Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

par

SOUADKIA Youcef et SAHROUI Abdelmadjid

Thème

Graphe extrémaux de certaines bornes sur le nombre de 2-domination

Devant le jury composé de:

Mlle.	A. BENDALI BRAHAM	Maître de conférence	UYF Médéa	Présidente
Mr.	A. BOUCHOU	Maître de conférence	UYF Médéa	Promoteur
Mr.	M. ZEMIR	Maître assistant	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	N. IKHLEF ESCHOUF	Professeur	UYF Médéa	Examinateur

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n et de taille m où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble de sommets D de V est dit ensemble 2-dominant de G si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins 2 sommet de D. On désigne par $\gamma_2(G)$ le cardinal minimum d'un ensemble 2-dominant de G.

D'abord, nous donnons une caractérisation des graphes avec le nombre de 2-domination petit $\gamma_2(G) = 2$ et $\gamma_2(G) = 3$,En second, nous donnons une caractérisation des graphes avec le nombre de 2-domination grand $\gamma_2(G) = n - 1$ et $\gamma_2(G) = n - 2$, troisièmement , nous caractérisons les graphes atteignant les bornes inférieur suivantes $\gamma_2(G) \geq n - \frac{m}{2}$, $\gamma_2(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 2}$ et $\gamma_2(G) \geq \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$ quatrièmement nous caractérisons les graphes atteignant la borne supérieur suivant $\gamma_2(G) \leq \frac{2n + |L|}{3}$.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n, and of size m with vertex set V and edge set E. A subset D of V is 2-dominating set if every vertex of $V - D$ has at least 2 neighbors in D and the 2-dominating number $\gamma_2(G)$ is the minimum cardinality of a 2-dominating set of G.

First, we give a characterization of graphs with the number of 2-domination small $\gamma_2(G) = 2$ and $\gamma_2(G) = 3$, secondly, we give a characterization of graph with the number of 2-domination large $\gamma_2(G) = n - 1$ and $\gamma_2(G) = n - 2$, thirdly, we characterize the graphs reaching the lower bounds $\gamma_2(G) \geq n - \frac{m}{2}$, $\gamma_2(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 2}$ and $\gamma_2(G) \geq \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$, fourthly, we characterize the graphs reaching the upper bound $\gamma_2(G) \leq \frac{2n + |L|}{3}$.

ملخص

ليكن G=(V,E) بيانا بسيطا رتبته n وسعته m حيث V مجموعة الرؤوس وE مجموعة الأضلاع. نقول عن المجموعة الجزئي D من V أنها 2-مهيمنة في G إذا كان لكل رأس من V/D على الأقل 2 جوارا ف D . نرمز بـ $\gamma_2(G)$ للأصلي الأدنى لمجموعة 2- مهيمنة في G.

أولا نعطي وصفا للبيانات التي تمتلك قيمة هيمنة صغيرة $\gamma_2(G)=2$ و $\gamma_2(G)=3$، ثانيا نعطي وصفا للبيانات التي تمتلك قيمة هيمنة كبيرة $\gamma_2(G)=n-1$ و$\gamma_2(G)=n-2$، ثالثا نعطي وصفا للبيانات التي تساوي الحدود السفلى التالية $\gamma_2(G)\geq n-\frac{m}{2}$، $\gamma_2(G)\geq \frac{2n}{\Delta+2}$ و $\gamma_2(G)\geq \frac{2m-n(\Delta-2)}{\Delta+2}$، في الاخير قمنا بإعطاء وصف للبيانات التي تساوي الحد الأعلى التالي $\gamma_2(G)\leq \frac{2n+|L|}{3}$.

Remerciements

Louange a Allah le Seigneur des mondes.

Nous rendons Allah le tout puissant de nous avoir donne le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Nous tenons, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Ahmed BOUCHOU**, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepte de nous encadrer. Ainsi de nous avoir orientés, aidés et conseillés.

Nous remercions également Mademoiselle **Amel BENDALI BRAHEM**, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa, pour l'honneur qu'il nous fait en accepté de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur **Mohamed ZEMIR**, Maître assistant à l'université YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepté juger notre travail.

Nous remercions également Monsieur **Noureddine IKHLEF ESCHOUF**, Professeur à l'université YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepté juger notre travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa.

Enfin, il est important pour nous de remercier nos parents d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions.

Nous remercions nos frères, sans oublier nos chers amis qui étaient toujours présents.

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **ii**

Remerciements **iii**

Introduction **1**

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES **3**

1.1 Graphes 3

1.1.1 Quelques définitions 3

1.1.2 Graphes particuliers 5

2 QUELQUES RESULTATS SUR LA DOMINATION ET LA 2-DOMINATION SUR LES GRAPHES **12**

2.1 Domination 12

2.1.1 Quelques résultats sur la domination: 13

2.2 2-domination 16

2.2.1 Définitions et quelques propriétés: 16

2.2.2 Bornes sur le nombre de 2-domination 17

3 CARACTÉRISATION DE CERTAINES BORNES SUR LE NOMBRE DE 2-DOMINATION **19**

3.1 Graphes avec le nombre de 2-domination petit 19

3.2 Graphes avec le nombre de 2-domination grand 22
3.3 Caractérisation de quelques bornes inférieur 29
3.4 Caractérisation d'une borne supérieur 32

Conclusion **36**

4 Bibiographie **37**

Liste des Figures

1.1.1 G_A est sous-graphe de G et G_B est sous-graphe induit de G. 5
1.1.2 H est un graphe partiel de G. 5
1.1.3 Le graphe complet (K_4) et le graphe discret ($\overline{K_4}$). 6
1.1.4 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. 6
1.1.5 Le cycle C_8 et la chaîne P_5. 6
1.1.6 G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe. 7
1.1.7 Un exemple d'un arbre T. 7
1.1.8 Le graphe biparti complet $K_{3,4}$. 8
1.1.9 Un graphe biparti 3-semi-régulier. 8
1.1.10 L'étoile $K_{1,q}$ et L'étoile subdivisée $K^*_{1,q}$. 9
1.1.11 Double étoile $S_{r,s}$. 9
1.1.12 La couronne d'un C_6. 9
1.1.13 Le graphe joint de G_1 et G_2. 10
1.1.14 Le cycle C_5 et son complémentaire $\overline{G}$. 10
1.1.15 Le graphe $C_4 + e$. 11

2.1.1 Le graphe K_4. 13
2.1.2 L'étoile $K_{1,5}$. 14
2.1.3 Un graphe avec $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. 15
2.1.4 Le graphe P_4 et son complémentaire $\overline{P_4}$. 16
2.2.1 La 2-couronne d'un C_6. 18

3.1.1 G un graphe contient $K_{2,n-2}$ comme sous-graphe partiel. 20

3.1.2 H un graphe avec $\gamma_2(H) = 3$. 21
3.2.1 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 2$ et $|A_3| = 2$. 25
3.2.2 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 2$ et $|A_3| = 1$ 25
3.2.3 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 2$ et $|A_3| = 0$ 26
3.2.4 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 3$. 26
3.2.5 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 2$. 26
3.2.6 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 1$. 27
3.2.7 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 0$. 27
3.2.8 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 4$. 27
3.2.9 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 3$. 28
3.2.10 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 2$. 28
3.2.11 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 1$. 28
3.2.12 un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 0$. 28
3.3.1 graphe biparti 2-semi-régulier 29
3.3.2 graphe G vérifiant $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$. 30
3.3.3 graphe 4-régulier. 31
3.4.1 Le graphe G est le K_2-couronne d'un graphe J et les feuilles. 35

Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au *XVIIIe* siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg. En effet les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ. Par exemple la marche du cavalier sur l'échiquier, les problème de coloriage de la cartes géographie. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ...

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle est devenue aujourd'hui une des branche les plus florissantes de l'algèbre moderne. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représenté par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) noté par V représentant des individus, des objets, des situations, etc,... et qui sont reliés par des lignes (arêtes) noté par $G = (V, E)$ (où E représente l'ensemble des arêtes de G) symbolisant les relations existant entre eux.

Parmi les problèmes en la théorie des graphes, le probléme de 2-domination dans les graphes.

L'idée générale de la 2-domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble D de V (appelé 2-dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensembles D ait au moins deux voisins dans D.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.

1.1 Graphes

1.1.1 Quelques définitions

On étudie des graphes $G = (V, E)$, où V est un ensemble des sommets, et E est un ensemble de paires des sommets appelées arêtes. L'ordre de G est le nombre de ses sommets noté $n = |V|$. La taille de G le nombre de ses arêtes notée $m =\mid E \mid$. Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet. On note $uv \in E$ l'arête joignant les sommets u et $v \in V$. u et v sont appelés les extrémités de l'arête. On dit que deux sommets u et v sont adjacents, s'il existe une arête les reliant, c'est à dire si $uv \in E$.

Voisinage

On appelle voisinage ouvert d'un sommet u, noté $N_G(u)$ l'ensemble des sommets adjacent à u dans G. Le plus souvent, quand le contexte étant explicite, on notera simplement $N(u)$.

Le voisinage fermé d'un sommet u désigne l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. On parle aussi d'un voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, noté $N(S)$, pour désigner l'union des voisinages ouverts des sommets de S. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de S est l'union des voisinages fermés des sommets de S, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$. Le voisinage privé d'un sommet $u \in S$ par rapport à S, noté $pn_G(u, S)$ (ou $pn(u, S)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets dans $N(S)$ ayant uniquement u pour voisin dans S, i.e. $pn(u, S) = N(S) - N(S \setminus \{u\})$. Si $v \in pn(u, S)$, alors on dit que v est un voisin privé de u par rapport à S.

Degré

On appelle degré d'un sommet v dans G, noté $d_G(v)$, le nombre des arêtes de G incidents à v. Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets ($\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$). De même, le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets ($\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$).

Sommets particuliers

On appelle sommet isolé un sommet de degré 0. Un sommet de degré 1 est appelé sommet pendant (ou feuille). L'unique sommet qui est adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support.

Sous-graphe et sous-graphe induit

Le graphe H est dit sous-graphe d'un graphe G lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un sous-graphe H de G est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe de G il suffit de considérer un sous-ensemble $A = \{x_1, x_2, x_4\}$ de V, le sous-graphe sera désigné par $G[A]$. (voir Figure 1.1.1). Pour définir un sous-graphe induit de G il suffit de considérer un sous-ensemble $B = \{x_1, x_3, x_4\}$ de V. En outre, ce sous-graphe induit par B sera désigné par $G[B]$. On dira aussi que $B \subseteq V(G)$ induit le sous-graphe correspondant. (voir Figure 1.1.1). Soit v un sommet de V. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V - \{v\}]$.

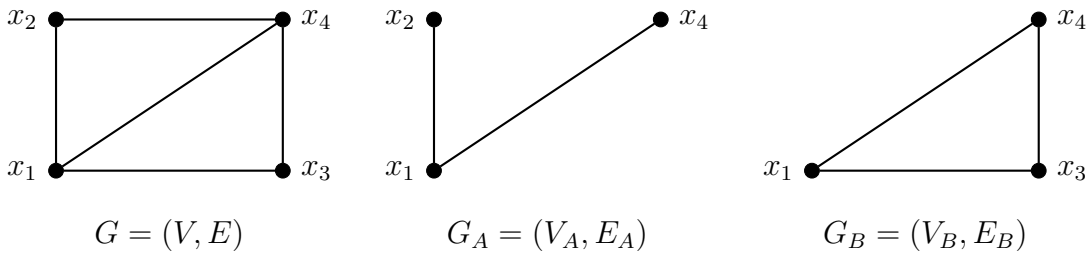


Figure 1.1.1 : G_A est sous-graphe de G et G_B est sous-graphe induit de G.

Graphe partiel

On appelle graphe partiel de $G = (V, E)$ tout graphe $H = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G (voir Figure 1.1.2).

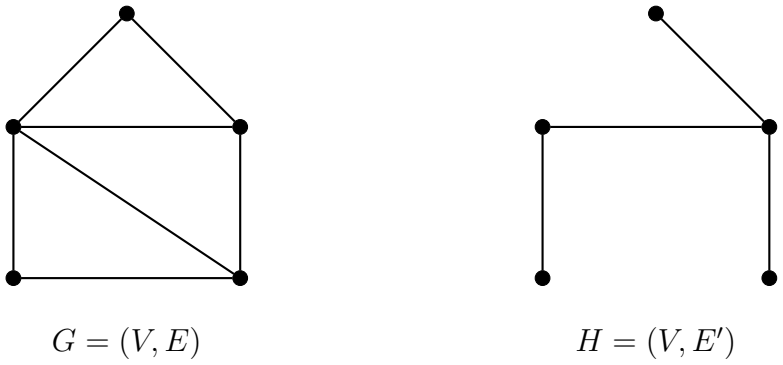


Figure 1.1.2 : H est un graphe partiel de G.

1.1.2 Graphes particuliers

Graphe complet

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n - 1$ (voir Figure 1.1.3).

Graphe discret

On dit qu'un graphe G est discret ou nul s'il ne contient aucune arête, c'est-à-dire que $E = \phi$ et noté $\overline{K_n}$ (voir Figure 1.1.3).



Figure 1.1.3 : Le graphe complet (K_4) et le graphe discret ($\overline{K_4}$).

Graphe k-régulier

Un graphe G est dit k-régulier si tous ses sommets sont de degré k, c'est-à-dire, $d_G(x) = k$ pour tout $x \in V$ (voir Figure 1.1.4).

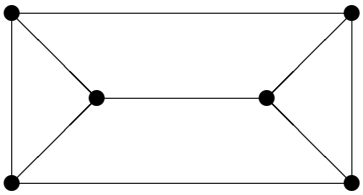


Figure 1.1.4 : Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

Chaîne

Une chaîne est une suite alternée des sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, e_1, v_2, ..., e_k, v_k)$ où k est un entier positif. L'entier $k-1$ est la longueur de la chaîne (voir Figure 1.1.5).

Cycle

Le cycle de longueur n, noté C_n, est le seul graphe 2-régulier connexe à n sommets. On peut désigner le cycle par la suite de ses sommets $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$, ses arêtes étant $v_iv_{i+1} \in E(C_n)$ pour tout $1 \leq i < n$ et l'arête $v_nv_1 \in E(C_n)$ (voir Figure 1.1.5).

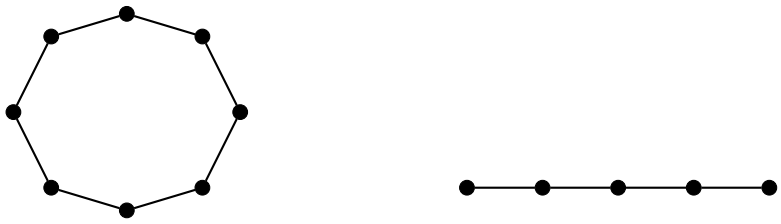


Figure 1.1.5 : Le cycle C_8 et la chaîne P_5.

Connexité

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire des sommets x, y de V, il existe une chaîne reliant x à y. Dans la Figure 1.1.6 , le graphe G est connexe puisque il contient une

seule composante connexe et le graphe H est non connexe car il contient deux composantes connexes.

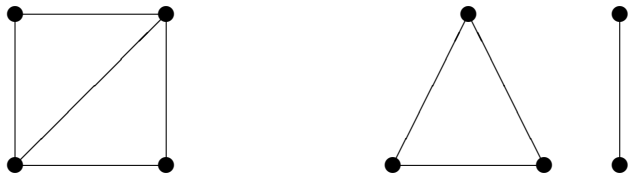


Figure 1.1.6 : G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe.

Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycle, il contient exactement $(n-1)$ arête et noté T. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé forêt. (voir Figure 1.1.7)

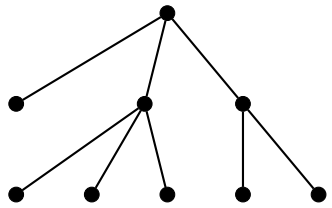


Figure 1.1.7 : Un exemple d'un arbre T.

Graphe biparti

Un graphe biparti est un graphe G d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, alors $\mid E \mid = \mid X \mid \cdot \mid Y \mid$, noté $K_{p,q}$ avec $p = \mid X \mid$ et $q = \mid Y \mid$ (voir Figure 1.1.8).

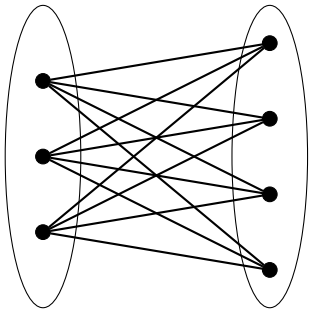


Figure 1.1.8 : Le graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Graphe biparti k-semi-régulier

Un graphe biparti k-semi-régulier est un graphe G d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y, avec chaque sommet de l' une du deux parties est de degré k voir la Figure 1.1.9 .

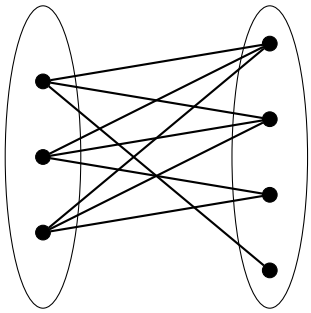


Figure 1.1.9 : Un graphe biparti 3-semi-régulier.

La subdivision

La subdivision d'un graphe consiste à ajouter des sommets sur les arêtes, c'est-à-dire à remplacer des arêtes par des chaînes. A été remplacée par un chaîne de longueur deux.

Étoile

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = q$. Elle est est notée par $K_{1,q}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile. Une étoile subdivisée est une étoile dont chaque arête est subdivisée une fois (voir Figure 1.1.10). Nous noterons $K^*_{1,q}$ l'étoile subdivisée obtenue à partir de l'étoile$K_{1,q}$.

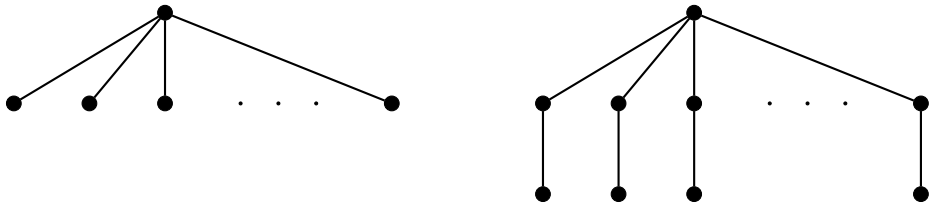


Figure 1.1.10 : L'étoile $K_{1,q}$ et L'étoile subdivisée $K^*_{1,q}$.

Double étoile

Double étoile est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres, notée $S_{r,s}$. Un exemple de ce graphe est donné dans la Figure 1.1.11 .



Figure 1.1.11 : Double étoile $S_{r,s}$.

Couronne d'un graphe

Soit G un graphe d'ordre n. La couronne de G notée par $G \circ K_1$ est obtenu à partir de G en joignant un sommet a chacun de ses sommets. Pour le cycle C_6, sa couronne est représentée par le graphe de la Figure 1.1.12 .

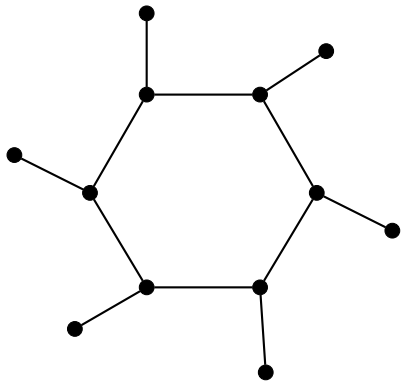


Figure 1.1.12 : La couronne d'un C_6.

Graphe joint de deux graphes

Soient G_1 et G_2 deux graphes. Le graphe $G_1 \vee G_2$ défini par l'ensemble de sommets $V(G_1) \cup V(G_2)$ et l'ensemble d'arêtes $E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$ où E' est l'ensemble de toutes

les arêtes possibles joignant les sommets de $V(G_1)$ à $V(G_2)$, est appelé le graphe joint de G_1 et G_2. Un exemple d'un graphe joint de deux graphes est illustré dans la Figure 1.1.13 .

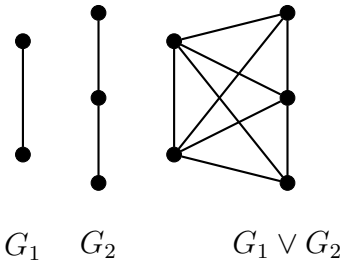


Figure 1.1.13 : Le graphe joint de G_1 et G_2.

Graphe complémentaire

Soit G un graphe quelconque. Le graphe complémentaire d'un graphe G, noté $\overline{G}$, est le graphe avec le même ensemble des sommets $V(G)$, mais les arêtes si $uv \in E(G)$ si et seulement si $uv \notin E(\overline{G})$, c'est à dire que $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$ (voir la Figure 1.1.14).

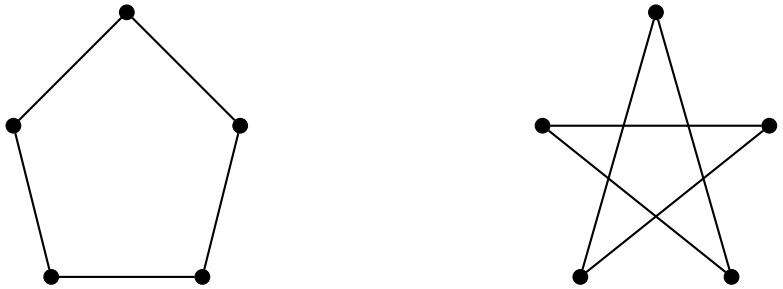


Figure 1.1.14 : Le cycle C_5 et son complémentaire $\overline{G}$.

Couplage

On appelle couplage S de G un sous-ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale et noté $\beta(G)$. L'ensemble $\{(x_1x_2), (x_3x_4)\}$ formé Un couplage maximum. Voir la figure 1.1.15 .

Stabilité

Un ensemble des sommets de G est stable (ou indépendant), si l'ensemble de ses sommets sont deux à deux non adjacents. Un stable maximum est un stable de cardinalité maximale, noté $\alpha(G)$. L'ensemble $\{x_2, x_3\}$ formé un stable maximum. Voir la figure 1.1.15 .

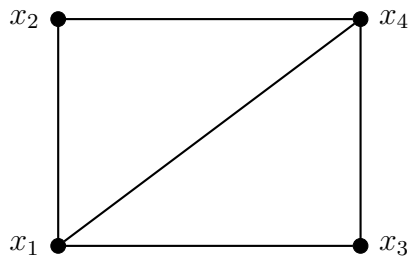


Figure 1.1.15 : Le graphe $C_4 + e$.

Chapitre 2

QUELQUES RESULTATS SUR LA DOMINATION ET LA 2-DOMINATION SUR LES GRAPHES

2.1 Domination

Dans cette partie, nous présentons les principales définitions liées à la domination. On pourra trouver des informations plus complétes dans les 2 livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [10] [12].

Définition 2.1.1 *Soit G un graphe simple et soit D un sous-ensemble de V. On dit que D est un ensemble dominant de G, si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le nombre de domination, noté par $\gamma(G)$, est le cardinal d'un ensemble dominant minimum de G.*

Exemple 2.1.1 *Le nombre de domination du graphe K_4 est $\gamma(K_4) = 1$.*

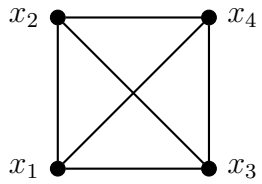


Figure 2.1.1 : Le graphe K_4.

Remarque 2.1.1 *Si D est un ensemble dominant d'un graphe simple G, alors:*

1. Un sous-ensemble de D n'est pas nécessairement un ensemble dominant de G, tandis que tout ensemble contenant D est un ensemble dominant de G.

2. D contient tous les sommets isolés de G.

3. Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

   - $\gamma(G) = 1$ si et seulement si G possède un sommet v de degré $n-1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G.
   - $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$, dans ce cas $V(G)$ est l'unique ensemble dominant de G.

2.1.1 Quelques résultats sur la domination:

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination. Walikar Acharya et Sampathkumar [11] ont présenté deux bornes inférieur pour le nombre de domination γ.

Théorème 2.1.1 (Walikar, Acharya et Sampathkumar [11]) *Pour tout graphe simple G avec n sommets et m arêtes et de degré maximum $\Delta(G)$, on a:*

$$\gamma(G) \geq n - m \qquad et \qquad \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}.$$

L'étoile $K_{1,n-1}$ est un exemple tel que les bornes du théorème précédent sont atteintes; $\gamma(K_{1,n-1}) = n - m = \frac{n}{\Delta(K_{1,n-1})+1} = 1$.
Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$.

Théorème 2.1.2 (Berge [2]) *Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

Un exemple d'un graphe G tel que la borne du théorème précédent est atteinte; $\gamma(G) = n - \Delta(G) = 1$.
Tous les étoiles $K_{1,n-1}$ vérifiant $\gamma(K_{1,n-1}) = n - \Delta(G)$.

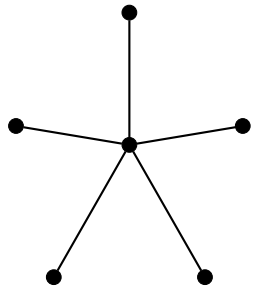


Figure 2.1.2 : L'étoile $K_{1,5}$.

Domke, Dunbar et Markus [7] ont caractérisé la classe des arbres T atteignant la borne du Théorème précédent.

Théorème 2.1.3 (Domke et al. [7]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta(T)$, alors $\gamma(T) = n - \Delta(T)$ si et seulement si T est un arbre formé d'une étoile $K_{1,n-1}$ en subdivisant une seule fois au plus $n - 2$ arêtes.*

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$. En 1962, Ore [13] a prouvé que le nombre domination d'un graphe sans sommet isolé est au plus la moitie de son ordre.

Théorème 2.1.4 (Ore [13]) *Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés, alors on a:*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Un exemple d'un graphe vérifiant l'égalité dans la borne du théorème précédent;

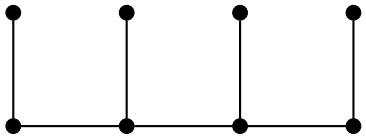


Figure 2.1.3 : Un graphe avec $\gamma(G) = \frac{n}{2}$.

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ a été donnée indépendamment par Payan et Xuang [3] et Fink, Jacobson, Kirch et Roberts [9].

Théorème 2.1.5 (Payan, Xuang [3] et Fink et al. [9]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Jaeger et Payan [6] ont établi sur $\gamma(G)$ les résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants.

Théorème 2.1.6 (Jaeger, Payan [6]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1.$$

$$2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n.$$

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$, est donnée par Cockayne, Hedetniemi [4].

Théorème 2.1.7 (Cockayne, Hedetniemi [4]) *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1,$$

si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{G} = \overline{K_n}$.
Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ est donnée par Laskar, Peters [14].

Théorème 2.1.8 (Laskar, Peters [14]) *Soit G un graphe et $\overline{G}$ son complémentaire, si G et $\overline{G}$ sont connexes, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n,$$

avec égalité si et seulement si $G = P_4$.
$\gamma(P_4) + \gamma(\overline{P_4}) = 2 + 2 = n = 4$.



Figure 2.1.4 : Le graphe P_4 et son complémentaire $\overline{P_4}$.

2.2 2-domination

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo, Fink et Jacobson ont introduit la généralisation de la domination dans les graphes. Le papier [8] paru dans l'acte de la conférence contiennent les définitions de nouveau paramètre.

2.2.1 Définitions et quelques propriétés:

Définition 2.2.1 *Soit G un graphe. Un sous ensemble D de V est un 2-dominant de G si tout sommet de $V - D$ a au moins 2 voisins dans D.*

Définition 2.2.2 *Soient G un graphe. Un 2-dominant de G est minimal si pour tout sommet x dans D, $D - x$ n'est pas un 2-dominant.*
Etant donné que l'ensemble V de sommets d'un graphe G est 2-dominant, Fink et Jacobson [8] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un 2-dominant soit minimal dans un graphe G.

Théorème 2.2.1 *.[8] Soit D un ensemble 2-dominant d'un graphe G. Alors D est minimale si et seulement si pour tout sommet $v \in D$,*

1. *v a moins 2 voisins dans D, ou*

2. *il existe un sommet $u \in N(v) \cap (V - D)$ tel que $|N(u) \cap D| = 2$.*

Le cardinal minimum d'un 2-dominant minimal d'un graphe G sont notés $\gamma_2(G)$. Le nombre de 2-dominantion est $\gamma_2(G)$. De ce qui précède, nous avons les propriétés générales suivantes.

1. *Tout sur-ensemble d'un ensemble* 2*-dominant est* 2*-dominant.*

2. *Tout ensemble* 2*-dominant contient au moins* 2 *sommets, d'où* $\gamma_2(G) \geq 2$ *pour tout graphe* G*.*

3. *Tout ensemble* 2*-dominant contient tout les sommets de degré plus petit que* 2*.*

4. *Tout ensemble* 2*-dominant est dominant.*

En 1989*, Jacobson et Peters [16] ont montré que la détermination des nombres* $\gamma_2(G)$ *pour un graphe arbitraire est NP-complet et ont donné des algorithmes linéaires dans les arbres et dans les graphes de la série-parallèle. En* 1994*, Bean, Henning et Swart [17] ont montré que le problème reste NP-complet dans les graphes bipartites et les graphes triagulés.*

2.2.2 Bornes sur le nombre de 2-domination

Dans leur papier introduisant la 2*-domination, Fink et Jacobson [8] ont donné des minorants pour* $\gamma_2(G)$*. Le résultat suivant donne des bornes inférieures pour* $\gamma_2(G)$*.*

Théorème 2.2.2 *.[8] Pour tout graphe* G *avec* n *sommets,* m *arêtes et de degré maximum* $\Delta \geq 2$*, on a:*

1. $\gamma_2(G) \geq \dfrac{2n}{\Delta + 2}$.
2. $\gamma_2(G) \geq n - \dfrac{m}{2}$.

preuve. Soit D $\gamma_2(G)$*-ensemble. Le nombre* $m(D, V - D)$ *des arêtes entre* D *et* $V - D$ *satisfait* $2|V - D| \leq m(D, V - D) \leq \Delta(G)|D|$*. On peut déduire que le nombre* m *d'arêtes de* G *satisfait* $2\ |V - D| \leq m(D, V - D) \leq m$*, donc* $\gamma_2(G) \geq n - \dfrac{m}{2}$*, et* $2|V - D| \leq \Delta(G)|D|$*. par conséquent* $\gamma_2(G) \geq \frac{2n}{\Delta(G)+2}$.

Théorème 2.2.3 *.[1] Soit* G *un graphe d'ordre* n*, de taille* m *et de degré maximum* $\Delta \geq 2$*. Alors on a :*

$$\gamma_2(G) \geq \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$$

Preuve. Soit D un $\gamma_2(G)$-ensemble de G. Alors tout sommet de $V - D$ a au moins deux voisins dans D, et donc $m(G[V - D]) \leq \frac{1}{2}(\Delta - 2)(n - \gamma_2(G))$. En outre, $m(G[D]) + m(D, V - D) \leq \Delta\gamma_2(G)$. Par conséquent,

$$m = m(G[D]) + m(D, V - D) + m(G[V - D]) \leq \frac{1}{2}(\Delta - 2)(n - \gamma_2(G)) + \Delta\gamma_2(G),$$

ce qui implique que $\gamma_2(G) \geq \dfrac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$.
Dans [5], Cockayne, Gamble et Shepherd ont donné une borne supérieure en fonction du degré minimum δ.

Théorème 2.2.4 *.[5] Si G est un graphe d'ordre n et degré minimum $\delta \geq 2$, alors*

$$\gamma_2(G) \leq \frac{2n}{3}.$$

Favaron, Hansberg et Volkmann [18]ont caractérisé les graphes extrêmaux atteignant l'égalité dans le Théorème précédent.

Théorème 2.2.5 *.[18] Soit G) un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 2$. Alors $\gamma_2(G) = \dfrac{2n}{3}$ si et seulement si G et le K_2-couronne $J \circ K_2$ d'un graphe connexe J.*

Un exemple d'un graphe qui verifiant le théorème précédent tel que $\gamma_2(G) = \dfrac{2n}{3} = 12$ et le graphe J c'est le C_6. Voir la Figure 2.2.1 .

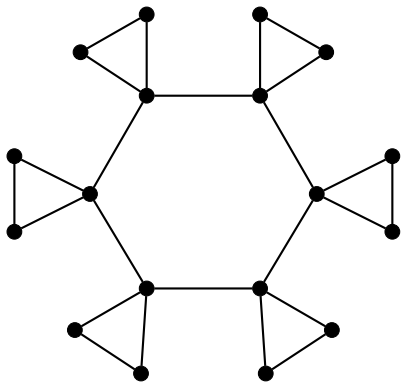


Figure 2.2.1 : La 2-couronne d'un C_6.

Chapitre 3

CARACTÉRISATION DE CERTAINES BORNES SUR LE NOMBRE DE 2-DOMINATION

Ce chapitre est composé de quatre sections, dans la première section, nous donnons une caractérisation des graphes avec le nombre de 2-domination petit, dans la deuxième section, nous donnons une caractérisation des graphes avec le nombre de 2-domination grand, dans la troisième section, nous caractérisons certaines bornes inférieures sur $\gamma_2(G)$ et dans la section quatre, nous caractérisons une borne supérieur pour $\gamma_2(G)$.

3.1 Graphes avec le nombre de 2-domination petit

Dans cette section on donne des caractérisation des graphes tels que $\gamma_2(G) = 2$ et $\gamma_2(G) = 3$.

Théorème 3.1.1 *Soit G un graphe avec $\Delta \geq 2$. Alors $\gamma_2(G) = 2$ si et seulement si G contient comme sous-graphe partiel $K_{2,n-2}$.*

Preuve. Si $\gamma_2(G) = 2$, alors il existe un ensemble D 2-dominant de G de cardinalité 2. Donc chaque sommet de $V - D$ est adjacent à tous les sommets de D. Soit E' l'ensemble des arêtes entre D et $V - D$, il est clair que le sous-graphe partiel défini par E' est un graphe biparti complet $(D, V - D, E')$ avec $|D| = 2$ et $|V - D| = n - 2$.

Inversement, si G contient $K_{2,n-2}$ comme un sous-graphe partiel, alors $K_{2,n-2}$ est bipartitionné en deux parties X et Y telles que $|X| = 2$, $|Y| = n - 2$ et $d_{K_{2,n-2}}(y) = 2$ pour tout $y \in Y$. Donc X est un ensemble 2-dominant de $K_{2,n-2}$ ainsi X est un ensemble 2-dominant de G. En outre, $\gamma_2(G) \leq |X| = 2$, et puisque $\gamma_2(G) \geq 2$, on obtient l'égalité.

Corollaire 1 . *Soit G un graphe sans triangle (c. à. d sans C_3) et $\Delta \geq 2$. Alors, $\gamma_2(G) = 2$ si et seulement si G est isomorphe à $K_{2,n-2}$.*

Dans le cas des arbres, on a le résultat suivant.

Corollaire 2. *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_2(T) = 2$ si et seulement si $T = P_3$.*

Exemple 3.1.1 *La Figure 3.1.1 représente un graphe G, qui vérifie les conditions du théorème précédent, et $\gamma_2(G) = 2$.*

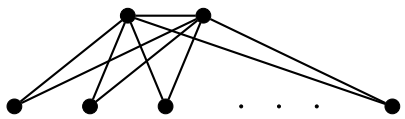


Figure 3.1.1 : G un graphe contient $K_{2,n-2}$ comme sous-graphe partiel.

Théorème 3.1.2 *Soit G un graphe d'ordre n et $\Delta \geq 2$. Alors $\gamma_2(G) = 3$ si et seulement si G ne contient pas $K_{2,n-2}$ comme sous-graphe partiel de G, et G contient un sous-graphe partiel biparti (X, Y, E') tel que $|X| = 2$ et chaque sommet de Y a exactement 2 voisins dans X, sauf un sommet avec moins de 2 voisins, ou $|X| = 3$ et chaque sommet de Y a au moins 2 voisains dans X.*

Preuve. Supposons que $\gamma_2(G) = 3$, et soit D un $\gamma_2(G)$-ensemble. Pour qu'un tel ensemble D soit un $\gamma_2(G)$-ensemble, il ne peut y avoir d'autre ensemble 2-dominant de cardinalité 2, ce qui implique que G ne contient pas $K_{2,n-2}$ comme sous-graphe partiel (voir le Théorème précédent). Supposons que D a un sommet u sans voisins dans $V - D$. Puisque D est un 2-dominant minimal, alors $|N(u) \cap D| < 2$. Puisque chaque sommet v dans $V - D$ a au moins 2 voisins dans D, $N(v) = D - \{u\}$. Soit E' l'ensemble des arêtes entre $X = D - \{u\}$

et $Y = (V - D) \cup \{u\}$, il est clair que le sous-graphe partiel défini par E' est un graphe biparti (X, Y, E') avec $|X| = 2$ et chaque sommet dans Y a exactement 2 voisins dans X sauf le sommet u avec au plus un voisin dans X. Maitenant supposons que chaque sommet dans $V - D$ a au moins 2 voisins dans D. Soit E' l'ensemble des arêtes entre $X = D$ et $Y = V - D$, il est claire que le sous-graphe partiel défini par E' est un graphe biparti (X, Y, E') avec $|X| = 3$ et chaque sommet dans Y a au moins 2 voisins dans X.
Inversement, supposons que G satisfait les conditions de Théorème 3.1.2. Puisque G ne contient pas $K_{2,n-2}$ comme sous-graphe partiel, $\gamma_2(G) \geq 3$ (voir Théorème précédent).
Si G contient un sous-graphe partiel biparti $H = (X, Y, E')$ avec $|X| = 2$ et chaque sommet dans Y a exactement deux voisins dans X, souf un sommet u avec moins de deux voisins dans X, alors $X \cup \{u\}$ est un ensemble 2-dominant de H ainsi de G. En outre, $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(H) \leq |X \cup \{u\}| = 3$. Si G contient un sous-graphe partiel biparti $H = (X, Y, E')$ avec $|X| = 3$, tel que chaque sommet de Y a au moins deux voisins dans X, alors X est un ensemble 2-dominant de H ainsi que de G.
En outre, $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(H) \leq |X| = 3$, et puisque $\gamma_2(G) \geq 3$, on obtient l'égalité dans les deux cas.

Dans le cas des arbres, on a le résultat suivant.

Corollaire . *Soit T un arbre. Alors $\gamma_2(T) = 3$ si et seulement si $T = P_4$, P_5 ou $K_{1,3}$.*

Exemple 3.1.2 *La Figure 3.1.2 représente un graphe H vérifiant les conditions du théorème précédent, et $\gamma_2(H) = 3$.*

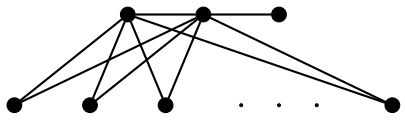


Figure 3.1.2 : H un graphe avec $\gamma_2(H) = 3$.

3.2 Graphes avec le nombre de 2-domination grand

Nous rappelons que si $\Delta \geq 2$, alors $\gamma_2(G) \leq n-1$. Le graphe G avec $\gamma_2(G) = n-1$ a une structure spéciale, qui sera montré dans le théorème suivant :
on définit les ensembles $A_i = \{v \in V : d(v) = i\}$ et $X_i = \{v \in V : d(v) \geq i\}$.

Théorème 3.2.1 *. Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum $\Delta \geq 2$. Alors, $\gamma_2(G) = n-1$ si et seulement si X_2 est une clique non vide et $|X_3| \leq 1$.*

Preuve. Supposon que $\gamma_2(G) = n-1$. Il est claire que $X_2 \neq \varnothing$, puisque $\Delta \geq 2$.
Si $|X_2| = 1$ il est clair que X_2 est une clique et $X_3 = \varnothing$. Supposons que $|X_2| \geq 2$ et supposons au contraire que X_2 n'est pas une clique, donc X_2 a deux sommets x et y avec $xy \notin E$. Alors $V - \{x, y\}$ est un ensemble 2-dominant, contraduction avec $\gamma_2(G) = n-1$. Maintenant supposons que $|X_3| \geq 2$. Alors X_3 a deux sommets x et y avec $d(x) \geq 3$ et $d(y) \geq 3$. Donc $V - \{x, y\}$ est un ensemble 2-dominant, contraduction.
Inversement, il est clair que $\gamma_2(G) \neq n$, puisque $X_2 \neq \varnothing$. Soit D un $\gamma_2(G)$-ensemble de G, et supposons au contraire que $\gamma_2(G) \leq n-2$. Alors il existe deux sommets x et y dans $V - D$ tel que $|N(x) \cap D| \geq 2$ et $|N(y) \cap D| \geq 2$. donc $x, y \in X_2$ et $xy \in E$, puisque X_2 est une clique, et donc $d(x) \geq 3$ et $d(y) \geq 3$, ce qui contradit le fait que $|X_3| \leq 1$.

Remarque 3.2.1 *La clique du théorème précédent est de cardinalité inférieur ou égal à 3. En plus :*
Cas *1 . Si $|X_2| = 1$, alors $G = \alpha P_1 \cup \beta P_2 \cup K_{1,p}$ avec $p \geq 2$ et $\alpha + 2\beta + 3 = n$.*
Cas *2 . Si $|X_2| = 2$, alors $G = \alpha P_1 \cup \beta P_2 \cup H$ tel que H est le graphe obtenu par l'étoile $K_{1,p}$: $p \geq 2$ on subdivisant une arête une seulle fois avec $\alpha + 2\beta + p + 2 = n$.*
Cas *3 . Si $|X_2| = 3$, alors $G = \alpha P_1 \cup \beta P_2 \cup K_{1,p} + e$ tel que : $p \geq 2$ avec $\alpha + 2\beta + p + 1 = n$.*

Théorème 3.2.2 *. Soit G un graphe d'ordre n. Alors $\gamma_2(G) = n-2$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. *$|X_2| \geq 2$,*
2. *$G[X_2]$ n'est pas complet ou $|X_3| \geq 2$,*

3. *$G[X_2]$ ne contient pas de $\overline{K_3}$,*

4. *chaque sommet de A_2 est adjacent à au moins $|X_3| - 1$ sommets de X_3,*

5. *$|X_4| \leq 2$, et en plus l'une des conditions suivante est vérifiée :*

   (a) *Si $|X_4| = 2$, alors $G[A_3]$ est un graphe complet et chaque sommet dans X_4 est adjacent à touts les sommets de A_3.*

   (b) *Si $|X_4| = 1$, alors $G[A_3]$ est un graphe complet et le sommet unique de X_4 est adjacent à au moins $|A_3| - 1$ sommets en A_3.*

   (c) *Si $|X_4| = 0$, alors $G[A_3]$ est un graphe complet ou est un graphe complet moins un couplage parfait ou le joint d'un graphe complet et un graphe complet moins un couplage parfait.*

preuve. Supposons que $\gamma_2(G) = n - 2$, et soit D un $\gamma_2(G)$-ensemble. Alors $V - D$ a exactement deux sommets, disant x et y avec $|N(x) \cap D| \geq 2$ et $|N(y) \cap D| \geq 2$, et donc $|X_2| \geq 2$. Puisque $\gamma_2(G) \neq n - 1$, X_2 n'est pas clique ou $|X_3| \geq 2$ (voir Théorème précédent). Maintemant supposons le contaire $G[X_2]$ a trois sommets x,y,z tels que $G[x, y, z] = \overline{K_3}$. Alors $V - \{x, y, z\}$ forme un 2-dominant de G de cardinal $n - 3$, une contradiction. Supposons qu'il existe un sommet $x \in A_2$ et deux sommets $y, z \in X_3$ avec $xy, xz \notin E$. Alors, clairement $V - \{x, y, z\}$ est un ensemble 2-dominant de G de cardinal $n - 3$, une contradiction. Supposons le contaire que X_4 a au moins trois sommets x, y et z. Donc $V - \{x, y, z\}$ est un ensemble 2-dominant de G, une contradiction. On considére trois cas selon le cardinal de l'ensemble X_4.

***Cas** 1. $|X_4| = 2$. Soit $X_4 = \{a, b\}$ et supposons A_3 n'est pas une clique. Alors A_3 posséde deux sommets x,y tels que $xy \notin E$, et donc $V - \{x, y, a\}$ est un ensemble 2-dominant de G, une contradiction. Supposons maintenant qu'il y a un sommet $x \in A_3$ tel que $xa \notin E$. Alors $V - \{x, a, b\}$ est un ensemble 2-dominant de G, encore une contradiction.*

***Cas** 2. $|X_4| = 1$. Nous avons défini $X_4 = a$. Supposon que A_3 a deux sommets x,y tels que $xy \notin E$. Alors $V - \{x, y, a\}$ est un ensemble 2-dominant de G une contradiction avec $\gamma_2(G) = n - 2$. Supposons maintenant qu' il y a deux sommets x,$y \in A_3$ tels que ax, $ay \notin E$. Alors $V - \{x, y, a\}$ est un ensemble 2-dominant de G contradiction.*

Cas 3. *$X_4 = 0$. Il est facile de voir que chaque sommets v de A_3 satisfies $|N(v) \cap A_3| \geq |A_3| - 2$, sinon on obtient un ensemble 2-dominant de G avec cardinalité $n-3$. Soit $A_3 = B_1 \cup B_2$ où B_i est l'ensemble $\{v \in A_3 : |N(v) \cap A_3| = |A_3| - i\}$, pour $i = 1, 2$. Si $B_2 = \varnothing$, alors A_3 est une clique. Si $B_1 = \varnothing$, alors A_3 est un graphe complet moins un couplage parfait. Finalement, supposons que $B_1 \neq \varnothing$ et $B_2 \neq \varnothing$. Donc $G[A_3]$ est un graphe ayant au moins un sommet adjacent à chaque sommet de A_3 et au moins deux sommets non adjacents, donc $G[A_3]$ est le graphe joint d'un graphe complet (induit par l'ensemble B_1) et le graphe complet moins un couplage parfait (induit par l'ensemble B_2). Inversement, puisque $|X_2| \geq 2$, et X_2 n'est pas une clique ou $|X_3| \geq 2$, on a $\gamma_2(G) \leq n-2$ (voir le théorème précédent). Il reste à montrer que $\gamma_2(G) \geq n-2$. Supposons le contraire que $\gamma_2(G) \leq n-3$. Alors il y a trois sommets a, b, c dans X_2 qui 2-dominé par l'ensemble $V - \{a, b, c\}$. À partir de la condition 5, on a $|X_4| \leq 2$. et donc a, b, c ne sont pas tous dans X_4. Nous considérons quatre cas par relatife à $G[\{a, b, c\}]$.*

Cas 1. *$G[a, b, c] = \overline{K_3}$. Alors une contraduction avec $G[X_2]$ ne contient pas $\overline{K_3}$ (Condition 3).*

Cas 2. *$G[\{a, b, c\}] = K_3$. Alors $a, b, c \in X_4$, contradiction.*

Cas 3. *$G[\{a, b, c\}] = P_3$. Alors on peut supposer, sans perte de généralité, que $ab, ac \in E$ est $bc \notin E$. ll est clair que $|X_4| \geq 1$ puisque $a \in X_4$ et $b, c \notin A_2$. Si $b, c \in A_3$, alors on obtient une contradiction avec $G[A_3]$ est un graphe complet (voir Condition 5 a et b). Maintenant si $b \in A_3$ et $c \in X_4$, alors on obtient une contradiction avec le fait que chaque sommet de X_4 est adjacent à touts les sommets de A_3 (Condition 5 a).*

Cas 4. *$G[\{a, b, c\}] = K_2 \cup K_1$. Alors on peut supposer, que $ab \in E$. Il est clair que $a, b \notin A_2$. Nous devons examiner cinq possibilités :*

1. *Si $c \in A_2$, alors une contradiction avec Condition 4.*
2. *Si $a, b, c \in A_3$, alors une contradiction avec Condition 5, c'est-à-dire que $G[A_3]$ est un graphe complet (dans le cas $|X_4| \geq 1$) ou $G[A_3]$ est un graphe complet ou est graphe complet moins un couplage parfait ou le graphe joint d'un graphe complet et le graphe complet moins un couplage parfait. (dans le cas $|X_4| = 0$).*
3. *Si $a, b \in A_3$ et $c \in X_4$, alors une contradiction avec le Condition 5 (a) (dans le cas $|X_4| = 2$) ou Condition 5 (b) (dans le cas $|X_4| = 1$).*

4. *Si* $a, c \in A_3$ *et* $b \in X_4$*, ou* $b, c \in A_3$ *et* $a \in X_4$*, alors une contradiction* $G[A_3]$ *est un graphe complet (voir Condition* 5*).*
5. *Si* $c \in A_3$ *et* $a, b \in X_4$*, ou* $a \in A_3$ *et* $b, c \in X_4$*, ou* $b \in A_3$ *et* $a, c \in X_4$*, alors une contradiction avec le fait que chaque sommet de* X_4 *est adjacent à touts sommets de* A_3 *(voir Condition* 5 *a). donc dans tout les cas on obtient* $\gamma_2(G) \geq n - 2$*.*

Exemple 3.2.1 *Tous les graphes qui vérifient les conditions du théorème précédent dans les figures suivants:*

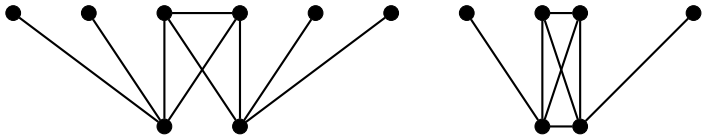


Figure 3.2.1 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 2$ et $|A_3| = 2$.

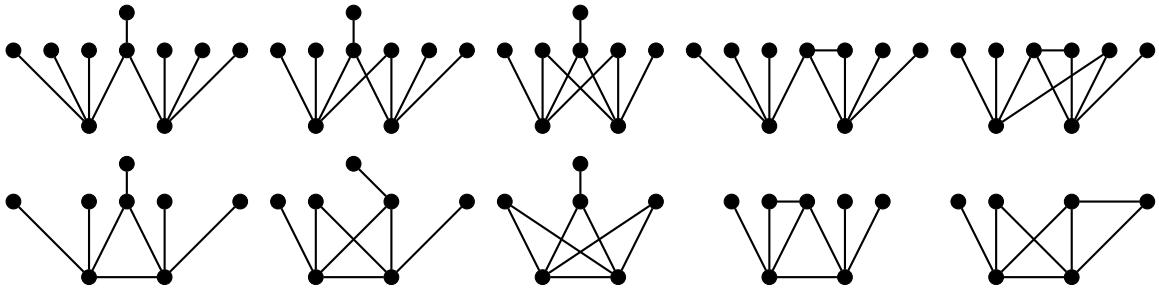


Figure 3.2.2 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 2$ et $|A_3| = 1$

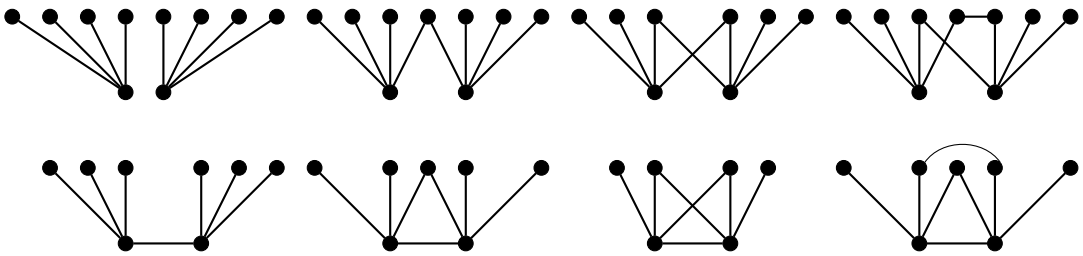


Figure 3.2.3 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 2$ et $|A_3| = 0$

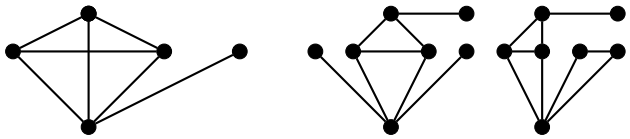


Figure 3.2.4 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 3$.

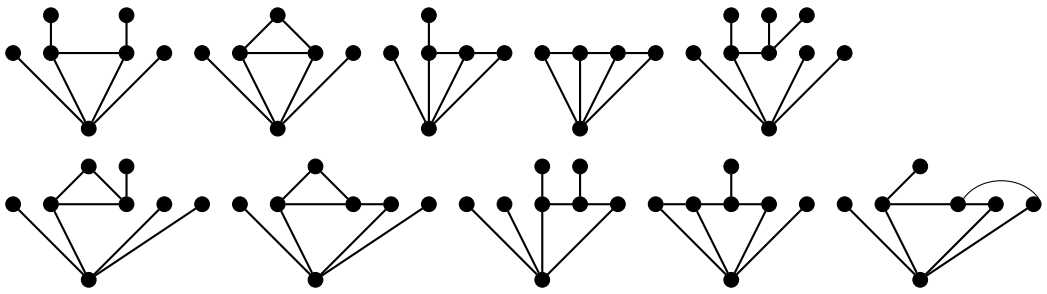


Figure 3.2.5 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 2$.

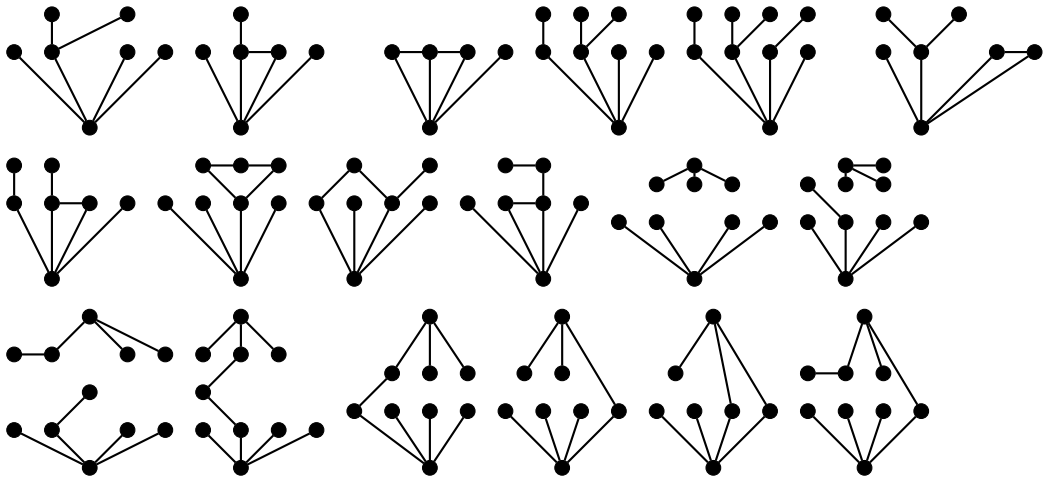


Figure 3.2.6 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 1$.

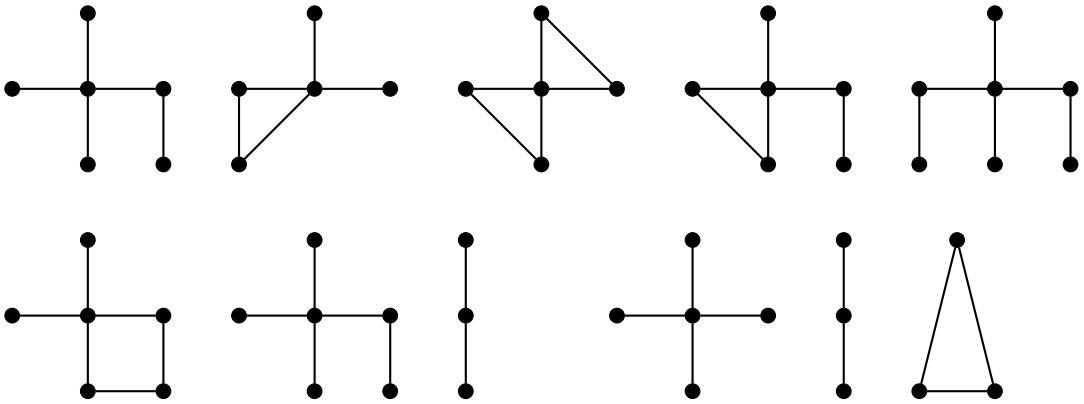


Figure 3.2.7 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 1$ et $|A_3| = 0$.

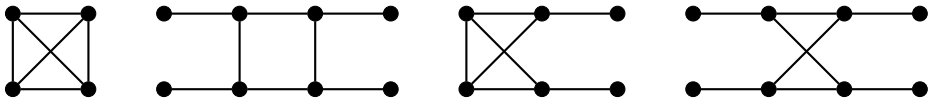


Figure 3.2.8 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 4$.

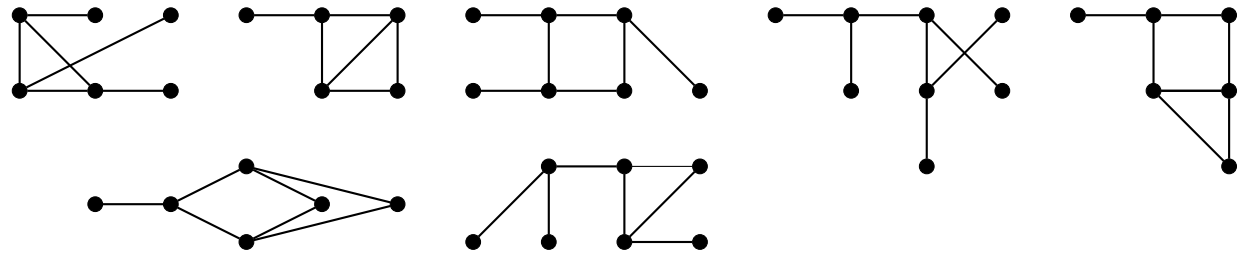


Figure 3.2.9 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 3$.

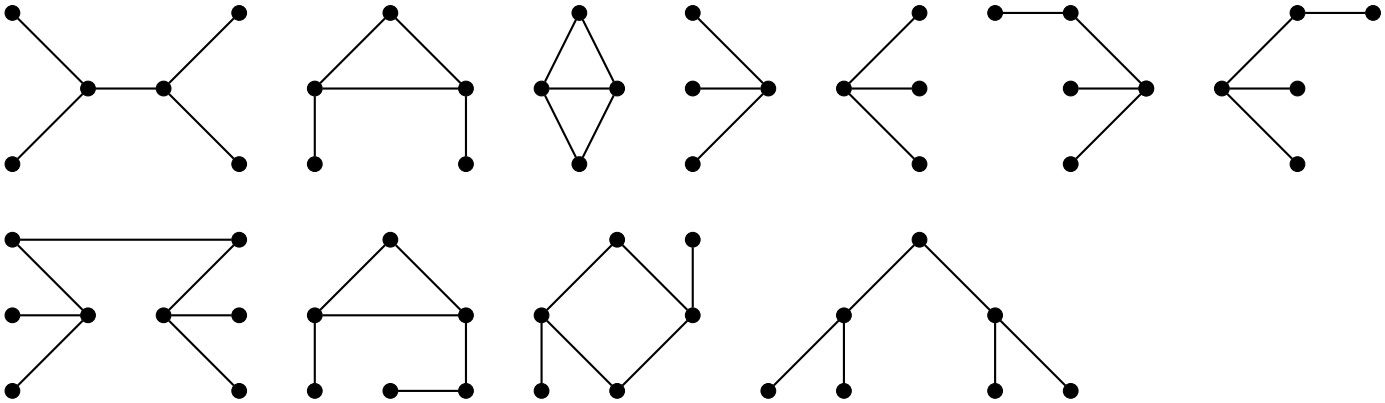


Figure 3.2.10 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 2$.

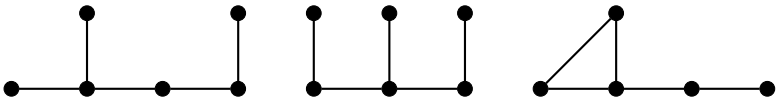


Figure 3.2.11 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 1$.

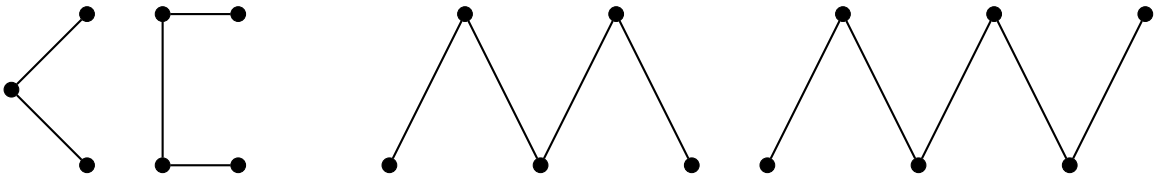


Figure 3.2.12 : un graphe vérifiant les conditions du théorème précédent avac $|x_4| = 0$ et $|A_3| = 0$.

3.3 Caractérisation de quelques bornes inférieur

Dans cette section on donne des caracérisations des graphes vérifiant les égalités dans les théorèmes 2.2.2 *et* 2.2.3.

Théorème 3.3.1 *. Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et de taille m, alors $\gamma_2(G) = n - \frac{m}{2}$ si et seulment si G est biparti 2-semi-régulier.*

Preuve. Suposon que $\gamma_2(G) = n - \frac{m}{2}$. Soit D $\gamma_2(G)$-ensemble de G. Alors, par la preuve du Théorème 2.2.2, *$2|V - D| = m(D, V - D) = m$, toutes les arêtes de G sont entre D et $V - D$ et chaque sommet de $V - D$ a deux voisins dans D. Donc D et $V - D$ sont stables. Par conséquent G est biparti 2-semi-régulier.*
Inversement, il est facile de voir que si G est biparti 2-semi-régulier, alors chaque sommet de Y a deux voisins dans X, et donc X est un 2-dominant de G et $2 \times |Y| = 2|V - X| = m(X, Y) = m$, d'où $\gamma_2(G) \leq |X| = n - \frac{m}{2}$, et l'égalité découle du fait que $\gamma_2(G) \geq n - \frac{m}{2}$.

Exemple 3.3.1 *G un graphe qui vérifie les conditions du théorème précédent, tel que $\gamma_2(G) = n - \frac{m}{2} = 5 - \frac{6}{2} = 2$.*

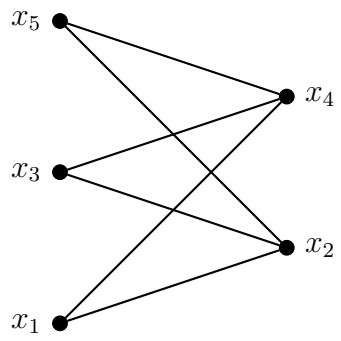


Figure 3.3.1 : graphe biparti 2-semi-régulier

Dans le théorème suivant on donne la caractéresation des graphes G tels que $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$.

Théorème 3.3.2 *. Soit G un graphe connexe d'ordre n, de degré maximum Δ. Alors $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$ si et seulement si $V = X \cup Y$, X est stable, chaque sommet de X est de degré Δ et chaque sommet de Y a exactement deux voisins dans X.*

Preuve. Supposons que $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$. Soit D un $\gamma_2(G)$-ensemble de G. Alors, par la preuve du théorème 2.2.2, on trouve $2|V - D| = m(D, V - D) = \Delta(G)|D|$.
Il est clair que chaque sommet de D a Δ voisins dans $V - D$ et donc l'ensemble D est un stable et chaque sommet de $V - D$ a exactement deux voisins dans D.
Inversement, il est facile de voir que si G est l'un des graphe décrits dans la théorème précédent, alors chaque sommets de Y a exactement deux voisins dans X, et donc X est un 2-dominant de G et $2|V - X| = |Y| = m(X, Y) = \Delta(G)|X|$.
D'où $\gamma_2(G) \leq |X| = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$, et l'égalité découle du fait que $\gamma_2(G) \geq \frac{2n}{\Delta(G)+2}$.

Exemple 3.3.2 *G un graphe qui vérifie les conditions du théorème précédent, tel que $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2} = \frac{2\times 10}{3+2} = 4$, l'ensemble $\{x_3, x_2, x_9, x_8\}$ est un $\gamma_2(G)$-ensemble.*

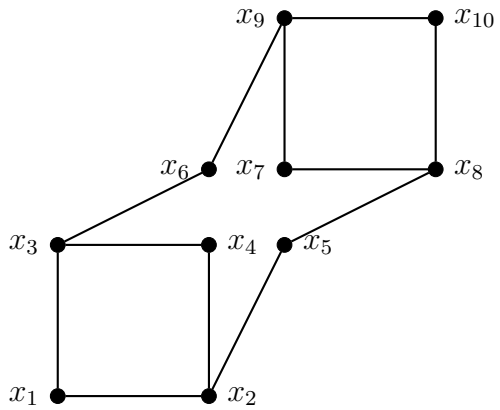


Figure 3.3.2 : graphe G vérifiant $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$.

Dans le théorème suivant on donne la caractéresation des graphes G tels que $\gamma_2(G) = \dfrac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$.

Théorème 3.3.3 *. Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum $\Delta \geq 2$. Alors $\gamma_2(G) = \dfrac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$ si et seulement si $V = X \cup Y$, chaque sommet de X a Δ voisins dans Y, et tout sommet de Y a exactement deux voisins dans X et G est régulier.*

preuve. Soit D un $\gamma_2(G)$-ensemble de G. par la preuve du théoréme 2.2.3. Si $\gamma_2(G) = \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$, alors $m(G[V - D]) = \frac{1}{2}(\Delta - 2)(n - \gamma_2(G))$ et $m(G[D]) + m(D, V - D) = \Delta\gamma_2(G)$, et donc $G[V - D]$ est $(\Delta - 2)$-régulier, chaque sommet de $V - D$ a exactement deux voisins dans D, D est indépendant et tout sommet de D a Δ voisins dans $V - D$. Donc G est régulier.

Inversement, il facile de voir que si G est l'un des graphe décrits dans la théorème précédent, alors $|N(y) \cap X| = 2$ pour tout $y \in Y$, et donc X est un 2-dominant de G et $m(G[Y]) = \frac{1}{2}(\Delta - 2)|Y|$, $m(G[X]) = 0$ et $m(X, Y) = \Delta|X|$, et donc $m(G) = m(G[X]) + m(X, Y) = \frac{1}{2}(\Delta - 2)|V - X| + \Delta|X|$. D'où $\gamma_2(G) \leq |X| = \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$, et l'égalité découle du fait que $\gamma_2(G) \geq \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$.

Exemple 3.3.3 *G un graphe qui vérifie les conditions du théorème précédent, tel que $\gamma_2(G) = \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2} = \frac{2 \times 18 - 9(4 - 2)}{4 + 2} = 3$, l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ est un $\gamma_2(G)$-ensemble.*

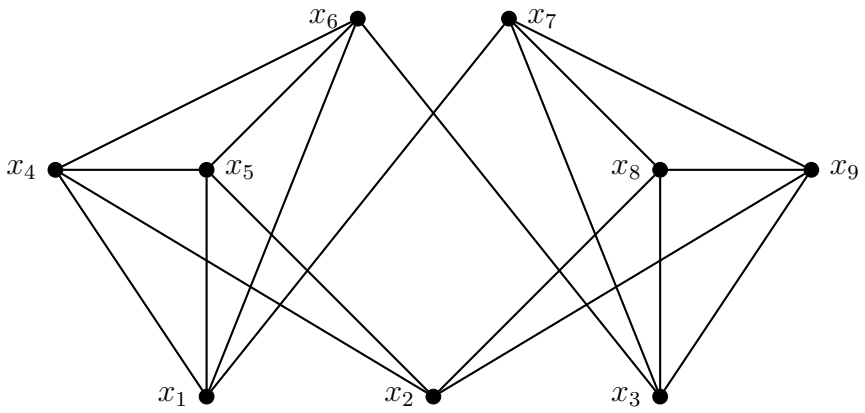


Figure 3.3.3 : graphe 4-régulier.

3.4 Caractérisation d'une borne supérieur

Dans cette section on donne une borne superieur pour $\gamma_2(G)$ généralisant la borne donnée dans le théorème 2.2.4. *Aussi on donne une caractérisation des graphe atteignant cette borne.*
on commence par ce résultat dû à ***Caro [20] et Wei[19]***

Théorème 3.4.1 *[20], [19] Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors,*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1},$$

avec égalité si et seulement si toute composont connexe de G est un graphe complet.

Théorème 3.4.2 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré $\Delta \geq 2$. Alors,*

$$\gamma_2(G) \leq \frac{2n + |L|}{3},$$

où $|L|$ est le nombre de sommets de degré inférieur strictement à 2.

Preuve. Soit L l'ensemble des sommets de G de degré inférieur à 2. *Puisque $\Delta \geq 2$, $V - L \neq \varnothing$. Soit H le sous-graphe partiel de G tel que $d_H(x) \geq 2$ pour tout sommet $x \in V - L$ et minimal pour cette propriété. par la minimalité de H, l'ensemble A des sommets de H de degré supérieur strictement à* 2 *est indépendent ou vide. Soit I un ensemble indépendent maximal de $H[V - L]$ contenant A et soit $U = V - (L \cup I)$. Puisque chaque sommet de U est de degré* 2 *dans H, et a au moins un voisin dans I,*

$$\Delta(H[U]) \leq 1. \tag{3.4.1}$$

De plus l'ensemble $U \cup L$ est un 2*-dominant dans H et donc*

$$\gamma_2(H) \leq |U \cup L|. \tag{3.4.2}$$

Par le théorème 3.4.1 *et la relation* (3.4.1) *le nombre d'indépendance de $H[U]$ satisfait*

$$\alpha(H[U]) \geq \frac{|U|}{1 + \Delta(H[U])} \geq \frac{|U|}{2}. \tag{3.4.3}$$

Soit W un ensemble indépendant maximum de $H[U]$. Chaque sommet de W a au moins 2 voisins dans $V - W$. Donc, $V - W$ est un ensemble 2-dominant de H et

$$\gamma_2(H) \leq |V - W|. \tag{3.4.4}$$

Donc, par (3.4.4), (3.4.3) *et* (3.4.2),

$$\gamma_2(H) \leq n - \alpha(H[U]) \leq n - \frac{|U|}{2} = n - \frac{|U \cup L| - |L|}{2} \leq n - \frac{\gamma_2(H) - |L|}{2}.$$

Par conséquent $\gamma_2(H) \leq \dfrac{2n + |L|}{3}$. Puisque $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(G - e)$ pour tout arête e de G. $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(H)$, donc $\gamma_2(G) \leq \dfrac{2n + |L|}{3}$.

$\gamma_2(G) = \dfrac{2n + |L|}{3}$.
Dans le théorème suivant on donne la caractéresation des graphes G tels que $\gamma_2(G) = \dfrac{2n + |L|}{3}$.

Théorème 3.4.3 *. Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 2$, et L est un ensemble des sommets pendant de G. Alors $\gamma_2(G) = \dfrac{2n + |L|}{3}$ si et seulement si $G[V - L]$ et le K_2-couronne $J \circ K_2$ d'un graphe connexe J.*

Preuve. Si $G[V - L]$ est la couronne $J \circ K_2$, alors les sommets de $D = (V - L) - V(J)$ forment un ensemble 2-dominant de $G[V - L]$, et donc $D \cup L$ est aussi un ensemble 2-dominant de G, chaque ensemble 2-dominant doit avoir au moins 2 sommets dans chaque clique K_3 (formé par 2 sommets de K_2 et un sommet de J) et l'ensemble L, et donc $\gamma_2(G) \geq \dfrac{2(n - |L|)}{3} + |L| = \dfrac{2n + |L|}{3}$. Par concéquent, $\gamma_2(G) = \dfrac{2n + |L|}{3}$.

Inversement, supposons que $\gamma_2(G) = \dfrac{2n + |L|}{3}$. Alors d'après le théorème précédent, à partir (3.4.1) *et* (3.4.3), *on obtient, $\Delta(H[U]) = 1$ et $\alpha(H[U]) = \dfrac{|U|}{1 + \Delta(H[U])} = \dfrac{|U|}{2}$, qui implique, que $H[U]$ consiste en p cliques disjointes $C_1, C_2, ..., C_p$, chacune isomorphe à K_2. Alors $|U| = 2p$ et W contient exactement un sommet de chaque clique C_i, qui implique $|W| = |U - W| = p$ et $|V - W| = n - p$. Puisque on a l'égalité dans* (3.4.2) *et* (3.4.4), *$U \cup L$ et $V - W$ doit être des $\gamma_2(G)$-ensembles, et donc $2p + |L| = n - p$. Il s'ensuit que $p = \dfrac{n - |L|}{3}$ et que $|I| = |V - (L \cup U)| = p = |W|$. Puisque touts les sommets de I*

sont de degré superieur ou égale à 2 *dans* H, *on obtient* $2p \leq m_H(I,U) = m_H(U,I) = 2p$, *ce qui signifie que tout sommet de* I *est de degré exactement* 2 *dans* $H[V-L]$, *et donc le sous-graphe* $H[V-L]$ *est* 2*-régulier. Maintenant on va montrer que* $\alpha(H[V-L]) = ((n-|L|)/3)$. *On sait que* $\alpha(H[V-L]) \geq \dfrac{n-|L|}{3}$ *(Voir Théorème de* 3.4.1*). Soit* D *un stable maximum de* $H[V-L]$. *Alors* $V-D$ *est un ensemble* 2*-dominant de* G, *et donc*

$$\begin{aligned}\gamma_2(G) &\leq |V-D| = n - \alpha(H[V-L]) \\ &\leq n - \frac{n-|L|}{3} = \frac{2n+|L|}{3},\end{aligned}$$

et puisque $\gamma_2(G) = \dfrac{2n+|L|}{3}$, *on obtient* $\alpha(H[V-L]) = \dfrac{n-|L|}{3}$. *Appliquant le théorème* 3.4.1 *sur le graphe* $H[V-L]$, *on déduit que toute composante de* $H[V-L]$ *est une clique* K_3. *Soit* D *un ensemble* 2*-dominant minimum de* $H[V-L]$. *Alors* $D \cup L$ *est un ensemble* 2*-dominant de* G, *et donc*

$$\begin{aligned}\gamma_2(G) &\leq |D \cup L| = \gamma_2(H[V-L]) + |L| \\ &\leq \frac{2(n-|L|)}{3} + |L| = \frac{2n+|L|}{3}\end{aligned}$$

Puisque $\gamma_2(G) = \dfrac{2n+|L|}{3}$, *on obtient* $\gamma_2(H[V-L]) = \dfrac{2(n-|L|)}{3}$. *Il reste à voir quelles arêtes peuvent être ajoutées à* H *pour construire un graphe connexe* G *gardant la propriété* $\gamma_2(G) = \dfrac{2n+|L|}{3}$.

on distingue quatre cas :

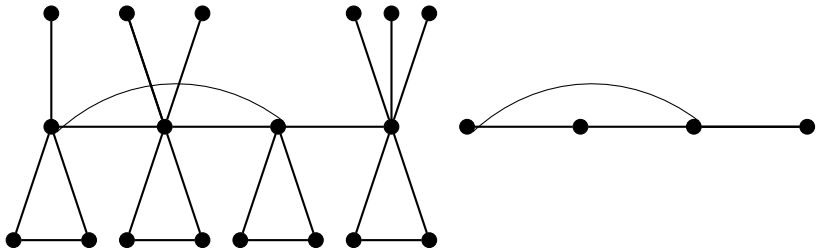
Cas 1 . Supposons que deux sommets différents x_i *et* y_i *d'une clique* L_i, *ont deux voisins* x_j *et* y_j *dans une autre clique disant* L_j *(peut être* $x_j = y_j$*). On peut construire un ensemble* 2*-dominant* D *en prenant* $L \cup \{z_i\} \cup \{x_j, y_j\}$ *et* 2 *sommets dans chaque* L_s *pour* $s \neq i$ *et* $s \neq j$. *Par conséquent,* $|D| = \dfrac{2n+|L|}{3} - 1$, *une contradiction.*

Cas 2 . Supposons qu'un sommet x_i *d'une clique* L_i, *a un voisin* x_j *dans une autre clique disant* L_j *et un sommet* y_j *de la clique* L_j, *a un voisin* x_k *dans une autre clique disant* L_k. *On peut construire un ensemble* 2*-dominant* D *en prenant* $L \cup \{x_i, y_i\} \cup \{z_j\} \cup \{x_k, y_k\}$ *et* 2 *sommets dans chaque* L_s *pour* $s \neq i$ *et* $s \neq j$ *et* $s \neq k$.

Par conséquent, $|D| = \dfrac{2n+|L|}{3} - 1$, *une contradiction.*

Cas 3 . Supposons que deux sommets différents x_i et y_i d'une clique L_i, ont deux voisins a dans L. On peut construire un ensemble 2-dominant D en prenant $L \cup \{z_i\}$ et 2 sommets dans chaque L_s pour $s \neq i$. Par conséquent, $|D| = \dfrac{2n + |L|}{3} - 1$, une contradiction.
Cas 4 . Supposons que deux sommets différents x_i et y_i d'une clique L_i, ont deux voisins a dans L et x_j dans une autre clique L_j. On peut construire un ensemble 2-dominant D en prenant $L \cup \{z_i\} \cup \{x_j, y_j\}$ et 2 sommets dans chaque L_s pour $s \neq i$ et $s \neq j$. Par conséquent, $|D| = \dfrac{2n + |L|}{3} - 1$, une contradiction.
Puisque G est connexe, $G[V - L]$ est la K_2-couronne d'un graphe connexe J tel que les les sommets pendants de G sont adjacents aux sommmets de J.

Exemple 3.4.1 *La Figure 3.4.1 présente un graphe G vérifiant les conditions du théorème précédent, tel que $\gamma_2(G) = \dfrac{2n + |L|}{3} = \dfrac{2 \times 12 + 3}{3} = 9$.*



le graphe G le graphe J

Figure 3.4.1 : Le graphe G est le K_2-couronne d'un graphe J et les feuilles.

Remarque 3.4.1 *Si $L = \varnothing$ (c'est à dire que $\delta \geq 2$), alors on retrouve les résultats du théorème* 2.2.5.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de la 2-domination. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur les graphes extrémaux de certaines bornes sur le nombre de 2-domination. Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous rappelons d'abord les définitions de théorie des graphes. Dans la deuxiéme chapitre, nous donnons les définitions de la domination et la 2-domination dans les graphes.
Dans la troisieme chapitre, nous donnons les caractérisations des bornes suivants:

1. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = 2$.
2. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = 3$.
3. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = n - 1$.
4. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = n - 2$.
5. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = n - \frac{m}{2}$.
6. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = \frac{2n}{\Delta(G)+2}$.
7. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = \frac{2m - n(\Delta - 2)}{\Delta + 2}$.
8. *La caractérisation des graphes tels que* $\gamma_2(G) = \frac{2n + |L|}{3}$.

Bibliographie

[1] *A. Hansberg, A. Pepper, On k-domination and j-dependence in graphs. Submitted.*

[2] *C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, Methuen, London, 1962.*

[3] *C. Payan and N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory, 6:23–32, 1982.*

[4] *Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, Networks 7 (1977), 247–261.*

[5] *E. J.Cockayne, B.Gamble and B.Shepherd. An upper bound for the k-domination number of a graph. J. Graph Theory 9 (1985) 533–534.*

[6] *F. Jaeger and C. Payan. Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombred'absorption d'un graphe simple. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 274 (1972) 728-730.*

[7] *G. S. Domkee J. E. Dumbar, L. R. Markus, Gallai-type theorems and domination parameters, Discrete, Matimatics 167/168 (1997) 237-248.*

[8] *J. F. Fink and M. S. Jacobson, n-domination in graphs, in : Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. John Wiley and Sons, New York (1985), 283–300.*

[9] *J.F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, and J. Roberts. The bondage number of a graph. Discrete Math., 86:47–57, 1990.*

[10] *T.W.Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc. New York (1998).*

[11] H.B. Walikar and B.D. Acharya and E. Sampathkumar. Recent develepments in the theory of domination in graphs. In MRI Lecture Notes in Math., Mahta Reseearch Instit., Allahabad volume 1,1979.

[12] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Domination in Graphs : Advanced Topics, Marcel Dekker, New York (1998).

[13] O. Ore, theory of graphs, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[14] R Laskar and K Peters. Vertexand edge domination parameters in graphs. Congr. Numer., 48:291–305, 1985.

[15] O. Favaron, On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k-domination and k-dependene, J. Combin. Theory Series B 39 n°1(1985) 101-102.

[16] M. S. Jacobson and K. Peters. Complexity questions for n-domination and related parameters, Congressus Numerantium 68 (1989) 7–22.

[17] T.J. Bean, M.A. Henning, H.C. Swart, On the integrity of distance domination in graphs. Australas. J. Comb. 10 (1994) 29-43.

[18] O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, On k-dominationt and minimum degree in graphs, J. Graph Theory 57 (2008) 33–40.

[19] V. K. Wei, A lower bound on the stablity number of a simple graph. Bell Laboratories Technical Memorandum 81-11217–9, Murray Hill, NJ,(1981).

[20] Y.Caro, unpublished.(1980);communicated by N.Linial.