 75

Fig. V.7 : Profils de la vitesse h à *M*=0.3, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *m*..…… 75

Fig. V.8 : Profils de la température θ à *M*=0.3, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *m*.…… 76

Fig. V.9 : Profils de la concentration ϕ à *M*=0.3, *Gc*=0.5, *Gr* = 0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *m*.…… 76

Fig. V.10 : Profils de la vitesse f' à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, *M*=*m*=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ.…… …… 77

Fig. V.11 : Profils de la vitesse h à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, *M*=*m*=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ.…… 78

Fig. V.12 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ..…… 78
Fig. V.13 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ..……..……..……...… 79
Fig. V.14 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ……..……...…… 80
Fig. V.15 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ……..……...…… 80
Fig. V.16 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ……..……...…… 81
Fig. V.17 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ……..……... 81
Fig. V.18 : Profils de la vitesse f' à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.……..…… 83
Fig. V.19 : Profils de la vitesse h à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.……..…… 83
Fig. V.20 : Profils de la température θ à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.……..…… 84
Fig. V.21 : Profils de la concentration ϕ à m=0.5, Gc=0.5, Gr = 0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.……..…… 84
Fig. V.22 : Profils de la vitesse f' à M =0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.……..…… 85
Fig. V.23 : Profils de la vitesse h à M=0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.……..… 85
Fig. V.24 : Profils de la température θ à M=0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.……..…… 86
Fig. V.25 : Profils de la concentration ϕ à M=0.3, Gc=0.5, Gr = 0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.……..…… 86
Fig. V.26 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ..……..……...……..…… 87
Fig. V.27 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ..……..…… 88
Fig. V.28 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ..……..…… 88
Fig. V.29 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ..……..…… 89
Fig. V.30 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et

plusieurs valeurs de ξ…… 90
Fig. V.31 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ…… 90
Fig. V.32 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ…… 91
Fig. V.33 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ…… 91
Fig. V.34 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K…… 92
Fig. V.35 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K…… 93
Fig. V.36 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K…… 93
Fig. V.37 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K…… 94
Fig. V.38 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, K=0.1 et plusieurs valeurs de γ…… 95
Fig. V.39 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, K=0.5 et plusieurs valeurs de γ…… 95
Fig. V.40 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, K=0.1 et plusieurs valeurs de γ…… 96
Fig. V.41 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, K=0.1 et plusieurs valeurs de γ…… 96
Fig. V.42 : Profils de la vitesse f' pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5…… 98
Fig. V.43 : Profils de la vitesse h pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5…… 98
Fig. V.44 : Profils de la température θ pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5…… 99
Fig. V.45 : Profils de la concentration ϕ pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5…… 99

Liste des tableaux

Tab. II.1: Résumé de recherche bibliographique portant sur la convection naturelle MHD d'un fluide électriquement conducteur……..……... 50

Tab. V.1: Comparaison entre le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood de E. M. Aboeldahab et E. M. E. Elbarbary et la présente étude pour M, $m = 1$, $Gr = 1$, $Gc = 0.1$, $Pr = 0.72$, $Sc = 0.6$……..……. 71

Tab. V.2: Valeurs numériques de Nu et Sh de la convection thermique et massique pour différentes valeurs de M, m, λ et ξ avec Gr=0.5, Gc=0.5, Pr=0.71 and Sc=0.22..……...…… 101

Tab. V.3: Valeurs numériques de Nu et Sh de la convection thermique et massique sous une réaction chimique du premier ordre dans un milieu poreux pour différentes valeurs de M, m, λ et ξ avec Gr=0.5, Gc=0.5, Pr=0.71 and Sc=0.22..…… 102

Introduction générale

Beaucoup d'écoulements qui existent dans la technologie et même dans la nature, sont électriquement conducteurs où les forces électromagnétiques dans ces écoulements peuvent être du même ordre, ou même plus grand que, les forces hydrodynamiques. Ce genre d'écoulements est appelé magnétohydrodynamique [1].

La magnétohydrodynamique désigne l'examen du comportement de l'écoulement des gaz ionisés et des métaux liquides, dans un champ magnétique [2].

Ainsi, on conçoit aisément que, suivant le type d'interaction entre les forces électromagnétiques et hydrodynamiques, on puisse trouver la magnétohydrodynamique liée généralement à deux classes de problèmes distincts: les écoulements astrophysiques et les écoulements industriels [1, 2]. La distinction entre ces classes se fait par la valeur du nombre de Reynolds magnétique Re_m mesurant le rapport entre les temps caractéristiques de convection et de diffusion magnétique. Les applications industrielles sont caractérisées par très petits nombres de Reynolds magnétique de sorte que le champ magnétique induit est négligeable devant celui qui est imposé [3].

L'étude d'écoulements industrielles magnétohydrodynamiques, où des phénomènes combinés de transfert thermique et de masse ont lieu comme conséquence des diffusions thermique et d'espèces chimiques, ont des applications importantes dans beaucoup de problèmes de l'ingénierie tel que la conversion d'énergie fossile en énergie électrique, la fusion thermonucléaire de la propulsion, l'extraction géothermique, les échangeurs de chaleur, le contrôle de la couche limite dans l'aéronautique et l'aérodynamique ou encore les techniques industrielles de la métallurgie [1]. Le plus souvent dans ces écoulements, un courant est induit dans une direction normale aux champs électrique et magnétique. Ce phénomène, bien connu dans la littérature, est appelé l'effet de Hall où il devient un phénomène prépondérant dans un gaz ionisé avec une densité faible et/ou un fort

champ magnétique [3-5]. De plus, dans la plupart de ces écoulements, le mouvement de fluide est accompagné par des effets de rotation appelés les forces de Coriolis ou par des réactions chimiques. Les recherches effectuées dans le cadre de l'interaction électromagnétique-gaz ionisé ont notamment pour tâche de décrire le comportement collectif des électrons et des noyaux chargés positivement qui constituent les gaz ionisés lorsque ceux-ci sont soumis à de forts champs magnétiques. Des phénomènes complexes de transport de matière et d'énergie se produisent alors au sein du gaz ionisé.

Beaucoup d'investigations sur la convection magnétohydrodynamique avec transfert de chaleur et de masse en milieu fluide ou en milieu poreux ont été publiés où les effets de courants de Hall ne sont pas considérés. Plusieurs travaux ont été consacrés aux transferts thermiques autour d'une plaque infinie fixe, en mouvement ou en rotation et plusieurs configurations ont retenu l'attention de nombreux chercheurs, telle la configuration de Couette, la configuration disque et la plaque verticale ou horizontale.

La littérature présente quelques travaux liés au problème de la convection magnétohydrodynamique induite par effet de Hall avec une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante. Par contre, l'interaction de cet effet avec un transfert de masse par convection dans un écoulement en rotation où la force de Coriolis a une influence significative sur la dynamique de fluide est peu étudiée. Le mouvement est ascendant et on se propose d'étudier les effets de transfert thermique et de masse sur le comportement global de ce solide dans une situation où le champ magnétique appliqué est uniforme avec une densité constante.

Dans ce travail, on se propose de connaître les effets du champ magnétique, du Hall, de la vitesse de paroi et de la force Coriolis dans une configuration de convection stable pour une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante dans un courant de gaz ionisé en rotation lors de transfert thermique et de masse combinés. Ainsi, on se propose d'étudier le même problème dans un milieu poreux en tenant compte les effets d'une réaction chimique du premier ordre. La modélisation d'un tel problème est complexe, mais on poursuit une recherche de transformation de similarité qui permettra de résoudre aisément le modèle sans recourir à une méthodologie de type éléments ou volumes finis. L'ensemble d'équations de similarité différentielles ordinaires non linéaires avec les conditions aux limites appropriées est résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les profils de température, de concentration et de vitesse seront établis suivant la dépendance du paramètre caractérisant le champ magnétique, du paramètre de Hall, du paramètre de la vitesse de paroi, du paramètre de force de Coriolis et des nombres liés aux phénomènes de transport.

Organisation du manuscrit

Ce mémoire comprend cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les généralités sur la magnétohydrodynamique liées à notre problème physique, une notion sur l'effet de Hall et les applications de la magnétohydrodynamique sera ainsi présentée.

Le second chapitre présente un travail de recherche bibliographique portant sur les effets magnétiques et de Hall sur la convection d'un fluide électriquement conducteur, et nous posons la problématique.

Dans le chapitre suivant, nous décrivons les formulations mathématiques du problème, c'est-à dire, la définition du modèle physique proposé, les équations de base régissant ce modèle physique ainsi que tous les paramètres de contrôle.

L'objet du troisième chapitre est de développer une transformation de similarité qui permettra de résoudre aisément les modèles mathématiques trouvés.

Enfin le dernier chapitre aborde le code numérique utilisé dans cette étude, basée sur la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4. Les résultats obtenus numériquement sont présentés ainsi que la discussion de ces derniers.

Finalement, une conclusion générale termine notre travail.

Chapitre I

Généralités sur la magnétohydrodynamique

I.1. Introduction

L'interaction électromagnétique est à l'origine de tous les phénomènes électriques et magnétiques. La première grande étape dans la compréhension de l'électromagnétisme vient de l'unification de l'électrodynamique et du magnétisme en une seule et même interaction par J. C. Maxwell en 1860 [6]. Plus tard, un couplage entre les équations électromagnétiques de Maxwell et les équations hydrodynamiques a été fait pour décrire le comportement des particules composant un plasma. Sous certaines hypothèses les équations citées précédemment définissent la magnétohydrodynamique. Dans ce chapitre, nous abordons des généralités sur les phénomènes de la magnétohydrodynamique. Aussi, nous présentons les principales équations.

I.2. Présentation générale

La magnétohydrodynamique, MHD dans la suite du manuscrit, parfois appelée aussi hydromagnétique, est une branche de la physique permettant d'étudier les propriétés aussi bien des conducteurs fluides que des plasmas, avec toutefois des approximations différentes, lorsqu'ils sont sujets à un champ magnétique. À ses débuts, cette théorie décrivait les propriétés dynamiques des métaux liquides comme le mercure ou les alliages sodium-potassium en présence de champ magnétique. La MHD a subi d'importants développements, initiés en particulier au cours des années 1930-1950 par Hannes Alfvén, à travers l'étude de problèmes astrophysiques; mais on assiste surtout à l'avènement de cette théorie à partir des années 1950 lorsque la MHD a bénéficié de l'intérêt de la communauté des physiciens pour la production d'énergie électrique par fusion nucléaire contrôlée dans les tokamaks. Dans ces machines, le confinement du plasma, dont la matière baryonique doit fusionner, ne peut se faire par contact solide à cause de la température extrêmement élevée de la matière. L'action d'un champ magnétique fort, imposant le mouvement des particules qui composent le plasma, est une des voies envisagées. [6-8]

En parallèle, depuis les années 1950, différents projets spatiaux puis des programmes d'observations ont établi l'omniprésence de la matière ionisée et du champ magnétique dans l'univers, confirmant ainsi l'intuition d'Hannes Alfvén. La MHD a donc également trouvé dans l'astrophysique un champ très riche d'applications; celles-ci s'étendent sur un spectre large couvrant, entre autres, la physique spatiale et l'étude des environnements planétaires, la physique de la couronne solaire, la formation stellaire, les études portant sur le milieu interstellaire, etc. [6-8] Un milieu conducteur fluide tel qu'un plasma, sujet à un champ magnétique et à des courants induits voit, sur des échelles de temps et d'espace appropriées, sa dynamique considérablement modifiée par rapport à un fluide non magnétisé. Cependant, les équations sur lesquelles est fondée la théorie MHD sont les équations de l'hydrodynamique auxquelles il faut toutefois ajouter les équations d'évolution du champ électromagnétique. Mais la caractéristique majeure de la MHD a trait à l'importance du couplage entre le plasma et le champ: les courants induits dans le fluide, résultant de son mouvement, modifient la structure du champ et, réciproquement, les flux de champ magnétique donnent naissance à des forces mécaniques susceptibles de modifier le mouvement de la matière. Les plasmas MHD sont donc des milieux complexes, extrêmement non linéaires, et dont la physique doit être traitée de façon élaborée. [7, 8]

I.3. Cadre de la théorie MHD

I.3.1. Gaz ionisés, Plasmas

Le terme plasma a été proposé par Langmuir en 1923 pour décrire un gaz composé d'ions et d'électrons et de particules neutres (appelées neutres) présentant un comportement collectif. Le plasma est connu comme étant le $4^{ème}$ état de la matière, définit un milieu partiellement ou totalement ionisé et éventuellement neutre dans le cas d'une ionisation partielle. Le plasma compose 99% de la matière de l'univers sous une forme plus ou moins dense. On distingue plusieurs catégories de plasmas suivant leur taux de dissociation et surtout leur température [9]:

- les plasmas dits « chauds » : plasma thermonucléaire dont la température est de l'ordre de 5107 K; où les gaz sont majoritairement ionisés.
- les plasmas dits « froids » : dont la température est inférieur à 50 000 K et possédant un faible taux d'ionisation, de l'ordre de 10^{-4}. Pour classer les plasmas froids, on utilise la notion d'Equilibre Thermodynamique Local (ETL). L'ETL est obtenu dans le cas où les températures respectives des ions, des électrons et des neutres en un point donné sont voisines. Parmi les plasmas froids, on peut donc distinguer deux catégories [9]:
    - ✦ les plasmas thermiques (arcs électriques, torches plasma par exemple) en équilibre thermodynamique local (ETL).
    - ✦ les plasmas hors ETL (cas du plasma dans un tube fluorescent ou bien plasma micro-onde par exemple) dans lesquels la température électronique (quelques 104 K) est nettement supérieure à la température des ions et des neutres (~ 300 K).

Le diagramme suivant (Fig. I.1) illustre la très grande variété de températures et de densités des plasmas rencontrés dans la nature et dans les laboratoires [9]; où on remarque que tous les gaz peuvent donner lieu à un plasma sous l'action d'une forte énergie d'excitation.

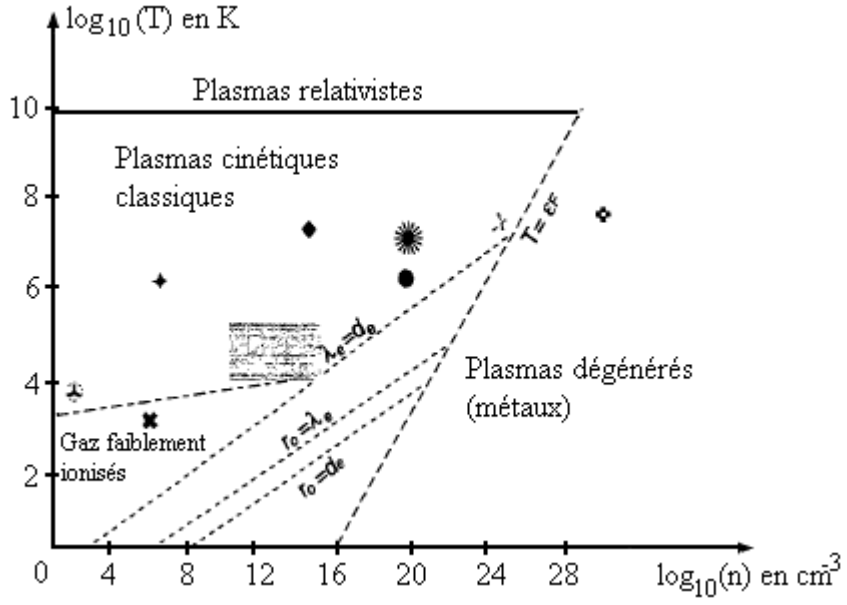


Fig. I.1 : Diagramme de classification des plasmas et position de quelques plasmas types. [9]

Espaces interstellaires, Ionosphére (couche F), Couronne solaire,
Décharges dans les gaz, Tokamak, Plasmas produits par laser (ablation) Z-pinch,
Explosion nucléaire, Intérieur des étoiles, Intérieur des naines blanches.

Les plasmas présentent des comportements très semblables aux fluides et de façon générale peuvent s'étudier dans le même cadre d'approximation, avec les mêmes outils; cette propriété est valable bien que des effets collectifs rendent la phénoménologie de la physique des plasmas plus riche que celle des fluides. Cependant, les plasmas sont également sujets à des mécanismes micro-physiques très particuliers d'interactions résonnantes avec des ondes, qui bien sûr ne transparaissent absolument plus dans une approche fluide, mais qui nécessitent un traitement cinétique. [7, 8]

Aussi, une description MHD réaliste de la dynamique d'un plasma magnétisé impose, d'une part que les propriétés du milieu, et des processus qui s'y développent, répondent le plus exactement possible aux hypothèses, parfois sévères, sur lesquelles repose cette théorie. D'autre part, il faut admettre que la MHD ne permet pas de traiter de façon exhaustive la physique des plasmas car elle ne traduit qu'un comportement « moyen » qui, par exemple, passe outre les processus purement cinétiques. [7, 8]

Le champ électromagnétique, seul élément qui en milieu conducteur différencie formellement la MHD de l'hydrodynamique, a une influence sur le mouvement uniquement par le champ magnétique; les forces électriques, qu'elles soient d'origine électromagnétique ou électrostatique (produites par d'éventuelles variations locales dans la densité de charge), sont négligeables car, dans une très bonne approximation, le plasma MHD est localement neutre, en conservant néanmoins des courants non nuls. La MHD repose donc simplement sur une vision hydrodynamique du plasma incluant toutefois les forces de Laplace dues à l'action du champ magnétique sur les courants; quant à l'évolution du champ électromagnétique, elle est bien entendu déterminée par les équations de Maxwell. Cependant, sur cette base, le champ et la matière ne sont pas encore totalement couplés : le magnétisme influe effectivement sur le plasma sous l'action de la force de Laplace, mais jusqu'ici rien ne traduit une quelconque rétroaction. La « fermeture » du système se fait à travers une loi d'Ohm reliant la densité de courant, et donc les mouvements de la matière, au champ électromagnétique. [7, 8]

I.3.2. Hypothèses de la MHD

Pour écrire les équations fondamentales de la MHD, on applique généralement les hypothèses suivantes [7, 8]:

- Le plasma est traité comme un fluide unique neutre;
- Le plasma est considéré comme un milieu continu, c'est à dire que les échelles de longueur caractérisant l'évolution des grandeurs considérées (pression, densité,...) sont très grands devant les échelles de longueur interne au plasma comme le rayon de giration ionique;
- Le plasma est en équilibre thermodynamique avec une fonction de distribution proche d'une Maxwellienne. Les temps caractéristiques d'évolution du plasma sont plus grands que le libre parcours moyen;
- La viscosité est négligée. Les effets relativistes sont aussi négligés en supposant que les vitesses de propagation soient inférieures à la vitesse de la lumière.

I.3.3. Particules chargées en champ magnétique

La résolution des équations de la dynamique pour une particule de charge q et de vitesse V, soumise à un champ magnétique $\vec{B}$, montre que la force de Lorentz [7, 8],

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\vec{V} \times \vec{B} \tag{I.1}$$

lui impose un mouvement giratoire autour d'une ligne de champ, sans toutefois modifier son mouvement parallèle. Cette giration s'effectue avec une fréquence cyclotron, ou giromagnétique, donnée par [7, 8]:

$$\vec{\omega} = \frac{q\,\vec{B}}{m} \tag{I.2}$$

où m est la masse de la particule. À cette fréquence, on associe le rayon de Larmor qui donne le rayon caractéristique du mouvement de giration d'une particule [7, 8]:

$$R_l = \frac{v_\perp}{\omega} \tag{I.3}$$

$v_\perp$ est une vitesse caractéristique des particules - leur vitesse d'agitation thermique par exemple. Ceci montre de quelle façon les mouvements de la matière peuvent être étroitement liés au champ magnétique.

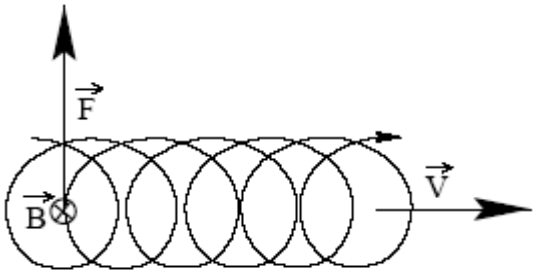


Fig. I.2 : Dérive, avec une vitesse $\vec{V}$, du mouvement cyclotron d'une particule soumise à une force $\vec{F}$ perpendiculaire à un champ magnétique $\vec{B}$. [8]

Toutefois, comme le montre la figure (I.2), lorsque la particule est soumise à une force perpendiculaire à $\vec{B}$, cette force peut être d'origine gravitationnelle ou électrique, un mouvement de dérive à vitesse constante s'établit dans la direction perpendiculaire à la fois à $\vec{B}$ et à cette force. Cette vitesse de dérive [7, 8],

$$\vec{V} = \frac{\vec{F}\times\vec{B}}{qB^2} \tag{I.4}$$

est dans le cas d'une force électrique indépendante de la masse de la particule considérée et sera donc la même pour des électrons et pour des protons (avec néanmoins des directions opposées) mais ce n'est plus le cas en champ de gravité. La combinaison de ces processus peut conduire à une perte d'efficacité du confinement magnétique et ils doivent être pris en considération dans les plasmas de laboratoire, en particulier dans le domaine de la fusion. Une courbure ou un gradient du champ magnétique conduisent également à des dérives similaires et peuvent donner lieu à des instabilités.

Il est intéressant de noter qu'en l'absence de force parallèle au champ magnétique et si nous négligeons les pertes dues au rayonnement giromagnétique, l'énergie de la particule est conservée car ni la force de Lorentz, ni les forces de dérive (perpendiculaires au mouvement) ne travaillent. Le champ magnétique ne peut donc être à l'origine de quelque mécanisme d'accélération de particule que ce soit; pour cela, il faut faire intervenir une force qui lui est parallèle, généralement une force électrique [7, 8].

I.3.4. Grandeurs caractéristiques de la MHD

Par définition, en MHD, le champ magnétique initial B_0 contrôle la dynamique de la matière conductrice, dont l'inertie se traduit par une densité ρ_0. Un simple calcul dimensionnel sur l'équation du mouvement permet de relier les échelles spatiales de variations des grandeurs physiques L_0, aux échelles de temps τ_0 [7, 8], où τ est le temps de collision. On détermine ainsi [7, 8]:

- la vitesse d'Alfvén

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho_0}} \tag{I.5}$$

où μ est la perméabilité magnétique du milieu, cette vitesse est typique des processus MHD mis en jeu dans le plasma. En outre, une hypothèse fondamentale de la MHD est que l'approche classique de l'étude de la dynamique reste valable; cela sous-entend d'avoir [7, 8]

$$\frac{V_A}{c} \ll 1 \tag{I.6}$$

où $c = 2{,}998 \times 10^8 m.s^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide. [7, 8]

- la vitesse du son

$$V_s = \left(\frac{\gamma' p}{\rho_0}\right) \tag{I.7}$$

où γ' est le coefficient adiabatique (rapport des chaleurs spécifiques C_p et C_v), p est la pression.

Il existe d'autre paramètres qui caractérisent le comportement du fluide étudier; les plus importants sont [7, 8]:

- Le *Beta* du plasma: Le *Beta* du plasma mesure le rapport des forces de pression aux forces magnétiques, il s'écrit :

$$Beta = \frac{2V_s^2}{\gamma V_A^2} \tag{I.8}$$

La réaction du champ sur les mouvements variée selon les valeurs de *Beta* :

- ✓ Pour $Beta \ll 1$, toutes les forces sont négligeables devant la force magnétique,
- ✓ Entre les deux, où $Beta \backsim 1$, les forces de pression et magnétiques sont de même ordre.

- Le nombre de Mach:

$$Ma = \frac{V}{V_s} \tag{I.9}$$

Le plasma est considéré incompressible pour des petites valeurs de nombre de Mach $(Ma \ll 1)$. Mais il existe d'autre nombres sans dimensions plus importants dans notre cas sont le nombre de Reynolds "Re" et le nombre de Reynolds magnétique "Re_m", que nous allons parler brièvement dans la section I.4.5.

I.4. Équations de la MHD

Nous allons montrer brièvement comment la MHD est construite sur la base des équations de l'hydrodynamique, auxquelles on joint les équations de Maxwell. L'ensemble des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm va se réduire à une équation d'induction décrivant les variations temporelles du champ magnétique. Le système ainsi constitué est fermé par une équation d'état de la matière.

I.4.1. Origine cinétique

Dans ce paragraphe nous allons établir les équations de l'hydrodynamique c'est-à-dire les équations reliant les variations temporelles de masse, d'impulsion, et d'énergie d'un élément infinitésimal de volume (ou élément fluide), à des termes d'advection, de perte et de source. Le cheminement qui permet de passer de la théorie cinétique décrivant le comportement statistique microscopique des particules composant le plasma, à une formulation macroscopique va être exposé succinctement. Les relations obtenues ne tiennent bien entendu pas compte d'éventuelles créations ou annihilations de matière, ni même de modification des différentes populations par des réactions chimiques, nucléaires, d'ionisations ou de recombinaisons. [7, 8]

Pour retrouver de manière rigoureuse ce système d'équations il est intéressant de partir de la relation de Liouville qui décrit l'évolution d'une fonction de distribution à N particules F (F donne la probabilité de trouver les particules constituant le plasma dans un état donné), dans un espace de phases à $6N$ dimensions (données par les positions et impulsions de toutes les particules); chaque

point $(\vec{x}_k\ , \vec{P}_k)$ de cet espace, où k prend toutes les valeurs allant de 1 à N, décrit une état potentiel du système. Le théorème de Liouville montrant la conservation de la fonction de distribution au cours du déplacement s'exprime [7, 8]:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \tag{I.10}$$

soit

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_i} + \frac{d\vec{P}_i}{dt} \frac{\partial F}{\partial \vec{P}_i} = 0 \tag{I.11}$$

où *t* est le temps.

La résolution de cette équation est le seul moyen de déterminer l'évolution exacte de la distribution de particules; cependant le nombre colossal de degrés de liberté rend cette résolution impossible dans des contextes réalistes et l'on doit se contenter de fonctions décrivant moins finement l'état du plasma. La « réduction »se fait par intégration sur $(N-1)$ variables d'espace et d'impulsion, on obtient alors l'équation cinétique suivante [7, 8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{\mathcal{F}} \frac{\partial f}{\partial \vec{P}} = \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{int} \tag{I.12}$$

portant sur la fonction de distribution à une particule définie par [7, 8]:

$$f(\vec{x}_1, \vec{P}_1, t) = N \int F \, d\vec{x}_2 .. d\vec{x}_N d\vec{P}_2 .. d\vec{P}_N \tag{I.13}$$

La fonction f donne le nombre de particules dans un volume élémentaire de l'espace des phases à 6 dimensions. Quant au terme $\vec{\mathcal{F}}$, il représente les champs de forces extérieurs dus à la gravité, au champ magnétique, sans oublier celui qui est créé par les courants circulant dans le plasma, puis au champ électrique $\vec{E}$ [7, 8]:

$$\vec{\mathcal{F}} = m\vec{g} + q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \tag{I.14}$$

tandis que le second membre de l'équation (I.12) caractérise les interactions électrostatiques entre particules au sein même du plasma; l'information perdue lors de la réduction de la fonction de distribution se retrouve partiellement dans ce terme de collision, ce terme dépend d'une fonction de distribution à deux particules dont l'évolution est à nouveau déterminée par une fonction de

distribution à trois particules, etc. (On obtient finalement le système à N équations de Born-Bogoliougov-Green-Kirkwood-Yvon que l'on interrompt en appliquant une relation de fermeture). Son traitement ne peut se faire sans hypothèse préalable sur les mécanismes d'interaction; cela conduit en pratique à différentes formes d'équations cinétiques (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck, etc.). [7, 8]

Une hypothèse simplificatrice consiste à considérer différemment les interactions entre particules suivant qu'elles sont à longue ou à courte portée. Dans les plasmas dilués, possédant un grand nombre de particules dans la sphère de Debye, les processus collectifs sont dominants devant les processus interarticulaires; les interactions à longue portée sont donc prépondérantes et peuvent être perçues comme étant créées par un champ moyen car elles ne dépendent que très faiblement de la position exacte des particules mises en jeu. Suivant le contexte on peut donc scinder les interactions internes en un terme lié à ces champs moyens (qui vont s'additionner aux champs extérieurs), équation de type Vlasov, et éventuellement un terme lié aux interactions entre particules voisines d'où [7, 8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \left[m\vec{g} + q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial \vec{P}} = \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{int} \tag{I.15}$$

Les champs électromagnétiques ont ici deux contributions: celle des champs externes et celle des champs internes moyens [7, 8],

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \langle \vec{E}_{int} \rangle \tag{I.16}$$

et

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \langle \vec{B}_{int} \rangle \tag{I.17}$$

I.4.2. Équations de l'hydrodynamique

Toutes les densités volumiques des grandeurs macroscopiques caractérisant le plasma sont déduites des différents moments sur les vitesses de la fonction de distribution à une particule ; les équations d'évolution de ces densités s'obtiennent donc en intégrant l'équation cinétique (I.15) sur l'espace à trois dimensions des vitesses d'une particule. Nous définissons la densité volumique d'une grandeur physique $\rho_\phi(\vec{x}, t)$ comme la moyenne de la quantité $\phi\left(\vec{P}\right)$ (pondérée par la densité de particules) sur l'espace des phases [7, 8]:

$$\rho_\phi(\vec{x}, t) = \int f\left(\vec{x}, \vec{P}, t\right) \phi\left(\vec{P}\right) d^3\vec{P} \tag{I.18}$$

D'après la relation (I.15) l'évolution de $\rho_\phi(\vec{x},t)$ est dictée par [7, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\phi(\vec{x},t) + \nabla.\int \vec{V} f(\vec{x},\vec{P},t)\,\phi(\vec{P})\,d^3\vec{P} - \int f(\vec{x},\vec{P},t)\,\vec{\mathcal{F}}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{P}}\,d^3\vec{P} = C(\phi) \tag{I.19}$$

où l'on a supposée

$$\frac{\partial}{\partial\vec{P}}\vec{\mathcal{F}} = 0 \tag{I.20}$$

ce qui est toujours vérifié même pour la force

$$\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B} \tag{I.21}$$

Munis de cet outil, nous pouvons maintenant établir les équations d'évolution des différentes espèces chimiques du plasma, que nous notons α, dans lesquelles vont intervenir des grandeurs physiques partielles.

***Équation de continuité* :** Elle décrit l'évolution de la densité numérique de particules. On l'obtient en posant $\phi \equiv 1$ dans l'équation (I.19) [7, 8]:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla.\left(n_\alpha\vec{U}_\alpha\right) = 0 \tag{I.22}$$

La densité numérique de l'espèce α est définie par [7, 8]

$$n_\alpha(\vec{x},t) = \int f_\alpha(\vec{x},\vec{P},t)\,d^3\vec{P} \tag{I.23}$$

et sa vitesse macroscopique par [7, 8]

$$\vec{U}_\alpha(\vec{x},t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{x},t)}\int f_\alpha(\vec{x},\vec{P},t)\,\vec{V}\,d^3\vec{P} \tag{I.24}$$

Nous avons de plus considéré que pour des interactions élastiques $C(1) = 0$ (conservation du nombre de particules).

***Équation de transfert de quantité de mouvement* :** On calcule cette fois le premier moment de la fonction de distribution des particules α en posant $\phi \equiv \vec{P} = m_\alpha\vec{V}$ dans la relation (I.19). Ce calcul conduit à une généralisation de l'équation de Navier-Stockes [7, 8]:

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \vec{U}_\alpha}{\partial t} + \left(\vec{U}_\alpha . \nabla\right)\vec{U}_\alpha + \vec{g}\right) + \nabla . \overline{\mathcal{P}}_\alpha - q_\alpha\left(\vec{E} + \vec{U}_\alpha \times \vec{B}\right) = -\nabla . \overline{\prod}_\alpha \quad \text{(I.25)}$$

La combinaison des tenseurs $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\prod}$ représente la pression totale du milieu; ces termes sont d'origine respectivement thermique et collisionnelle. $\overline{\mathcal{P}}$ est le tenseur de pression cinétique, il ne doit son existence qu'à l'agitation thermique des particules, dont les composantes sont données par [7, 8]:

$$\mathcal{P}_{ij} = \int m(V_i - U_i)\left(V_j - U_j\right) f\left(\vec{x}, \vec{P}, t\right) d^3\vec{P} \quad \text{(I.26)}$$

Il définit un flux de quantité de mouvement à travers une surface se déplaçant avec le flot ; il est par exemple à l'origine du transport visqueux. De façon générale, ce tenseur s'écrit comme la combinaison d'un terme de pression hydrostatique p et de termes liés aux variations spatiales de la vitesse [7, 8]:

$$\mathcal{P}_{ij} = p\delta_{ij} - \tilde{\eta}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla . \vec{U}\right) - \zeta\delta_{ij}\nabla . \vec{U} \quad \text{(I.27)}$$

où $\tilde{\eta}$ et ζ sont respectivement les viscosités dynamique et « seconde » du milieu et δ_{ij} le symbole de Kroenecker.

La divergence du tenseur de pression interparticulaire représente la quantité de mouvement échangée par collision, non seulement avec les particules de la même espèce mais également avec l'ensemble des autres populations. Si on ne considère que des collisions élastiques entre les particules on peut approximer ce terme par [7, 8]:

$$\vec{\prod}_\alpha \cong \sum_\beta n_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha\beta}\left(\vec{U}_\beta - \vec{U}_\alpha\right) \quad \text{(I.28)}$$

où $\nu_{\alpha\beta}$ est une moyenne de la fréquence des collisions entre les particules des espèces α et β.

Équation de transfert d'énergie : Afin de déterminer l'évolution de l'énergie cinétique totale ε_t, somme des énergies cinétiques interne et macroscopique, de la population α, on intègre (I.19) en posant $\phi \equiv \frac{P^2}{2m_\alpha}$: [7, 8]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n_\alpha m_\alpha\left(\frac{1}{2}U_\alpha^2 + \varepsilon_{i\alpha}\right)\right] - n_\alpha\left(m_\alpha\vec{g} + q_\alpha\vec{E}\right).\vec{U}_\alpha + \nabla.\left[n_\alpha m_\alpha\left(\frac{1}{2}U_\alpha^2 + \varepsilon_{i\alpha}\right)\vec{U}_\alpha + \overline{\mathcal{P}}_\alpha.\vec{U}_\alpha + \vec{q}_\alpha\right] = \left|\frac{\partial \varepsilon_{t\alpha}}{\partial t}\right|_{coll} \quad \text{(I.29)}$$

dans laquelle ε_i est la partie de l'énergie interne spécifique liée à l'agitation thermique des particules: [7, 8]

$$\varepsilon_i = \int \left(\vec{V} - \vec{U}\right)^2 f\left(\vec{x}, \vec{P}, t\right) d^3\vec{P} \tag{I.30}$$

quant au vecteur $\vec{q}$, il exprime le flux de chaleur traversant le plasma [7, 8]:

$$\vec{q} = \int \left(\vec{V} - \vec{U}\right)\left(\vec{V} - \vec{U}\right)^2 f\left(\vec{x}, \vec{P}, t\right) d^3\vec{P} \tag{I.31}$$

Le membre de droite exprime les échanges d'énergie par collisions entre particules.
Pour rendre compte d'un plasma mono-fluide, l'étape suivante consiste à combiner les équations établies ci-dessus pour l'ensemble des espèces chimiques présentes dans le milieu. Si nous sommons ces équations, la densité numérique - puis par conséquent les densités de masse ρ et de charge ρ^*, ainsi que l'énergie cinétique interne se déduisent directement des grandeurs partielles [7, 8]:

$$n = \sum_\alpha n_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha, \quad \rho^* = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha = 0, \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = \sum_\alpha \varepsilon_{i\alpha} \tag{I.32}$$

Il en va de même des grandeurs vectorielles et tensorielles comme la densité de courant, le flux de chaleur et la pression cinétique [7, 8]:

$$\vec{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{U}_\alpha, \quad \vec{q} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha, \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \overline{\mathcal{P}}_\alpha \tag{I.33}$$

La définition de la vitesse est en revanche pondérée par l'inertie de chacune des espèces [7, 8]:

$$\vec{U} = \frac{\sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \vec{U}_\alpha}{\sum_\alpha n_\alpha m_\alpha} \tag{I.34}$$

cette expression de $\vec{U}$ montre d'ailleurs que la vitesse d'ensemble du plasma est sensiblement la même que celle des éléments les plus lourds (ions ou neutres) dans le rapport $m_e = m_i$.

Les équations fluides décrivant l'évolution du plasma MHD se réduisent alors au système suivant [7, 8]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \tag{I.35}$$

$$\nabla.\vec{j} = 0 \tag{I.36}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}\right] + \nabla.\overline{\mathcal{P}} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho\vec{g} \tag{I.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + \varepsilon_i\right)\right] + \nabla.\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + \varepsilon_i\right)\vec{V} + \overline{\mathcal{P}}.\vec{V} + \vec{q}\right] = \vec{j}.\vec{E} + \rho\vec{g}.\vec{V} \tag{I.38}$$

Le système des équations fluides présenté ci-dessus n'est pas fermé, nous n'avons aucune connaissance de l'évolution du terme de flux de chaleur $\vec{q}$. Il faut donc introduire une relation supplémentaire, en l'occurrence une équation d'état, pour relier l'énergie interne spécifique aux autres grandeurs physiques, ainsi qu'une loi définissant le flux de chaleur, telle que la loi phénoménologique de Fourier [7, 8],

$$\vec{q} \propto -\nabla T \tag{I.39}$$

I.4.3. Loi d'Ohm généralisée

L'établissement d'une loi d'Ohm pour un plasma, c'est-à-dire d'une loi reliant les mouvements de la matière aux densités volumiques de courant $\vec{j}$, au champ électrique $\vec{E}$ et au champ d'induction magnétique $\vec{B}$, est un point délicat à la base de la théorie MHD. Dans certains contextes il est en effet difficile de vérifier les conditions de validité de cette relation ; ainsi de mauvaises prédictions de la théorie peuvent parfois provenir d'une mauvaise évaluation de la forme de la loi d'Ohm, alors inadaptée au problème étudié. Cette loi traduit simplement, en terme de courant, la réponse d'un milieu conducteur immobile à un champ électrique. Elle prend la forme d'une relation de proportionnalité [7, 8]:

$$\vec{j}^* = \sigma\vec{E}^* \Leftrightarrow \vec{E}^* = \overline{\eta}\vec{j}^* \tag{I.40}$$

avec

$$\overline{\eta} = \frac{1}{\sigma} \tag{I.41}$$

où σ est la conductivité électrique du plasma et $\overline{\eta}$ sa résistivité. Cette relation est exprimée dans le référentiel où le plasma est localement au repos; pour la traduire dans le référentiel lié au laboratoire ou à l'observateur, nous appliquons une transformation de Lorentz sur le tenseur de Maxwell, qui décrit le champ électromagnétique. Dans l'approximation classique, valide pour la MHD, le champ électromagnétique devient [7, 8]

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \tag{I.42}$$

et

$$\vec{B}^* = \vec{B} \tag{I.43}$$

Ainsi la loi d'Ohm s'écrit dans le référentiel du laboratoire [7, 8]:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) \Leftrightarrow \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \overline{\eta}\,\vec{j} \tag{I.44}$$

Cette formulation de la loi d'Ohm, qui semble simple, cache en fait dans l'expression de la résistivité toute la micro-physique de la population d'électrons. Cette résistivité est dépendante du type de plasma rencontré.

Si nous avions considéré un plasma froid, possédant une population non négligeable d'atomes neutres, il serait apparu dans l'expression de la loi d'Ohm un terme supplémentaire lié à la diffusion sous l'effet de la force de Laplace des espèces chargées par rapport aux neutres. Le courant de charges ainsi induit est dirigé perpendiculairement aux lignes de champ et est proportionnel au carré du champ magnétique. Il faut bien voir que cette diffusion, dite diffusion ambipolaire n'enlève rien au couplage existant entre les particules. Pour cela nous partons de l'expression de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au gaz d'électrons, obtenue dans la section précédente. La dynamique importante dans ce contexte est celle des ions et comme nous l'avons vu précédemment les électrons sont alors dans une bonne approximation quasistatique; on peut donc considérer que la variation de leur impulsion moyenne est nulle. De plus nous approximons le tenseur de pression cinétique du gaz d'électrons au seul terme de pression hydrostatique. Une dernière approximation, due à la faible masse des électrons, consiste à négliger le terme de gravité devant les autres interactions mises en jeu. Ce calcul revient à effectuer la différence des équations du mouvement des populations d'ions et d'électrons, puis à considérer des courants stationnaires. On peut écrire [7, 8]:

$$-\nabla p_e - n_e e\left(\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}\right) + n_e m_e \nu_{ei}\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right) = 0 \tag{I.45}$$

Dans cette expression $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei}$ est la fréquence des collisions responsables du transfert de quantité de mouvement entre les électrons et les ions. En introduisant la densité de courant [7, 8]

$$\vec{j} = n_e e\left(\vec{V}_e - \vec{V}_i\right) \tag{I.46}$$

et si l'on assimile la vitesse du fluide à celle des ions, cette relation peut encore s'écrire [7, 8]:

$$\overline{\eta}\vec{j} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} + \frac{\nabla p_e}{n_e e} - \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{n_e e} \tag{I.47}$$

la résistivité du plasma est alors définie par [7, 8]:

$$\overline{\eta} = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \tag{I.48}$$

Ainsi la loi d'Ohm généralisé s'écrit [7, 8]:

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{e n_e} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{e n_e} \nabla p_e \right) \tag{I.49}$$

Dans le membre de droite de la formule précédente apparaissent deux termes de création de courant qui sont liés à des mécanismes associés de nouvelles formes de champs électriques.

- terme de l'effet Hall [7, 8]:

$$\frac{\vec{j} \times \vec{B}}{n_e e} \tag{I.50}$$

- terme du gradient de pression électronique [7, 8]:

$$\frac{\nabla p_e}{n_e e} \tag{I.51}$$

Un courant peut être produit d'une part à travers le gradient de la pression du gaz d'électrons et peut être d'autre part généré par un *effet Hall*. Il est important de regarder précisément dans quelles approximations il est possible de négliger ces deux termes.

I.4.4. Équations de Maxwell

L'ensemble des équations fluides montre comment vont évoluer les grandeurs physiques caractérisant un plasma sous l'action d'éventuels champs de forces extérieurs mais surtout à travers des effets collectifs moyennés sur les échelles de temps et d'espace MHD. Ces effets collectifs, dus aux fluctuations des interactions à longue portée, sont relaxés dans l'approximation MHD mais nous en gardons trace par des champs électrique et magnétique moyens. Nous allons donc voir à présent comment évoluent ces champs électromagnétiques $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Cette évolution se décrit

naturellement par les quatre équations de Maxwell que nous exprimons dans le système MKSA [7, 8]:

- Théorème de Gauss:

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho^*}{\varepsilon_0} \tag{I.52}$$

- Conservation de flux magnétique:

$$\nabla.\vec{B} = 0 \tag{I.53}$$

- Loi d'induction:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \tag{I.54}$$

- Théorème d'Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{I.55}$$

aux quelles on ajoute la loi d'Ohm (I.44) qui découle du caractère quasistatique des électrons.
Le diamagnétisme des milieux dilués que sont les plasmas est très faible, on peut donc se permettre d'approximer la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ à celles du vide $\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ et $\mu \simeq \mu_0$ avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$ et $\varepsilon_0 = \frac{1}{(\mu_0 c^2)} \approx 8.854 \times 10^{-12} F.m^{-1}$.

Dans un premier temps nous pouvons vérifier simplement que l'électro-neutralité du plasma découle de façon naturelle des hypothèses qui fondent la MHD; un calcul en ordre de grandeur sur la relation de Gauss (I.52) montre que le rapport de la densité numérique de particules participant à la charge du plasma sur la densité de particules totale est très petit [7, 8]:

$$\frac{n^*}{n} = \frac{V_A^2}{(c^2 \tau_0 \omega_i)} \ll 1 \tag{I.56}$$

De la même manière, la loi de Faraday (I.54) nous donne une relation approximative entre les valeurs de champs électrique et magnétique [7, 8]:

$$\frac{B_0}{\tau_0} \sim \frac{E_0}{L_0} \Rightarrow E_0 \sim V_A B_0 \tag{I.57}$$

si nous considérons des grandeurs typiques du milieu étudié. En reportant cette relation dans l'équation d'Ampère (I.55) [7, 8]:

$$B_0 \sim \mu_0 j_0 + \frac{V_A^2}{c^2} B_0 \tag{I.58}$$

on constate immédiatement que le courant de déplacement est largement négligeable devant les autres termes, dans le cadre non relativiste d'application de la MHD. Pour les plasmas MHD la relation d'Ampère se réduit donc simplement à l'expression [7, 8]:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{I.59}$$

en accord avec la relation (I.36) découlant de la neutralité du plasma, qui requiert un courant à divergence nulle c'est-à-dire un courant circulant sur des boucles fermées sans accumulation de charges.

I.4.5. Équation d'induction

La combinaison des équations de Maxwell (I.53), (I.54), (I.59) avec la loi d'Ohm (I.44) permet d'établir une autre relation fondamentale de la MHD qui vient compléter les équations décrivant l'évolution du fluide. Cette équation, appelée équation d'induction, s'écrit [7, 8]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{B}\right) + \nu_m \Delta \vec{B} \tag{I.60}$$

Elle exprime l'évolution du champ magnétique à travers son couplage avec la matière et par l'action d'effets dissipatifs. Les deux termes du membre de droite sont de nature différente : le premier est associé à un mouvement d'advection des lignes de champ avec le flot de plasma alors que le second montre un effet de dissipation du courant électrique qui se traduit par la diffusion des lignes de champ magnétique. En effet, dans la limite où l'advection du champ est négligeable devant sa dissipation, l'équation d'induction se résume à une simple équation de diffusion [7, 8]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \Delta \vec{B} \tag{I.61}$$

Cependant, les plasmas MHD ne peuvent être dominés par la dissipation car alors l'expression de la loi d'Ohm (I.44) n'est plus valable; *l'effet Hall* et le gradient de pression électronique deviennent dans ce cas prépondérants. La diffusivité magnétique que nous avons ici supposée uniforme, $\nu_m = \overline{\eta}/\mu_0$, est proportionnelle à la résistivité du plasma. Elle a un effet dissipatif, analogue à celui

de la viscosité hydrodynamique, qui tend à uniformiser le champ magnétique et donc à éliminer les courants, cela s'accompagne d'une production d'énergie interne par effet Joule.
Il est intéressant d'avoir une idée de l'importance relative des termes d'advection et de diffusion; nous faisons cette estimation à travers leur rapport [7, 8]:

$$\left\| \frac{\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})}{\nu_m \Delta \vec{B}} \right\| \sim \frac{V_0 L_0}{\nu_m} \tag{I.62}$$

On peut donc dans le cadre de la MHD construire un nombre sans dimension dont la valeur, suivant qu'elle est petite ou grande devant l'unité, indique si le plasma se comporte plutôt en régime advectif ou diffusif. Ce nombre est appelé nombre de Reynolds magnétique et est défini comme [7, 8],

$$Re_m = \frac{V_0 L_0}{\nu_m} \tag{I.63}$$

Il est l'analogue du nombre de Reynolds hydrodynamique "Re" utilisé pour déterminer si un fluide est en régime turbulent ou non [7, 8].

I.4.6. Force de Laplace

Lorsque que l'on établit les équations fluides qui gouvernent la dynamique d'un plasma, la force de Laplace volumique [7, 8]

$$\vec{F}_{Laplace} = \vec{j} \times \vec{B} \tag{I.64}$$

apparaît naturellement compte tenu du léger décalage de vitesse entre les ions et les électrons. Nous pouvons y introduire la forme (I.59) de la relation d'Ampère, négligeant le courant de déplacement; elle devient ainsi [7, 8]

$$\vec{F}_{Laplace} = \nabla . \vec{B} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{I.65}$$

puis après quelques manipulations algébriques élémentaires se met sous la forme [7, 8]:

$$\vec{F}_{Laplace} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} . \nabla \right) \vec{B} \tag{I.66}$$

Cette écriture artificielle de la force de Laplace présente l'avantage d'aider à sa compréhension physique. Par analogie avec la force volumique créée par la pression thermique, on identifié le premier terme de (I.66) à la force exercée par une pression magnétique définie par [7, 8]:

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{I.67}$$

Une surpression magnétique a donc sur la matière exactement la même influence qu'une surpression thermique. Le second terme est appelé tension magnétique, il tend à s'opposer à la courbure des lignes de champ magnétique de façon identique à la tension mécanique s'exerçant sur une corde; en toute logique son amplitude est inversement proportionnelle au rayon de courbure. En outre, la tension magnétique joue le rôle de force de rappel dans la propagation des ondes MHD, et plus particulièrement pour l'onde d'Alfvén, analogue d'une onde se propageant sur une corde vibrante. Bien évidemment ces deux « sous-produits » de la force de Laplace se compensent exactement afin d'exercer une action nulle suivant les lignes de champ magnétique. Sur la figure (I.3), nous avons représenté l'effet de ces contributions de la force de Laplace sur un volume élémentaire de plasma. Il est également intéressant de remarquer que la force de Laplace s'écrit comme la divergence d'un tenseur [7, 8]

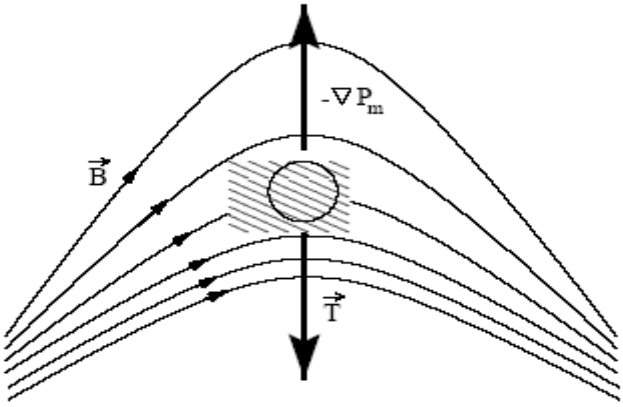


Fig. I.3 : Schéma montrant la décomposition de la force de Laplace en force pression et de tension, $\vec{T}$. [8]

$$\vec{F}_{Laplace} = \nabla.\left(-p_m \bar{I} + \frac{\overline{BB}}{\mu_0}\right) \tag{I.68}$$

Où $\bar{I}$ est le tenseur unité et $BB_{ij} = B_i B_j$ est défini par le produit tensoriel de $\vec{B}$ avec lui-même.
Cette approche permet une écriture conservative de l'équation du mouvement [7, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla.\left(\rho\overline{VV} + \overline{\mathcal{P}} + p_m \bar{I} - \frac{\overline{BB}}{\mu_0}\right) = 0 \tag{I.69}$$

où $\overline{VV}_{ij} = V_i V_j$ et $\overline{\mathcal{P}}$ est le tenseur de pression cinétique.

I.4.7. Bilan énergétique

Dans le plasma, la force de Lorentz s'exerçant sur les particules en mouvement travaille à travers l'action du champ électrique, et seulement lui. Comme nous pouvons le voir dans l'équation d'énergie (I.38), cette force échange sous différentes formes de la puissance électromagnétique avec la matière. Cette puissance s'évalue simplement et s'exprime [7, 8]:

$$\Sigma = -\vec{j}.\vec{E} \tag{I.70}$$

La combinaison des équations de Faraday (I.54) et d'Ampère (I.59) permet après quelques opérations algébriques de récrire Σ comme [7, 8]:

$$\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t} + \nabla.\vec{S} = \Sigma \tag{I.71}$$

cette équation détermine l'évolution de l'énergie magnétique $\varepsilon_m = B^2/2\mu_0$. Elle comprend un terme de transport d'énergie électromagnétique donné par la divergence du flux de Poynting [7, 8],

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{I.72}$$

et le terme de perte Σ. Il est remarquable qu'en MHD l'intégralité de l'énergie électromagnétique se retrouve dans le champ magnétique, cela découle simplement du lien entre les valeurs caractéristiques de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, $E_0 = V_A B_0$, qui conduit à avoir une énergie électrique [7, 8]

$$\varepsilon_e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} \tag{I.73}$$

négligeable :

$$\varepsilon_e = \frac{V_A^2}{c^2}\varepsilon_m \tag{I.74}$$

Dans la relation (I.70), si nous exprimons le champ électrique à partir de la loi d'Ohm, nous pouvons visualiser les origines de l'échange d'énergie magnétique; en effet Σ prend ainsi la forme [7, 8]:

$$\Sigma = -\overline{\eta} j^2 - \vec{V}.\vec{j} \times \vec{B} \tag{I.75}$$

dont le premier terme montre qu'une partie de la puissance électromagnétique est dissipée par effet Joule et chauffe donc le plasma, tandis que le second terme traduit les échanges d'énergie macroscopique entre la matière et le champ magnétique à travers la force de Laplace; cette force peut mettre en mouvement la matière et consommer du champ magnétique mais inversement, de part son advection, la matière peut déformer ou comprimer le champ magnétique qui voit ainsi s'accroître son énergie.

I.5. MHD idéale

Dans les processus MHD où le nombre de Reynolds magnétique (I.63) est très grand devant l'unité. Cela signifie qu'à ces échelles la dynamique du milieu est régie par les mouvements de la matière et que les effets dissipatifs sont insignifiants; on parle alors de MHD idéale. L'équation d'induction (I.60) prend une nouvelle forme, dans laquelle nous sommes en droit de négliger la composante produisant la diffusion des lignes de champ à travers le plasma [7, 8]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{B}\right) \tag{I.76}$$

Un plasma répondant de la MHD idéale est assimilé à un milieu infiniment conducteur c'est-à-dire tel que $\overline{\eta} = 0$. La loi d'Ohm devient alors [7, 8]:

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \tag{I.77}$$

et dans ce cas, la densité volumique de courant doit être calculée à partir de la relation d'Ampère (I.59).

Un théorème énoncé par H. Alfvén montre qu'à l'inverse du cas $Re_m \ll 1$ où les lignes de champ magnétique peuvent diffuser à l'intérieur du plasma, dans le cadre de la MHD idéale les lignes de champ sont "gelées" dans la matière, c'est-à-dire qu'elles sont transportées par le plasma et ont une évolution similaire à la sienne [7, 8].

I.6. Equilibre magnétohydrostatique:

La MHD considère l'évolution temporelle et spatiale des différentes quantités telles que la densité ou le champ magnétique. Il est aussi intéressant d'étudier les variations lentes de ces paramètres (variations temporelles négligeables), c'est à dire de considérer que le plasma est en équilibre. L'équation d'équilibre magnétohydrostatique entre le gradient de pression, la force de Lorenz et la force de gravité est [7, 8]:

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}p + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho\vec{g} \quad \text{(I.78)}$$

De l'équation (I.78) on peut déduire plusieurs cas simplifiés, dans le cas d'un plasma à faible *Beta* ($Beta \ll 1$), cette équation se réduit à [7, 8]:

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \text{(I.79)}$$

Ce qui implique que le vecteur densité de courant est colinéaire au vecteur champ magnétique. Le champ magnétique vérifiant cette équation est appelé un champ sans-force. Dans le cas où la densité de courant est nulle, le champ magnétique est appelé un champ sans courant ou potentiel.

I.7. Ondes MHD

Dans un tel plasma, trois types d'ondes existent: l'onde d'Alfven et les ondes magnétoacoustiques lentes et rapides. Ces ondes sont appelées les ondes MHD. Les vitesses caractéristiques de ces ondes sont la vitesse d'Alfvén et la vitesse du son. On suppose que le vecteur $\vec{k}$ colinéaire à $\vec{B}_0$ [8].

Le mode d'Alfvén est dû aux forces de tension (vitesse d'Alfvén) et n'est pas associé à des perturbations de pression ou de densité. Les perturbations de vitesse ou de champ magnétique sont transverses à et au vecteur d'onde $\vec{k}$. Dans le cas d'un champ magnétique incliné par rapport au vecteur d'onde, les mouvements des ondes d'Alfvén sont perpendiculaires au plan défini par $\vec{B}_0$ et $\vec{k}$. [8]

Les modes magnétoacoustiques lents et rapides sont associés à des perturbations de tension (vitesse d'Alfvén) et de pression (vitesse du son). Le mode lent ne se propage pas lorsque $\vec{B}_0$ et $\vec{k}$ sont perpendiculaires. [8]

I.8. Effet de Hall

Quand un champ magnétique est appliqué à un conducteur parcouru par un courant perpendiculairement au courant, il apparaît une force électromotrice dans une direction perpendiculaire au courant et au champ magnétique. Cette force électromotrice est appelée *effet Hall* [6].

En 1879 Edwin Herbert Hall, de l'université Johns Hopkins, pensa que lorsque l'on applique un champ magnétique à un conducteur parcouru par un courant celui-ci agit sur le courant et non sur le conducteur comme l'écrivit Maxwell dans sa traite sur l'électricité et le magnétisme. Le courant doit alors être confine sur un bord de l'échantillon et la résistance électrique du conducteur croître,

c'est la magnéto-résistance positive. Cet effet étant très faible Hall n'observa rien. Puis il pensa à mesurer la tension orthogonalement au courant. Sa valeur non nulle confirma l'intuition de Hall [6, 10]. C'est l'effet Hall classique. La résistance de Hall classique est donc [10]:

$$R_H = \frac{B}{n_e|e|} \tag{I.80}$$

où n_e étant le nombre d'électrons par unité de surface et e la charge de l'électron.
L'origine de l'effet Hall est le phénomène suivant: lorsqu'une particule chargée entre dans un champ magnétique, elle est déviée de sa trajectoire initiale. Cette déviation, due à la force de Lorentz, est perpendiculaire au champ et à la direction de propagation de la particule. C'est pour cette raison que si l'on injecte un courant I dans un métal bidimensionnel, exposé à un champ magnétique perpendiculaire, une différence de concentration de charge s'établit entre deux bords opposés perpendiculairement au courant (fig. I.4, graphique inséré). Cette différence de concentration de charge donne lieu à une tension U_H entre les bords, et la résistance de Hall, définie par [10]

$$R_H = \frac{U_H}{I} \tag{I.81}$$

est proportionnelle au champ magnétique (fig. I.4). Cet effet, qui fut découvert par E. Hall, est encore utilisé aujourd'hui pour mesurer la densité de porteurs de charges mobiles qui transportent le courant électrique. En effet la pente de R_H en fonction du champ magnétique ne dépend que du produit qn_{el}, où n_{el} est la densité de porteurs et q leur charge électrique. [10]

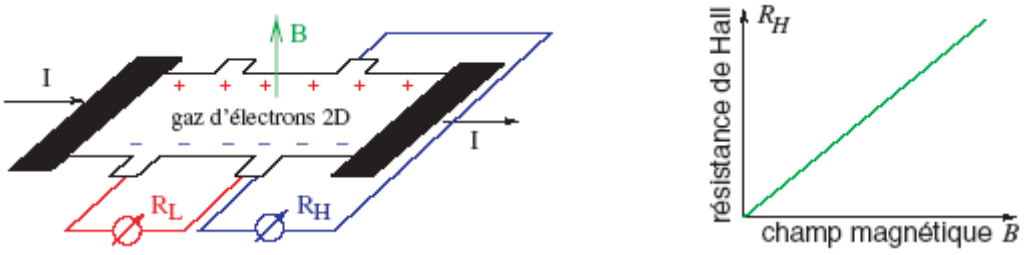


Fig. I.4 : Système à effet Hall [10].

La figure (I.4) représente un Système à effet Hall, un courant I est injecté par un des bords. Le système est soumis à un champ magnétique B perpendiculaire. On mesure la tension par les contacts, ce qui donne lieu à la résistance longitudinale (R_L) et à la résistance de Hall (R_H). Résultat de l'effet Hall classique: la résistance de Hall varie linéairement avec le champ magnétique. [10]

I.9. Applications de la MHD

Les domaines d'applications de La MHD sont nombreux, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie. Cela concerne aussi bien la géophysique, la géothermique, l'océanographie, l'aéronautique que la métallurgie. On peut citer comme exemples d'application industrielle de ce phénomène physique [2-6, 11, 12]:

I.9.1. Génération d'électricité

Dans ce processus, l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique, on peut considérer que le système le plus simple est celui du convertisseur à conduction. Il est constitué d'un organe essentiel qui est le canal placé dans l'entrefer d'un aimant dans lequel s'écoule un métal liquide qui traverse une induction magnétique $\vec{B}$ qui induit un courant $\vec{j}$ collecté par des électrodes en contact avec le fluide.

L'électricité peut être générée avec un système à cycle ouvert ou fermé c'est à dire le fluide est recyclé. Ce dernier est plus utilisé dans le cas des métaux liquides pour les vaisseaux spatiaux. [6, 11, 12].

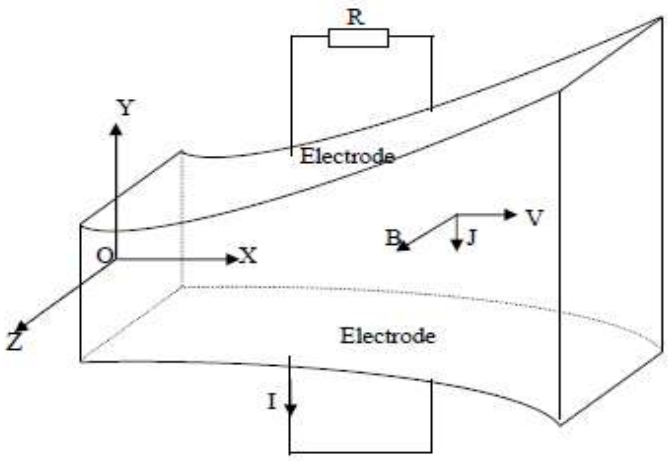


Fig. I.5 : Schéma d'une tuyère MHD. [6]

Il existe plusieurs types de générateurs MHD suivant la forme et le fluide utilisés. [6, 11, 12]

1.9.1.1. Machines circulaires à plasma

On peut distinguer deux types de configurations :

- Une configuration simple: le plasma entre par une conduite axiale et sort radialement, en passant par les électrodes;
- Une configuration à double passage: le plasma entre axialement, passe radialement dans les tuyères MHD et ressort axialement.

1.9.1.2. Générateur à métaux liquides

Les fluides utilisés sont à température de fusion assez basse (≤350C°) :

- Soit purs: sodium, bismuth;
- Soit alliages: NaK, PbBi.

Car leurs conductivités électriques sont élevées par rapport à celles des plasmas.

Toutefois les vitesses acquises par les métaux seront faibles à cause de leurs densités élevées. Les types de générateurs qui sont à l'étude sont tels que : le métal est mélangé à une vapeur sous pression où celui-ci se retrouve entraîné, mais il est séparé avant de traverser seul la tuyère MHD.

1.9.1.3. Générateur à induction

Le générateur à induction ne comporte pas d'électrodes car le courant est produit par un champ magnétique induit par le couplage champ-vitesse. C'est un premier avantage.

De plus, le courant produit est alternatif, ce qui élimine le besoin d'un convertisseur comme dans le cas des générateurs à conduction.

1.9.2. Propulsion MHD

Le principe de la propulsion MHD repose sur l'utilisation des forces de Laplace. Ces forces sont engendrées soit par des champs électromagnétiques continus : propulsion par conduction; soit par des champs alternatifs: propulsion par induction. Pour ces deux systèmes, on distingue les forces s'exercent dans un domaine confiné (Fig.1.6).

Les avantages d'un tel système de propulsion résident dans ce concept qui permet d'éliminer toutes les pièces mécaniques mobiles et les inconvénients qui leur sont attachés (cavitation, bruit, étanchéité, etc). Ils font de la propulsion MHD une alternative séduisante aux systèmes conventionnels à condition que les rendements obtenus restent compétitifs. [6, 11, 12]

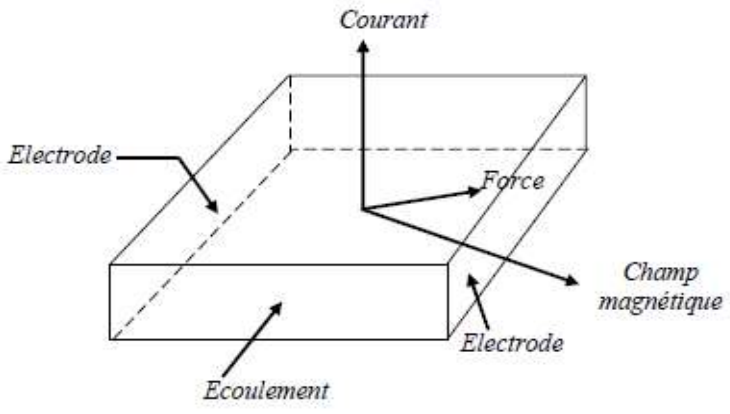


Fig. I.6 : Principe de pompage de l'eau salée par la MHD. [12]

1.9.2.1. Propulseurs à plasma

Ces dispositifs également appelés MPD (Magneto Plasma Dynamic) utilisent des gaz tels que Ar, N_2 comme propergols. Pour des puissances développées de 4 à 10MW, les rendements de ces appareils sont de l'ordre de 30% à 40%. Ce type de propulseur, bien adapté aux changements d'orbites, offre l'avantage de consommer 3 à 10 fois moins de propergol qu'un propulseur chimique habituel.

L'inconvénient majeur est dû à l'érosion des électrodes et des surfaces isolantes par le fluide chaud, comme pour le générateur MHD. Il en résulte une perte de masse, qui limite la durée de vie du matériel.

Le principe est le suivant : le propergol est injecté entre les électrodes et traversé par un courant électrique. Celui-ci induit dans le plasma un champ magnétique qui par couplage avec le courant électrique produit une force de Laplace accélérant le plasma. [6, 11, 12]

1.9.2.2. Propulseurs à eau salée

Ces dernières années la MHD a connu un accroissement d'intérêt dans le domaine de la propulsion des bateaux dont le fluide conducteur (eau de mer) utilisé est de conductivité électrique basse de l'ordre de ($10\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$). Ceci est du à l'avènement des matériaux supraconducteurs qui a engendré le renouveau des recherches sur cette technique.

Avec l'augmentation des inductions magnétiques au environ de 10 Teslas, les rendements ont nettement augmenté en passant de 8% à 60%.

Le principe de base de la propulsion MHD navale consiste à utiliser des forces électromagnétiques pour propulser des navires. Ces forces de Laplace sont issues de l'interaction entre un champ magnétique, créé par des bobines supraconductrices et des courants électriques circulant dans l'eau de mer, Ainsi, l'énergie électrique, fournie par des groupes électrogènes embarqués à bord, est directement transformée en énergie mécanique. [6, 11, 12]

1.9.3. Applications de la MHD à la métallurgie

Dans ce cas, les forces magnétiques doivent être suffisantes (proportionnelles à la conductivité) pour mettre le métal liquide en mouvement (brassage), le maintenir en sustentation (lévitation), le façonner (formage), le pulvériser (pulvérisation).

Le champ magnétique fluctuant agit sur le fluide par l'intermédiaire de la force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}$ en fonction de l'application désirée. [6, 11, 12]

1.9.3.1. Brassage

Les brasseurs électromagnétiques, tout comme les pompes électromagnétiques, ont la particularité de ne pas posséder de parties mobiles.

Par brassage, ils entraînent l'élimination de bulles, d'impuretés et aussi l'accélération du mélange (par turbulence) lors de réactions métallurgiques (fabrication d'alliages).

1.9.3.2. Lévitation

Les procédés de lévitation utilisés par la MHD permettent de résoudre trois problèmes à la fois:

a) L'absence de contact entre la charge et le creuset évite la contamination du métal par la paroi;

b) L'échauffement de la charge par effet Joule peut en causer la fusion;

c) Le brassage interne du fluide formé produit un mélange efficace des constituants (alliages).

1.9.3.3. Formage

Le formage électromagnétique consiste à façonner des masses métalliques en lévitation magnétique par l'action de champs magnétiques qui modèlent la surface libre désirée. Cette technique a l'avantage d'éviter le chauffage et le reformage après solidification.

1.9.3.4. Pulvérisation

La technique électromagnétique permet la fabrication de poudres et grenailles de tailles moyennes ($\approx 100\mu m$) avec un débit massique élevé. De plus, l'ajustement de la granulométrie est facile et automatique.

Le freinage des métaux peut être aussi assurée par des convertisseurs linéaires à induction appelés vannes électromagnétiques ou robinets électromagnétiques. Il en est de même pour la mesure des vitesses d'écoulement qui peut être effectuée à l'aide des débitmètres électromagnétiques.

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les notions de base de la théorie de la MHD dans les plasmas, c'est-à dire dans les gaz ionisés. Toutes les équations précédemment établies l'ont été de façon à ce qu'elles soient dimensionnellement cohérentes dans le système d'unité MKSA. Où on remarque que ce système est très commode pour formuler les relations mécaniques mathématiques de notre problème.

Dans le travail qui suivra, nous nous intéressant à la recherche bibliographique portant sur les effets magnétiques sur la convection d'un fluide électriquement conducteur.

Chapitre II

Recherches bibliographiques et position de problème

II.1. Introduction

L'amélioration du transfert de chaleur et de masse par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, et pour se faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes gérant la convection, l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a lieu (géométrie spécialement), et les propriétés des fluides impliqués (propriétés physico-chimiques). La convection MHD est un autre type de phénomène qui a été fréquemment rencontré dans la nature et dans la technologie. Cette partie est consacrée à la revue de différentes investigations effectuées dans le passé sur l'effet d'un champ magnétique sur le phénomène de la convection d'un fluide électriquement conducteur. Aussi, nous présentons la position de notre problème.

II.2. Revue bibliographique

La première investigation portant sur la convection naturelle thermique et massique le long d'une plaque verticale isotherme en présence d'un champ magnétique externe et d'un rayonnement thermique a été faite par A. Y. Ghaly [13]. Les équations gouvernantes de quantité de mouvement et d'énergie sont résolues numériquement et les résultats représentent les distributions de vitesse, de température, et de concentration. Cinq paramètres adimensionnelles ont été trouvés pour décrire le problème: le nombre d'influence magnétique, le paramètre de rayonnement, le nombre de Prandtl, le nombre de Grashof et le nombre de Schmidt. Il a été montré que le rayonnement influe fortement sur les profils de vitesse et de température, de nombre de Nusselt et de contrainte de cisaillement local. Il a conclu que l'augmentation de paramètre de rayonnement augmente le nombre de Nusselt et diminue la vitesse, la température et la contrainte de cisaillement local.

Plus tard, une investigation analytique et numérique a été faite par A. J. Chamkha [14] sur un écoulement bidimensionnel thermique et massique en régime de type couche limite instable et

laminaire, d'un fluide visqueux, incompressible, électriquement conducteur et absorbant de chaleur en présence d'un champ magnétique transversal, au voisinage d'une plaque poreuse verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante dans la direction de courant du fluide. Il a été supposé que la vitesse de courant libre augmente avec une loi en puissance et le temps de la succion du fluide est au voisinage de la plaque. La solution analytique est obtenue sur la base des fonctions harmoniques et non-harmoniques de deux-limites. Dans ses résultats numériques, il a montré qu'en augmentant le nombre de Grashof solutal, on augmente aussi la concentration et la vitesse de fluide alors qu'en augmentant le nombre de Schmidt, ces derniers diminuent. Quand l'effet d'absorption de chaleur est inclus, une réduction considérable de l'intensité du transfert thermique et de l'intensité de l'écoulement du fluide se produit. Le coefficient de frottement superficiel augmente avec les effets de flottabilité de concentration et il diminue si on augmente le coefficient d'absorption de chaleur ou le nombre de Schmidt. Le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du coefficient d'absorption de chaleur. Le nombre de Sherwood diminue quand le nombre de Schmidt augmente.

Pour la même configuration, c'est-à dire pour une plaque verticale semi-infinie, J. Z. Jordaín [15] a fait une analyse, par la méthode des différences finies, sur la convection naturelle MHD instable d'un fluide électriquement conducteur. En tenant compte des effets de transfert de masse, de flux de chaleur constant et de la dissipation visqueuse. Les équations de la couche limite sont résolues numériquement en utilisant une nouvelle technique numérique basée sur l'analogie de mouvement thermo-électrique, c'est la méthode de simulation de réseau. Il a été montré que la solution obtenue est applicable partout dans l'écoulement stable et/ou instable. Ses résultats numériques ont montré que la présence de la dissipation visqueuse cause l'augmentation du paramètre magnétique et la diminution du nombre de Nusselt local le long de la plaque. Par contre, l'absence de la dissipation visqueuse fait augmenter ces derniers. L'augmentation de la dissipation visqueuse tend à augmenter le coefficient de frottement superficiel et le nombre de Sherwood local, mais ceci tend à diminuer le nombre de Nusselt local. En outre, le paramètre magnétique fait diminuer le nombre de Sherwood local et augmenter le temps de régime stable d'écoulement.

Une solution analytique a été trouvée par F. S. Ibrahim et al. [16] de l'analyse d'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement laminaire avec transfert de chaleur et de masse au voisinage d'une plaque poreuse verticale infinie se déplaçant avec une vitesse constante soumis à un flux de masse constant et absorbe le fluide avec une vitesse d'aspiration dépendant du temps. Le fluide est supposé être Newtonien, visqueux et électriquement conducteur avec génération ou absorption de chaleur. Les effets d'une réaction chimique homogène de premier ordre et d'un transfert thermique radiatif sont pris en considération. Les équations adimensionnelles sont résolues en utilisant les fonctions harmoniques et non-harmoniques de deux-limites. Ils ont constaté que la vitesse de

l'écoulement augmente avec la diminution du paramètre de la réaction chimique, du nombre de Schmidt, du coefficient d'absorption de la chaleur, du paramètre magnétique et de porosité. Cependant, quand le paramètre d'absorption de rayonnement augmente, la vitesse et la température augmente. Par contre, une augmentation de la température est observée quand le paramètre de la réaction chimique, le nombre de Schmidt et le coefficient d'absorption de la chaleur augmentent. Ils ont aussi démontré que la concentration augmente avec la diminution du paramètre de la réaction chimique et du nombre de Schmidt.

Par la suite, R. A. Mohamed et S. M. Abo-Dahab [17] ont étudié le transfert de chaleur et de masse en convection naturelle instable sous l'effet d'une réaction chimique, d'une génération de la chaleur et d'un rayonnement thermique d'un fluide micro-polaire à travers un milieu poreux sur une plaque poreuse verticale semi-infinie. Cette dernière se déplace avec une vitesse constante dans la direction longitudinale et absorbe le fluide avec une vitesse d'aspiration dépendant du temps. Un champ magnétique constant et uniforme est appliqué normalement sur la paroi verticale et la vitesse de courant libre est suit une loi en puissance de faible perturbation. Les résultats numériques montrent que la vitesse de translation de la couche limite et la magnitude de micro-rotation au mur diminuent avec l'augmentation de la force du champ magnétique, de paramètre de réaction chimique, de nombre de Schmidt, de rapport entre la viscosité du vortex et celle de la dynamique et de nombre de Prandtl. Cependant, elles augmentent avec le paramètre de rayonnement, le coefficient de génération/absorption de la chaleur, le paramètre du vecteur de micro-giration et de l'effort de cisaillement, le nombre de Grashof, le nombre de Grashof solutal et la perméabilité. La température augmente quand le paramètre de rayonnement augmente et elle diminue quand le nombre de Prandtl augmente. La concentration diminue quand le paramètre de réaction chimique et le nombre de Schmidt diminuent.

En considérant l'effet Soret et l'effet Dufour, R. Sharma et al. [18] ont présenté une étude numérique sur la convection naturelle non permanente d'un fluide visqueux sous l'influence d'un champ magnétique appliqué normalement sur les parois d'une plaque poreuse verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante placée dans un milieu poreux de Darcy. Ils ont considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique et de la dissipation visqueuse. Certaines transformations, en utilisant une similarité locale, sont employées pour transformer les équations différentielles gouvernantes. Les résultats numériques, basés sur la méthode de Galerkin, montrent que la vitesse augmente en augmentant le nombre de Grashof et le paramètre de perméabilité, et qu'elle diminue quand le paramètre de champ magnétique et le nombre de Schmidt augmentent. Ainsi, il a été observé que la température diminue, à mesure que le nombre de Grashof augmente c.-à-d. le paramètre de la convection et le paramètre d'absorption de la chaleur augmentent. En outre, la concentration augmente avec le paramètre d'absorption de la chaleur et le nombre de Soret

et elle diminue si on augmente le nombre de Schmidt. Ils ont aussi démontré que la diminution du nombre de Soret ou l'augmentation du paramètre d'absorption de la chaleur conduit à l'augmentation du coefficient de frottement superficiel. L'augmentation du paramètre d'absorption de la chaleur tend à augmenter le taux de transfert thermique. Le taux de transfert de masse augmente quand le nombre de Soret diminue; tandis que celui-ci diminue quand le paramètre d'absorption de la chaleur augmente.

Le problème du transfert de chaleur et de masse de la convection MHD stable et instable d'un fluide micro-polaire dans un milieu poreux en présence d'une réaction chimique du de premier ordre, au voisinage d'une plaque poreuse verticale semi-infinie s'oscillant avec une fréquence constante et soumise à un flux de chaleur et une aspiration constants, a été investiguée par A. A. Bakr [19]. Le système, le fluide et la plaque, est supposé être en rotation. Les résultats ont montré que la vitesse et la vitesse angulaire augmentent avec l'augmentation du rapport de la viscosité et du nombre de Grashof. Cependant, quand le paramètre de rotation augmente, la vitesse diminue et la vitesse angulaire augmente. Un comportement opposé se produit si on augmente le paramètre de réaction chimique. Il a aussi démontré que la température augmente quand le paramètre de génération de chaleur diminue; tandis que la concentration diminue avec l'augmentation du paramètre de réaction chimique.

K. Das [20] a fait une étude analytique et numérique sur l'effet d'une réaction chimique du premier ordre et d'un rayonnement thermique sur la convection naturelle instable d'un fluide micro-polaire à travers un milieu poreux limité par une plaque poreuse verticale semi-infinie soumis à un flux de chaleur constant. Ils ont considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique et du champ magnétique. On suppose que le système entier soit en rotation et la plaque oscille dans le temps avec une fréquence constante. La solution analytique est obtenue sur la base de l'approximation de la perturbation. Les équations de la couche limite sont résolues numériquement et les résultats montrent que la vitesse de translation à travers la couche limite diminue avec l'augmentation du rapport de viscosité, du paramètre de rotation, de la source de chaleur et du paramètre de réaction chimique. Cependant, elle augmente avec le paramètre de rayonnement thermique et la perméabilité du milieu poreux. Il a été trouvé que la magnitude de la micro-rotation et l'épaisseur de couche limite de moment diminuent avec l'augmentation du rapport de viscosité, du paramètre de rotation, du paramètre de source de chaleur, du paramètre de champ magnétique et du paramètre de rayonnement thermique et cet effet est opposé à celui du paramètre de réaction chimique et de la perméabilité du milieu poreux. La température diminue quand le paramètre de source de chaleur augmente tandis que celui-ci augmente quand le paramètre de rayonnement thermique augmente, alors que cela fait augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique. Il a

aussi démontré que l'augmentation de paramètre de réaction chimique diminue légèrement la concentration.

En tenant compte des effets de chauffage Joule et de la dissipation visqueuse, Md. Ziaul Haque et al. [21] ont étudié le problème du transfert de chaleur et de masse de la convection naturelle d'un fluide micro-polaire sous l'influence d'un champ magnétique appliqué sur les parois d'une plaque poreuse verticale semi-infinie soumis à des flux de chaleur et de masse constants. La simplification des équations de ce problème a été faite par la méthode de similarité. Les équations de similarité adimensionnelles de type couche limite sont résolues numériquement en utilisant la technique d'itération de Nachtsheim-Swigert. Ils ont montré que le mouvement, le coefficient de frottement superficiel et la concentration des particules légères et d'air de fluide micro-polaire sont plus grands que des particules lourdes et d'eau. Par contre, Le mouvement angulaire des particules lourdes et d'eau est plus grand que des particules légères et d'air. La température d'air est plus grande que d'eau.

En utilisant la technique de perturbation régulière, M. C. Raju et al. [22] ont résolu analytiquement le problème du transfert de chaleur et de masse en convection naturelle hydromagnétique, en régime de type couche limite dispersive, d'un fluide électriquement conducteur au-dessus d'une plaque verticale semi-infinie bordant un milieu poreux en présence d'un rayonnement thermique, d'une réaction chimique et d'une aspiration constante. Un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction horizontale. Ils ont montré que l'effet du champ magnétique et du rayonnement était de réduire l'intensité du transfert thermique et l'intensité de l'écoulement du fluide.

Par la suite, la convection naturelle permanente bidimensionnelle d'un fluide électriquement conducteur sur une plaque poreuse verticale semi-infinie incorporée dans un milieu poreux en présence d'un champ magnétique transversal non-uniforme, a été investiguée par M. M. Rashidi et al. [23]. Ils ont considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique et du rayonnement thermique. La solution analytique de ce problème a été faite par la méthode d'analyse homotopie. Les résultats représentent les profils de vitesse et de température et de concentration en termes de nombre de paramètre de champ magnétique, de paramètre d'aspiration, de nombre de Prandtl, de paramètre de flottabilité, de nombre de Schmidt, de nombre de Biot et de paramètre de rayonnement.

Une modélisation mathématique a été faite par S. Ahmed [24] pour étudier la convection naturelle, en régime transitoire, d'un fluide Newtonien électriquement conducteur au voisinage d'une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse de translation impulsive bordant un milieu

poreux saturé sous l'effet d'un transfert thermique radiatif et d'une réaction chimique de premier ordre. Il a considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique et du champ magnétique transverse. Le fluide est supposé être absorbant-émettant de rayonnement, milieu non-dispersif et optiquement en gris minces. Ses résultats numériques, basés sur la méthode des différences finies implicite de type Crank-Nicholson, ont montré que l'augmentation de paramètre magnétique réduit l'intensité de l'écoulement du fluide, alors que cela fait augmenter la distribution de température et de concentration. En outre, à mesure que le paramètre de porosité augmente, le coefficient de frottement superficiel et les nombres de Nusselt et de Sherwood diminuent. Les domaines d'applications de ce modèle sont nombreux, On peut citer comme exemples: la dynamique magnéto-fluide fondamentale, les systèmes d'énergie MHD et le traitement magnéto-métallurgie des matériaux d'avion.

Une analyse de type similarité a été menée par S. Jena et al. [25] pour étudier les effets d'une diffusion thermique (Soret) et de la diffusion-thermo (Dufour) sur l'écoulement MHD d'un fluide viscoélastique à travers un milieu poreux limité par une plaque poreuse verticale soumis à un champ magnétique variable sous l'influence d'une réaction chimique et d'une source de chaleur. Les équations différentielles ordinaires non-linéaires du transfert de chaleur et de masse sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta de quatrième ordre. Il a été trouvé que la couche limite de vitesse pouvait être notablement affectée par le taux de réaction d'espèces chimiques. L'évolution de l'absorption de la température pour quelques couches prés de la plaque est caractérisée par la présence de source de chaleur et des valeurs plus élevées du nombre de Prandtl. La couche limite solutale est considérablement intensifiée par la réaction constructive combinée avec l'effet de Soret. L'effet du nombre de Dufour, du paramètre de réaction chimique et du paramètre de source de chaleur le long de la plaque était d'augmenter le frottement superficiel; tandis que l'effet du nombre de Soret et du champ magnétique était de réduire ce dernier. L'effet du paramètre de réaction chimique, du nombre de Prandtl et du nombre de Soret était d'augmenter le taux de transfert thermique le long de la plaque.

S. M. Ibrahim et K. Suneetha [26] ont aussi fait une étude sur le transfert de chaleur et de masse de la convection mixte MHD stable au voisinage d'une plaque verticale infinie incorporée dans un milieu poreux en tenant compte des effets de réaction chimique, de chauffage ohmique et de la dissipation visqueuse. La solution analytique est obtenue sur la base de la technique de perturbation. Ils ont montré que l'effet de Soret était d'augmenter la concentration du fluide, mais l'effet de réaction chimique était de diminuer cette dernière. Lorsque les nombres de Grashof et de Grashof solutal augmentent, la vitesse augmente alors que cette dernière diminue quand le paramètre de champ magnétique augmente. L'augmentation du nombre de Schmidt conduit à la diminution de la vitesse et de la concentration. L'augmentation du nombre de Prandtl tend à

diminuer la température. L'augmentation du paramètre de source de chaleur conduit à l'augmentation de la vitesse et de la température. Quand le champ magnétique ou la perméabilité du milieu poreux augmentent, une réduction considérable du coefficient de frottement superficiel se produit. Un comportement opposé se produit si on augmente les nombres de Grashof et de Grashof solutal. Le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

Les études discutées ci-dessus concernent le cas d'un transfert de chaleur et de masse par convection MHD d'un fluide conducteur bordé par une plaque généralement verticale et sans prendre en considération l'effet de Hall. Un certain nombre d'études ont également été faite sur la convection MHD avec les courants de Hall. La première étude sur l'évolution des équations MHDs en tenant compte de l'effet Hall a été faite par I. Pop et T. Watanabe [27]. Ils ont présenté une investigation théorique et numérique sur la convection naturelle d'un fluide conducteur autour une plaque verticale semi-infinie. Le fluide est filtré par un champ magnétique transversal et les effets de Hall sont pris en compte. Les équations fondamentales trouvées en supposant un petit nombre de Reynolds magnétique sont résolues numériquement en employant la méthode de différence-différentielle avec la combinaison de la règle du Simpson. Les profils de vitesse et de température aussi bien que le nombre de Nusselt local sont calculés pour plusieurs valeurs de paramètres de Hall et magnétique. Les résultats sont comparés avec la littérature.

Le même problème a été repris par A. J. Chamkha [28] afin de déterminer l'effet d'un champ magnétique transversal uniforme sur la convection naturelle d'un fluide électriquement conducteur sur une plaque verticale bordant un milieu poreux saturé et thermiquement stratifié. Les effets de Hartmann, de Hall et de milieu poreux Darcien et non-Darcien sont pris en considération. Ses résultats numériques, basés sur la méthode des différences finies, ont montré que le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt diminuent quand le nombre de Hartmann, le paramètre de stratification ou quand le paramètre d'inertie du milieu augmentent. L'augmentation du paramètre de Hall tend à augmenter le coefficient de frottement superficiel et le nombre de Nusselt.

En tenant compte des effets de courants de Hall et de glissement d'ions, E. M. Abo-Eldahab et M. A. El Aziz [29] ont étudié la convection naturelle hydromagnétique sur une plaque verticale semi-infinie. Ils ont supposé que la température varier avec une loi en puissance à la paroi. Ils ont considéré les effets combinés de chauffage Joule et de la dissipation visqueuse. Un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction horizontale. Les variables convenables de type non similarité ont été introduis pour transformer les équations différentielles gouvernantes. Les résultats numériques présentent graphiquement et en table les effets de différents paramètres de contrôle sur les profils de vitesse et de température aussi bien que les contraintes du cisaillement locales à la paroi et le nombre Nusselt local. Ils ont montré que l'effet du champ magnétique était

de réduire l'intensité de l'écoulement tangentiel du fluide mais de propulser, par contre, l'intensité de l'écoulement latéral. Ainsi, il a été observé que le coefficient de frottement superficiel dans l'écoulement tangentiel et le nombre de Nusselt local diminuent, à mesure que le champ magnétique augmente, alors que cela fait augmenter le coefficient de frottement superficiel dans l'écoulement latéral. Quand l'effet de dissipation visqueuse, de génération de chaleur et de chauffage Joule sont inclus, il a été trouvé que le coefficient de frottement superficiel dans l'écoulement tangentiel et latéral augmente et le nombre de Nusselt local diminue. Un comportement opposé se produit si on augmente le coefficient de puissance de la température. En outre, les courants de Hall et de glissement d'ions augmentent le coefficient de frottement superficiel et le nombre de Nusselt local.

L. K. Saha et al. [30] ont étudié l'effet de Hall sur la convection naturelle stable d'un fluide électriquement conducteur visqueux et incompressible au voisinage d'une plaque poreuse verticale semi-infinie chauffée, en présence d'un champ magnétique constant transversal. Les équations de la couche limite sont transformés aux équations de type non-similarités locales. La solution numérique est obtenue en employant quatre méthodes distinctes: la méthode régulière de perturbation pour un petit paramètre de transpiration, les solutions asymptotiques pour un grand taux de transpiration, la méthode de différence finie implicite avec le schéma de Keller-box et la méthode de non-similarité locale pour tous les taux de transpiration. Les effets du champ magnétique et du paramètre de Hall ont été observés sur le frottement superficiel local et le taux de transfert thermique local pour des petites valeurs du nombre de Prandtl, $Pr(= 0.1, 0.01)$, et ceci représente les métaux liquides. Les résultats montrent qu'on peut voir une bonne concordance entre les solutions asymptotiques pour de petites et de grandes valeurs du paramètre de transpiration et les solutions de la différence finie et de la similarité locale. Ils ont conclu qu'en augmentant le paramètre de Hall, on augmente aussi le coefficient frottement superficiel local et le nombre de Nusselt local alors qu'en augmentant le champ magnétique, ces derniers diminuent. L'augmentation du paramètre de transpiration tend à diminuer l'épaisseur de la couche limite thermique et de moment.

Récemment, T. Hayat et al. [31] ont mené une investigation sur l'effet de Hall sur le transfert de chaleur d'un fluide second grade à travers un milieu poreux limité par une plaque infinie poreuse soumis à un flux de chaleur et une aspiration variantes périodiquement en présence d'un champ magnétique transversal uniforme. Ils ont supposé que la plaque et le fluide tournent avec une vitesse angulaire constante. Une solution analytique a été obtenue afin de prédire l'influence du paramètre de Hall et de la porosité de milieu sur l'écoulement.

N. N. Anika et al. [32] ont fait une étude numérique de la convection thermique instable d'un fluide électriquement conducteur sous l'influence d'un champ magnétique appliqué sur les parois d'une plaque poreuse verticale infinie en rotation placée dans un milieu poreux. Les courants de Hall sont pris en considération. Les équations de type couche limite sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Ils ont trouvé que la vitesse primaire augmente avec le paramètre de Hall, le nombre de Grashof et le nombre d'Eckert et elle diminue si on augmente le paramètre magnétique, le paramètre de rotation, le paramètre d'aspiration et le nombre de Prandlt. La vitesse secondaire augmente avec le paramètre magnétique, le paramètre de Hall, le nombre de Prandlt et le paramètre d'aspiration et elle diminue si on augmente le nombre de Grashof, le nombre d'Eckert et le paramètre de rotation. La température augmente avec le paramètre de Hall, le nombre de Grashof, le nombre d'Eckert et le paramètre de rotation et elle diminue si on augmente le nombre de Prandlt, le paramètre magnétique le paramètre d'aspiration. En outre, le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de Prandlt, le paramètre magnétique et le paramètre d'aspiration et elle diminue si on augmente le paramètre de Hall, le nombre de Grashof, le nombre d'Eckert et le paramètre de rotation.

Enfin pour la même configuration, c'est-à dire pour une plaque verticale, la convection mixte stable d'un fluide incompressible, visqueux et électriquement conducteur, en présence d'un champ magnétique externe, a été investiguée par G. R. Machireddy [33]. Il a été supposé que la vitesse et la température de la plaque varié linéairement avec le x. Les effets de Hall, d'une dissipation visqueuse et d'un transfert thermique radiatif sont pris en considération. Les équations de type couche limite sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta de quatrième ordre. Les résultats numériques montrent que la diffusivité thermique diminue, alors que cela fait réduire l'épaisseur de la couche limite thermique. Ainsi, il a été observé que la vitesse, la vitesse d'écoulement de croisement et la température augmentent avec le paramètre de rayonnement ou le paramètre de dissipation visqueuse.

Pour l'écoulement d'un fluide bordé par deux plaques, un certain nombre de publications ont considéré le cas d'un écoulement Couette. H. A. Attia et M. E. Sayed-Ahmed [34] ont étudié la stabilité de l'écoulement MHD d'un fluide Bingham incompressible et visqueux bordé par deux plaques poreuses horizontales infinies et non conductrices sous l'effet de Hall avec transfert de chaleur. La plaque supérieure se déplace avec une vitesse uniforme tandis que la plaque inférieure est stationnaire et les deux plaques soumises à une aspiration ou une succion uniforme. Ils ont considéré les effets de chauffage ohmique et de la dissipation visqueuse. Les effets du nombre de Hall, du paramètre de comportement non-Newtonien et de la vitesse d'aspiration et de succion ont été observés sur les champs de vitesse et de température. Les résultats montrent que l'influence du nombre de Bingham sur la vitesse dépend du paramètre de Hall alors que la vitesse pouvait être

notablement affectée par des grandes valeurs de ce dernier. On observe que l'influence du paramètre de Hall sur la température dépend du temps. Lorsque le paramètre de Hall augmente la température diminue dans un petit temps alors que cette dernière augmente dans un grand temps. En effet, le temps de stabilité de la vitesse augmente avec l'augmentation du paramètre de Hall et il diminue si on augmente le nombre de Bingham. Le temps de stabilité de la température augmente avec l'augmentation du paramètre de Hall tandis qu'il n'est pas considérablement affecté en changeant le nombre de Bingham.

La convection MHD instable d'un écoulement laminaire Hartmann-Couette visqueux en milieu poreux Darcien bordé par deux plaques parallèles horizontales infinies sujettes à un gradient de pression constant, a été investiguée par O. A. Bég et al. [35]. Ils ont considéré les effets de chauffage Joule, de la dissipation visqueuse, de courants de Hall et de glissement d'ions. Les équations de problème sont résolues numériquement en utilisant la méthode de simulation de réseau. Les résultats numériques représentent les profils de vitesse et de température en termes de nombre de Darcy, de nombre de Hartmann, de Paramètre de transpiration, de Paramètre de Hall, de Paramètre de glissement d'ions et de Paramètre de gradient de pression. Les profils de vitesse et de température ont été examinés pour des valeurs fixes de nombre de Prandtl, $Pr = 7.0$, de nombre d'Eckert, $Ec = 0.25$, de nombre de Reynolds, $Re = 5.0$, qui correspondent respectivement au l'eau électriquement conducteur, au transfert de chaleur entre les plaques et le fluide et au modèle de Darcien. Ils ont trouvé que l'élévation du nombre de Darcy augmente la vitesse, pour une basse transpiration. Ainsi, ils ont constaté que lorsque le nombre de Darcy augmente, la température augmente alors que cette dernière se réduit légèrement pour un nombre élevé du nombre de Hartmann. Toutefois, elle augmente considérablement quand on augmente le nombre de Darcy. En outre, une forte transpiration réduit, d'une manière efficace, la vitesse et la température. L'augmentation du paramètre de Hall tend à augmenter considérablement la vitesse primaire, mais ceci tend à réduire la vitesse secondaire. Lorsque le paramètre de Hall augmente, la température diminue pour les premières parties de l'écoulement alors que cette dernière augmente effectivement pour l'écoulement stable. L'augmentation du paramètre de glissement d'ions conduit à l'augmentation de la vitesse primaire et à la diminution de la vitesse secondaire. L'augmentation du gradient de pression fait augmenter fortement la température et la vitesse primaire, mais ceci tend à diminuer la vitesse secondaire.

En utilisant la méthode de Simulation de Réseau, J. Zueco et al. [36] ont résolu numériquement le problème de la convection hydromagnétique instable d'un fluide poussiéreux électriquement conducteur bordé par deux plaques poreuses horizontales infinies où la plaque supérieur se déplace avec une vitesse constante et la plaque inférieur est stationnaire, avec une aspiration ou une succion uniforme. Un champ magnétique uniforme est appliqué normalement à ces parois. Les effets d'une

vitesse d'aspiration, d'un effet de hall, des nombres de Reynolds et Hartmann, d'une concentration de particules, d'un nombre d'Eckert et d'un gradient de pression constant sont pris en considération. Les résultats numériques montrent que l'augmentation du paramètre de Hall, tend à réduire la conductivité effective et la force du champ magnétique, mais ceci tend à augmenter la vitesse. La température diminue à cause de la dépendance importante de cette température avec la conductivité effective. En outre, à mesure que le paramètre d'aspiration augmente, la vitesse de fluide et de particules et la température au centre du canal diminuent. L'augmentation du nombre d'Eckert conduit à l'augmentation de la température.

Un certain nombre de publications ont considéré le cas des systèmes en rotation avec transfert thermique en présence de champ magnétique et d'effet Hall. En considérant les effets de variables propriétés (densité, viscosité et conductivité thermique), de courants de Hall, de champ magnétique et de l'aspiration ou de l'injection, Kh. Abdul Maleque et Md. Abdus Sattar [37] ont présenté une étude numérique, en utilisant la méthode de Runge-Kutta de sixième-ordre, sur la convection naturelle en régime laminaire d'un fluide électriquement conducteur sous l'influence d'un champ magnétique uniforme appliqué sur les parois d'un disque rotatif poreux. Il a été supposé que les propriétés de fluide dépendent fortement de la température. Il a été trouvé que les profils de vitesse radiale et axiale sont considérablement affectés par les propriétés variables du fluide. La vitesse radiale près de la surface de disque est maximale en raison de l'existence de la force centrifuge. La convection naturelle est amortie par la force de Lorentz qui est l'interaction entre le courant électrique induit et le champ magnétique externe. Ainsi, Il a été remarqué que les profils de vitesse radiale et axiale pouvaient être notablement affectés par le paramètre de Hall. De plus, Pour des valeurs fixes des nombres d'aspiration ou d'injection, de Hall, de champ magnétique et de Prandtl, les coefficients de frottement superficiel radial et tangentiel diminuent quand les variables propriétés augmentent.

En tenant compte des effets de chauffage de Joule et de la dissipation visqueuse, E. Osalusi et al. [38] ont étudié numériquement le problème de la convection naturelle MHD stable d'un fluide Bingham non-Newtonien au voisinage d'un disque rotatif poreux sous l'influence d'un effet de Hall et d'un glissement d'ions. Dans ses résultats, ils ont montré que le nombre de Bingham a une influence significative sur la structure de l'écoulement. Il fait diminuer la magnitude des composants de vitesse radial et axial, du frottement superficiel et du taux de transfert thermique et il cause l'augmentation de la magnitude du composant de vitesse tangentiel. La température croît quand les paramètres de Hall et de glissement d'ions augmentent. En outre, le taux de transfert thermique diminue si on augmente le paramètre magnétique ou le nombre d'Eckert.

E. Osalusi et al. [39] ont repris cette configuration, en utilisant la transformation de similarité, pour étudier la stabilité de l'écoulement d'un fluide Newtonien visqueux électriquement conducteur au voisinage d'un disque rotatif en présence d'un champ magnétique constant. Ils ont considéré les effets de courants de Hall, de glissement d'ions, de chauffage ohmique et de dissipation visqueuse et de propriétés variables (la densité, la viscosité et la conductivité thermique) avec la température. La solution numérique de ce problème a été faite par la méthode d'itération. Les résultats représentent les profils de vitesse et de température et de coefficient de frottement superficiel en termes de taux de transfert thermique. Ils ont trouvé que la vitesse, la température, le taux de transfert thermique et le coefficient de frottement superficiel dépendent fortement de facteur de glissement et de paramètre d'instabilité. En effet, l'augmentation des paramètres de glissement et d'instabilité fait diminuer le coefficient de frottement superficiel et le taux de transfert thermique. L'augmentation du paramètre d'instabilité tend à diminuer la vitesse, mais ceci tend à augmenter la température. En outre, l'augmentation des paramètres de Hall et de glissement d'ions conduit à la diminution de la température tandis que l'augmentation du paramètre magnétique et du nombre d'Eckert conduit à l'augmentation du cette dernière.

Par la suite, E. Osalusi et al. [40] ont repris le même problème afin de déterminer l'effet de Hall et de glissement d'ions sur la convection mixte MHD instable d'un fluide électriquement conducteur en rotation au voisinage d'un cône rotatif sous l'influence d'un chauffage de Joule, d'une dissipation visqueuse et de propriétés variables avec la température. Ils ont montré que la solution de similarité est possible quand la vitesse angulaire du courant libre et la vitesse angulaire du cône varient inversement, par des fonctions linéaires, avec le temps.

Une solution exacte a été trouvée par A. M. Siddiqui et al. [41] pour étudier le transfert de chaleur par convection d'un fluide Burger bordé par deux disques infinis tournant avec la même vitesse angulaire autour des axes non-coaxiaux en présence d'un champ magnétique normale à la direction de l'écoulement. Ils ont constaté que lorsque le nombre de Hartmann augmente et pour un nombre de Hall donné, la vitesse augmente et l'épaisseur de la couche limite diminue. Ainsi, à mesure que le paramètre de Hall augmente, la vitesse diminue. L'augmentation du nombre de Weissenberg donne naissance à des profils de type couche limite. De plus, les effets viscoélastiques conduits à un épaississement des couches limites thermique et de moment mais l'augmentation du nombre de Prandtl amincit ces derniers.

M. Turkyilmazoglu [42] a fait une investigation analytique, afin d'obtenir la solution exacte, sur l'effet Hall sur l'écoulement Von Karman classique tridimensionnelle d'un fluide visqueux au-dessus d'un disque infini rotatif en présence d'un champ magnétique axial uniforme. Cette solution représente les formules analytiques des composants de vitesse angulaire, du champ de densité de

courant et de l'effort de cisaillement à la paroi. Il a conclu que l'effet principal de l'imposition d'un champ magnétique est d'augmenter le taux global de transfert thermique entre le disque et le fluide. L'effet Hall réduit cette augmentation pour atteindre de son limite hydrodynamique.

Pour ce type de problème, un certain nombre de publications ont considéré le cas configuration plaque qui intervient également dans des domaines plus fondamentaux de la technologie. Ainsi, H. S. Takhar et al. [43] a étudié l'influence des courants de Hall sur l'écoulement laminaire, en régime de couche limite, d'un fluide électriquement conducteur le long d'une plaque horizontale se déplaçant avec une vitesse constante en présence d'un champ magnétique. La vitesse de courant libre est prise en considération. Le fluide est supposé être en rotation avec une vitesse angulaire constante. La solution numérique de ce problème a été faite par la méthode des éléments finis implicite. On observe un accroissement de la pente des profils de vitesse de l'écoulement primaire en fonction de la force de Coriolis, mais cette pente diminue en fonction du champ magnétique. La présence d'un champ magnétique tend à augmenter le coefficient de frottement superficiel de l'écoulement primaire, mais ceci tend à diminuer le coefficient de frottement superficiel de l'écoulement secondaire. Les effets du champ magnétique, des courants de Hall et de la vitesse de paroi sur les coefficients de frottement superficiel augmentent avec la force de Coriolis. De plus, l'écoulement est considérablement affecté par la vitesse de paroi.

M. Kinyanjui et al. [44] ont mené une investigation sur la convection thermique, en régime transitoire, sur une plaque verticale infinie se déplaçant avec une vitesse constante sous les effets des courants de Hall et de la dissipation visqueuse. Le fluide est supposé être électriquement conducteur et générateur de chaleur, un champ magnétique constant et uniforme est appliqué normalement sur la paroi. Il a été supposé que la plaque et le fluide sont en rotation avec une vitesse angulaire constante. Les résultats numériques, basés sur la méthode des différences finies, représentent les profils de vitesse et de température en termes de paramètre de Hall, de paramètre de rotation et de nombre de Grashof. Ils ont démontré que les champs de température et de vitesse subissent une modification importante.

Plus tard, une investigation analytique a été faite par T. Hayat et al. [45] sur l'effet du courant de Hall sur le transfert de chaleur d'un écoulement en régime transitoire d'un fluide de second grade à travers un milieu poreux limité par une plaque poreuse soumis à un flux de chaleur et à une succion dépendants périodiquement du temps. Ils ont supposé que la plaque et le fluide sont en rotation avec une vitesse angulaire constante. Ils ont trouvé que la vitesse secondaire et la température augmentent avec le paramètre de Hall. Pour un nombre élevé du paramètre de porosité, la vitesse secondaire et la température diminuent, mais également la vitesse primaire augmente. La solution

analytique correspondant à cette situation est comparée avec ceux de littérature et la concordance est satisfaisante.

N. N. Anika et al. [46] ont fait une étude numérique, par la méthode de différences finies implicite, de la convection laminaire instable d'un fluide visqueux électriquement conducteur au voisinage d'une plaque poreuse verticale infinie en rotation. Ils ont considéré les effets combinés du courant de Hall et du champ magnétique. Les résultats montrent que la vitesse primaire augmente avec le paramètre de Hall et les nombres de Grashof et d'Eckert. Cependant, elle diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl et des paramètres magnétique, de rotation et d'aspiration. La vitesse secondaire augmente quand le paramètre magnétique, le paramètre de Hall, le nombre de Prandtl et le paramètre de d'aspiration augmentent; tandis que celle-ci diminue quand le nombre de Grashof, le nombre d'Eckert et le paramètre de rotation. Lorsque le paramètre de Hall, le nombre de Grashof, le nombre d'Eckert et le paramètre de rotation augmentent, la température augmente alors que cette dernière diminue quand le nombre de Prandtl, le paramètre magnétique et le paramètre d'aspiration augmentent. En outre, le nombre de Nusselt augmente à cause de l'augmentation du nombre de Prandtl, du paramètre magnétique et du paramètre d'aspiration et il diminue si on augmente le paramètre de Hall, le nombre de Grashof, le nombre d'Eckert et le paramètre de rotation.

En littérature, l'attention a été consacrée au cas du transfert de la chaleur et de la masse couplé avec effet Hall pendant les dernières années. E. M. Aboeldahab et E. M. E. Elbarbary [47] ont étudié le transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque verticale sous l'effet d'une force de flottaison résultant des effets combinés de gradients thermique et diffusion d'espèce, avec effet Hall, en présence d'un champ magnétique transversal uniforme. Une solution numérique, basés sur la méthode de Runge-Kutta de quatrième ordre, a été obtenue afin de prédire l'influence du nombre de Hall, du paramètre magnétique et l'effet de force de flottaison de diffusion thermique et d'espèce sur les profils de vitesse, de température et de concentration.

Le même problème a été repris par A. A. Megahed et al. [48] afin de déterminer l'effet d'un champ magnétique non uniforme sur le transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque verticale semi-infinie, en utilisant la transformation de similarité. Ils ont démontré que le champ magnétique retarde les profils de vitesse primaire et augmente les profils de vitesse secondaire, de température et de concentration. Les profils de vitesse primaire, de température et de concentration augmentent avec l'augmentation de paramètre de Hall. Cependant, quand le paramètre de Hall $m \leq 1$, les profils de vitesse secondaire augmentent et elles diminuent dans le cas où $m > 1$.

Une analyse de type similarité a été aussi menée par A. M. Salem et M. Abd El-Aziz [49] pour étudier le transfert de chaleur et de masse en écoulement laminaire d'un fluide Newtonien électriquement conducteur le long d'une plaque verticale en présence d'un champ magnétique transversal constant. Le fluide est supposé être générateur ou absorbeur de chaleur. Les effets combinés d'une réaction chimique et d'un courant de Hall sont pris en considération. En appliquant le champ magnétique, la convection est amortie par la force de Lorentz. L'effet du cette force électromagnétique était de réduire la vitesse dans la couche limite, alors que cela fait réduire l'intensité du transfert thermique et massique.

N. S. Elgazery [50] a considéré l'influence d'une réaction chimique, d'un courant Hall, d'un glissement d'ions et d'une viscosité et diffusivité thermique variable sur le transfert de chaleur et de masse dans un écoulement laminaire en régime de couche limite d'un fluide micro-polaire sous l'effet d'un champ magnétique constant appliqué normalement sur les parois d'une plaque horizontale placée dans un milieu poreux. La solution numérique de ce problème a été faite par la méthode pseudo-spectrale de Chebyshev. Les résultats numériques montrent que lorsque le paramètre de perméabilité, le paramètre de réaction chimique et le nombre de Nusselt augmentent, la concentration diminue alors que cette dernière augmente quand la viscosité et la diffusivité thermique augmentent. Les nombres de Nusselt et de Sherwood diminuent à cause de l'augmentation des paramètres de champ magnétique et de glissement d'ions et ils augmentent également si on augmente le paramètre de Hall. De plus, une dépendance importante entre le gradient de concentration à la paroi et les nombres de Schmidt et de transfert de masse.

En utilisant la méthode spectrale de Chebyshev, I.A. Hassanien et al. [51] ont résolu numériquement le problème la convection mixte laminaire doublement diffusive d'un fluide électriquement conducteur le long d'une plaque verticale semi-infinie sous l'influence des courants de Hall. Des températures et concentrations variables sont imposées le long de la paroi. Un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction horizontale. Ils ont constaté que la vitesse primaire augmente avec le paramètre magnétique et diminue si on augmente le paramètre de Hall. En outre, la vitesse secondaire diminue si on augmente le paramètre de Hall, le paramètre magnétique, le paramètre de flottabilité, le paramètre de rotation et le nombre de Schmidt.

Pour une configuration en mouvement, M. Kinyanjui et al. [52] ont étudié le transfert de chaleur et de masse en convection naturelle non permanente le long d'une plaque poreuse verticale infinie se déplaçant avec une vitesse constante sous l'effet Hall en présence d'un champ magnétique externe et d'une absorption radiative. Le système est chauffé et refroidi par des flux de chaleur constant. La solution numérique de ce problème a été faite par la méthode des éléments finis. Ils ont montré que la concentration augmente à cause de l'augmentation du temps ou du paramètre de diffusion.

Cependant, ni la vitesse primaire, ni la vitesse secondaire n'était affectés par le paramètre d'absorption radiative. Si on diminue le paramètre de source de chaleur; les vitesses primaire et secondaire augmentent. La vitesse primaire augmente, à mesure que le paramètre de Hall augmente, alors que cela fait diminuer la vitesse secondaire. Les vitesses primaire et secondaire augmentent avec le paramètre de diffusion, le temps ou le nombre de Grashof. Ils ont aussi démontré que la température diminue si on augmente le paramètre d'absorption radiative ou de diffusion. Toutefois, elle augmente si on augmente le temps ou si on diminue le paramètre de source de chaleur. Ainsi, ni l'augmentation du paramètre de Hall, ni l'augmentation du nombre de Grashof n'affectent la température.

La convection non permanente, au voisinage d'une plaque poreuse verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante sous l'effet des courants de Hall et de glissement d'ions, a été investiguée par J. K. Kwanza et al. [53]. Ils ont considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique, de la force électromagnétique et du champ magnétique. Ses résultats numériques, basés sur la méthode des différences finies, ont montré que l'augmentation de nombre de Schmidt retarde les profils de vitesse secondaire et augmente les profils de vitesse primaire, tandis que celui-ci augmente les profils de température et de concentration; alors que cela conduit à un épaississement des couches limites thermique et de concentration. Les courants de Hall ou de glissement d'ions causent l'augmentation des profils de vitesse primaire et secondaire. Ils ont aussi démontré que la présence d'un flux de chaleur constant, en refroidissant la plaque par la convection naturelle, amincit la couche limite thermique.

En utilisant la méthode de perturbation régulière, une investigation analytique tridimensionnelle a été effectuée par P.V. Satya Narayana et al. [54] sur l'effet Hall sur le transfert de chaleur et de masse en convection naturelle d'un fluide micro-polaire au voisinage d'une plaque poreuse verticale semi-infinie dans un système en rotation soumis à une aspiration constante sous l'effet d'un rayonnement thermique. Un champ magnétique uniforme est appliqué normalement à la paroi. Ils ont observé que le champ magnétique retarde les profils de vitesse. Les profils de vitesse et de concentration diminuent avec l'accroissement du paramètre de réaction chimique. Le frottement superficiel diminue quand le paramètre magnétique augmente. Le taux de transfert de chaleur croît en augmentant le paramètre d'aspiration.

Plus tard, G. S. Seth et al. [55] ont utilisé la transformé de Laplace pour étudier la stabilité du transfert de chaleur et de masse en convection naturelle sur une plaque verticale infinie bordant un milieu poreux saturé soumis à un champ magnétique transversal dans un système en rotation. On suppose que la plaque se déplace avec une vitesse constante et la température le long de la plaque augmente avec une loi temporelle. Les effets des courants de Hall et d'un transfert thermique

radiatif sont pris en considération. Ils ont montré que l'effet du courant de Hall était d'accélérer la vitesse secondaire dans la couche limite. Cependant, il augmente la vitesse primaire prés de la paroi mais réduit, par contre, cette dernière loin de la plaque. Un comportement opposé se produit avec l'effet de la rotation. Les forces de flottabilité thermique et de concentration, les diffusions thermique et massique et le transfert thermique radiatif font augmenter les vitesses primaire et secondaire dans la couche limite. Ainsi, ils ont observé que l'effet du rayonnement et de la diffusion thermiques est d'augmenter la température et cette dernière augmente aussi avec le temps dans la couche limite. La concentration augmente avec la diffusion de masse et le temps dans la couche limite. Le courant de Hall, les forces de flottabilité thermique et de concentration, les diffusions thermique et massique et le rayonnement thermique tendent à diminuer le frottement superficiel primaire, mais ils tendent à augmenter le frottement superficiel secondaire. L'effet de la rotation tend à augmenter les frottements superficiels primaire et secondaire. Le frottement superficiel primaire diminue en fonction de temps tandis que le frottement superficiel secondaire augmente.

Une transformé de Laplace a été aussi utilisée par D. Sarma et K. K. Pandit [56] pour étudier l'effet Hall et l'effet Soret sur la convection naturelle instable d'un fluide électriquement conducteur sous l'influence d'un champ magnétique appliqué sur les parois d'une plaque verticale infinie placée dans un milieu poreux. Ils ont considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique et de la rotation de système. Ils ont trouvé que les effets du Hall et de la rotation étaient d'accélérer la vitesse secondaire dans la couche limite, mais ils tendent à réduire la vitesse primaire. La force de flottabilité thermique tend à retarder la vitesse secondaire dans la couche limite. En outre, elle tend à augmenter la vitesse primaire prés de la paroi, mais ceci tend à diminuer cette dernière loin de la plaque. La force de flottabilité de concentration conduit à l'accroissement des vitesses primaire et secondaire dans la couche limite. L'effet de la diffusion massique est opposé à celui de la flottabilité de concentration. La vitesse secondaire augmente avec la perméabilité du milieu poreux dans la couche limite et la vitesse primaire diminue. La vitesse secondaire augmente avec la perméabilité du milieu poreux dans la couche limite et la vitesse primaire diminue. Les vitesses primaire et secondaire augmentent avec le nombre de Soret. On observe un accroissement des vitesses primaire et secondaire en fonction du temps et du nombre de Soret. Ainsi, la température augmente en fonction du temps, de la diffusion thermique et du rayonnement. La concentration diminue en fonction des diffusions thermique et massique et elle augmente en fonction du temps. Le taux de transfert thermique augmente en fonction de la diffusion thermique et du rayonnement et il diminue en fonction du temps. Le taux de transfert de masse augmente en fonction de la diffusion massique, de la réaction chimique et du temps et il diminue en fonction de la diffusion thermique et du nombre de Soret.

Finalement, une analyse de type similarité a été menée par G. Sreedevi et al. [57] pour étudier l'effet Hall sur la convection naturelle doublement diffusive en régime laminaire d'un fluide électriquement conducteur au voisinage d'une plaque horizontale se déplaçant avec une vitesse variable, en présence d'un champ magnétique constant vertical. La surface de la plaque est perméable afin de tenir compte de l'aspiration ou de l'injection du fluide sur la paroi. Les effets d'un rayonnement thermique et d'une viscosité dépendant de la température sont pris en considération. Les équations de type couche limite sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Ils ont montré que l'effet du courant de Hall était d'augmenter la vitesse et le taux de transfert thermique, mais ceci tend à diminuer la température, la concentration et le taux de transfert de masse. En outre, la vitesse, la température, la concentration et les taux de transfert thermique et de masse augmentent avec l'augmentation de l'absorption de rayonnement. La vitesse primaire et le taux de transfert de masse augmentent quand la diffusion thermique augmente, tandis que la vitesse secondaire, la température, la concentration et le taux de transfert thermique diminuent.

II.3. Position du problème

Nous pouvons constater que la plupart de références citées ci-dessus concernent l'effet d'un champ magnétique sur la convection thermique d'un fluide électriquement conducteur au voisinage d'une plaque. Il n'existe que très peu d'études faites sur l'effet d'un champ magnétique sur le transfert de chaleur et de masse de la convection ainsi que celle induite par effet Hall autour une plaque fixe, en mouvement ou en rotation. Les seuls travaux disponibles sont ceux d'E. M. Aboeldahab et E. M. E. Elbarbary [47], A. A. Megahed et al. [48], A. M. Salem et M. Abd El-Aziz [49], N. S. Elgazery [50] et I.A. Hassanien et al. [51] sur la convection doublement diffusive autour une plaque fixe. Les travaux de M. Kinyanjui et al. [52], J. K. Kwanza et al. [53] et G. Sreedevi et al. [57] sur la convection autour une plaque se déplaçant avec une vitesse constante ou variable. Les travaux de P.V. Satya Narayana et al. [54] et D. Sarma et K. K. Pandit [56] sur la convection dans un système (la plaque et le fluide) en rotation ainsi que le travail de G.S. Seth et al. [55] sur la convection autour une plaque se déplaçant dans un système en rotation. Pourtant, les domaines d'applications de ce phénomène sont nombreux, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie, où les phénomènes combinés de transfert thermique et de masse sont associés à des courants très importants de Hall et des effets de rotation. Cela concerne aussi bien la géophysique, la géothermique, l'océanographie, l'aéronautique que la métallurgie [49, 53, 56]. On peut citer comme exemples d'application de ce phénomène physique [48, 49, 51, 54-56]: l'utilisation des gaz faiblement ionisés par exemple le vol spatial et la recherche de la fusion nucléaire, l'application des plasmas ou des métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus), l'utilisation des métaux liquides comme liquides réfrigérants dans les installations de production d'énergie, le processus de solidification des métaux lors des moulages, les travaux d'étude faits dans les milieux souterrains contenant des éléments radioactifs,

les processus de séchage en génie chimique, etc. Néanmoins, l'étude de l'effet magnétique sur la convection thermique et massique induite par effet Hall d'un courant de fluide en rotation produisant des forces de Coriolis autour un solide en mouvement reste très peu documenté malgré l'intérêt pratique de ce phénomène en ingénierie. La littérature présente quelques travaux liés à cette problématique dans une situation où le solide est une plaque verticale semi-infinie. Le mouvement est ascendant et on se propose d'étudier les effets thermiques et de masse sur le comportement global de ce solide qui se déplace avec une vitesse constante.

Le but de la présente thèse est d'étudier la convection stable doublement diffusive pour une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante dans un courant de gaz ionisé rotatif en présence d'un fort champ magnétique où l'effet de Hall est présent. Dans ce travail, on se propose de connaître les effets du champ magnétique avec Hall induction, de la vitesse de paroi et de la force Coriolis dans une configuration de convection MHD stable lors de transfert thermique et de masse combinés. Ainsi, on se propose d'étudier le même problème dans un milieu poreux en tenant compte les effets d'une réaction chimique du premier ordre. La modélisation d'un tel problème est complexe, mais on poursuit une recherche de transformation de similarité qui permettra de résoudre aisément le modèle sans recourir à une méthodologie de type éléments ou volumes finis. L'ensemble d'équations de similarité différentielles ordinaires non linéaires avec les conditions aux limites appropriées est résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les profils de température, de concentration et de vitesse seront établis suivant la dépendance du paramètre caractérisant le champ magnétique, du paramètre de Hall, du paramètre de la vitesse de paroi, du paramètre de force de Coriolis et des nombres liés aux phénomènes de transport.

Pour mémoire, les références liées à l'étude présente sont récapitulées dans le tableau suivant:

Tab. II.1: Résumé de recherche bibliographique portant sur la convection naturelle MHD d'un fluide électriquement conducteur.

	Sans l'effet de Hall		**Avec l'effet de Hall**	
	Transfert de chaleur	Transfert de chaleur et de masse	Transfert de chaleur	Transfert de chaleur et de masse
plaque fixe		[13], [15], [21-23]	[27-30]	[47-51]
plaque mobile		[14], [16-18], [24-26]	[32, 33], [43, 44], [46]	[52, 53], [57]
système en rotation (plaque+fluide)		[19], [20]	[31], [45]	[54-56]
écoulement Couette			[34-36]	
autre configuration en rotation			[37-42]	

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre une synthèse de revue bibliographique a été effectuée sur l'effet d'un champ magnétique sur le phénomène de la convection MHD d'un fluide électriquement conducteur, le résumé a été fait sur un tableau. Aussi, nous posons notre problème.

Dans le chapitre suivant, nous présentons le modèle physique et mathématique basé sur les équations classiques établies dans le premier chapitre.

Chapitre III
Formulation du problème

III.1. Introduction

Afin d'étudier l'interaction d'un milieu conducteur en mouvement en présence d'un champ magnétique dominée par l'effet de Hall, on utilise une théorie qui décrit ce milieu comme une collection de particules en terme de moyenne sur de petits volumes dans l'espace des phases. Cette approche est rendue nécessaire par le nombre considérable de particules individuelles impliquées dans les processus physiques réels. Les quantités physiques obtenues de cette manière sont gouvernées par les lois de conservation, les équations fluides décrivant la dynamique des processus physiques sont les équations de l'hydrodynamique et les équations de Maxwell. Dans ce chapitre, nous présentons la géométrie et les hypothèses de notre problème. Aussi, nous abordons les équations qui régissent l'interaction d'un gaz ionisé en mouvement en présence d'un fort champ magnétique en basant sur les équations classiques de la MHD présentés dans le chapitre I.

III.2. Problème considéré dans cette étude

Nous considérons le transfert de chaleur et de masse de la convection stable autour une plaque verticale semi infinie. La configuration géométrique tridimensionnelle de notre écoulement, avec le système de coordonnées utilisé, est montrée dans la figure (III.1). Nous utilisons les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z), les axes de coordonnées x et y sont respectivement orientés suivant les directions parallèle et normal à la plaque. La pointe de la plaque doit, par conséquent, être pris comme coïncident avec l'axe z, c'est-à dire avec le plan $y = 0$. Les directions des composantes de vitesse (u, v, w) sont orientés respectivement suivant les axes (x, y, z). Cette plaque se déplace avec une vitesse constante U_1 dans la direction de z dans un fluide visqueux, incompressible et électriquement conducteur qui tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour l'axe-y. Ainsi, une vitesse de courant libre uniforme U_2 est parallèle à l'axe-z.

L'accélération gravitationnelle g agit vers le bas dans la direction de coordonnée x. Un fort champ magnétique externe et uniforme avec une densité constante B_0 est appliqué perpendiculairement à la plaque, c'est-à dire dans la direction y qui est normal à la direction de l'écoulement.

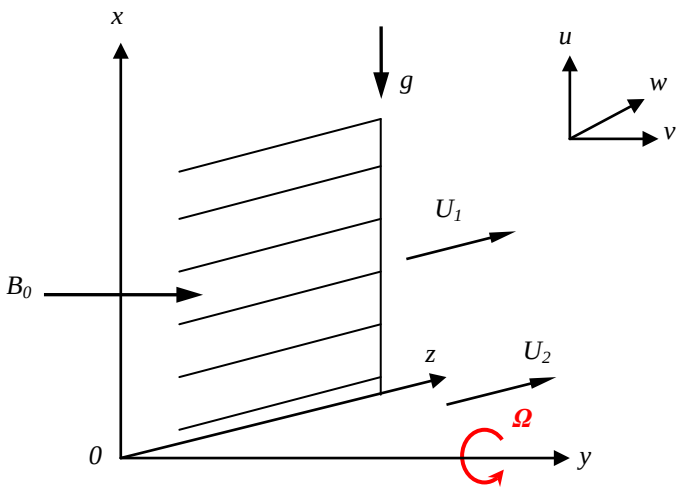


Fig. III.1 : Représentation graphique du modèle physique et du système d'axes.

Dans notre problème, le champ électromagnétique est décrit par l'induction magnétique $\vec{B}$, le champ électrique $\vec{E}$ et l'intensité magnétique $\vec{H}$.

III.3. Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier la formulation du modèle mathématique, nous allons considérer les approximations suivantes qui sont souvent utilisés dans l'étude de la convection MHD:

- Le fluide étudié est un gaz ionisé, considéré comme visqueux et incompressible.
- Il n'y a aucune condition à la limite de glissement à la plaque.
- La température et la concentration d'espèces à la paroi de la plaque sont T_w $(\neq T_\infty)$ et C_w $(\neq C_\infty)$, où T_∞ et C_∞ sont la température et la concentration d'espèces du courant libre.
- La pression thermoélectrique et le glissement d'ions sont considérés négligeables.
- Il n'y a aucun champ électrique appliqué, $E = 0$, c'est-à dire nous considérons le cas d'un problème du court-circuit.
- Les dissipations visqueuse et électrique sont supposées négligeables.
- Il n'y a pas de variation de quantités d'écoulement et de transfert de chaleur dans la direction *z*, en proposant les hypothèses supplémentaires énoncés ci-dessous.

Hypothèses supplémentaires

Ces hypothèses consistent à la simplification des équations de la couche limite de la convection MHD.

La fréquence de collision électron-atome est assumée pour être relativement grand, afin que l'effet de Hall ne puisse pas être négligé [27-57]. Les effets de courant de Hall donnent l'élévation de

force dans la direction *z*, qui induit un écoulement opposé dans cette direction et d'où, l'écoulement devient à trois dimensions. Pour simplifier le problème, nous supposons qu'il n'y a pas de variation de quantités d'écoulement et du transfert de chaleur dans la direction *z*.

On suppose un très petit nombre de Reynolds magnétique pour que le champ magnétique provoqué peut être négligé en comparaison avec le champ magnétique appliqué B_0 [48, 49, 51, 54-56], afin que le vecteur d'induction magnétique soit:

$$\vec{B} = (0, B_y, 0) \tag{III.1}$$

où

$$B_y = B_0 \tag{III.2}$$

D'autre part, dans un milieu électriquement neutre, la densité de charge électrique $j = (j_x,\ j_y,\ j_z)$ se conserve et on a l'équation de conservation de la charge électrique (I.36):

$$\nabla.\vec{j} = 0 \tag{III.3}$$

cette relation donne une densité constante de courant électrique suivant l'axe *y*, c'est-à dire $j_y = \text{constante}$. D'où nous considérons que la plaque est électriquement non-conductrice et par conséquent la densité de courant électrique suivant l'axe *y* égale à zéro à la plaque, $j_y = 0$ [27-57].

Donc $j_y = 0$ partout dans l'écoulement, c'est-à dire que le vecteur de la densité de courant électrique $\vec{j}$ est:

$$\vec{j} = (j_x,\ 0,\ j_z) \tag{III.4}$$

où j_x et j_z sont respectivement les densités de courant électrique suivant les axes *x* et *z*, elles sont déterminés à partir de la loi d'Ohm généralisé.

III.4. Équations gouvernantes de la MHD thermique et massique

Dans cette section, nous allons établir les équations de base couplées régissant notre problème. La résolution d'un problème de convection consiste en la détermination des champs de vitesse et température et de concentration en chaque point du domaine occupé par le fluide.

III.4.1. Équations de continuité

En considérant le fluide étudié comme un milieu continu, le principe de la conservation de la masse, c'est-à dire l'équation (I.35), permet d'établir l'équation de continuité suivante pour un fluide incompressible [43, 48, 51]:

$$\nabla.\vec{V} = 0 \tag{III.5}$$

où $\vec{V}$ est la vitesse de fluide.

III.4.2. Équations du mouvement

La loi de l'écoulement de fluides visqueux et incompressibles avec transferts thermique et massique, soumis à l'effet d'un champ magnétique en présence du champ gravitationnel terrestre $\vec{g}$, s'écrit comme ci-dessous [43, 51]:

$$(\vec{V}.\nabla)\vec{V} + 2\Omega \times \vec{V} = -\left(\frac{1}{\rho}\right)\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{g}\beta(T - T_\infty) + \vec{g}\beta^*(C - C_\infty) + \left(\frac{1}{\rho}\right)\vec{j} \times \vec{B} \tag{III.6}$$

où ρ est la densité de fluide, ν est la viscosité cinématique de fluide, β et β^* sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et de concentration et p est la pression.

III.4.3. Équations de conservation d'énergie

En négligeant les effets des dissipations visqueuse et électrique, l'équation d'énergie de transferts thermique et massique établie à partir du premier principe de la thermodynamique s'écrit comme suit [48, 51]:

$$(\vec{V}.\nabla)T = \left(\frac{k}{\rho C_p}\right)\nabla^2 T \tag{III.7}$$

où k est la conductivité thermique, C_p est la chaleur spécifique à pression constante.

III.4.4. Équations de conservation de l'espèce

Le principe de la conservation de l'espèce nous mène à l'équation suivante [48, 51]:

$$(\vec{V}.\nabla)C = D\,\nabla^2 C \tag{III.8}$$

où D est le coefficient de diffusion d'espèces.

III.4.5. Loi d'Ohm généralisé

Quand l'intensité du champ magnétique est très grande, la loi de l'Ohm généralisé pour un gaz ionisé en mouvement retenue les deux termes de création de courant, le courant produit à travers le gradient de la pression du gaz d'électrons et le courant généré par un *effet Hall*, c'est-à dire on applique la loi d'Ohm généralisé donnée par la relation (I.49) [43, 47, 48, 51, 57]:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e}\vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{en_e}\nabla p_e\right) \quad \text{(III.9)}$$

où σ est la conductivité électrique, e est la charge électronique, n_e est le nombre d'électrons et p_e est la pression électronique.

III.4.6. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell représentent les bases de l'électromagnétisme, c'est à dire que ces équations permettent de décrire les évolutions spatio-temporelles du champ électrique et du champ magnétique. La théorie MHD suppose qu'il n'y a pas d'accumulation de charges libres dans un fluide puisqu'un système de particules chargées est un bon conducteur électrique. Les courants de déplacement et de polarisation diélectrique sont supposés négligeables devant les courants de conduction [7].

L'équation (I.53) de Conservation de flux magnétique permet de décrire l'évolution du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ comme suit [43, 48, 51]:

$$\nabla.\vec{B} = 0 \quad \text{(III.10)}$$

avec [35]

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad \text{(III.11)}$$

où μ est la perméabilité magnétique.

En reportant l'équation (III.11) dans l'équation (I.59), la relation d'Ampère se réduit donc simplement à l'expression [43, 48, 51]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad \text{(III.12)}$$

Comme le champ magnétique provoqué est négligé, la loi d'induction (I.54) devient [43, 48, 51]:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \text{(III.13)}$$

III.4.7. Équations de base de la MHD thermique et massique

D'après les relations précédentes définies par les équations (III.5), (III.6), (III.7), (III.8), (III.9), (III.10), (III.12), (III.13), en utilisant les hypothèses simplificatrices, on peut obtenir le système d'équations de base qui définie notre problème suivant notre système d'axes:

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(III.14)}$$

Équation de mouvement :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + 2\Omega w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty) - \frac{B_y}{\rho}j_z \qquad \text{(III.15)}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} - 2\Omega u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{B_y}{\rho}j_x \qquad \text{(III.16)}$$

Équation d'énergie :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{k}{\rho C_p}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{(III.17)}$$

Équation de diffusion :

$$u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \qquad \text{(III.18)}$$

Loin de la plaque, un équilibre se produit entre les gradients de pression suivant les directions *x* et *z*, $-\frac{\partial p}{\partial x}$ et $-\frac{\partial p}{\partial z}$, et les forces de Lorentz et de Coriolis. Cet équilibre est décrit par les équations [43]:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 2\Omega U_2 + \left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)mU_2 \qquad \text{(III.19)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)U_2 \qquad \text{(III.20)}$$

La relation d'Ohm (III.9) peut être s'écrit [43]:

$$\vec{j} + \frac{\omega_e \tau_e}{B_0} \vec{j} \times \vec{B} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} + \frac{1}{e n_e} \nabla p_e \right) \quad \text{(III.21)}$$

où ω_e est la fréquence cyclotron des électrons et τ_e est le temps de collision d'électron.
Puisque les quantités physiques dépendent seulement de *y*, l'équation (III.21) donne [43, 48, 51]:

$$j_x - \omega_e \tau_e j_z = \sigma(E_x - B_0 w) \quad \text{(III.22)}$$

$$j_z + \omega_e \tau_e j_x = \sigma(E_z + B_0 u) \quad \text{(III.23)}$$

La résolution de système constitué des équations (III.22) et (III.23) nous donne:

$$j_x = \frac{\sigma}{1+m^2} \left[E_x - w B_y + m\left(E_z + u B_y \right) \right] \quad \text{(III.24)}$$

$$j_z = \frac{\sigma}{1+m^2} \left[E_z + u B_y - m\left(E_x - w B_y \right) \right] \quad \text{(III.25)}$$

où *m* est le paramètre de Hall, telle que [35-45]:

$$m = \omega_e \tau_e \quad \text{(III.26)}$$

Dans le courant libre, le champ magnétique est uniforme et l'équation (III.12) montre qu'il n'y a aucun courant électrique là [48]. Donc

$$j_x = 0 \text{ et } j_z = 0 \qquad \text{quand } y \to \infty \quad \text{(III.27)}$$

En outre, l'équation (III.13) donne [48]

$$E_x = \text{constante et } E_z = \text{constante} \quad \text{(III.28)}$$

Utilisant les équations (III.13), (III.27) et (III.28), nous obtenons

$$E_x = 0 \text{ et } E_z = 0 \quad \text{(III.29)}$$

Donc

$j_x = 0$, $j_z = 0$, $E_x = 0$ et $E_z = 0$ sont partout dans le fluide.

En introduisant les équations (III.24) et (III.25) dans les équations (III.15) et (III.16) avec les conditions exprimées par (III.29), nous obtenons un système général d'équations aux dérivées partielles non-linéaires:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{III.30}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+2\Omega w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty)+g\beta^*(C-C_\infty)-\left(\frac{\sigma B_y^2}{\rho(1+m^2)}\right)(u+mw) \tag{III.31}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}-2\Omega u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial B_y^2}{\rho(1+m^2)}\right)(w-mu) \tag{III.32}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\left(\frac{k}{\rho C_p}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{III.33}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{III.34}$$

Notre problème consiste à supposer un fort champ magnétique uniforme avec une densité constante B_0, c'est-à dire $B_y=B_0$, en introduisant cette valeur dans les équations de base précédentes avec les équations exprimées par (III.19) et (III.20), nous obtenons finalement le système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires de notre problème:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{III.35}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+2\Omega w=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty)+g\beta^*(C-C_\infty)-\left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)(u+mw)$$

$$+\left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)mU_2+2\Omega U_2 \tag{III.36}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}-2\Omega u=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)(w-mu)+\left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)U_2 \tag{III.37}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\left(\frac{k}{\rho C_p}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{III.38}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{III.39}$$

III.4.8. Conditions aux limites thermiques et massiques

On impose des conditions d'imperméabilité sur les parois de la plaque. Les conditions aux limites associées aux composantes du champ de vitesse $\vec{V}(u,v,w)$ dans la direction *x*, *y* et *z* respectivement, à la température et à la concentration sont données par les expressions suivantes :

$$u = 0,\ v = 0,\ w = U_1,\ \ T = T_w,\ \ C = C_w \qquad \text{à } y = 0 \qquad \text{(III.40)}$$

$$u = 0,\ w = U_2,\ T = T_\infty,\ C = C_\infty \qquad \text{quant } y \to \infty \qquad \text{(III.41)}$$

III.5. Équations gouvernantes de la MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique

Notre problème consiste à étudier le transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque verticale semi infinie en mouvement soumise à un fort champ magnétique uniforme avec une densité constante B_0 dominée par l'effet de Hall, le cas le plus intéressant pour nous est évidemment le cas où l'on se propose d'appliquer d'un courant de gaz ionisé en rotation où la force de Coriolis a une influence significative sur la dynamique fluide de ces systèmes. D'autre part, afin de trouver autres modèles mathématiques, il est important d'étudier notre système en changeant certaines paramètres et conditions extérieurs, mais on tenu compte des hypothèses, des conditions aux limites et des nombreux paramètres de base sur lesquelles repose notre problème.

La synthèse des travaux de recherche disponibles montre que les phénomènes du transfert de l'espèce en présence des réactions chimiques et de la convection en milieu poreux sont des autres types de phénomène physique importants qui sont fréquemment rencontrés dans la nature et dans la technologie. Pour cela nous étudions notre écoulement MHD dans un milieu poreux en présence d'une réaction chimique du premier ordre.

Pour ce cas de comparaison, on étudié notre système sous les mêmes conditions, mais en milieu poreux sous l'effet d'une réaction chimique du premier ordre. En général, on utilise le modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq pour modéliser la convection au sein d'un milieu poreux [17, 20, 24, 49, 50, 55, 56]. Alors, pour décrive la nouvelle situation physique, sous les suppositions précitées, les équations (III.35), (III.36), (III.37), (III.38) et (III.39) deviennent [17, 20, 24, 49, 50, 55, 56]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(III.42)}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+2\Omega w=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty)+g\beta^*(C-C_\infty)-\left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)(u+mw)$$

$$+\left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)mU_2+2\Omega U_2-\frac{\nu}{k_p}u \qquad \text{(III.43)}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}-2\Omega u=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)(w-mu)+\left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}\right)U_2-\frac{\nu}{k_p}w \qquad \text{(III.44)}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\left(\frac{k}{\rho C_p}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{(III.45)}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}-R_r(C-C_\infty) \qquad \text{(III.46)}$$

où k_p est la perméabilité du milieu poreux considéré et R_r est le taux de la réaction chimique.

Notons que les conditions aux limites suggérées par la physique du problème sont les expressions précédentes définies par (III.40) et (III.41).

III.6. Taux de transfert thermique et massique

Les transferts thermique et massique sont exprimés respectivement en termes de nombre de Nusselt et de Sherwood [49, 54, 55].

III.6.1. Le nombre de Nusselt

Le taux de transfert de chaleur à travers la plaque est exprimé par le nombre de Nusselt noté Nu. Dans notre étude, la paroi active est soumise à une température constante. Pour cette situation, le nombre de Nusselt local est défini comme:

$$Nu_x=\frac{x h_c}{k} \qquad \text{(III.47)}$$

Avec le coefficient de transfert thermique donné par:

$$h_c=\frac{q_c}{(T_w-T_\infty)} \qquad \text{(III.48)}$$

Et le flux de chaleur donné par:

$$q_c=-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \qquad \text{(III.49)}$$

III.6.2. Le nombre de Sherwood

Le taux de transfert de masse sur la plaque, quand la paroi active de celle-ci est exposée à une concentration constante, s'exprime par le nombre de Sherwood Sh. Alors, le nombre de Sherwood est le pendant du nombre de Nusselt pour diffusion massique et qui s'écrit:

$$Sh_x = \frac{xh_m}{D} \tag{III.50}$$

D'où le coefficient de transfert de masse s'écrit comme :

$$h_m = \frac{q_m}{(C_w - C_\infty)} \tag{III.51}$$

Et le flux de masse est donné par:

$$q_m = -D \frac{\partial C}{\partial y}\Big|_{y=0} \tag{III.52}$$

III.7. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les équations qui vont nous permettre de modéliser la MHD thermique et massique induite par l'effet de Hall autour une plaque verticale semi infinie en mouvement dans un fluide en rotation où la force de Coriolis est présente. Nous avons présenté l'ensemble des équations qui sont établies et décrites, sous certaines hypothèses simplificatrices, pour les particules chargées dans un gaz ionisé et un fort champ magnétique où l'effet de Hall ne peut pas être négligé. Les systèmes d'équations de base obtenues pour les différents cas d'étude sont évidemment extrêmement complexes, de type "équations aux dérivées partielles" du second ordre. L'étude de ces systèmes non linéaires passe nécessairement par des simplifications, en utilisant les différentes transformations comme nous allons voir dans le prochain chapitre.

Chapitre IV

Transformation du modèle

IV.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base qui régissent les phénomènes d'écoulements MHD et de transferts thermique et massique d'un courant de gaz ionisé en rotation pour une plaque verticale semi infinie se déplaçant avec une vitesse constante. Ces dernières consistent en un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. La résolution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée voire impossible. Cependant, des solutions numériques approximatives sont possibles en ramenant les équations aux dérivées partielles non linéaires à des équations différentielles ordinaires non-linéaires. Ainsi, dans le présent chapitre, on poursuit une recherche de transformation de similarité qui permettra de résoudre aisément le modèle de notre problème et les modèles de comparaison.

IV.2. Transformation du modèle

Il est difficile de résoudre les équations aux dérivées partielles même numériquement. C'est pour cela que nous proposons une transformation utilisant la méthode de similarité pour simplifier le modèle.

La transformation "*similarité*" est une méthode de transformation d'un système d'équations aux dérivées partielles, mettant en jeu χ variables indépendantes et χ' fonctions, en un nouveau système d'équations aux dérivées partielles mettant en jeu χ' nouvelles fonctions et $\chi - 1$ nouvelles variables indépendantes. La répétition de ce processus débouchant finalement sur un système d'équations différentielles de résolution plus aisée [58].

L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité et dans le fait qu'il n'y pas de processus itératif, donc pas d'initialisation de processus à partir d'estimations initiales. Reste que les conditions initiales et aux limites doivent se prêter à la réduction du nombre de variables [58].

IV.2.1. MHD thermique et massique

IV.2.1.1. Équations de base de similarité

Pour transformer les équations de base de notre problème par la méthode de similarité, on doit d'abord trouver les transformations des variables des équations de base en des variables sans dimensions. La vitesse composée qui est la superposition de la vitesse de la plaque et la vitesse de courant libre, U, a été choisie comme vitesse de référence pour adimensionnaliser les équations gouvernantes du problème. Les quantités de similarité utilisées à partir lesquels la variable de similarité η, les vitesses, la température et la concentration prennent la forme

$$\eta = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}y, \quad \psi = \sqrt{\Omega\nu}xf(\eta), \quad w = \Omega x h(\eta)\,, \quad \theta(\eta) = \frac{(T-T_\infty)}{(T_w-T_\infty)}, \quad \phi(\eta) = \frac{(C-C_\infty)}{(C_w-C_\infty)},$$

$$\xi = \frac{\Omega x}{U}, \quad U = U_1 + U_2, \quad \lambda = \frac{U_1}{U}, \tag{IV.1}$$

où $f(\eta), h(\eta), \theta(\eta)$ et $\phi(\eta)$ sont les fonctions de similarité qui représentent respectivement les composantes de vitesse, la température T et la concentration C. λ est la vitesse de paroi, ξ est la force de Coriolis et $\psi(x, y)$ est la fonction du courant relative aux composantes de vitesse exprimée comme suit [25, 29, 47, 51],

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \upsilon = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{IV.2}$$

Les relations (IV.2) rendent automatiquement satisfaite l'équation de continuité (III.42).
En utilisant les équations (IV.1) et (IV.2), on obtient :

$$u = \Omega x f'(\eta), \quad \upsilon = -\sqrt{\Omega\nu}f(\eta) \tag{IV.3}$$

Introduisant les relations exprimées par le groupe (IV.1) et (IV.3) dans les équations (III.35), (III.36), (III.37), (III.38) et (III.39), nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires suivant:

$$f''' - f'^2 + ff'' - 2h + Gr\,\theta + Gc\,\phi - \frac{M}{(1+m^2)}\left[f' + m\left(h + \frac{(\lambda-1)}{\xi}\right)\right] + \frac{2(1-\lambda)}{\xi} = 0 \tag{IV.4}$$

$$h'' + fh' - f'h + 2f' - \frac{M}{(1+m^2)}\left[h - mf' + \frac{(\lambda-1)}{\xi}\right] = 0 \tag{IV.5}$$

$$\theta'' + Pr\,f\,\theta' = 0 \tag{IV.6}$$

$$\phi'' + Sc\, f\, \phi' = 0 \qquad \text{(IV.7)}$$

Les perfections indiquent la différenciation par rapport η.

Quelques groupements adimensionnels apparaissent dans les équations ci-dessus à savoir, le paramètre magnétique, M, le nombre de Grashof, Gr, le nombre de Grashof modifié, Gc, le nombre de Prandtl, Pr, le nombre de Schmidt, Sc. Ces paramètres ainsi que la force de Coriolis, ξ, sont définis respectivement comme suit :

✦ *Le paramètre magnétique "M"*:

Le paramètre magnétique M est le paramètre caractérisant le champ magnétique [13-57]. Pour notre modèle, il s'écrit comme:

$$M = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega} \qquad \text{(IV.8)}$$

✦ *Le nombre de Grashof thermique "Gr"*:

Le nombre de Grashof Gr dû aux différences de la température, est le rapport entre l'effet de flottaison par force motrice d'Archimède et l'effet résistif de l'écoulement [47]. Pour notre situation, le nombre de Grashof thermique est défini par la relation suivante:

$$Gr = \frac{g\beta\,(T_w - T_\infty)}{\Omega^2 x} \qquad \text{(IV.9)}$$

✦ *Le nombre de Grashof massique "Gc"*:

Le nombre de Grashof massique Gc dû aux différences de la concentration, est le pendant du nombre de Grashof pour diffusion massique [47]. Dans notre étude, le nombre de Grashof massique est donc s'écrit comme:

$$Gc = \frac{g\beta^*(C_w - C_\infty)}{\Omega^2 x} \qquad \text{(IV.10)}$$

✦ *Le nombre de Prandtl "Pr"*:

Le nombre de Prandtl Pr est le rapport entre l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique et l'épaisseur de la couche limite thermique [55, 56]. Le nombre de Prandtl est donc défini comme:

$$Pr = \frac{\rho \nu\, C_p}{k} \qquad \text{(IV.11)}$$

✦ *Le nombre de Schmidt "Sc"*:

Le nombre de Schmidt Sc est le pendant du nombre de Prandtl pour diffusion massique, donc c'est le rapport entre l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique et l'épaisseur de la couche limite thermique [55, 56]. Le nombre de Schmidt est donc défini comme:

$$Sc = \frac{\nu}{D} \tag{IV.12}$$

✦ *La force de Coriolis "ξ"*:

Inventée au début du 19ème siècle par Gaspard Coriolis, la force de Coriolis est une force d'inertie. Elle agit perpendiculairement à la direction du mouvement d'un corps en déplacement dans un milieu lui-même en rotation uniforme, tel que la Terre. Elle n'est pas une force au sens strict, soit l'action d'un corps sur un autre, mais plutôt une force fictive [59].

IV.2.1.2. Conditions aux limites

En utilisant les variables exprimés par le groupe (IV.1) dans les équations (III.40) et (III.41) nous obtenons les conditions aux limites appropriées pour les équations (IV.4), (IV.5), (IV.6) et (IV.7):

$$f' = 0,\ f = 0,\ h = \frac{\lambda}{\xi},\ \theta = 1,\ \phi = 1 \qquad \text{à } \eta = 0 \tag{IV.13}$$

$$f' = 0,\ h = \frac{1-\lambda}{\xi},\ \theta = 0,\ \phi = 0 \qquad \text{quand } \eta \longrightarrow \infty \tag{IV.14}$$

IV.2.2. MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique

IV.2.2.1. Équations de base de similarité

Comme précédemment, en introduisant les relations définies par le groupe (IV.1) dans les équations (III.42), (III.43), (III.44), (III.45) et (III.46) pour obtenir un système d'équations différentielles ordinaires de notre analyse MHD d'un gaz ionisé en rotation sous l'action d'un champ magnétique uniforme autour une plaque verticale semi infinie en mouvement dans un milieu poreux avec une réaction chimique du premier ordre, nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$f''' - f'^2 + ff'' - 2h + Gr\,\theta + Gc\,\phi - \frac{M}{(1+m^2)}\left[f' + m\left(h + \frac{(\lambda-1)}{\xi}\right)\right] + \frac{2(1-\lambda)}{\xi} - K\,f' = 0 \tag{IV.15}$$

$$h'' + fh' - f'h + 2f' - \frac{M}{(1+m^2)}\left[h - mf' + \frac{(\lambda-1)}{\xi}\right] - K\,h = 0 \tag{IV.16}$$

$$\theta'' + Pr\, f\, \theta' = 0 \tag{IV.17}$$

$$\phi'' + Sc\, f\, \phi' - \gamma\, Sc\, \phi = 0 \tag{IV.18}$$

Pour cette situation, les groupements adimensionnels dans les équations ci-dessus à savoir, le paramètre de perméabilité K et le paramètre de la réaction chimique γ, sont définis respectivement comme suit :

$$K = \frac{\nu}{k_p \Omega} \tag{IV.19}$$

$$\gamma = \frac{R_r}{\Omega} \tag{IV.20}$$

et les paramètres adimensionnels M, Gr, Gc, Pr et Sc sont données respectivement par les expressions (IV.8), (IV.9), (IV.10), (IV.11) et (IV.12).

IV.2.2.2. Conditions aux limites

En suivant la démarche précédente, nous obtenons les mêmes conditions aux limites de similarité définies par les relations (IV.13) et (IV.14) appropriées pour les équations (IV.15), (IV.16), (IV.17) et (IV.18).

IV.2.3. Taux de transfert thermique et massique

Comme précédemment, en utilisant les variables exprimés par le groupe (IV.1) dans les équations (III.47), (III.48), (III.49), (III.50), (III.51) et (III.52) nous obtenons:

IV.2.3.1. Le nombre de Nusselt

Nous exprimons le nombre de Nusselt local comme suit:

$$Nu_x = -Re_x^{1/2} \theta'(0) \tag{IV.21}$$

ou

$$Nu_x\, Re_x^{-1/2} = -\theta'(0) \tag{IV.22}$$

dans lequel

le nombre de Reynolds local est

$$Re_x = \frac{x^2\Omega}{\nu} \tag{IV.23}$$

le flux de la chaleur

$$q_c = k(T_w - T_\infty)\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^{1/2}\theta'(0) \tag{IV.24}$$

et le coefficient de transfert thermique

$$h_c = -k\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^{1/2}\theta'(0) \tag{IV.25}$$

IV.2.3.2. Le nombre de Sherwood

Nous procédons de la même manière que précédemment, nous obtenons l'expression du nombre de Sherwood local suivante:

$$Sh_x = -Re_x^{1/2}\phi'(0) \tag{IV.26}$$

ou

$$Sh_x\, Re_x^{-1/2} = -\phi'(0) \tag{IV.27}$$

dans lequel
le flux de masse est

$$q_m = -D(C_w - C_\infty)\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^{1/2}\phi'(0) \tag{IV.28}$$

et le coefficient de transfert de masse

$$h_m = -D\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^{1/2}\phi'(0) \tag{IV.29}$$

IV.3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les transformations utilisés afin d'obtenir le modèle mathématique final et simplifier notre problème dans ses différents cas. L'étude de ce modèle d'équations différentielles ordinaires déterminant l'évolution des gaz ionisés MHD, passe nécessairement par la résolution des équations différentielles ordinaires, la compréhension de leurs

comportements non linéaires impose que les recherches se fassent au moyen d'outils numériques généralement «lourds», permettant d'effectuer des simulations sur des supercalculateurs.
Dans le prochain chapitre nous présentons la méthode numérique de résolution de ces équations et donner les résultats obtenus.

Chapitre V

Résultats et discussion

V.1. Introduction

La dynamique de notre système physique dépend de l'ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées, fermé par des relations sur les conditions aux limites. Les solutions de tels systèmes d'équations sont rarement analytiques et on doit recourir à des méthodes numériques pour les approcher. Les modèles numériques qui décrivent le comportement des gaz ionisés prennent en compte les écoulements hydrodynamiques, le couplage des mouvements de fluide avec les champs électromagnétiques (MHD) et le transfert thermique et massique. Dans le présent chapitre nous allons nous intéresser à la méthode numérique utilisée dans cette étude pour résoudre numériquement les systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec les conditions aux limites obtenues pour les deux modèles de notre problème. Ainsi, nous allons consacrer l'analyse des résultats obtenus numériquement, sur l'influence d'un fort champ magnétique et sous la présence de l'effet de Hall sur la convection d'un gaz ionisé en rotation autour une plaque verticale semi infinie en mouvement. Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le paramètre magnétique M, le paramètre de Hall m et les nombres liés aux phénomènes de transport sur la vitesse de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse seront discutés.

V.2. Méthode numérique de résolution

V.2.1. Description de la méthode numérique de résolution

Le but des modèles développés dans le chapitre précédent est l'étude de l'évolution des champs de vitesse, distributions de température et de concentration des diverses espèces présentes dans le gaz ionisé. Alors, en appliquant la théorie de groupe de "one-parameter" à l'analyse des équations gouvernantes et les conditions aux limites, les deux variables indépendantes sont réduites par un, par conséquent, les équations gouvernantes réduisent à un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec les conditions aux limites appropriées. Finalement, le système d'équations de similarité avec les conditions aux limites sont résolus numériquement en employant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 programmé sous logiciel MATLAB 6.5. La méthode de

Runge-Kutta d'ordre 4 est l'une des méthodes numériques la plus simple et la plus utilisée en pratique pour résoudre les équations différentielles ordinaires.

V.2.2. Validation du code numérique

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation du code numérique a été faite en comparant les résultats de cette étude avec ceux de Takhar et al. [43] pour un transfert thermique. Des résultats typiques de la vitesse dans la direction x sont rapportés dans la figure (V.1). Dans cette dernière, le résultat numérique de Takhar et al. est indiqué par des symboles en noir. Le résultat numérique de présent travail est indiqué par une ligne en rouge. A partir de ce graphique, on peut voir une bonne concordance entre les deux types de résultat.

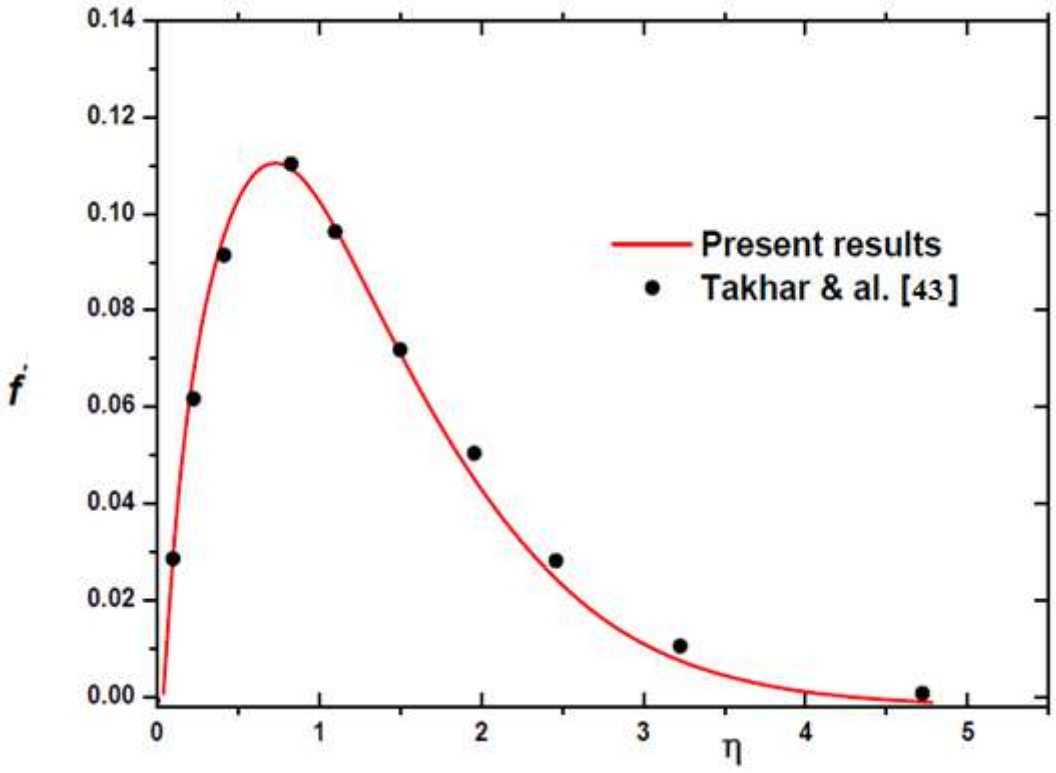


Fig. V.1 : Comparaison graphique entre les vitesses suivant *x*, f', de Takhar et al. [43] et la présente étude pour $Gr = Gc = 0$, $Pr = Sc = 0$, $M = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0.25$.

Une comparaison entre les résultats prédits par le présent code et ceux obtenus dans le passé par E. M. Aboeldahab et E. M. E. Elbarbary [47] est présenté dans le tableau (V.I). La concordance est satisfaisante, les différences observées étant inférieures à environ 0.8% pour le nombre de Nusselt et à environ 5% pour le nombre de Sherwood. Le bon accord entre les résultats numériques obtenus dans le présent travail et ceux obtenus dans le passé est observé une fois de plus.

Tab. V.1: Comparaison entre le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood de E. M. Aboeldahab et E. M. E. Elbarbary [47] et la présente étude pour M, $m = 1$, $Gr = 1$, $Gc = 0.1$, $Pr = 0.72$, $Sc = 0.6$.

	Présente étude		E. M. Aboeldahab et E. M. E. Elbarbary [47]	
M	$-\theta'(0)$	$-\phi'(0)$	$-\theta'(0)$	$-\phi'(0)$
0	0.5009	0.4598	0.500025	0.445845
0.25	0.5082	0.4688	0.505213	0.478227
0.5	0.5142	0.4750	0.510429	0.505438
0.75	0.5180	0.4757	0.515675	0.526828

V.3. Résultats et discussion

Les résultats numériques obtenus des composantes de vitesse f' et h correspondant aux composantes *u* et *w* respectivement, la distribution de la température θ et de la concentration ϕ , pour les deux cas de convection étudiés, ont été présenté pour $Gc = 0.5$, $Gr = 0.5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.22$ et plusieurs valeurs du paramètre magnétique M qui varie de 0 à 3, du paramètre de Hall m qui varie de 0 à 6, du paramètre de la vitesse de paroi λ qui varie de 0 à 1.25, du paramètre de la force de Coriolis ξ qui varie de 0.25 à 2, et du paramètre de perméabilité K qui varie de 0 à 1.5, du paramètre de la réaction chimique γ qui varie de 0 à 3 dans le cas de la convection sous une réaction chimique dans un milieu poreux. Notons qu'il y a un effet négligeable de ces paramètres sur la vitesse le long de la direction *y*.

V.3.1. MHD thermique et massique

Pour notre problème d'analyse MHD thermique et massique le long d'une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante dans un courant de gaz ionisé en rotation, le système d'équations (IV.4), (IV.5), (IV.6) et (IV.7) de similarité avec les conditions aux limites (IV.13) et (IV.14) sont résolus numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les figures de (V.2) à (V.17) présentent les résultats numériques pour les profils de la vitesse f' et h, de la température θ et de la concentration ϕ pour $Gr = 0.5$, $Gc = 0.5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.22$ et plusieurs valeurs paramétriques de *M*, *m*, λ et ξ [43, 47, 48]. Ces figures sont obtenues pour illustrer l'influence relative du paramètre magnétique *M*, du paramètre de Hall *m*, du paramètre de la vitesse de paroi λ et du paramètre de la force de Coriolis ξ.

V.3.1.1. Influence du paramètre magnétique, *M*

Les figures (V.2), (V.3), (V.4) et (V.5) illustrent l'évolution en fonction du variable de similarité η de la vitesse transversale f', de la vitesse axiale h, de la température θ et de la concentration ϕ pour

le cas $m = 0.5$, $\lambda = 0.25$ et $\xi = 1$ pour différentes valeurs du paramètre magnétique M qui varie de 0 à 3.

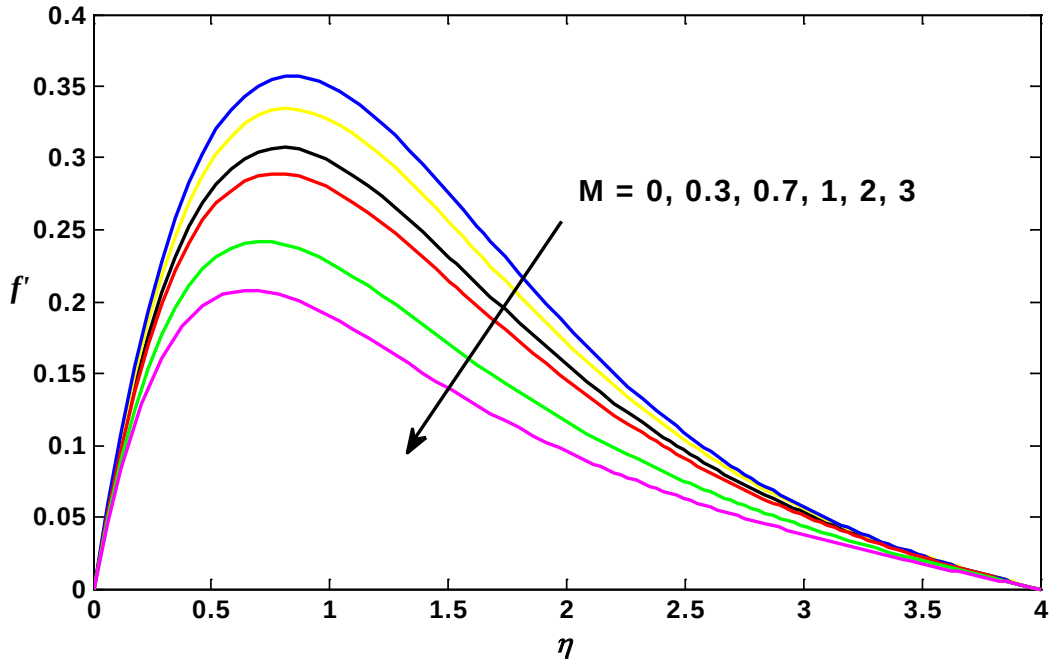


Fig. V.2 : Profils de la vitesse f' à *m*=0.5, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *M*.

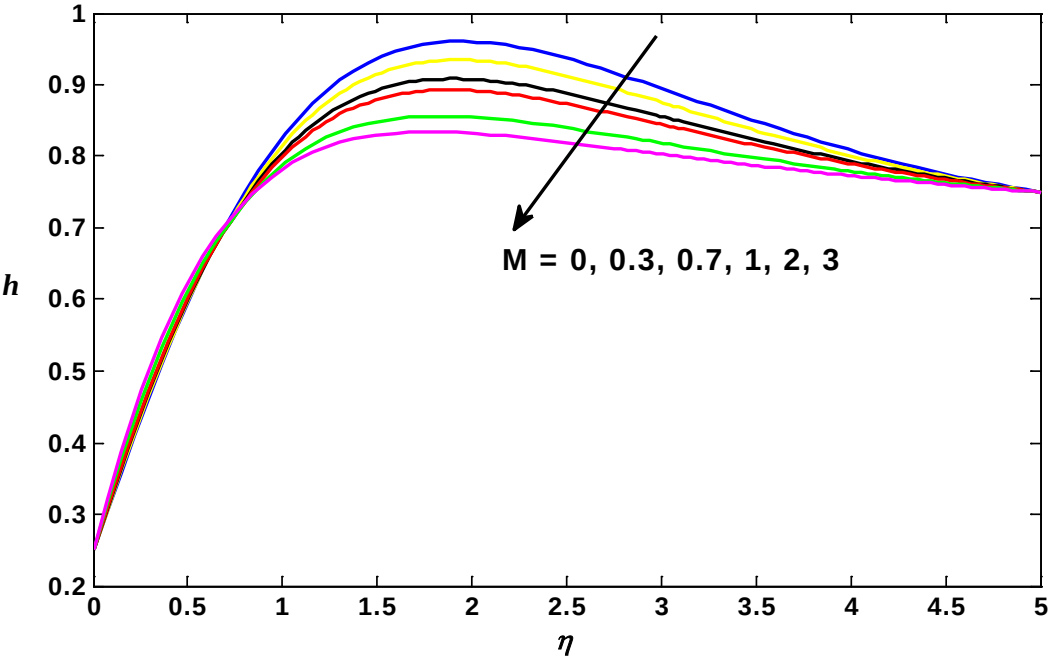


Fig. V.3 : Profils de la vitesse h à *m*=0.5, *Gc*=0.5, *Gr*=0.5, *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de *M*.

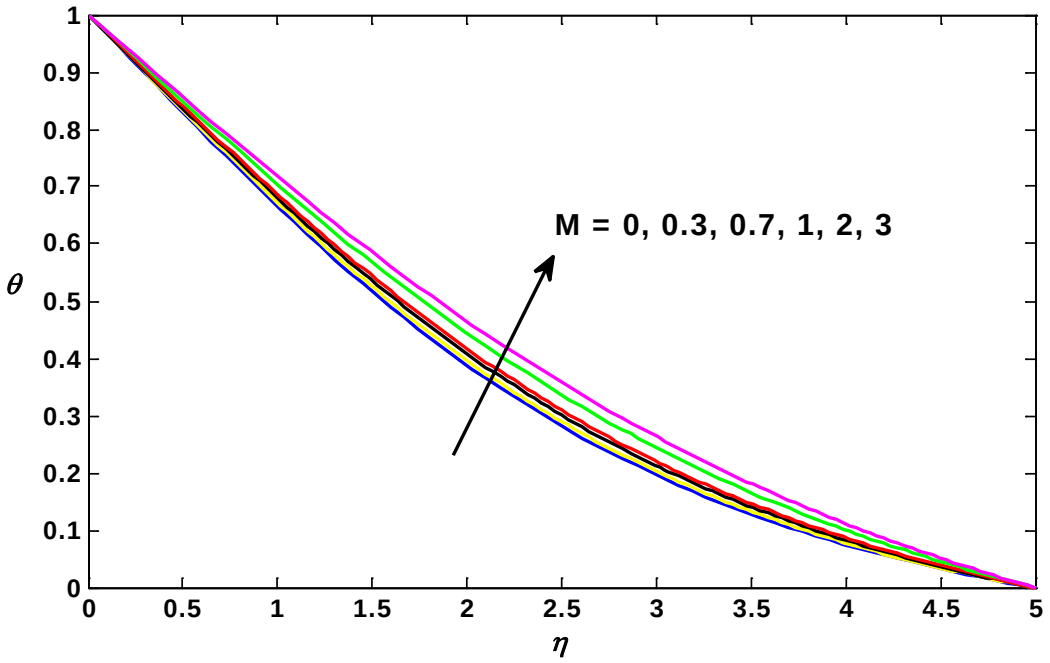


Fig. V.4 : Profils de la température θ à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de M.

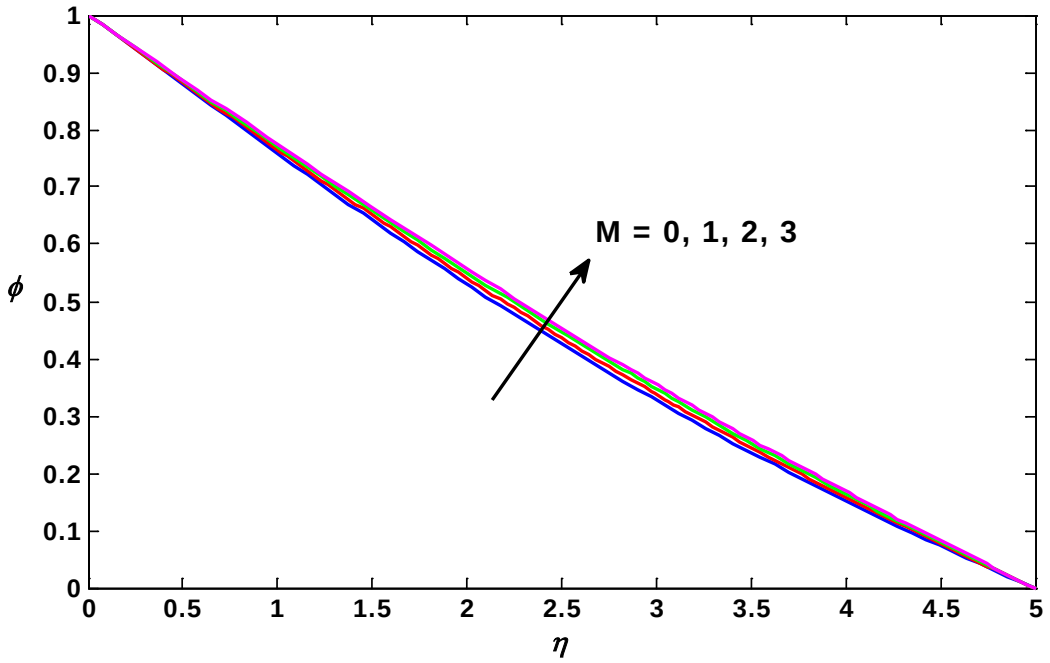


Fig. V.5 : Profils de la concentration ϕ à m=0.5, Gc=0.5, Gr = 0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de M.

Pour notre problème, la figure (V.2) montre que les profils de vitesse transversale f' diminuent monotoniquement avec l'augmentation de M. On peut voir sur ces courbes que les profils de vitesse atteignent un maximum près de la surface de la plaque et convergent loin de cette dernière, c'est-à-dire la force magnétique a un effet plus faible dans le régime loin de champ que dans le régime proche de champ. Cependant, la figure (V.3) montre que lorsque le paramètre magnétique M augmente, les profils de vitesse axiale h au voisinage de la plaque augmentent alors que ces derniers diminuent loin de la plaque. Donc, nous constatons de ces figures que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique réduit la vitesse du fluide. Ceci s'explique par le fait que l'effet essentiel du champ magnétique est d'exercer une force électromagnétique en rotation accélérée, appelée la force de Lorentz, qui s'oppose au mouvement du fluide, c'est-à-dire elle agit comme une résistance dans les directions *x* et *z* de l'écoulement. Cette force cause la réduction de la vitesse du fluide dans la couche limite et par conséquent, elle réduit l'intensité de la convection résultant en un transfert de chaleur et de masse moins important dans l'écoulement et cela paraît dans l'augmentation de la température et de la concentration du fluide, tel qu'indiqué par les figures (V.4) et (V.5) respectivement.

En examinant ces résultats numériques, nous pouvons constater que l'effet du champ magnétique sur les profils de température et de concentration est moins important comparé à celles de vitesse. Ceci est dû au fait que les effets magnétiques sont inclus seulement dans les équations du mouvement (IV.4) et (IV.5) et ne comportent pas dans les équations du bilan d'énergie et de l'espèce (IV.6) et (IV.7) respectivement, mais les transferts de température et de l'espèce sont affectés par les effets magnétiques grâce aux forces de flottabilité résultants des effets combinés de gradients de température et de concentration. Le tableau (V.2) confirme les résultats obtenus, à savoir la diminution des nombres locaux de Nusselt et de Sherwood, c'est-à-dire la diminution des transferts convectifs de chaleur et de masse.

V.3.1.2. Influence du paramètre de Hall, *m*

Les figures (V.6), (V.7), (V.8) et (V.9) illustrent des résultats numériques typiques obtenus pour les conditions $M = 0.3$, $\lambda = 0.25$ et $\xi = 1$ pour différentes valeurs du paramètre de Hall *m*. La figure (V.6) indique que la vitesse transversale f' prés de la paroi augmente quand le paramètre de Hall *m* augmente; tandis que celui-ci produit un comportement opposé loin de la plaque c'est-à-dire quand le paramètre de Hall *m* augmente, la vitesse transversale f' diminue loin de cette dernière. Cependant, comme l'indique la figure (V.7), à mesure que le paramètre de Hall *m* augmente, la vitesse axiale h augmente aussi. Les figures (V.8) et (V.9) montrent que les profils de température θ et de concentration ϕ ne sont pas très affectés par le paramètre de Hall. Nous observons sur ces courbes que l'augmentation de ce paramètre peut causer une faible diminution de température θ et de concentration ϕ.

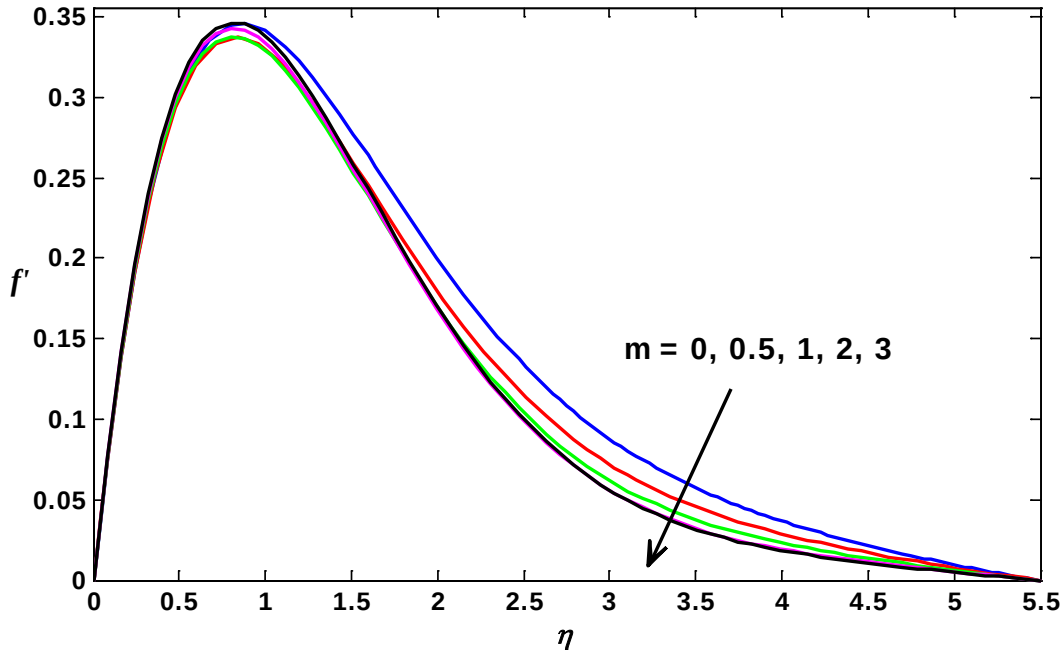


Fig. V.6 : Profils de la vitesse f' à M =0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de m.

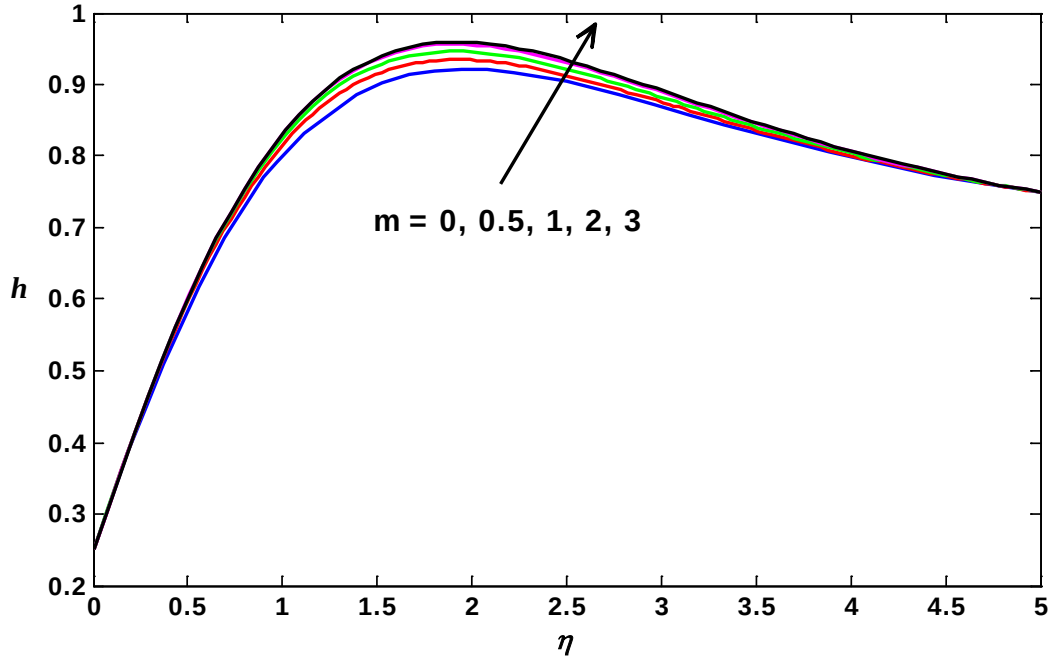


Fig. V.7 : Profils de la vitesse h à M=0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de m.

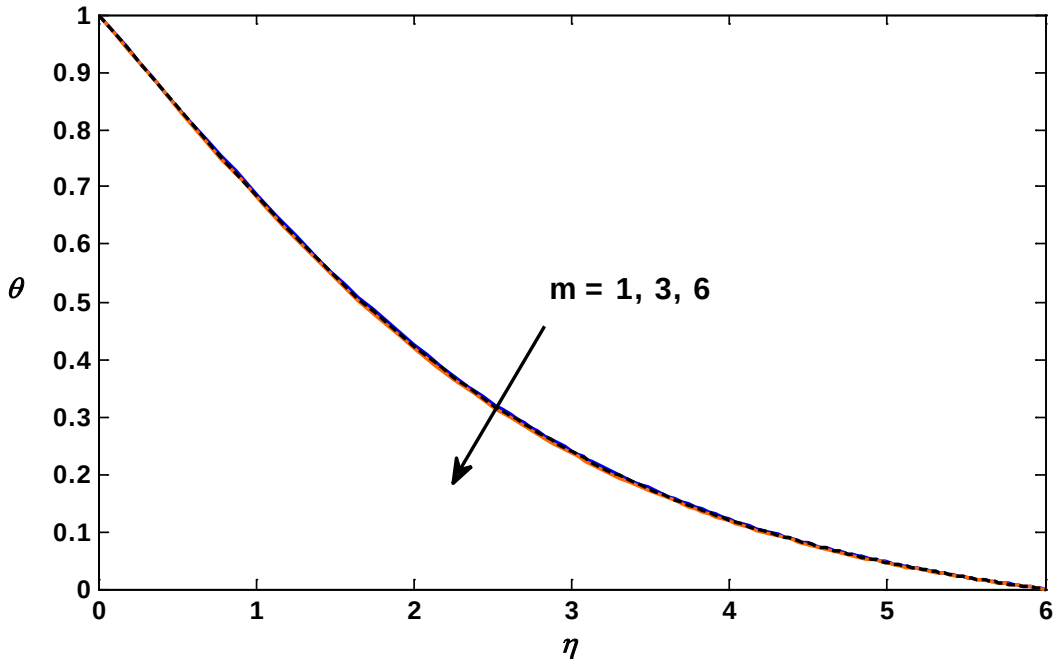


Fig. V.8 : Profils de la température θ à M=0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de m.

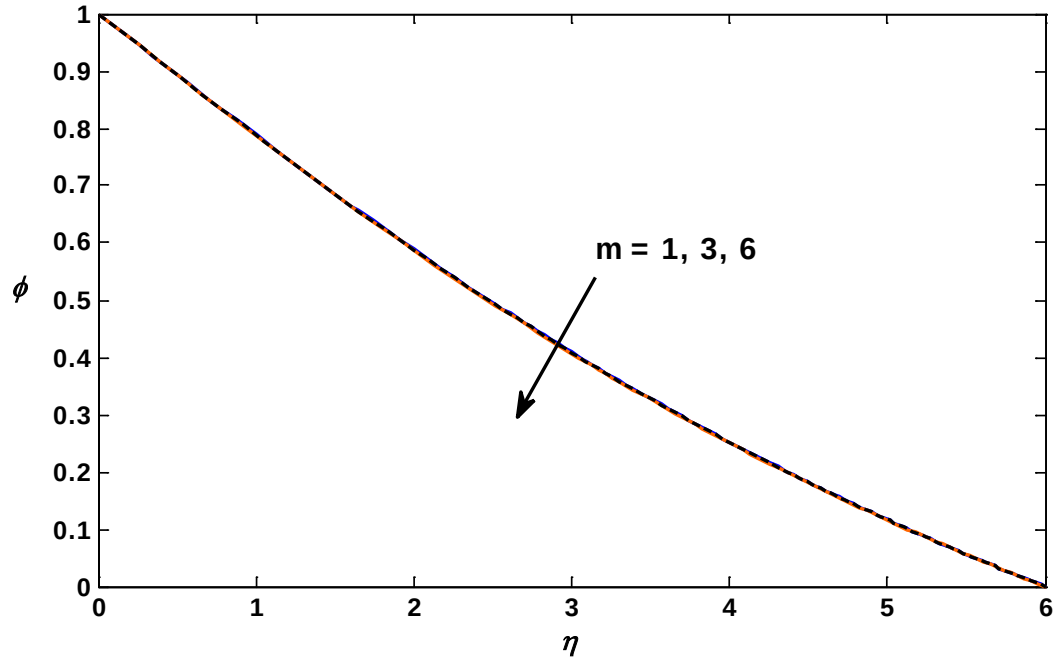


Fig. V.9 : Profils de la concentration ϕ à M=0.3, Gc=0.5, Gr = 0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1 et plusieurs valeurs de m.

V.3.1.3. Influence du paramètre de la vitesse de paroi, λ

Les figures (V.10), (V.11), (V.12) et (V.13) présentent l'effet de paramètre de la vitesse de paroi λ sur le comportement des profils de vitesse, de température et de concentration de fluide pour $M = m = \xi = 1$. La figure (V.10) montre que la vitesse transversale f' diminue progressivement avec l'augmentation de paramètre λ. Nous remarquons clairement sur ces courbes que l'effet de l'augmentation de paramètre de la vitesse de paroi λ était d'inverser la vitesse f' qui s'explique par le fait concurrentiel entre les vitesses de plaque et de fluide. Sur la figure (V.11), nous remarquons que lorsque le paramètre λ augmente, la vitesse axiale h augmente pour environ $0 \leq \eta \leq 0.5$ alors que cette dernière diminue quand $\eta > 0.5$. De plus, sur les figues (V.12) et (V.13), nous observons que les températures et les concentrations sont intensifiées avec l'augmentation de λ et par conséquent les transferts convectifs de chaleur et de l'espèce sont réduits. Ceci est présenté dans le tableau (V.2).

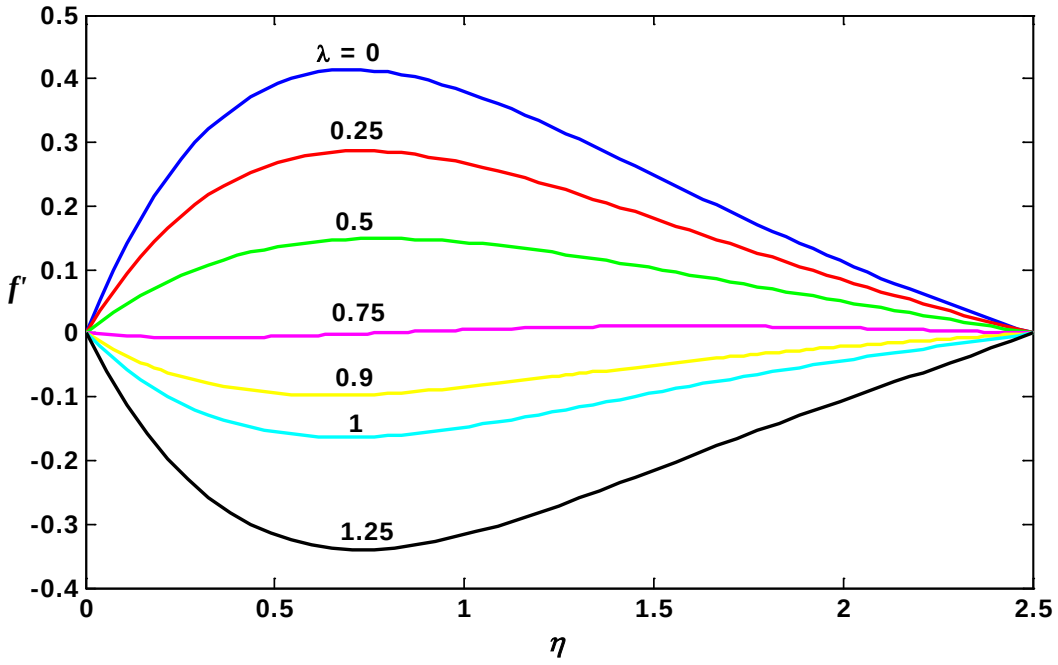


Fig. V.10 : Profils de la vitesse f' à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, *M*=*m*=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ.

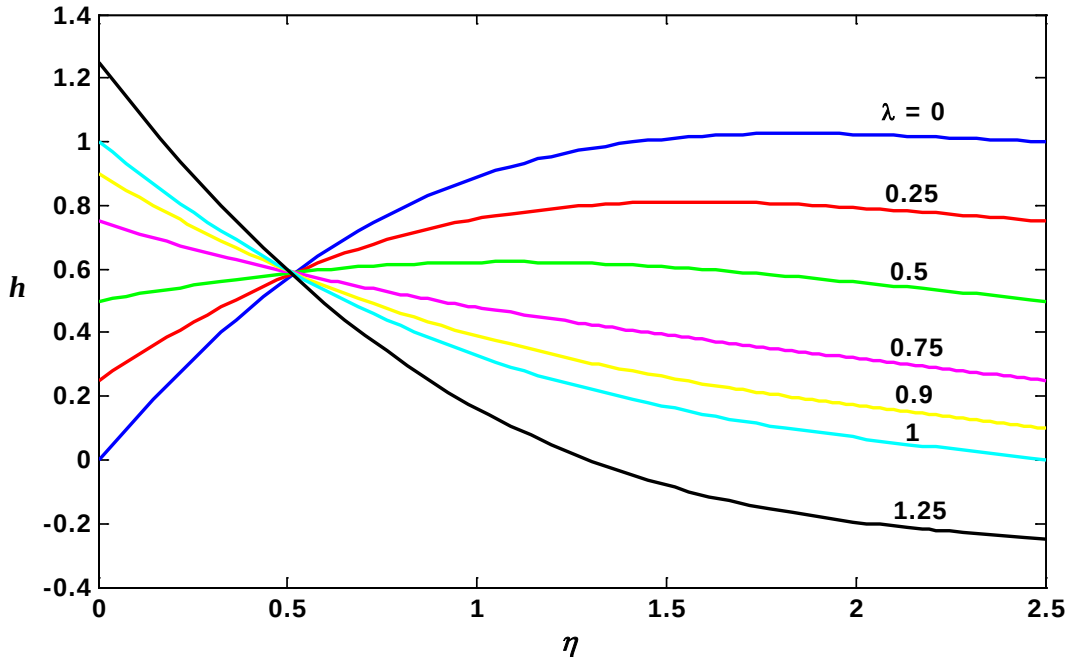


Fig. V.11 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ.

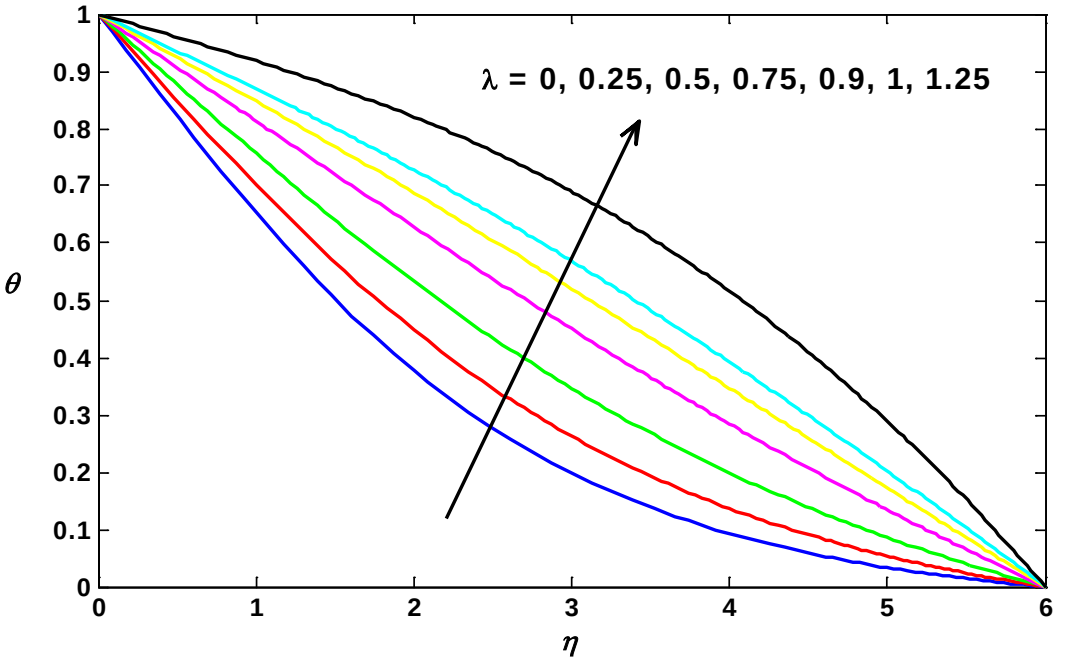


Fig. V.12 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ.

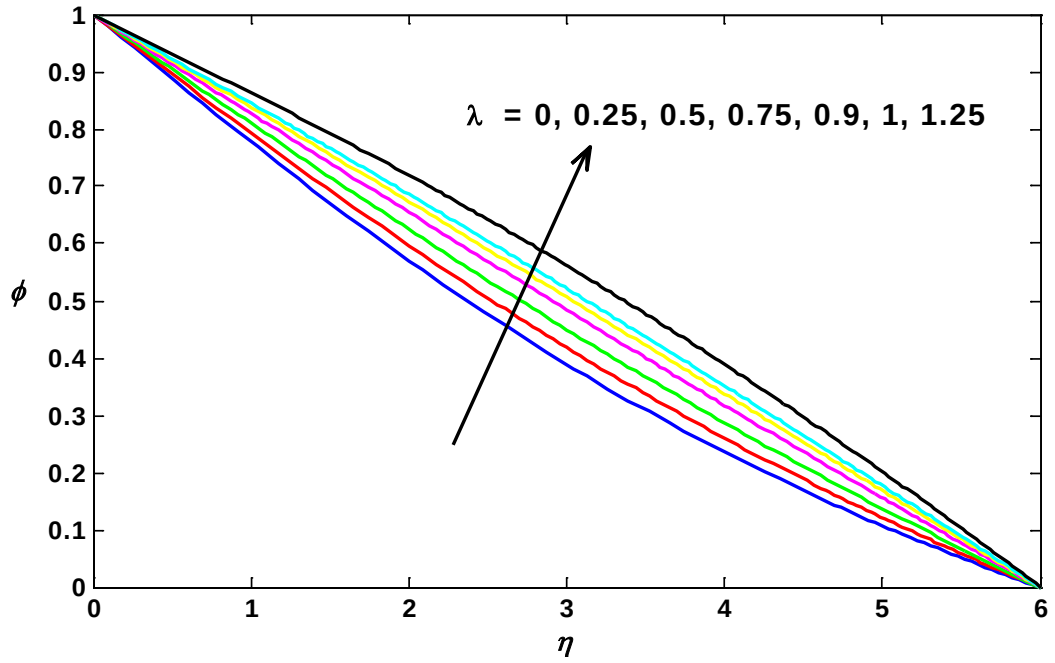


Fig. V.13 : Profils de la concentration ϕ à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, λ=0.25, *M*=*m*=ξ=1 et plusieurs valeurs de λ.

V.3.1.4. Influence du paramètre de la force de Coriolis, ξ

Les figures (V.14), (V.15), (V.16) et (V.17) présentent l'effet de paramètre de la force de Coriolis, ξ, sur le comportement des profils de vitesse, de température et de concentration de fluide pour $M = m = 1$ et $\lambda = 0.25$. Les figures (V.14) et (V.15) montrent que la vitesse est notablement affectée par la force de Coriolis. Nous constatons clairement sur ces courbes que les profils de vitesse transversale f' et axiale h diminuent avec l'accroissement du paramètre de la force de Coriolis ξ. Ceci est montré physiquement, c.-à-d., l'augmentation de la force de Coriolis tend à ralentir les vitesses. D'un autre côté, pour une valeur donnée de ξ, la vitesse h varie fortement près de la plaque.

En outre, les figures (V.16) et (V.17) montrent que, à mesure que le paramètre de la force de Coriolis ξ augmente, les profils de température et de concentration augmentent aussi. Donc, les transferts de chaleur et de masse sont réduits aussi, tel que indiqué par le tableau (V.2).

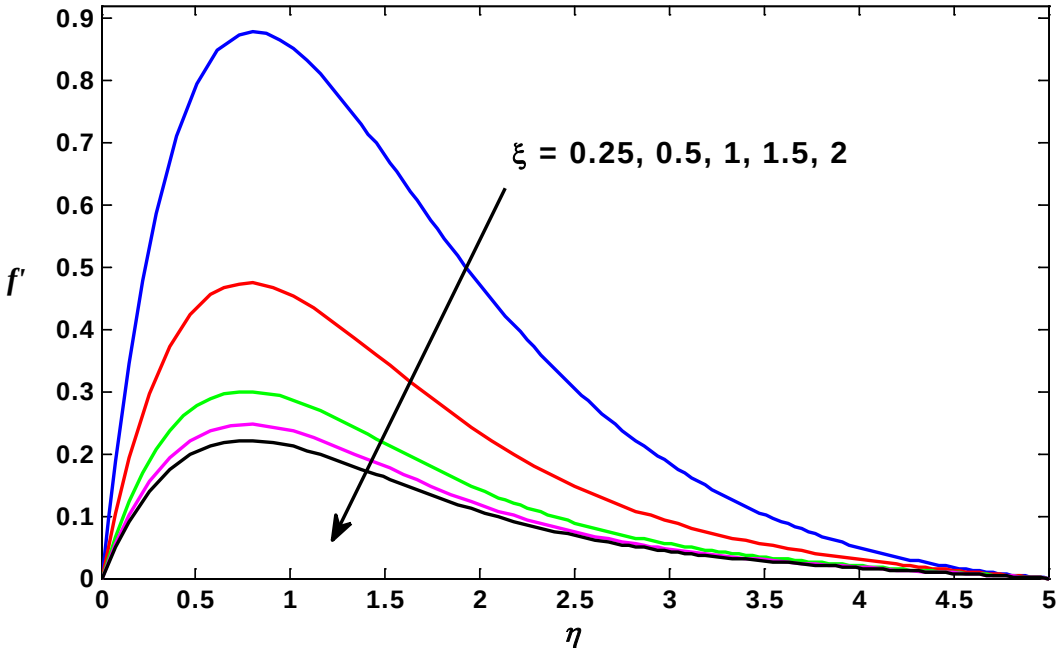


Fig. V.14 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ.

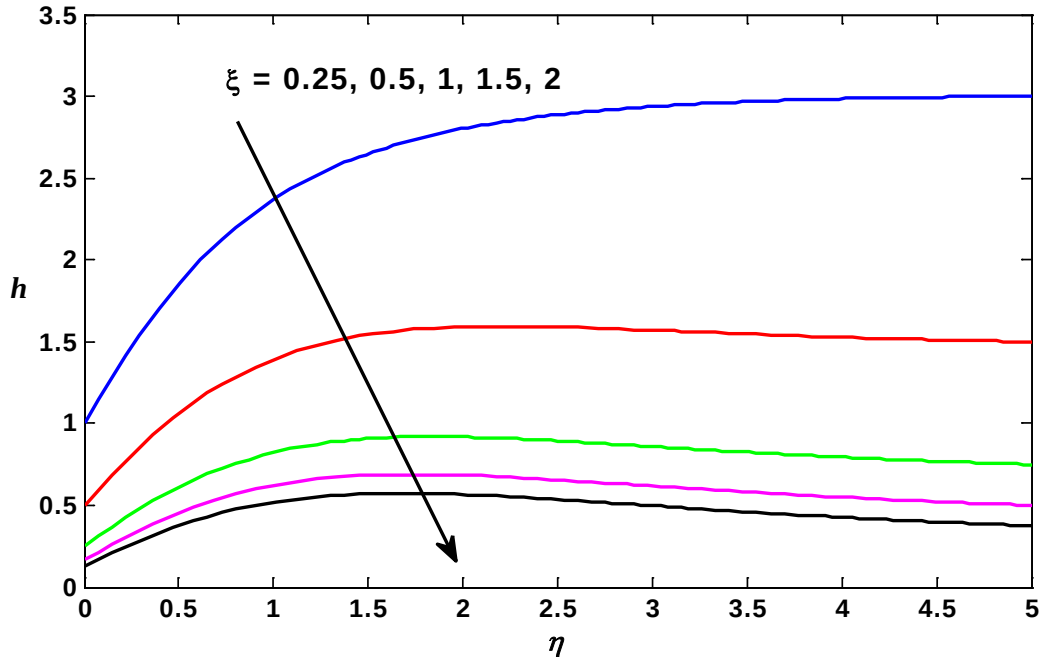


Fig. V.15 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ.

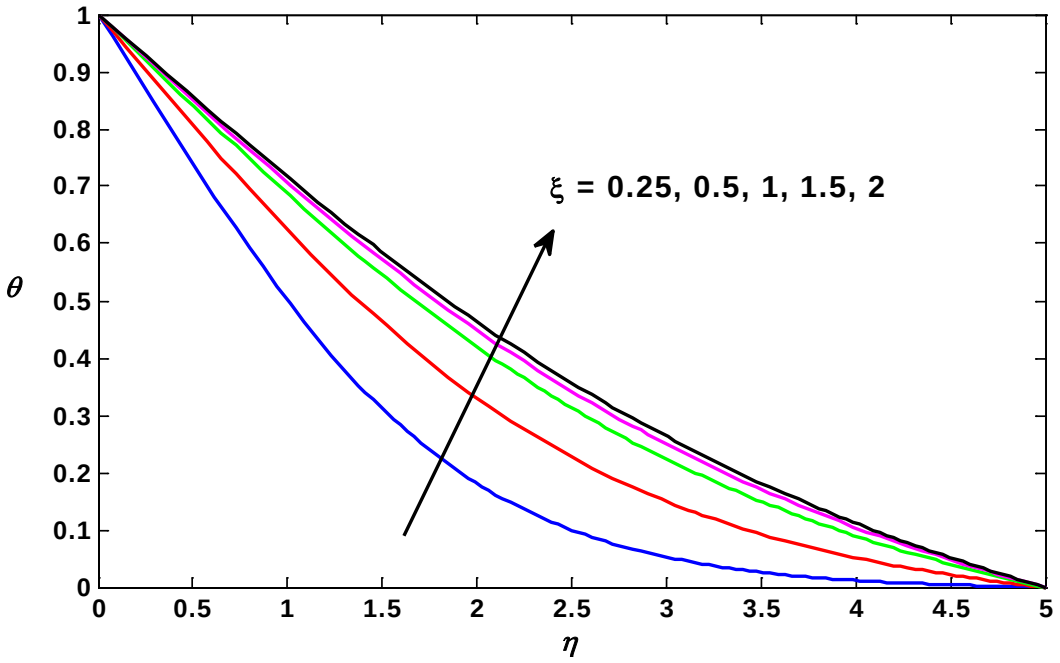


Fig. V.16 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ.

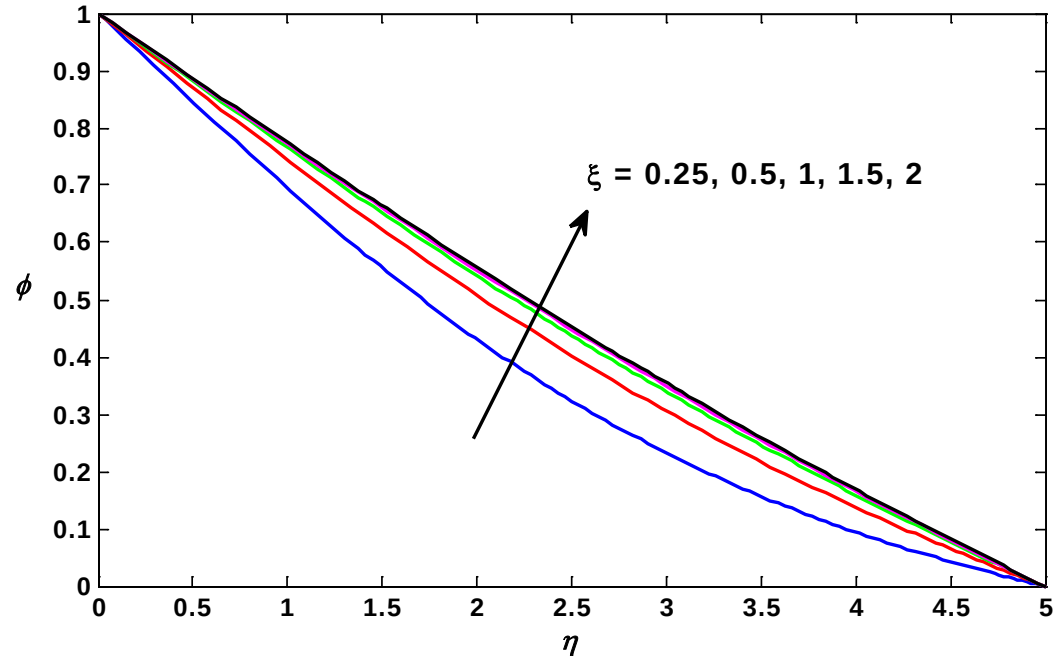


Fig. V.17 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, M=m=ξ=1 et plusieurs valeurs de ξ.

V.3.2. MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique

Dans le cas d'analyse MHD thermique et massique sous une réaction chimique du premier ordre dans un milieu poreux, le système d'équations (IV.15), (IV.16), (IV.17) et (IV.18) de similarité avec les conditions aux limites (IV.13) et (IV.14) sont résolu numériquement, comme précédemment, en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les figures de (V.17) à (V.40) présentent les résultats tout à fait numériques pour les profils de la vitesse f' et h, de la température θ et de la concentration ϕ pour $Gr = 0.5$, $Gc = 0.5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.22$ et plusieurs valeurs paramétriques de M, m, λ, ξ, K et γ [54, 18]. Ces figures sont obtenues pour illustrer l'influence relative du paramètre magnétique M, du paramètre de Hall m, du paramètre de la vitesse à la paroi λ, du paramètre de la force de Coriolis ξ, du paramètre de perméabilité K et du paramètre de réaction chimique α.

V.3.2.1. Influence du paramètre magnétique, M

Les figures (V.18), (V.19), (V.20) et (V.21) présentent des résultats numériques typiques obtenus pour les conditions: $m = 0.5$, $\lambda = 0.25$, $\xi = 1$, $K = 0.1$ et $\gamma = 0.5$ pour différentes valeurs du paramètre magnétique M. L'évolution de la vitesse transversale f' est présentée sur la figure (V.18). Dans cette dernière, Nous remarquons que la vitesse f' diminue progressivement avec l'augmentation de paramètre magnétique M. Sur la figure (V.19), une diminution de la vitesse axiale h est observée loin de la plaque quand le paramètre M augmente. Cette diminution des vitesses s'explique par le fait que la force électromagnétique de Lorentz, qui s'oppose l'écoulement, augmente comme le paramètre magnétique M augmente et ensuite elle mène à la réduction de la vitesse dans la couche limite. En augmentant le paramètre magnétique M, les figures (V.20) et (V.21) indiquent que les profils de température θ et de concentration ϕ augmentent aussi. Cela montre encore le fait que l'effet du champ magnétique est de réduire le transfert de chaleur et de masse et de retarder, voire empêcher, le mouvement convectif autour de la plaque. Cette tendance est conforme aux résultats obtenus dans le tableau (V.3).

V.3.2.2. Influence du paramètre de Hall, m

L'effet du paramètre de Hall sur les vitesses, la température et la concentration pour le cas $M = 0.3$, $\lambda = 0.25$, $\xi = 1$, $K = 0.1$ et $\gamma = 0.5$ est illustré sur les figures (V.22), (V.23), (V.24) et (V.25). En augmentant le paramètre de Hall de 0 à 3, Nous constatons clairement sur les figures (V.22) et (V.23) que les vitesses transversale f' et axiale h augmentent aussi. Par contre, les figures (V.24) et (V.25) montrent que la température θ et la concentration ϕ ne sont pas très affectées par ce paramètre, où nous observons que l'accroissement de ce dernier peut causer une faible diminution des profils de température et de concentration.

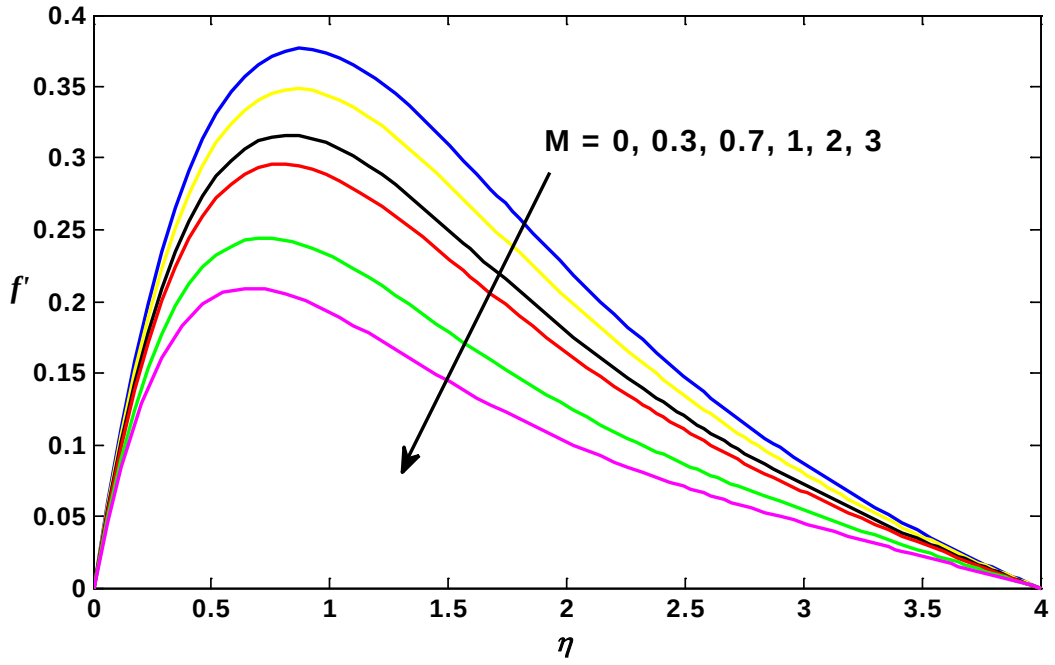


Fig. V.18 : Profils de la vitesse f' à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.

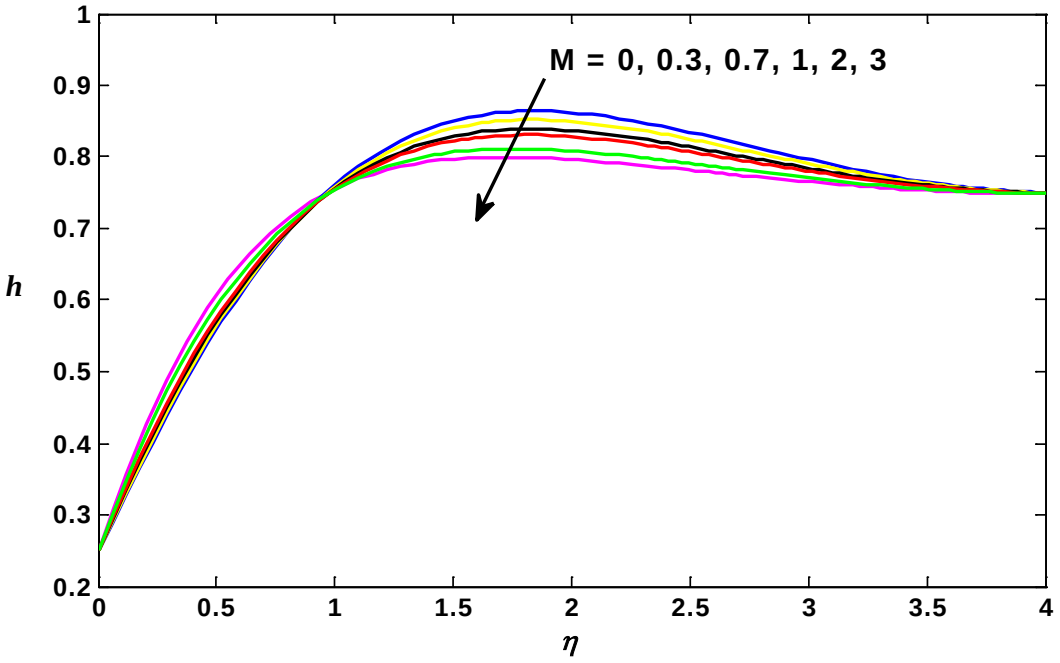


Fig. V.19 : Profils de la vitesse h à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.

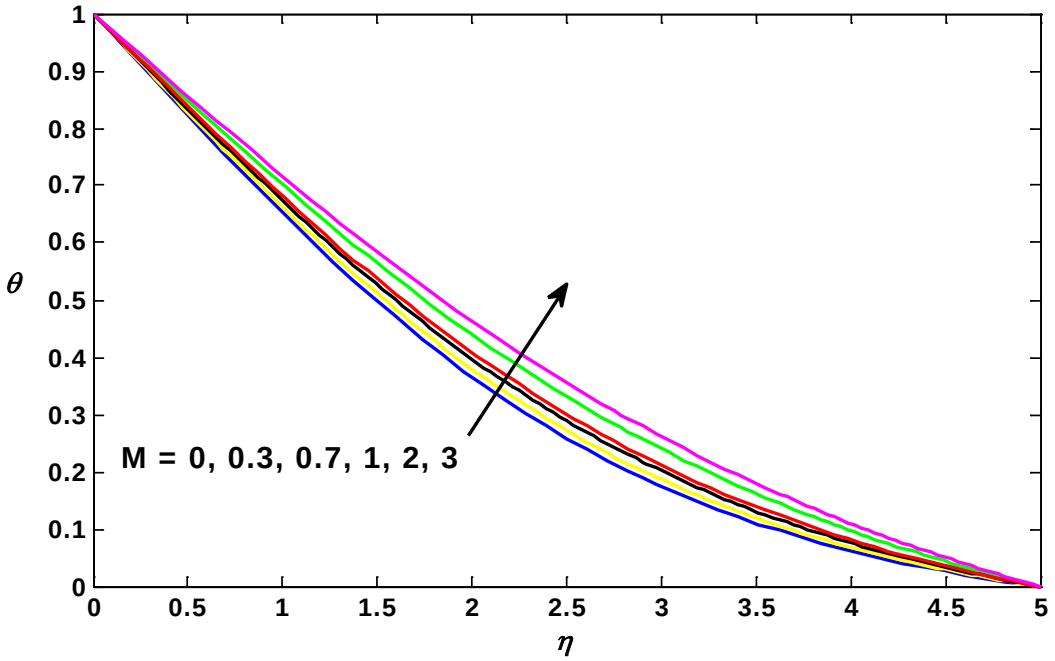


Fig. V.20 : Profils de la température θ à m=0.5, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.

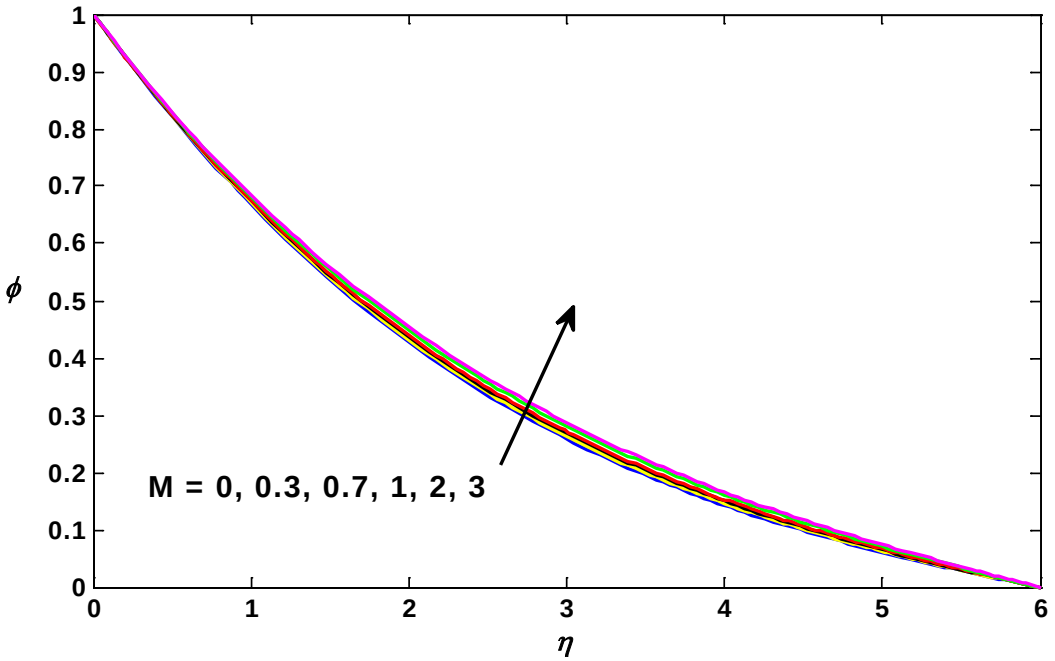


Fig. V.21 : Profils de la concentration ϕ à m=0.5, Gc=0.5, Gr = 0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de M.

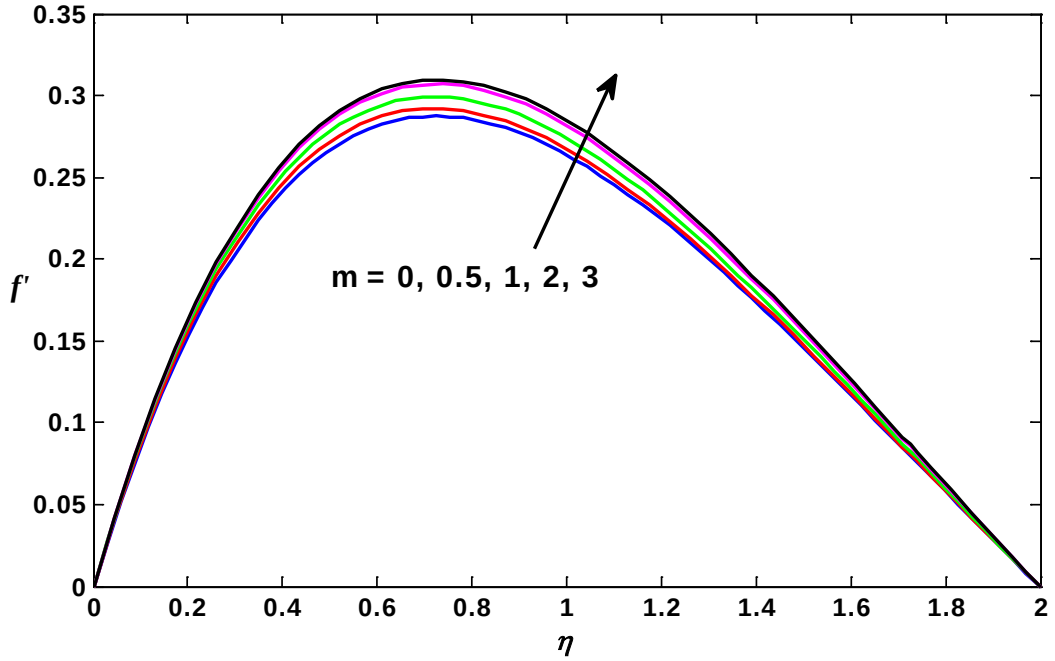


Fig. V.22 : Profils de la vitesse f' à M =0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.

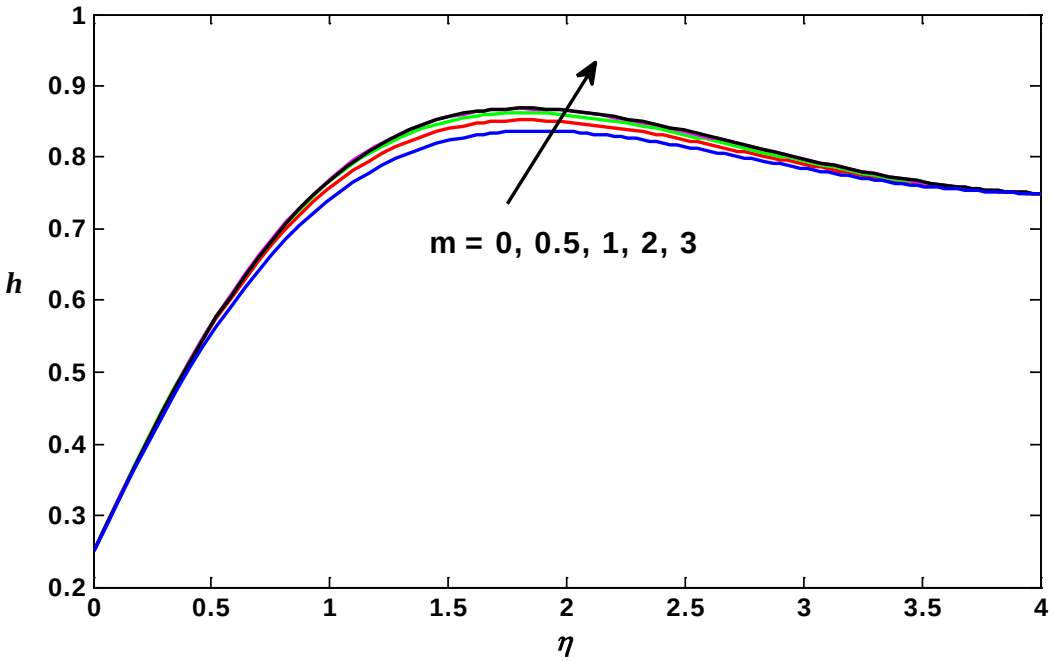


Fig. V.23 : Profils de la vitesse h à M=0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.

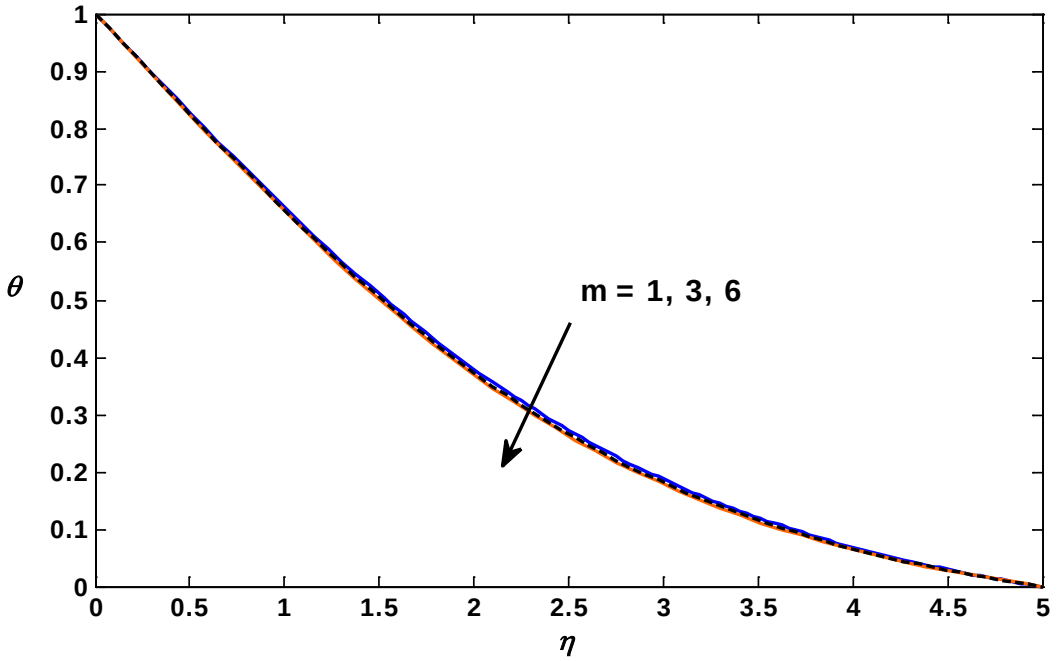


Fig. V.24 : Profils de la température θ à M=0.3, Gc=0.5, Gr=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.

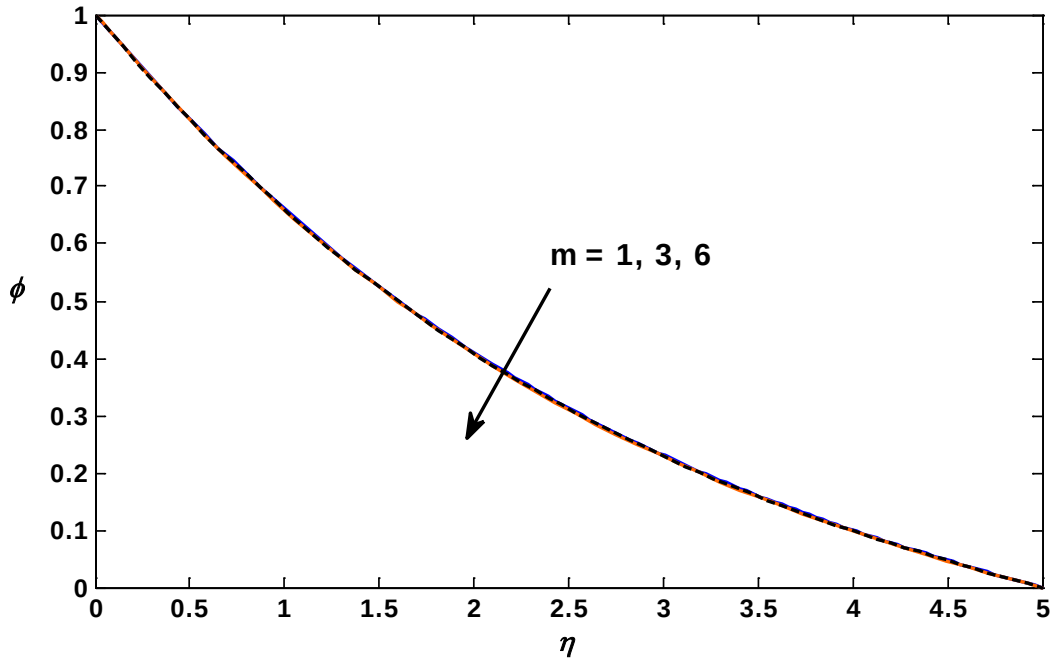


Fig. V.25 : Profils de la concentration ϕ à M=0.3, Gc=0.5, Gr = 0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de m.

V.3.2.3. Influence du paramètre de la vitesse de paroi, λ

Des résultats typiques sont rapportés dans les figures (V.26), (V.27), (V.28) et (V.29) pour les conditions $M = m = \xi = 1$, $K = 0.1$ et $\gamma = 0.5$ et pour différentes valeurs de paramètre de la vitesse de paroi λ. Sur la figure (V.26), nous constatons clairement que la vitesse transversale f' diminue progressivement avec l'augmentation de paramètre λ et tend à inverser cette dernière. La figure (V.27) montre que la vitesse axiale h augmente pour environ $0 \leq \eta \leq 0.5$, à mesure que le paramètre de la vitesse de paroi λ augmente, tandis que cette dernière diminue quand $\eta > 0.5$. En outre, les figures (V.28) et (V.29) indique que l'augmentation du paramètre λ conduit à l'augmentation des profils de température et de concentration. Le tableau (V.3) confirme ces résultats, à savoir la diminution des nombres locaux de Nusselt et de Sherwood, c'est-à-dire la diminution des transferts convectifs de chaleur et de l'espèce.

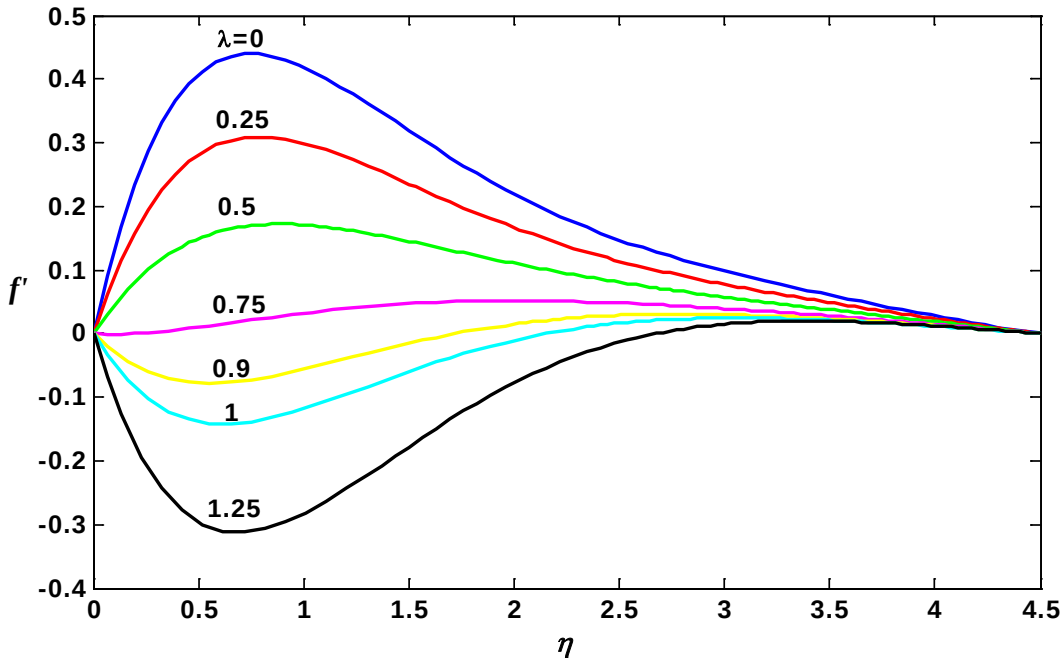


Fig. V.26 : Profils de la vitesse f' à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, *M*=*m*=ξ=1, *K*=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ.

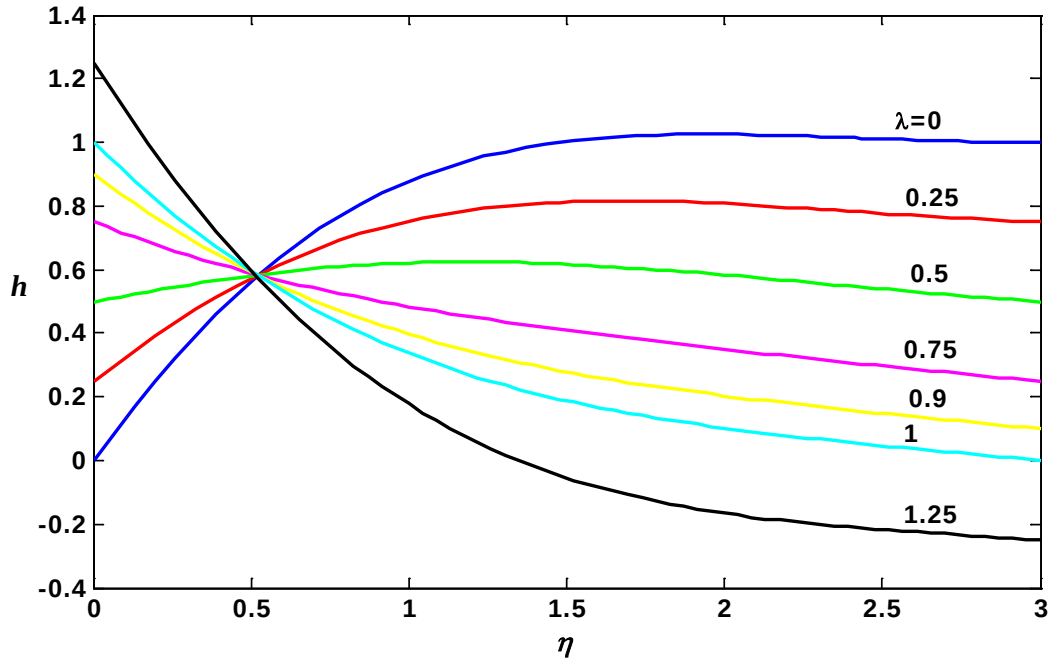


Fig. V.27 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ.

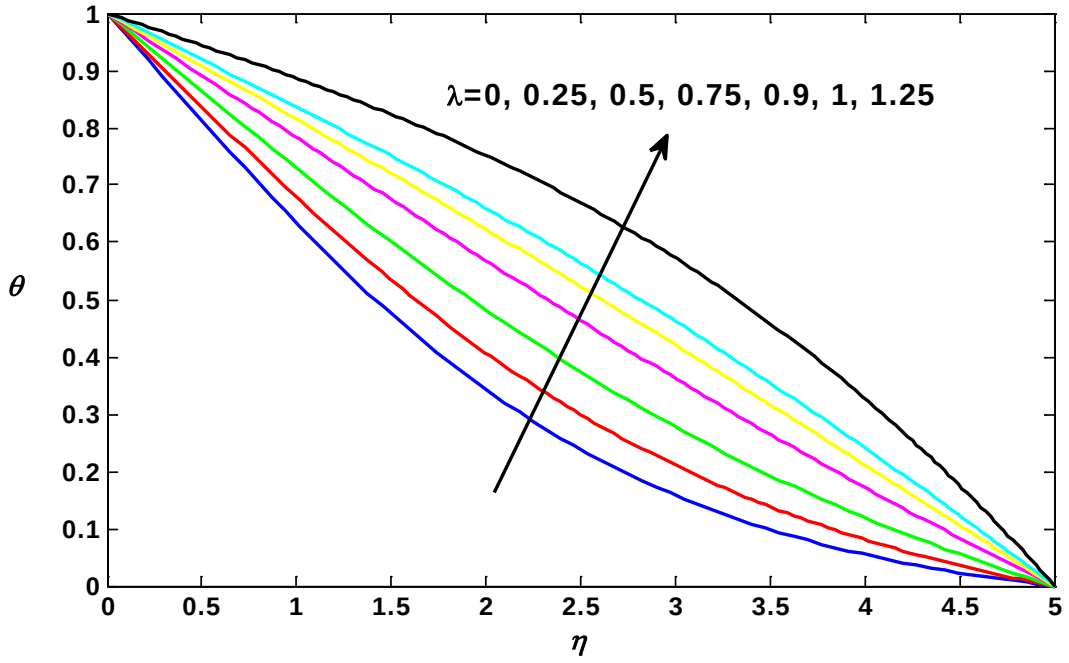


Fig. V.28 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ.

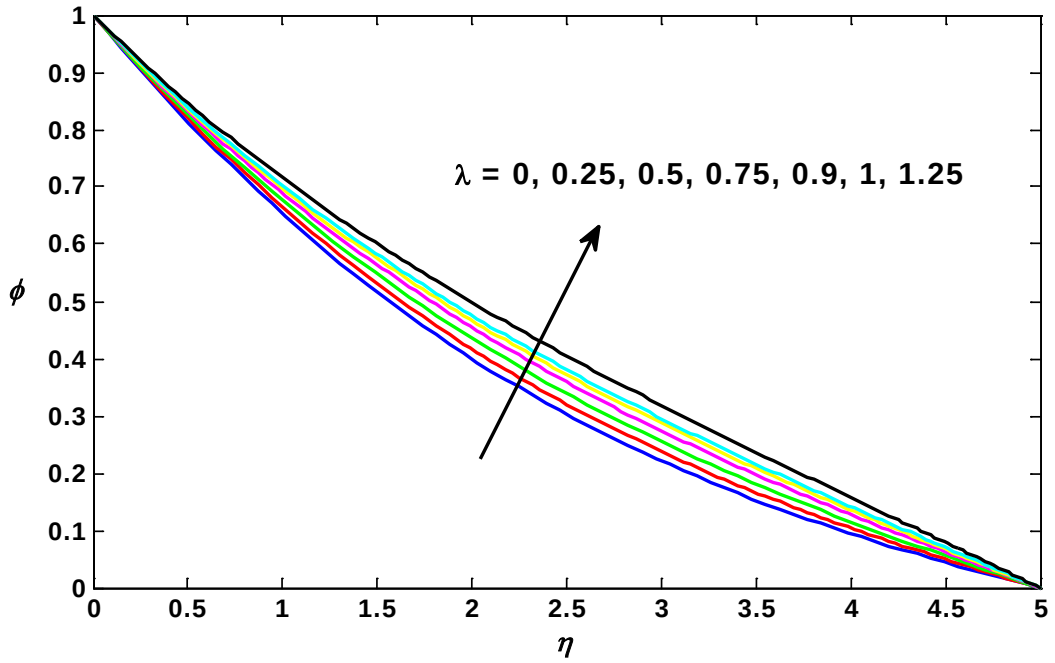


Fig. V.29 : Profils de la concentration ϕ à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, *M*=*m*=ξ=1, *K*=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de λ.

V.3.2.4. Influence du paramètre de la force de Coriolis, ξ

Les effets du paramètre de la force de Coriolis ξ sont illustrés sur les figures (V.30), (V.31), (V.32) et (V.33) pour $M = m = 1$, $K = 0.1$ et $\gamma = 0.5$, c'est-à-dire les mêmes paramètres que le cas précédent, mais pour $\lambda = 0.25$. De ces courbes, on peut noter que l'augmentation du paramètre de la force de Coriolis ξ tend à diminuer les vitesses transversale f' et axiale h, mais ceci tend à augmenter les profils de température θ et de concentration ϕ. Cela montre encore le fait que l'effet du paramètre de la force de Coriolis ξ est de réduire le transfert de chaleur et de masse comme nous le montre le tableau (V.3).

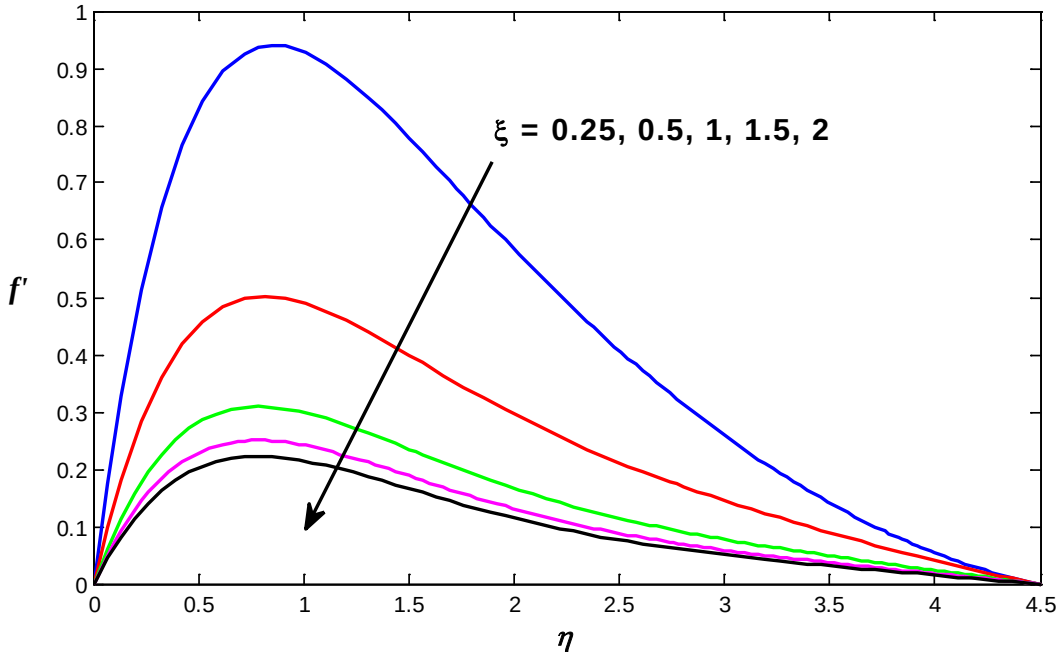


Fig. V.30 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ.

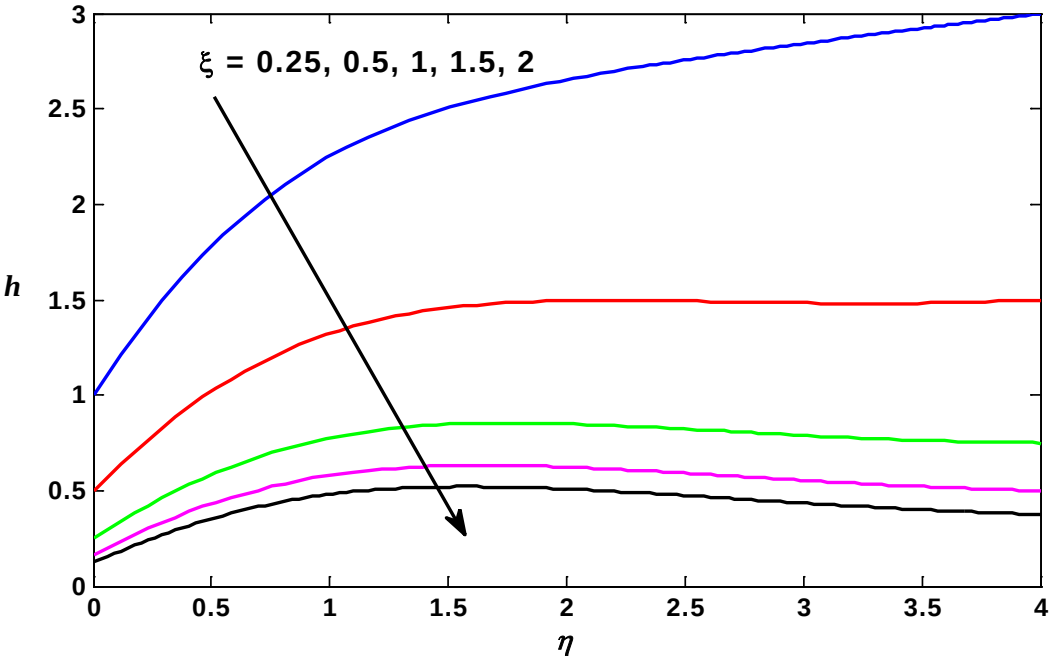


Fig. V.31 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ.

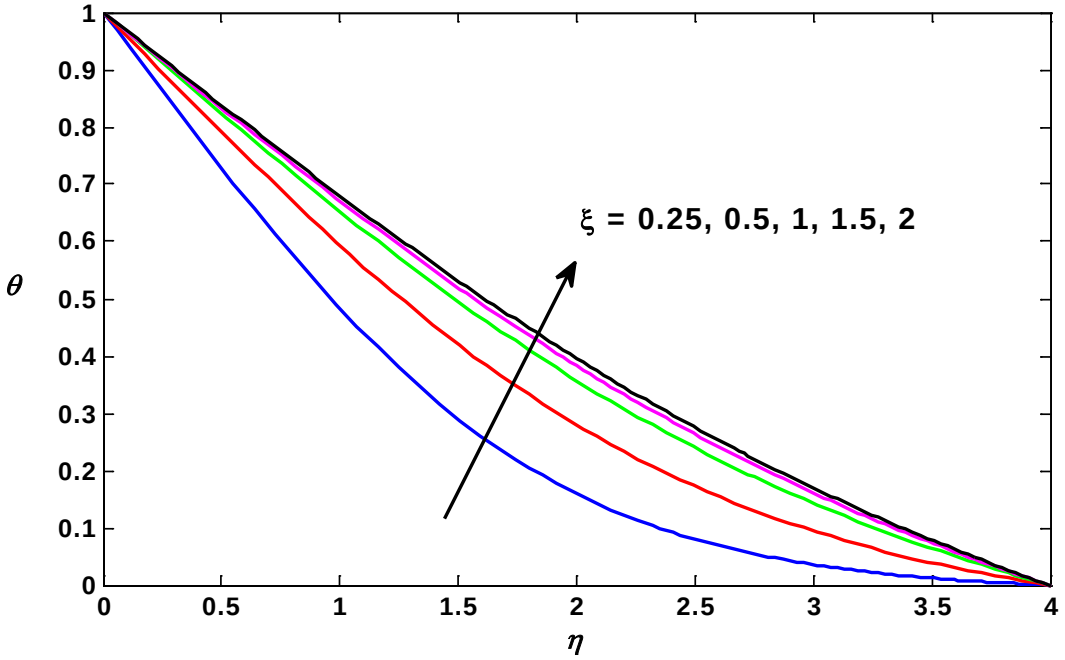


Fig. V.32 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ.

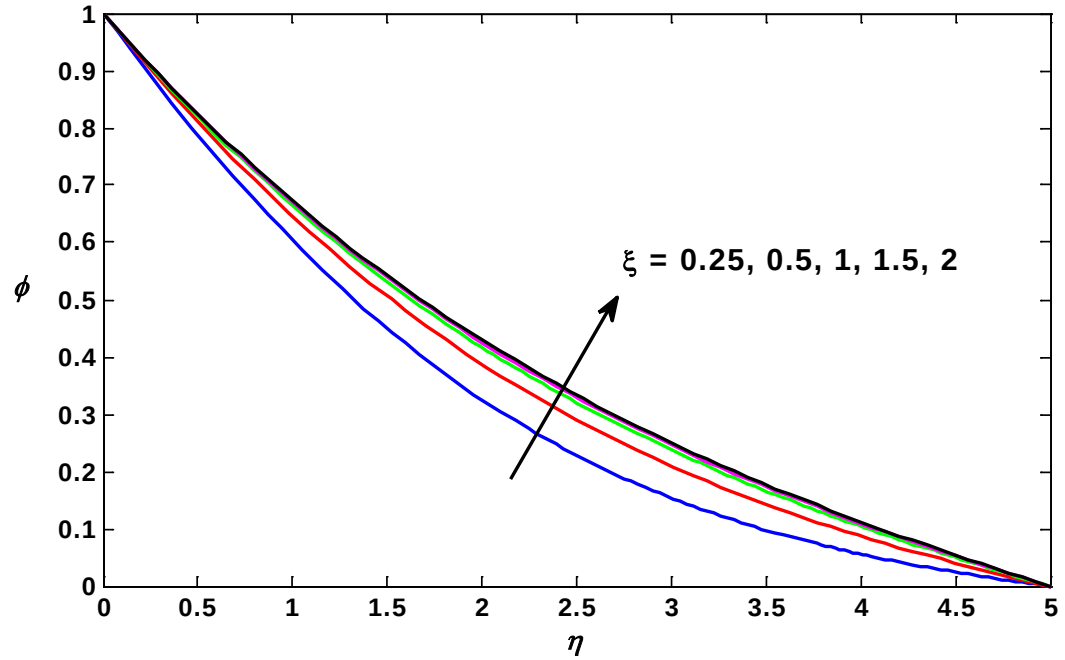


Fig. V.33 : Profils de la concentration ϕ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=1, λ=0.25, K=0.1, γ=0.5 et plusieurs valeurs de ξ.

V.3.2.5. Influence du paramètre de perméabilité, *K*

L'influence du paramètre de perméabilité K sur les champs des vitesses transversale f' et axiale h , de température θ et de concentration ϕ sont présentés, pour les paramètres pour $M = m = \xi = 1$, $\lambda = 0.25$ et $\gamma = 0.5$, dans les figures (V.34), (V.35), (V.36) et (V.37), respectivement. C'est clair de ces figures que l'augmentation des valeurs de paramètre de perméabilité K tend à augmenter la vitesse transversale f' mais ceci tend à diminuer la vitesse axiale h, la température θ et la concentration du fluide ϕ. L'augmentation de la vitesse transversale f' est due à la diminution du volume de particules solides ce qui réduit la résistance à l'écoulement et l'échange de chaleur par conduction thermique. Ceci sert à intensifier les mouvements de l'écoulement et diminuer la température et la concentration de fluide. Pour le cas de l'écoulement axiale, la diminution de la vitesse du fluide, h, est causé par l'orientation de l'écoulement par rapport au milieu poreux.

Le tableau (V.3) confirme les résultats obtenus, à savoir l'augmentation des nombres locaux de Nusselt et de Sherwood, c'est-à-dire l'augmentation des taux de transfert de chaleur et de masse.

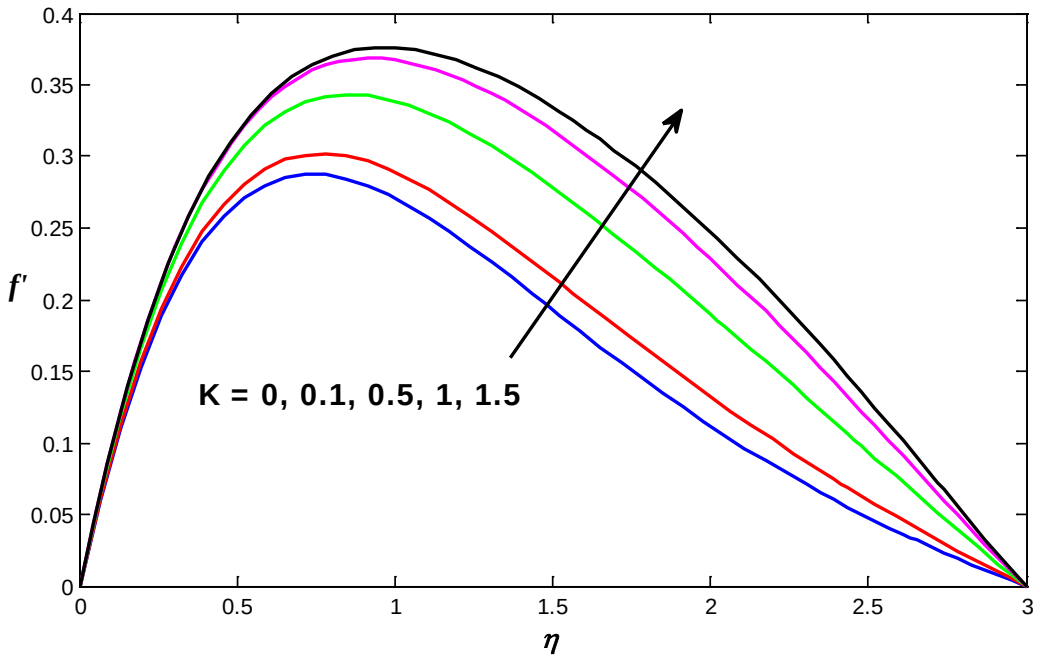


Fig. V.34 : Profils de la vitesse f' à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, *M*=*m*=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de *K*.

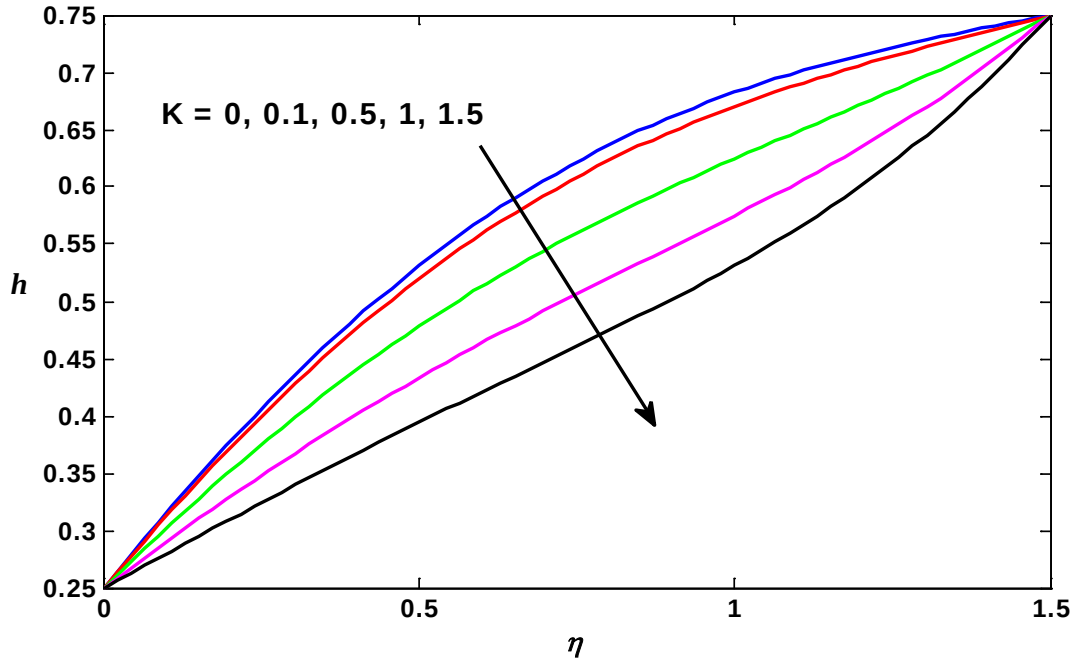


Fig. V.35 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K.

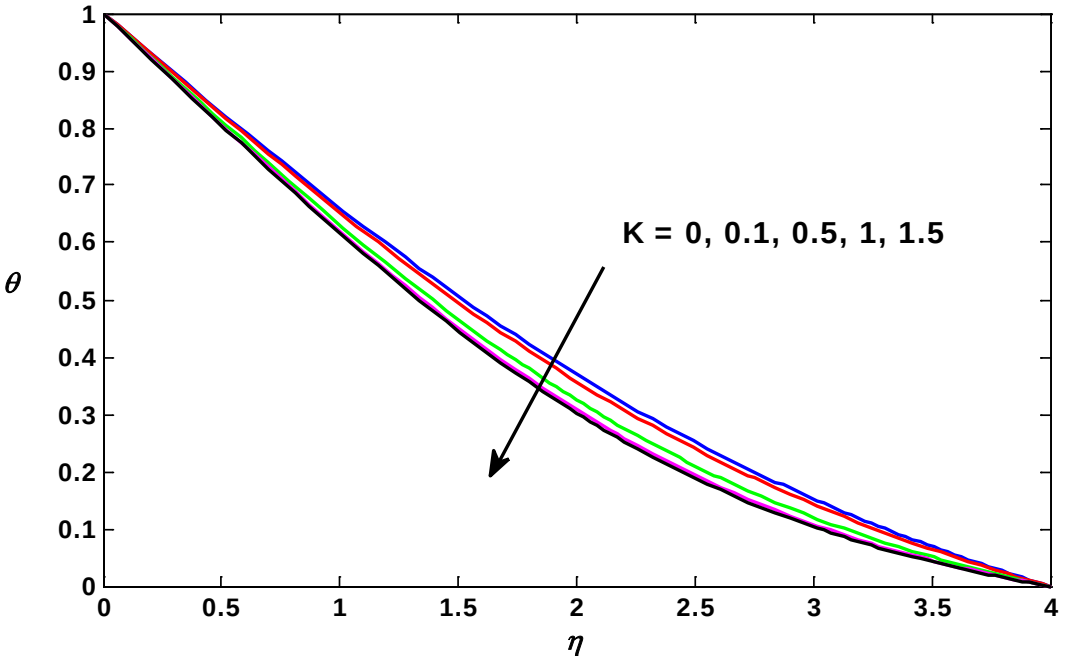


Fig. V.36 : Profils de la température θ à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K.

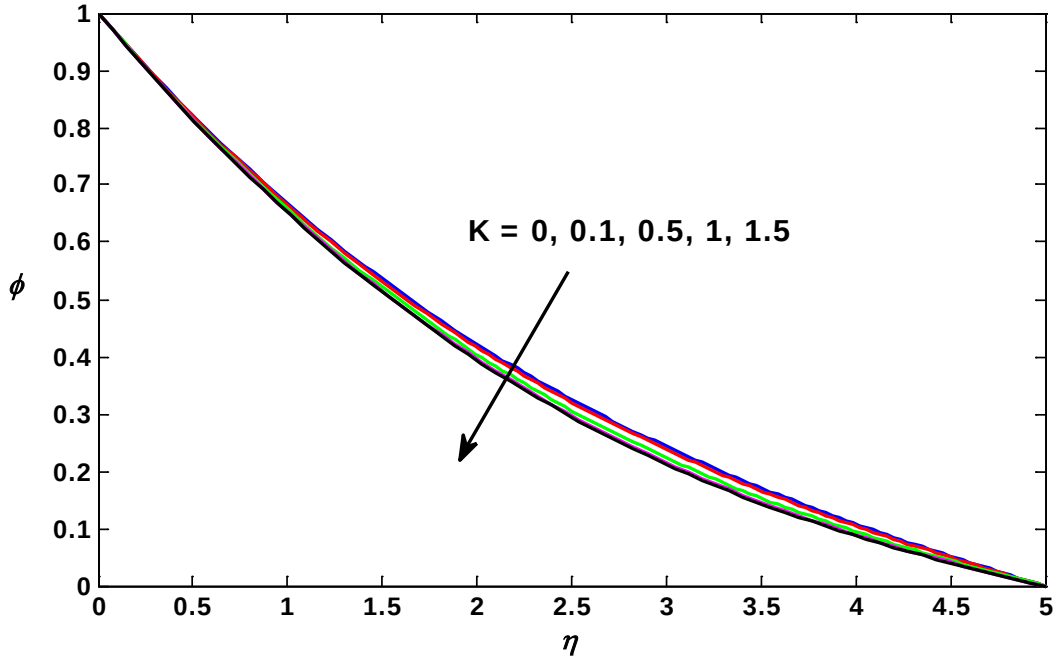


Fig. V.37 : Profils de la concentration ϕ à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, *M*=*m*=ξ=1, λ=0.25, γ=0.5 et plusieurs valeurs de K.

V.3.2.6. Influence du paramètre de la réaction chimique, γ

Les figures (V.38), (V.39), (V.40) et (V.41) montrent bien l'effet du paramètre de la réaction chimique γ pour le cas $M = m = \xi = 1$, $\lambda = 0.25$ et $K = 0.1$ sur les profils des vitesses f' et h, de température θ et de concentration ϕ, respectivement. Sur les figures (V.38) et (V.39), nous remarquons que l'effet du paramètre de la réaction chimique γ était de réduire les vitesses transversale f' et axiale h. En examinant ces résultats numériques, nous pouvons dire que l'effet de la réaction chimique est d'augmenter la consommation de l'espèce chimique ce qui diminue le champ de concentration, tel qu'indiqué par la figure (V.41). Ceci permet de réduire les effets de flottabilité résultant aux gradients de concentration qui cause un écoulement retardé.

En outre, sur la figure (V.40), nous observons que la température est intensifiée avec l'augmentation de paramètre de la réaction chimique γ. Pour ce cas, nous considérons une réaction destructive (endothermique) dont le paramètre de la réaction chimique est positive ($\gamma > 0$). A partir de ce graphique, on peut dire que la réduction de la vitesse du fluide conduit donc à la réduction de l'intensité du transfert thermique à travers le fluide ce qui paraît dans l'augmentation de la température. Donc, l'effet de la réaction chimique était de réduire l'intensité du transfert thermique et d'augmenter l'intensité du transfert massique. Ceci est présenté dans le tableau (V.3).

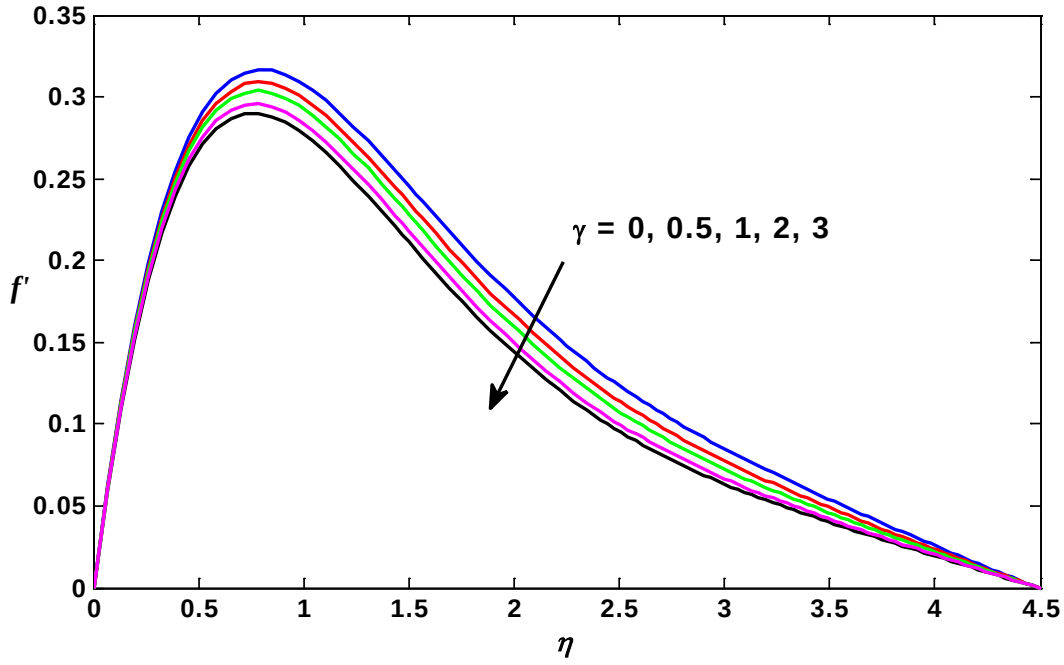


Fig. V.38 : Profils de la vitesse f' à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, K=0.1 et plusieurs valeurs de γ.

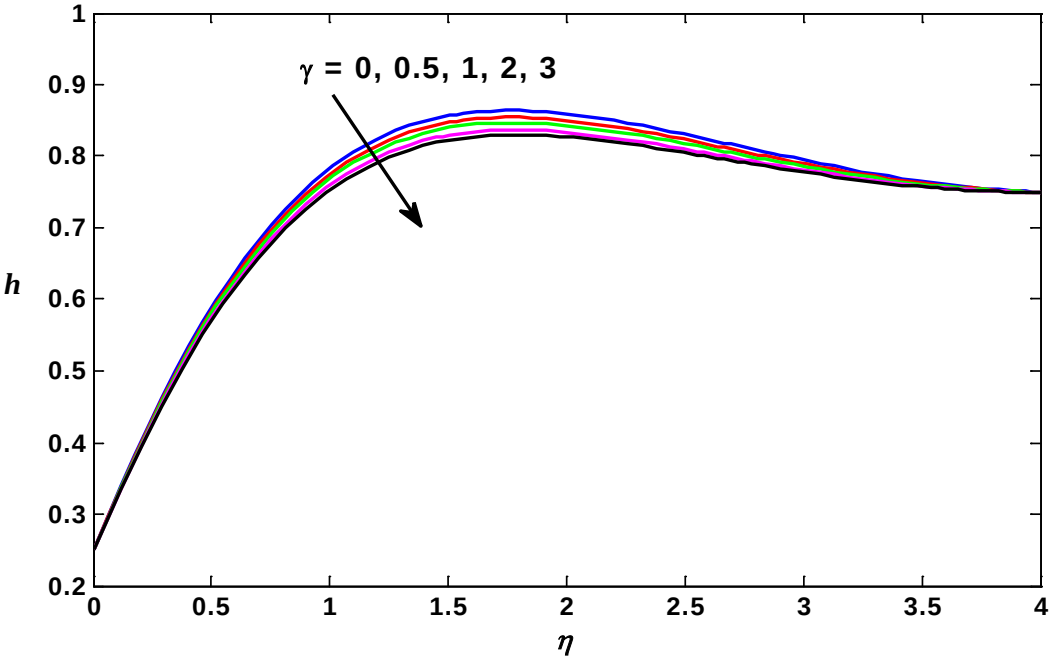


Fig. V.39 : Profils de la vitesse h à Pr=0.71, Sc=0.22, M=m=ξ=1, λ=0.25, K=0.5 et plusieurs valeurs de γ.

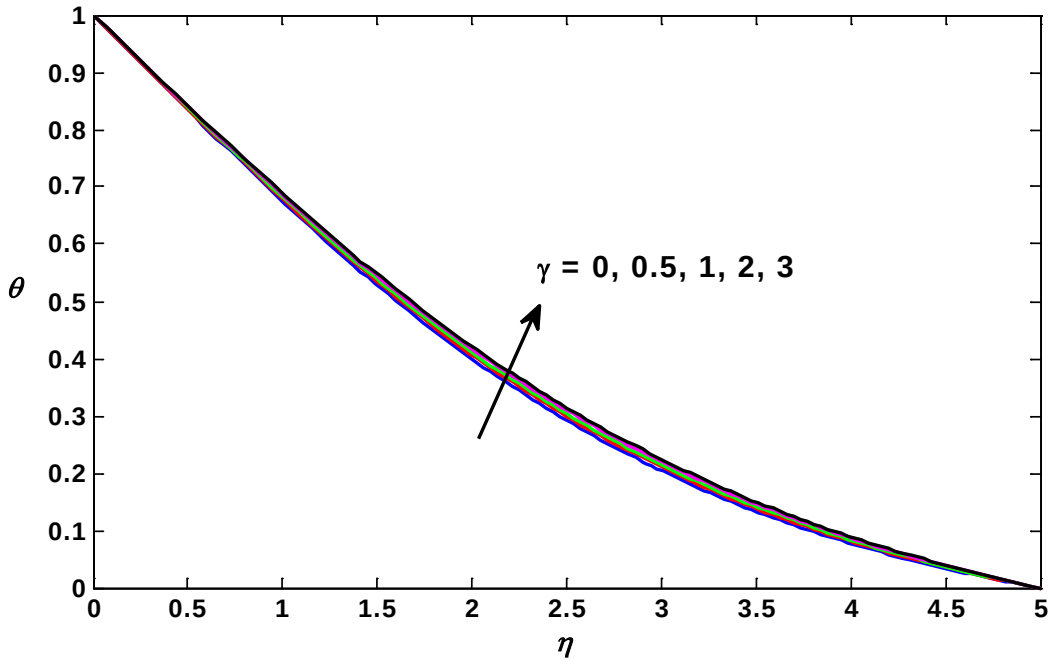


Fig. V.40 : Profils de la température θ à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, *M*=*m*=ξ=1, λ=0.25, *K*=0.1 et plusieurs valeurs de γ.

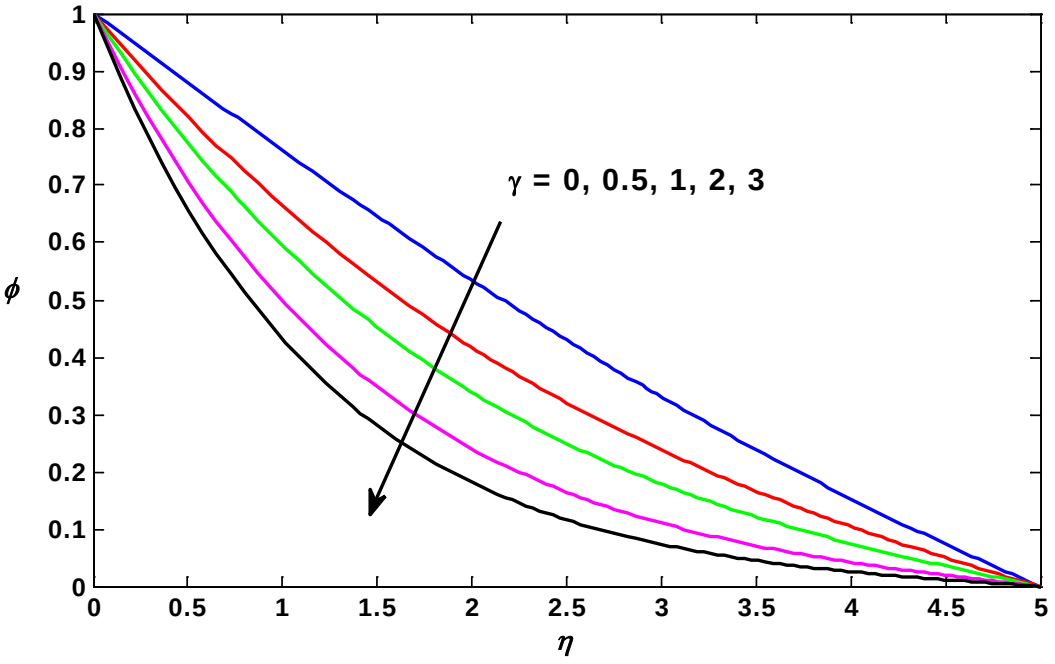


Fig. V.41 : Profils de la concentration ϕ à *Pr*=0.71, *Sc*=0.22, *M*=*m*=ξ=1, λ=0.25, K=0.1 et plusieurs valeurs de γ.

V.3.3. Comparaison

Dans notre analyse MHD thermique et massique d'un courant de gaz ionisé en rotation autour une plaque semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante, on a développé deux modèles analytiques en termes des paramètres du problème pour différents cas où on a étudié l'effet magnétique dominé par effet de Hall sur la convection thermique et massique ensuite sur la convection thermique et massique sous une réaction chimique du premier ordre dans un milieu poreux. Pour comparer ces modèles, nous avons représenté l'évolution des vitesses f' et h, de la température θ et de la concentration ϕ sur les figures (V.42), (V.43), (V.44) et (V.45) pour les conditions $M = 1,\ m = 0.5,\ Pr = 0.71,\ Sc = 0.22,\ \lambda = 0.25,\ \xi = 1,\ K = 0.1$ et $\gamma = 0.5$ pour deux cas de Grashof thermique et massique, *Gr* et *Gc* respectivement. Dans ces figures, les résultats numériques pour $Gr = Gc = 0.5$ sont indiqués par des lignes en trait plein alors que les résultats numériques pour $Gr = Gc = 2$ sont représentés par des lignes en pointillés. Qualitativement, les comportements de ces courbes sont similaires pour ces deux modes de convection à savoir la convection thermique et massique et la convection thermique et massique sous une réaction chimique du premier ordre dans un milieu poreux. Cependant, bien entendu, l'intensité de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de masse, dépendent considérablement du nombre de Grashof. En effet, au fur et à mesure que l'on augmente les nombres de Grashof thermique et massique, les profils de vitesse f' et h augmentent et les profils de température θ et de concentration ϕ diminuent c'est-à-dire les taux de transfert thermique et massique sont intensifiés avec l'augmentation du nombre de Grashof thermique et massique.

Les figures (V.42) et (V.43) illustrent l'influence d'une réaction chimique en milieu poreux sur la vitesse de l'écoulement pour les deux cas du nombre de Grashof. Sur la figure (V.42), On remarque que la présence de la réaction chimique en milieu poreux cause l'augmentation de la vitesse transversale f' dans le cas où $Gr = Gc = 0.5$, tandis que cette dernière diminue pour $Gr = Gc = 2$. Cependant, la figure (V.43) montre que l'effet de la réaction chimique en milieu poreux était de réduire la vitesse axiale h pour les deux cas du nombre de Grashof, $Gr = Gc = 0.5$ et $Gr = Gc = 2$.

La figure (V.44) indique que la présence d'une réaction chimique en milieu poreux fait diminuer légèrement la température pour $Gr = Gc = 0.5$, tandis que cette dernière augmente légèrement pour $Gr = Gc = 2$. Par contre, sur la figure (V.45), on observe clairement que pour les deux cas du nombre de Grashof, l'effet d'une réaction chimique en milieu poreux était de diminuer la concentration.

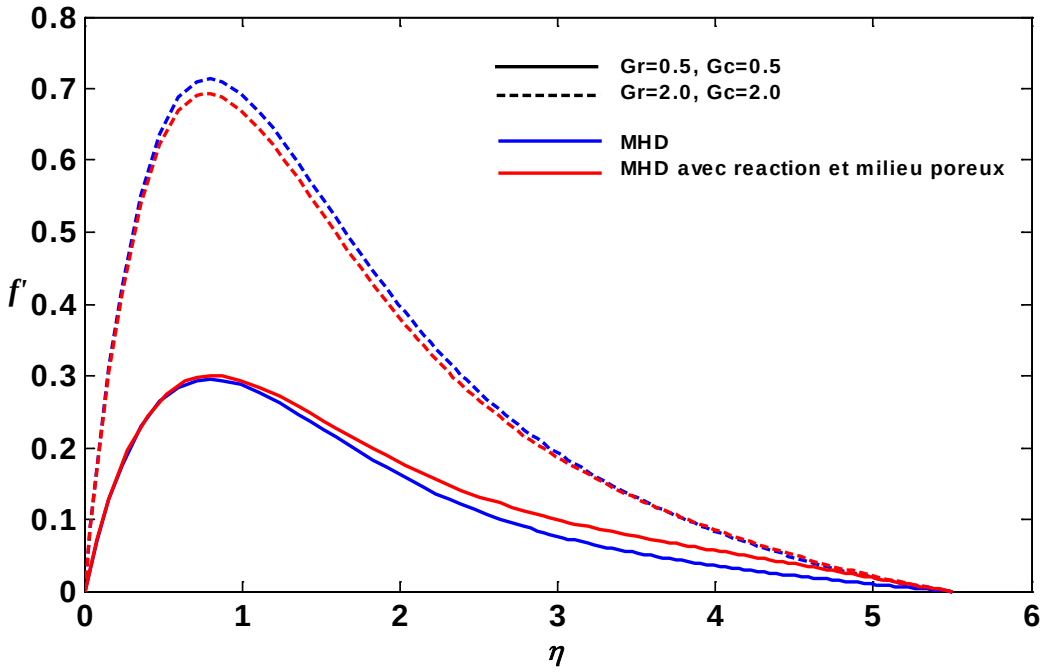


Fig. V.42 : Profils de la vitesse f' pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5.

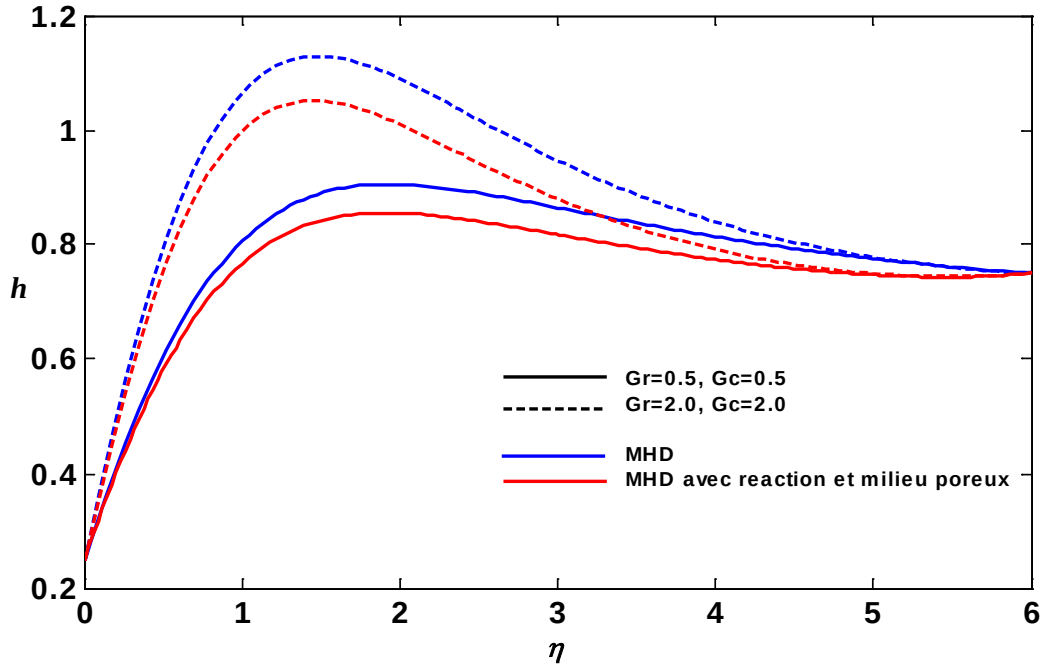


Fig. V.43 : Profils de la vitesse h pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5.

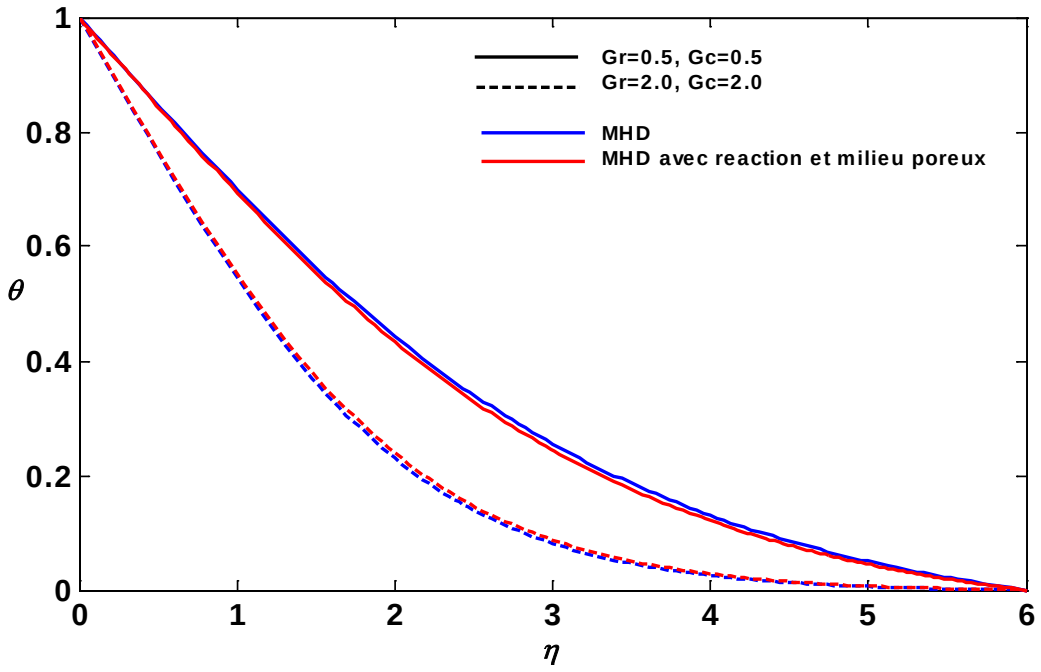


Fig. V.44 : Profils de la température θ pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5.

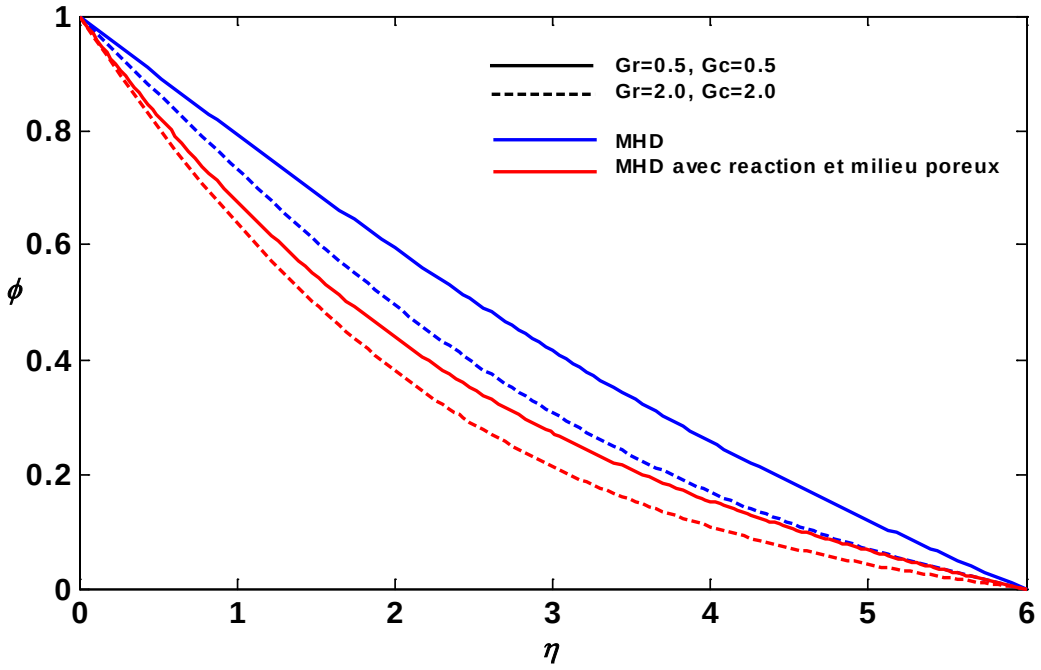


Fig. V.45 : Profils de la concentration ϕ pour les deux cas d'étude à M=1, m=0.5, Pr=0.71, Sc=0.22, λ=0.25, ξ=1, K=0.1, γ=0.5.

V.3.4. Taux de transfert thermique et solutale

Finalement, les résultats typiques obtenus à partir de nos simulations utilisant le logiciel MATLAB 6.5 pour le transfert de chaleur et de masse basant sur les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood, Nu_x et Sh_x respectivement, sont regroupées dans les tableaux (V.2) et (V.3).

Dans le tableau (V.2), on reporte les valeurs des nombres locaux de Nusselt et de Sherwood obtenues pour le transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque verticale semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante dans un courant de gaz ionisé en rotation pour des différentes valeurs de M, m, λ et ξ. En examinant ces résultats numériques, nous pouvons constater que si on augmente le paramètre de Hall m ou de la force de Coriolis ξ; le nombre de Nusselt local Nu_x et le nombre de Sherwood local Sh_x augmentent aussi, c'est-à-dire les taux de transferts de chaleur et de l'espèce sont intensifiés avec l'augmentation de m ou de ξ. Un comportement opposé se produit si on augmente le paramètre magnétique M et de la vitesse à la paroi λ.

Les résultats correspondant à cette étude sous une réaction chimique du premier ordre dans un milieu poreux pour différentes valeurs de M, m, λ, ξ, K et γ sont également exposés dans le tableau (V.3). A partir de ce tableau, on peut voir que les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood diminuent à cause de l'augmentation du paramètre magnétique M ou de la vitesse à la paroi λ ou de la force de Coriolis ξ. Toutefois, ils augmentent quand on augmente le nombre de Hall m ou la perméabilité du milieu poreux K. Par contre, si on augmente le paramètre de la réaction chimique γ, le nombre de Nusselt local diminue et le nombre de Sherwood local augmente.

Tab. V.2: Valeurs numériques d*e Nu* et *Sh* de la convection thermique et massique pour différentes valeurs de *M*, *m*, λ et ξ avec *Gr*=0.5, *Gc*=0.5, *Pr*=0.71 et *Sc*=0.22.

M	m	λ	ξ	$Nu_x\ Re_x^{-1/2}$	$Sh_x\ Re_x^{-1/2}$
0	1	0.25	1	0.3686	0.2864
0.3	1	0.25	1	0.3616	0.2842
0.7	1	0.25	1	0.3537	0.2817
1	1	0.25	1	0.3485	0.2801
2	1	0.25	1	0.3348	0.2758
3	1	0.25	1	0.3248	0.2727
1	0.5	0.25	1	0.3474	0.2798
1	1	0.25	1	0.3485	0.2801
1	1.5	0.25	1	0.3510	0.2808
1	2	0.25	1	0.3533	0.2815
1	3	0.25	1	0.3570	0.2827
1	1	0	1	0.3902	0.2929
1	1	0.25	1	0.3485	0.2801
1	1	0.5	1	0.3040	0.2666
1	1	0.75	1	0.2573	0.2523
1	1	1	1	0.2096	0.2372
1	1	1.25	1	0.1628	0.2212
1	1	0.25	0.25	0.5263	0.3393
1	1	0.25	0.5	0.4062	0.2981
1	1	0.25	1	0.3485	0.2801
1	1	0.25	1.5	0.3307	0.2746
1	1	0.25	2	0.3369	0.2720

Tab. V.3: Valeurs numériques de *Nu* et *Sh* de la convection thermique et massique sous une réaction chimique du premier ordre dans un milieu poreux pour différentes valeurs de *M*, *m*, λ et ξ avec *Gr*=0.5, *Gc*=0.5, *Pr*=0.71 et *Sc*=0.22.

M	*m*	λ	ξ	*K*	γ	Λ	*S*
0	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3773	0.4136
0.3	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3692	0.4115
0.7	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3601	0.4093
1	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3542	0.4078
2	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3389	0.4041
3	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3279	0.4014
1	0.5	0.25	1	0.1	0.5	0.3512	0.4070
1	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3542	0.4078
1	1.5	0.25	1	0.1	0.5	0.3579	0.4087
1	2	0.25	1	0.1	0.5	0.3610	0.4095
1	3	0.25	1	0.1	0.5	0.3654	0.4106
1	1	0	1	0.1	0.5	0.3969	0.4187
1	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3542	0.4078
1	1	0.5	1	0.1	0.5	0.3085	0.3964
1	1	0.75	1	0.1	0.5	0.2606	0.3843
1	1	1	1	0.1	0.5	0.2117	0.3716
1	1	1.25	1	0.1	0.5	0.1637	0.3582
1	1	0.25	0.25	0.1	0.5	0.5454	0.4609
1	1	0.25	0.5	0.1	0.5	0.4191	0.4245
1	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3542	0.4078
1	1	0.25	1.5	0.1	0.5	0.3339	0.4028
1	1	0.25	2	0.1	0.5	0.3241	0.4003
1	1	0.25	1	0	0.5	0.3458	0.4058
1	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3542	0.4078
1	1	0.25	1	0.5	0.5	0.3763	0.4133
1	1	0.25	1	1	0.5	0.3886	0.4164
1	1	0.25	1	1.5	0.5	0.3923	0.4174
1	1	0.25	1	0.1	0	0.3569	0.2828

1	1	0.25	1	0.1	0.5	0.3542	0.4078
1	1	0.25	1	0.1	1	0.3521	0.5130
1	1	0.25	1	0.1	2	0.3491	0.6860
1	1	0.25	1	0.1	3	0.3470	0.8278

V.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode numérique par laquelle on a résolu les équations discrétisées ainsi que la série de tests de validation et les résultats des différents cas de simulation. Ces tests de validation montrent que le code de calcul dont nous disposons est bien valide et qu'il peut simuler les deux modèles d'écoulement en convection MHD avec transfert de chaleur et de masse d'un courant de gaz ionisé en rotation autour une plaque semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante sous l'effet des courants de Hall. Suivant les résultats obtenus, on constate que les effets des paramètres de contrôle du problème sur la convection thermique et massique sont perceptibles. L'étude comparative des résultats de deux modèles montre que l'allure représentants les mécanismes des phénomènes est la même.

Conclusion générale

Le travail réalisé dans ce mémoire à été consacré à l'étude de la convection stable avec transfert de chaleur et de masse d'un courant de gaz ionisé en rotation autour une plaque semi-infinie se déplaçant avec une vitesse constante en présence d'un fort champ magnétique où l'effet de Hall est présent. Deux modèles physiques ont été étudiés, à savoir le cas de la convection MHD thermique et massique et celui de la convection MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique du premier ordre.

Au cours de ce travail, on a utilisé les équations classiques de la MHD basées sur les équations de l'hydrodynamique, les équations de Maxwell, la loi d'Ohm et fermées par les conditions aux limites pour modéliser l'écoulement. Dés lors, on a obtenue un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Par la suite, on a utilisé les transformations de similarité afin d'obtenir le modèle mathématique final et simplifié, de type équations différentielles ordinaires non linéaires.
Les équations gouvernantes régissant le phénomène sont résolues numériquement avec un code de calcul basé sur la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. Ce code de calcul a été validé en comparaison avec les résultats numériques disponibles dans la littérature. Les résultats numériques donnent un aperçu général sur les champs de vitesse, de température et de concentration ainsi qu'une description quantitative des transferts de chaleur et de masse impliqués. Ces résultats sont exprimés en termes de paramètres de contrôle du problème tels que le paramètre magnétique, M, le paramètre de Hall, m, le paramètre de la vitesse de paroi, λ, le paramètre de la force de Coriolis, ξ, le nombre de Grashof, Gr, le nombre de Grashof modifié, Gc, le nombre de Prandtl, Pr, et le nombre de Schmidt, Sc, et les paramètres de perméabilité, K, et de réaction chimique, γ, caractérisant le deuxième type de la convection considéré.

Les résultats obtenus ont démontrés l'importance des effets du champ magnétique, du Hall, de la vitesse de paroi et de la force de Coriolis et des effets du perméabilité et du réaction chimique pour le deuxième cas d'étude sur la vitesse du courant et sur les transferts de chaleur et d'espèce caractérisés respectivement par le nombre de Nusselt, Nu , et le nombre de Sherwood, Sh.

Les résultats numériques peuvent être résumés de la façon suivante :

- Pour les deux modèles de convection, l'augmentation du paramètre magnétique tend à diminuer la vitesse transversale et à diminuer la vitesse axiale loin de la plaque, mais ceci tend à augmenter la température et la concentration dans l'écoulement et par conséquent diminuer les transferts de chaleur et de masse. Donc, l'effet essentiel du champ magnétique est d'exercer une force qui s'oppose au mouvement du fluide, c'est à dire de retarder l'intensité de la convection.

- Dans le cas d'une convection MHD thermique et massique, la vitesse transversale loin de la plaque diminue et la vitesse axiale augmente, à mesure que le paramètre de Hall augmente, alors que cela fait augmenter les vitesses transversale et axiale pour une convection MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique. Pour les deux cas de convection, la température et la concentration ne sont pas très influencées par ce paramètre. Cela montre que les transferts de chaleur et de masse ne sont pas très affectés par ce dernier.

- Pour les deux modèles de convection, les vitesses de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de masse, dépendent considérablement du paramètre de la vitesse de paroi. La vitesse transversale diminue avec l'augmentation du ce dernier; tandis que la vitesse axiale augmente pour environ $0 \leq \eta \leq 0.5$ et qu'elle diminue quand $\eta > 0.5$. Cependant, le fait d'augmenter la vitesse de paroi conduit à une augmentation de la température et de la concentration, donc une diminution de l'intensité des transferts de chaleur et de masse.

- La force de Coriolis a un effet important sur les deux modèles de convection. L'augmentation de cette force tend à ralentir les vitesses transversale et axiale et à augmenter la température et la concentration. Donc, cette force cause la diminution des transferts de chaleur et de l'espèce.

- Pour une convection MHD thermique et massique dans un milieu poreux avec réaction chimique, l'augmentation du paramètre de perméabilité tend à augmenter la vitesse transversale, mais ceci tend à diminuer la vitesse axiale, la température et la concentration. De plus, l'augmentation du paramètre de la réaction chimique tend à réduire les vitesses transversale et axiale, mais ceci tend à augmenter la température et à diminuer la concentration.

- La comparaison de deux modèles de convection, pour deux cas de nombre de Grashof, a permis de remarquer clairement que les comportements de ces courbes sont qualitativement similaires et l'intensité de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de masse dépendent considérablement du nombre de Grashof, où les taux de transfert de chaleur et de masse sont intensifiés avec l'augmentation du nombre de Grashof thermique et massique.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de ce mémoire a ouvert une direction de recherche qui mérite à notre avis, d'être approfondie, en particulier:

- ✓ L'amélioration du modèle mathématique proposé qui décrit le comportement du gaz ionisé en utilisant d'autres géométries avec des conditions frontières plus complexes.
- ✓ La résolution du problème sous d'autres conditions se présentant dans les applications industrielles comme par exemple l'utilisation des nanofluides ou des champs magnétiques non uniformes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1]. G. K. Powell, Ph. L. Roe, T. J. Linde, T. I. Gombosi, D. L. De Zeeuwy (1999), "A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics", Journal of Computational Physics, 154(2), pp. 284-309. doi:10.1006/jcph.1999.6299

[2]. T. Hayat, R. Naz, S. Asghar (2004), "Hall effects on unsteady duct flow of a non-Newtonian fluid in a porous medium", Applied Mathematics and Computation, 157(1), pp. 103-114. doi:10.1016/j.amc.2003.08.069

[3]. J. K. Singh, P. Rohidas, N. Joshi, S. G. Begum (2017), "Influence of Hall and ion-slip currents on unsteady MHD free convective flow of a rotating fluid past an oscillating vertical plate", International Journal of Heat and Technology, 35(1), pp.37-52. doi:10.18280/ijht.350106

[4]. N. Ahmed, S. M. Das (2016), "Oscillatory MHD Mass Transfer Channel Flow in a Rotating System with Hall Current", International Journal of Heat and Technology, 34(1), pp. 115-123. doi:10.18280/ijht.340117

[5]. H. A. Attia (2008), "Effect of Hall current on transient hydromagnetic Couette-Poiseuille flow of a viscoelastic fluid with heat transfer", Applied Mathematical Modelling, 32(4), pp. 375-388. doi:10.1016/j.apm.2006.12.007

[6]. M. freeman, G. Riviére-Wekstein (1994), "M.H.D. : une technologie du future mise au placard", technologie, 52, pp. 54-64.

[7]. J. P. Freidberg, "Ideal Magnetohydrodynamics", Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Massachusetts. Plenum Press - New York and London.

[8]. E. Kersalé (2000), "Etude analytique et numérique du développement d'instabilités MHD dans des structures d'accrétion-éjection magnétisées", thèse: préparée au sein du laboratoire d'astrophysique, Observatoire de Grenoble, UJF/CNRS, BP 53, F-38 041 Grenoble cedex 9.

[9]. R. Rosch (1999), "étude de l'émission X dans les plasmas d'aluminum de type Z-pinch", thèse: direction de l'information scientifique et technique, CEA/SACLAY 91 191 GIF-SUR-YVETTE cedex France.

[10]. M. O. Goerbig, P. Lederer, C. M. Smith (2004), "Solides et liquides quantiques, dans les systèmes bidimensionnels d'électrons", Quanta et photons, pp.105-110.

[11]. M. freeman, G. Riviére-Wekstein (1994), " Les applications industrielles de la M.H.D.", technologie, 53, pp. 46-52.

[12]. S. Naceur (2007), "Contribution à la modélisation numérique d'une pompe MHD en tenant compte de la nature des matériaux des électrodes et du fluide", thèse: Département d'Electrotechnique, Université El Hadj Lakhdar, Batna, Algérie.

[13]. A.Y. Ghaly (2002), "Radiation effects on a certain MHD free-convection flow", Chaos Solitons and Fractals, 13(9), pp. 1843-1850. doi:10.1016/s0960-0779(01)00193-x

[14]. A. J. Chamkha (2004), "Unsteady MHD convective heat and mass transfer past a semi-infinite vertical permeable moving plate with heat absorption", International Journal of Engineering Science, 42(2), pp. 217-230. doi:10.1016/s0020-7225(03)00285-4

[15]. J. Z. Jordaín (2006), "Numerical study of an unsteady free convective magnetohydrodynamic flow of a dissipative fluid along a vertical plate subject to a constant heat flux", International Journal of Engineering Science, 44(18-19), pp. 1380-1393. doi:10.1016/j.ijengsci.2006.08.006

[16]. F. S. Ibrahim, A. M. Elaiw, A. A. Bakr (2008), "Effect of the chemical reaction and radiation absorption on the unsteady MHD free convection flow past a semi infinite vertical permeable moving plate with heat source and suction", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(6), pp. 1056-1066. doi:10.1016/j.cnsns.2006.09.007

[17]. R. A. Mohamed, S. M. Abo-Dahab (2009), "Influence of chemical reaction and thermal radiation on the heat and mass transfer in MHD micropolar flow over a vertical moving porous plate in a porous medium with heat generation", International Journal of Thermal Sciences, 48(9), pp. 1800-1813. doi:10.1016/j.ijthermalsci.2009.01.019

[18]. R. Sharma, R. Bhargava, P. Bhargava (2010), "A numerical solution of unsteady MHD convection heat and mass transfer past a semi-infinite vertical porous moving plate using element free Galerkin method", Computational Materials Science, 48(3), pp. 537-543. doi:10.1016/j.commatsci.2010.02.020

[19]. A.A. Bakr (2011), "Effects of chemical reaction on MHD free convection and mass transfer flow of a micropolar fluid with oscillatory plate velocity and constant heat source in a rotating frame of reference", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation , 16(2), pp. 698-710. doi:10.1016/j.cnsns.2010.04.040

[20]. K. Das (2011), "Effect of chemical reaction and thermal radiation on heat and mass transfer flow of MHD micropolar fluid in a rotating frame of reference",International Journal of Heat and Mass Transfer, 54(15-16), pp. 3505-3513. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.03.035

[21]. Md. Ziaul Haque, Md. Mahmud Alam, M. Ferdows, A. Postelnicu (2012), "Micropolar fluid behaviors on steady MHD free convection and mass transfer flow with constant heat and mass fluxes, joule heating and viscous dissipation", Journal of King Saud University University - Engineering Sciences, 24(2), pp. 71-84. doi:10.1016/j.jksues.2011.02.003

[22]. M.C. Raju, N. Ananda Reddy, S.V.K. Varma (2014), "Analytical study of MHD free convective, dissipative boundary layer flow past a porous vertical surface in the presence of thermal radiation, chemical reaction and constant suction", Ain Shams Engineering Journal, 5(4), pp. 1361-1369. doi:10.1016/j.asej.2014.07.005

[23]. M. M. Rashidi, Behnam Rostami, Navid Freidoonimehr, Saeid Abbasbandy (2014), "Free convective heat and mass transfer for MHD fluid flow over a permeable vertical stretching

sheet in the presence of the radiation and buoyancy effects", Ain Shams Engineering Journal, 5(3), pp. 901-912. doi:10.1016/j.asej.2014.02.007

[24]. S. Ahmed (2014), "Numerical analysis for magnetohydrodynamic chemically reacting and radiating fluid past a non-isothermal uniformly moving vertical surface adjacent to a porous regime", Ain Shams Engineering Journal, 5(3), pp. 923-933. doi:10.1016/j.asej.2014.02.005

[25]. S. Jena, G.C. Dash, S.R. Mishra (2016), "Chemical reaction effect on MHD viscoelastic fluid flow over a vertical stretching sheet with heat source/sink", Ain Shams Engineering Journal, doi:10.1016/j.asej.2016.06.014

[26]. S. M. Ibrahim, K. Suneetha (2016), "Heat source and chemical effects on MHD convection flow embedded in a porous medium with Soret, viscous and Joules dissipation", Ain Shams Engineering Journal, 7(2), pp. 811-818. doi:10.1016/j.asej.2015.12.008

[27]. I. Pop, T. Watanabe (1994), "Hall effects on magnetohydrodynamic free convection about a semi-infinite vertical flat plate", International Journal of Engineering Science, 32(12), pp. 1903-1911. doi:10.1016/0020-7225(94)90087-6

[28]. A. J. Chamkha (1997), "MHD-free convection from a vertical plate embedded in a thermally stratified porous medium with Hall effects", Applied Mathematical Modelling, 21(10), pp. 603-609. doi:10.1016/s0307-904x(97)00084-x

[29]. E. M. Abo-Eldahab, M. A. El Aziz (2005), "Viscous dissipation and Joule heating effects on MHD-free convection from a vertical plate with power-law variation in surface temperature in the presence of Hall and ion-slip currents", Applied Mathematical Modelling, 29(6), pp. 579-595. doi:10.1016/j.apm.2004.10.005

[30]. L. K. Saha, M. A. Hossain, R. S. R. Gorla (2007), "Effect of Hall current on the MHD laminar natural convection flow from a vertical permeable flat plate with uniform surface temperature", International Journal of Thermal Sciences, 46(8), pp. 790-801. doi:10.1016/j.ijthermalsci.2006.10.009

[31]. T. Hayat, Z. Abbas, S. Asghar (2008), "Effects of Hall current and heat transfer on rotating flow of a second grade fluid through a porous medium", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(10), pp. 2177-2192. doi:10.1016/j.cnsns.2007.03.033

[32]. N. N. Anika, Md. Mainul Hoque, Nazmul Islam (2013), "Hall Current Effects on Magnetohydrodynamics Fluid over an Infinite Rotating Vertical Porous Plate Embedded in Unsteady Laminar Flow", Annals of Pure and Applied Mathematics, 3(2), pp. 189-200.

[33]. M. Gnaneswara Reddy (2014), "Influence of thermal radiation, viscous dissipation and Hall current on MHD convection flow over a stretched vertical flat plate", Ain Shams Engineering Journal, 5(1), pp. 169-175. doi:10.1016/j.asej.2013.08.003

[34]. H. A. Attia, M. E. Sayed-Ahmed (2004), "Hall effect on unsteady MHD Couette flow and heat transfer of a Bingham fluid with suction and injection", Applied Mathematical Modelling, 28(12), pp. 1027-1045. doi:10.1016/j.apm.2004.03.008

[35]. O. A. Bég, J. Zueco, H. S. Takhar (2009), "Unsteady magnetohydrodynamic Hartmann-Couette flow and heat transfer in a Darcian channel with Hall current, ionslip, viscous and Joule heating effects: Network numerical solutions", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(4), pp.1082-1097. doi:10.1016/j.cnsns.2008.03.015

[36]. J. Zueco, P. Eguía, E. Granada, J. L. Míguez, O. A. Bég (2010), "An electrical network for the numerical solution of transient mhd couette flow of a dusty fluid: Effects of variable properties and hall current", International Communications in Heat and Mass Transfer, 37(10), pp. 1432-1439. doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.07.025

[37]. Kh. Abdul Maleque, Md. Abdus Sattar (2005), "The effects of variable properties and hall current on steady MHD laminar convective fluid flow due to a porous rotating disk", International Journal of Heat and Mass Transfer, 48(23-24), pp. 4963-4972. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.05.017

[38]. E. Osalusi, J. Side, R. Harris, B. Johnston (2007), "On the effectiveness of viscous dissipation and Joule heating on steady MHD flow and heat transfer of a Bingham fluid over a porous rotating disk in the presence of Hall and ion-slip currents International Communications in Heat and Mass Transfer, 34(9-10), pp. 1030-1040. doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.05.008

[39]. E. Osalusi, J. Side, R. Harris (2007), "The effects of Ohmic heating and viscous dissipation on unsteady MHD and slip flow over a porous rotating disk with variable properties in the presence of Hall and ion-slip currents", International Communications in Heat and Mass Transfer, 34(9-10), pp. 1017-1029. doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.05.009

[40]. E. Osalusi, J. Side, R. Harris, P. Clark (2008), "The effect of combined viscous dissipation and Joule heating on unsteady mixed convection MHD flow on a rotating cone in a rotating fluid with variable properties in the presence of Hall and ion-slip currents", International Communications in Heat and Mass Transfer, 35, pp. 413-429.

[41]. A. M. Siddiqui, M. A. Rana, N. Ahmed (2008), "Effects of hall current and heat transfer on MHD flow of a Burgers' fluid due to a pull of eccentric rotating disks", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8), pp. 1554-1570. doi:10.1016/j.cnsns.2006.10.005

[42]. M. Turkyilmazoglu (2011), "Exact solutions for the incompressible viscous magnetohydro-dynamic fluid of a rotating-disk flow with Hall current", International Journal Non-linear Mechanics, 46, pp. 1042-1048.

[43]. H. S. Takhar, A. J. Chamkha, G. Nath (2002), "MHD flow over a moving plate in a rotating fluid with magnetic field, Hall currents and free stream velocity", International Journal of Engineering Science, 40(13), pp. 1511-1527. doi:10.1016/s0020-7225(02)00016-2

[44]. M. Kinyanjui, N. Chaturvedi, S. M. Uppal (1998), "MHD stokes problem for a vertical infinite plate in a dissipative rotating fluid with hall current", Energy Conversion and Management, 39(5-6), pp. 541-548. doi:10.1016/s0196-8904(96)00107-0

[45]. T. Hayat, Z. Abbas, S. Asghar (2008), "Effects of Hall current and heat transfer on rotating flow of a second grade fluid through a porous medium", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(10), pp. 2177-2192. doi:10.1016/j.cnsns.2007.03.033

[46]. N. N. Anika, Md. Mainul Hoque, Nazmul Islam (2013), "Hall Current Effects on Magneto-hydrodynamics Fluid over an Infinite Rotating Vertical Porous Plate Embedded in Unsteady Laminar Flow", Annals of Pure and Applied Mathematics, 2, pp. 189-200.

[47]. E. M. Aboeldahab, E. M. E. Elbarbary (2001), "Hall current effect on magnetohydrodynamic free-convection flow past a semi-infinite vertical plate with mass transfer", International Journal of Engineering Science,39(14), pp. 1641-1652. doi:10.1016/s0020-7225(01)00020-9

[48]. A. A. Megahed, S. R. Komy, A. A. Afify (2003), "Similarity analysis in magnetohydro-dynamics: Hall effects on free convection flow and mass transfer past a semi-infinite vertical flat plate". International Journal of Nonlinear Mechanics, 38, pp: 513-520.

[49]. A. M. Salem, M. Abd El-Aziz (2008), "Effect of Hall currents and chemical reaction on hydro-magnetic flow of a stretching vertical surface with internal heat generation/absorption", Appl Math Model, 32, pp. 1236-1254.

[50]. N. S. Elgazery (2009), "The effects of chemical reaction, Hall and ion-slip currents on MHD flow with temperature dependent viscosity and thermal diffusivity", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(4), pp.1267-1283. doi:10.1016/j.cnsns.2007.12.009

[51]. I. A. Hassanien, H. M. El-Hawary, R. G. Abdel-Rahman, A. S. Elfeshawey (2003), "Corrigendum of “Similarity analysis in magnetohydrodynamics: Hall effects on free convection flow and mass transfer past a semi-infinite vertical flat plate” ", International Journal of Non-Linear Mechanics, 38, pp. 513-520.

[52]. M. Kinyanjui, J. K. Kwanza, S. M. Uppal (2001), "Magnetohydrodynamic free convection heat and mass transfer of a heat generating fluid past an impulsively started infinite vertical porous plate with Hall current and radiation absorption", Energy Conversion and Management, 42(8), pp. 917-931. doi:10.1016/s0196-8904(00)00115-1

[53]. J. K. Kwanza, E. M. Marigi, M. Kinyanjui (2010), "Hydromagnetic free convection currents effects on boundary layer thickness", Energy Conversion and Management, 51(6), pp. 1326-1332. doi:10.1016/j.enconman.2010.01.010

[54]. P. V. Satya Narayana, B. Venkateswarlu, S. Venkataramana (2013), "Effects of Hall current and radiation absorption on MHD micropolar fluid in a rotating system", Ain Shams Engineering Journal, 4(4), pp. 843-854. doi:10.1016/j.asej.2013.02.002

[55]. G.S. Seth, S. Sarkar, S.M. Hussain (2014), "Effects of Hall current, radiation and rotation on natural convection heat and mass transfer flow past a moving vertical plate", Ain Shams Engineering Journal, 5(2), pp. 489-503. doi:10.1016/j.asej.2013.09.014

[56]. D. Sarma, K.K. Pandit (2016), "Effects of Hall current, rotation and Soret effects on MHD free convection heat and mass transfer flow past an accelerated vertical plate through a porous medium", Ain Shams Engineering Journal, doi:10.1016/j.asej.2016.03.005

[57]. G. Sreedevi, R. Raghavendra Rao, D.R.V. Prasada Rao, A.J. Chamkha (2016), "Combined influence of radiation absorption and Hall current effects on MHD double-diffusive free convective flow past a stretching sheet", Ain Shams Engineering Journal, 7(1), pp. 383-397. doi:10.1016/j.asej.2015.11.024

[58]. J. Martinet (1990), "Thermocinétique approfondie", Technique et Documentation-Lavoisier, 1^{ére} édition, Paris Cedex 08.

[59]. D. Gilbert (2011), "Aller en ligne droite sur une planète qui tourne: la force de Coriolis", Accromooth, 6, pp. 24-29.