Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

Contribution à la détermination du nombre chromatique de packing dans les graphes

Par :

ZIRAR Wafa et MELKAR Abir

Soutenu publiquement le 18/06/2023, devant le jury composé de :

Abdelkader	SAHRAOUI	MAA	U.Y.F-Médéa	Président
Rachid	LEMDANI	MCB	U.Y.F-Médéa	Promoteur
Mohamed	ZEMIR	MAA	U.Y.F-Médéa	Examinateur
Ridha	SAKRI	MCB	E.N.S.H-Blida	Examinateur

Résumé

Nous nous concentrons notre étude sur le nombre chromatique de packing. Ce nombre, noté $\chi_p(G)$, est défini pour un graphe G, comme étant le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets de G d'une manière telle que, si deux sommets distincts u et v ont la même couleur i, alors $d_G(u, v) > i$. Nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe de Lollipop $LP(n, k)$; $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Nous déterminons également, le nombre chromatique de packing du graphe Tadpol $T(m, n)$; $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Nous déterminons la valeur de $\chi_p(G)$ où G est le graphe d'itération de Mycielski d'une chaîne, cycle et une étoile. D'autre part, nous introduisons un autre type de graphe, appelé graphe $K-$**Mycielski.** Nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing des graphes: $K-$Mycielski pour les chaînes et les cycles, où K est un entier supérieur ou égal à 1.

Mots clés: Nombre chromatique de packing-Graphe de Lollipop $LP(n, k)$-Graphe de Tadpol $T(m, n)$-Graphe d'itération de Mycielski-Graphe de $K-$Mycielski.

Abstract

We focus our studying on the packing chromatic number. This number, denoted as $\chi_p(G)$, is defined for a graph G, as the smallest number of colors needed to color the vertices of G in such a way that, if two distinct vertices u and v have the same color i, then $d_G(u, v) > i$. We determine the exact value of the packing chromatic number of the Lollipop graph $LP(n, k)$; $n \geq 1$ and $k \geq 1$. We also determine the packing chromatic number of the Mycielskian iterated of path, cycle and star. On the other hand, we introduce another type of graph, called the $K-$**Mycielski** graph. We determine the exact value of the packing chromatic number for the $K-$Mycielski graph of paths and cycles, where K is an integer greater or equal to 1.

Keywords: Packing chromatic number-Lollipop graph $LP(n, k)$-Tadpol graph $T(m, n)$-Mycielski iteration graph-$K-$Mycielski graph.



Remerciements

Avant tout, nous remercions **ALLAH,** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Monsieur **Rachid LEMDANI**, Maître de conférences à l'université YAHIA FARES de Médèa, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnelle, sa patience, sa rigueur, ses conseils précieuses et pour ses sincères contributions pour la réalisation de notre travail.

Nous remercions Monsieur Abdelkader. SAHRAOUI, qui a bien voulu nous faire l'honneur en acceptant de présider le jury.

Nous exprimons nos sincères remerciements au membres de jury, Mr. M. ZEMIR, Mr.R. SAKRI, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Nous tenons également à remercier tous les membres de nos familles pour leurs aide tout au long de la réalisation de ce travail.

Enfin, que mes enseignants et amis trouvent ici l'expression de ma parfaite considération et mon profond respect.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail:

À mes très chèrs parents

Aucune dédicace, aucun mot ne pourrait exprimer à leur juste valeur la gratitude et l'amour que je vous porte. Puisse Dieu le tout puissant, vous préserver et vous accordersanté, longue vie et bonheur.

À mes très chèrs frères **: Hakim, Karim.**

À mes très chèrs soeurs **: Djamila, Zinab, Fatma, Souhila** et leurs maris **Larbi, Ahmed, Noureddine.**

Pour ses soutiens morals et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

À les enfants de la famille **: Mouna, Rafik, Oussama, Abdelwahab, Yassin, Adel, Karim, Salime, Ilyass et Meriem.** Source de jois et de bonheur.

À Abir, chère amie avant d'être binôme.

Je vous souhaite tout le bonheur que vous méritez.

À toutes mes familles :

ZIRAR et DEBAH.

À mon amis **Amel** et tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail.

À tous, je dédie ce travail.

ZIRAR Wafa

Dédicace

Je dédie ce modeste travail.

À ceux qui quels que soient les mots , je n'arriverais j'amais à leur exprimer mon amour sincère.

À **mon père** et **ma mère** , pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

Merci beaucoup mes parents.

À ma chère soeur: **Chaima** et mon adorable frère: **Hicham** que j'aime beaucoup.

À mon fiancé qui n'ont pas cessé de m'encourager et soutenir tout long de mes études.

À toute ma famille sans exeption.

À toutes mes amies, surtout ma binôme **Wafa** pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

À tous ceux que j'aime.

MELKAR Abir

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Molakhas **iv**

Table des figures **x**

Introduction **xii**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Graphe simple 2

1.1.4 Multigraphe 2

1.1.5 Adjacence 3

1.1.6 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.7 Distance, excentricité et diamètre 3

1.1.8 Chaîne et Cycle 4

1.1.9 Quelques graphes particuliers 4

1.1.10 Graphe de Mycielski 10

1.1.11 Graphe de Lollipop $LP(n, k)$ 11

1.1.12 Graphe de Tadpol $T(m, n)$ 11

1.1.13 La couronne 12
1.1.14 La couronne voisinage de deux graphe 12
1.1.15 Joint de deux graphes 13
1.1.16 Invariants de graphes 13
1.2 La coloration dans les graphes 15
1.2.1 Coloration des sommets 15
1.2.2 La coloration de packing 16
1.2.3 Le nombre chromatique 16
1.2.4 Bornes sur le nombre chromatique 16

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing 18
2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing 18
2.1.1 i-packing 19
2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers 19
2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing 20
2.1.4 Coloration de packing pour les arbres 21
2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe 23
2.1.6 Coloration de packing de Mycielski de certains graphes 23

3 Détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes 26
3.1 Coloration de packing de Mycielski de quelques graphes 27
3.1.1 Coloration de packing du graphe Mycielski de Lollipop 27
3.1.2 Coloration de packing du graphe Mycielski de Tadpol 27
3.2 Coloration de packing du graphe d'itération de Mycielski 28
3.2.1 Coloration de packing du graphe d'itération de Mycielski d'une chaîne 28
3.2.2 Coloration de packing du graphe d'itération de Mycielski d'un cycle . 30
3.3 Coloration de packing du graphe $K-$Mycielski 32
3.3.1 Coloration de packing du graphe $K-$Mycielski d'une chaîne 32
3.3.2 Coloration de packing du graphe $K-$Mycielski d'un cycle. 34

Conclusion et perspectives 36

Table des figures

1.1.1 Graphe simple G 2
1.1.2 Un multigraphe G 2
1.1.3 Un cycle C_5 et une roue W_6 à droite..... 4
1.1.4 Un graphe G, un sous graphe et un sous graphe partiel à droite..... 5
1.1.5 Un graphe complet K_5..... 5
1.1.6 Un cycle C_5 et son complémentaire 6
1.1.7 Un graphe G, $3-$régulié 6
1.1.8 Un graphe biparti 7
1.1.9 Un graphe biparti complet $K_{2,3}$..... 8
1.1.10 Un graphe connexe 8
1.1.11 Un arbre T 9
1.1.12 Une forêt T 9
1.1.13 Une étoile $K_{1,6}$..... 10
1.1.14 Une étoile double $S_{3,3}$..... 10
1.1.15 Un graphe de Mycielski de K_4..... 11
1.1.16 Un graphe de Lollipop $LP(4,3)$..... 11
1.1.17 Un graphe de Tadpol $T(5,4)$..... 12
1.1.18 La couronne de$K_{1,3}$..... 12
1.1.19 La couronne voisinnage $C_3 \bigstar P_3$..... 13
1.1.20 Le graphe joint de G_1 et G_2..... 13
1.1.21 Une clique engendrée par $\{A, B, C, E, F\}$..... 14

1.1.22 Une recouverement de G 15
2.1.1 Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v 21
2.1.2 Les plus petits arbres avec $\chi_p(T) = 4$ 22
2.1.3 La couronne de C_n 23
2.1.4 Une coloration de packing de $\mu(P_4)$ 24
2.1.5 Coloration de packing de $\mu(C_5)$ 25
2.1.6 Coloration de packing de $\mu(K_{1,3})$ 25
3.1.1 Coloration de packing de $\mu(Lp(4,6))$ 27
3.1.2 Coloration de packing de $\mu(T(4,4))$ 27
3.3.2 Coloration de packing de $3 - \mu(P_3)$ 33

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé **"problème des ponts de Koenigsberg"** posé par Euler en 1736 est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville1 en traversant chaque pont une et une seule fois?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de **Berge** qui a grande- ment participé à sa diffusion.

La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication .

Le problème des quatre couleurs est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes, Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de fa-çon telle que deux pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes?". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de cou-leurs différentes?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par **F. Guthrie** en 1852. Depuis, il est considéré comme l'un des problèmes les plus célèbres en théo- rie des graphes. Plus d'un siècle plus tard, en 1977, il y a eu une réponse positive à ce problème proposée par Appel, **Haken** et **Koch** , mais à l'aide de l'ordinateur (leur preuve a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs).

20 ans plus tard, **Robertson**, **Sanders**, **Seymour** et **Thomas** ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur. Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre sans l'aide d'ordinateurs.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces...), avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires. Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations que nous ne détaillerons pas ici,mais nous pouvons citer l'ouvrage de **Jensen** et **Tofl** , "Graph Coloring Problems", qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi de nom- breuses questions ouvertes.

En 2003, **Goddard**, **Hedetniemi**, **Harris** et **Rall** ont introduit la coloration de packing des graphes, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, appelé nombre chromatique de packing et noté $\chi_p(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$ où π est une fonction de V dans l'ensemble $\{1, 2, ...\}$.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types de graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres:

Le premier chapitre portera des généralités sur la théorie des graphes. Nous introduisons les définitions fondamentales, et les notations de base dans le domaine. A la fin de ce chapitre, nous précisons la définition de la coloration propre dans les graphes et nous présentons quelques bornes sur cet invariant.

Dans **le deuxième chapitre**, on étudie la coloration de packing sur les graphes, les définitions, les notations ainsi que les résultats obtenus par les chercheurs, notamment dans [3,4,13,14,15,16] sont énoncés.

Dans le dernier chapitre, nous présentons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique de packing sur les graphes de Mycielski de Lollipop, puis sur les graphes d'itération de Mycielski pour les graphes suivants: Chaînes, cycles et étoiles. D'autre part, nous introduisons aussi un autre type de graphes, appelé graphe $K-$Mycielski. Nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe $K-$Mycielski d'une

étoie et d'un cycle. Nous donnons des démonstrations à tous les résultats obtenus dans ce mémoire. Des figures illustratives pour chaque résultat en utilisant le logiciel **Geogebra** sont mêmes insérées.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale avec quelques perspectives sur l'ensemble du travail réalisé.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous présentons quelques concepts fondamentaux de la théorie des graphes, ainsi que les définitions pertinentes utilisées tout au long de ce mémoire. De plus, nous passons à étudier certains paramètres de coloration que nous avons étudiés.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n\,(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m\,(G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Graphe simple

Définition 1.1.3 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La Figure* 1.1.1 *illusre un graphe simple.*

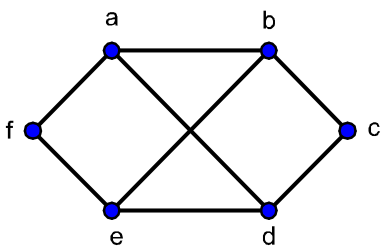


Figure 1.1.1 *: Graphe simple*

G

1.1.4 Multigraphe

Définition 1.1.4 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets. La Figure* 1.1.2 *illustre un multigraphe.*

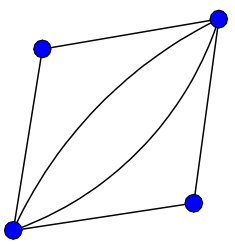


Figure 1.1.2 : Multigraphe G

1.1.5 Adjacence

Définition 1.1.5 *Soit G un graphe. Pour une arête $e = \{u, v\}$, notée aussi uv, on dit que:*

u et v sont adjacents;

u et v sont les extrémités de e;

e est incidente aux sommets u et v;

u et v sont voisins.

1.1.6 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.6 *Pour un graphe G, le voisinage ouvert d'un sommet u, noté $N_G(u)$ est l'ensemble des sommets adjacents à u. Le voisinage fermé de u, noté $N_G[u]$ est l'ensemble $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. Le voisinage ouvert (respectivement fermé) d'un ensemble de sommets S est $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$ (respectivement $N_G[S] = \cup_{u \in S} N_G[u]$).*

Définition 1.1.7 *Le degré d'un sommet u dans un graphe G, noté $d_G(u)$, est le nombre d'arêtes incidents à u, est donc $d_G(u) = |N_G(u)|$. Le degré maximum (resectivement minimum) d'un graphe G est noté $\Delta(G)$ (respectivement $\delta(G)$) et défini comme le maximum (resectivement minimum) des degrés des sommets de G. Un sommet de degré égal à 1 est appelé sommet pendant (ou feuille).*

1.1.7 Distance, excentricité et diamètre

Soit u et v deux sommets d'un graphe G.

Définition 1.1.8 *On appelle distance entre u et v, notée $d(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignante u et v.*

L'excentricité d'un sommet v dans G est: $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelée un centre.

Définition 1.1.9 *Le diamètre de G, noté $diam(G)$, est égal* $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Par exemple pour le graphe $G(V, E)$ de la Figure 1.1.1, *$d(a, c) = 2$, $exc(a) = 2$ et $diam(G) = 3$.*

1.1.8 Chaîne et Cycle

Définition 1.1.10 *Une chaîne joignante deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

Définition 1.1.11 *Une chaîne est simple si la séquence qui constitue ne parcourt pas plusieurs fois la même arête.*

Une chaîne est élémentaire si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois le même sommet.

On appelle cycle C_n dans un graphe G, une chaîne qui se referme.

Un cycle simple est une chaîne simple qui se referme.

Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire qui se referme.

Une roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets du cycle.

La Figure 1.1.3 illusre un cycle C_5 et une roue W_6.

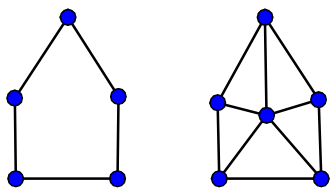


Figure 1.1.3 : Un cycle C_5 et une roue W_6 à droite

1.1.9 Quelques graphes particuliers

Sous-graphes et graphes partiels

Définition 1.1.12 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V sommets et E arêtes.*

• $H = (V', E')$ est dit un sous-graphe de G si l'ensemble des sommets V' inclut dans V et l'ensemble des arêtes E' est formé par toutes les arêtes de E dont les extrémités sont dans V'.

• *Le graphe partiel de* G défini par $W \subseteq E$ est le graphe dont ses sommets sont ceux de G et dont ses arêtes sont celles de W. La Figure 1.1.4 illusre un sous-graphe et un sous-graphe partiel.

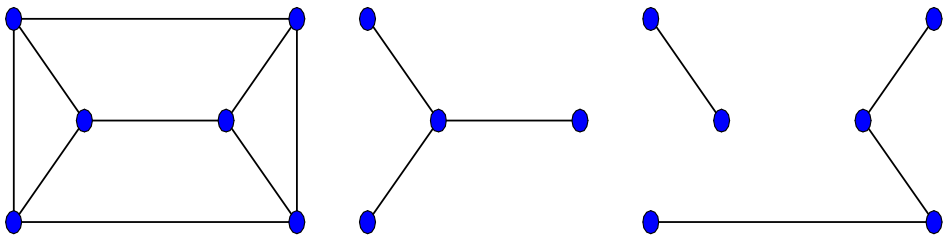


Figure 1.1.4 : Un graphe G, un sous-graphe et un sous graphe partiel à droite.

Graphe complet

Définition 1.1.13 *Un graphe G est dit complet si toute paire de sommets est reliée par une arête. La Figure* 1.1.5 *illusre un graphe complet K_5.*

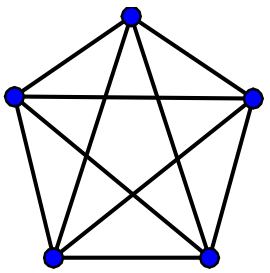


Figure 1.1.5 : Un graphe complet K_5

Graphe complémentaire

Définition 1.1.14 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\overline{G} = (V, \overline{E})$*, défini par* $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ *et* $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\ ,\ v \in V\ \ (G)\ \ et\ u\ v\ \notin E(G)\}$*. La Figure* 1.1.6 *représente un graphe* C_4 *et son complémentaire.*

Remarque 1.1.1 *La superposition de* G *et* $\overline{G}$ *donne un graphe complet .*

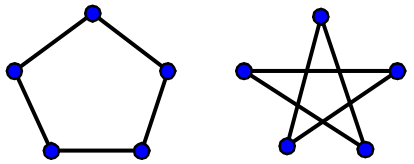


Figure 1.1.6 : Un cycle C_5 et son complémentaire $\bar{C_5}$

Un graphe k-régulier

Définition 1.1.15 *Un graphe* G *est dit* $k-$*régulier si tous les sommets de* G *sont de degré* k*. La Figure* 1.1.7 *illustre un graphe* G *est* 3*-régulier .*

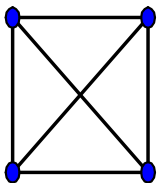


Figure 1.1.7 : Un graphe G, 3-régulier

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.16 *Est un graphe dont tous les sommets sont non adjacents. Un graphe discret* G *est un graphe* $(0)-$ *régulier.*

Graphe biparti

Définition 1.1.17 *Un graphe $G = (V, U)$ est dit biparti si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2, de sorte que tous les sommets d'un même ensemble sont non adjacents. La Figure* 1.1.8 *illustre un graphe biparti.*

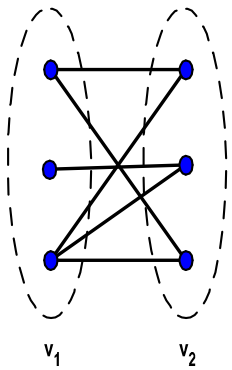


Figure 1.1.8 : Un graphe biparti

Un graphe biparti complet

Définition 1.1.18 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$. Plus généralement, un graphe $G = (V, E)$ est dit $k-$parti $(k \geq 2)$, si V peut être partitionné en k stables $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$. Il est dit multiparti-complet si pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j. La Figure* 1.1.9 *illustre un graphe biparti complet .*

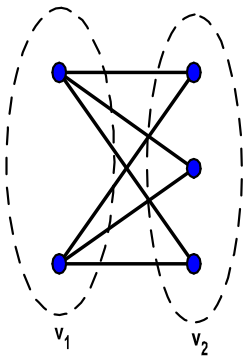


Figure 1.1.9 : Un graphe biparti complet

$K_{2,3}$

Graphe connexe, Graphe $k-$*connexe*

Définition 1.1.19 *Un graphe* $G = (V, E)$ *est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Une composante connexe d'un graphe* G *est un sous graphe.*

Définition 1.1.20 *un graphe connexe est dit* $k-$*connexe. Quels que soient les* $k-1$ *sommets supprimés,* G *reste connexe. Il est possible de supprimer* k *sommets "bien choisis" pour déconnecter* G *(Devenir non connexe). Le graphe cycle* C_n *est* $2-$*connexe pour tout* $n \geq 3$.

Définition 1.1.21 *Une arête* e *est appelée une arête d'articulation (isthme du graphe* G*) si le graphe* $G - e$ *possède plus de composantes connexes que* G*, (i.e, si* G *est connexe alors* $G - e$ *n'est pas connexe). La Figure* 1.1.10 *illustre un graphe connexe.*

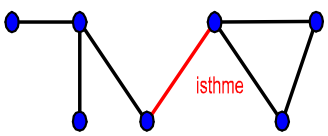


Figure 1.1.10 *: Un graphe connexe*

Arbre

Définition 1.1.22 *On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur $h(T)$ de l'arbre T est la longueur du plus longue chaîne de la racine à une feuille. La Figure 1.1.11 représente un arbre.*

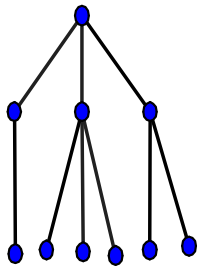


Figure 1.1.11 : Un arbre T

Forêt

Définition 1.1.23 *Une forêt est un graphe sans cycle, chacun de ses composants connexes étant un arbre. La Figure 1.1.12 représente une forêt.*

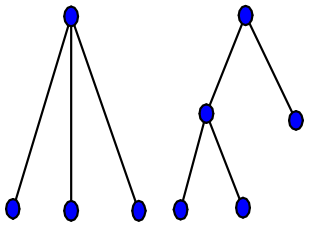


Figure 1.1.12 : Une forêt T

Étoile

Définition 1.1.24 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. La Figure 1.1.13 illustre une étoile $K_{1,5}$.*

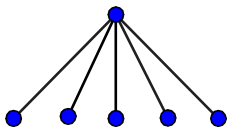


Figure 1.1.13 : Une étoile

$K_{1,5}$

L'étoile double

Définition 1.1.25 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant d'une étoile $K_{1,p}$ au sommet non pendant d' une étoile $K_{1,q}$. La Figure* 1.1.14 *illustre une étoile double $S_{3,3}$.*

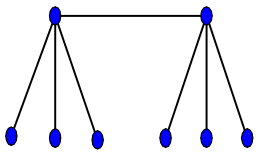


Figure 1.1.14 : Une étoile double $S_{3,3}$

1.1.10 Graphe de Mycielski

Définition 1.1.26 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe de **Mycielski** de G, noté par $\mu(G)$, est un graphe connexe avec $V(\mu(G)) = V(G) \cup V' \cup \{W\}$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $V' = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $E(\mu(G)) = E(G) \cup E' \cup E''$ avec $E' = \{v_i x_j, v_j x_i$: si et seulement si $v_i v_j \in E(G)$, $1 \leq j \leq n\}$ et $E'' = \{wx_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. Voir la Figure* 3.2.4.

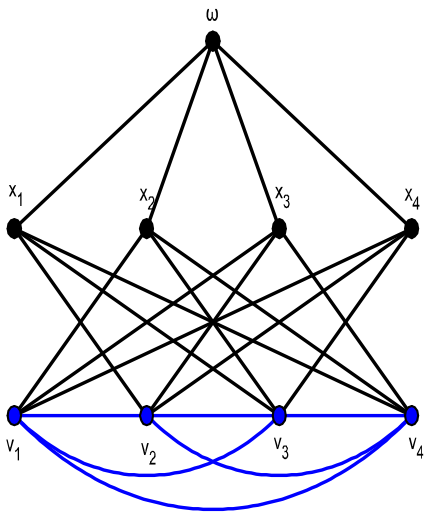


Figure 1.1.15 : Graphe de Mycielski de K_4

1.1.11 Graphe de Lollipop $LP(n, k)$

Définition 1.1.27 *Le graphe de Lollipop $LP(n, k)$ est le graphe obtenu en joignant l'une des extrémités de la chaîne P_k à un sommet du graphe complet K_n.*

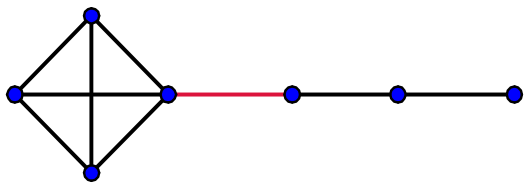


Figure 1.1.16 : Graphe de Lollipop $LP(4, 3)$

1.1.12 Graphe de Tadpol $T(m, n)$

Définition 1.1.28 *Le graphe de Tadpol $T_{m,n}$, est le graphe obtenu en reliant un sommet du cycle C_m par l'une des extrémités de la chaîne P_n avec un isthme. Notons que le graphe Tadpol $T_{m,n}$ a $n + m$ sommets et $n + m$ arêtes.*

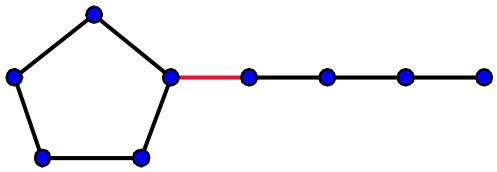


Figure 1.1.17 : Graphe de $T(5,4)$

1.1.13 La couronne

Définition 1.1.29 *La couronne de $G = (V, E)$ notée $Cr\ (G)$, c'est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Donc, il est évident que l'ordre de $Cr\ (G)$ est égal à $2|V|$. (Voir la Figure* 1.1.18*).*

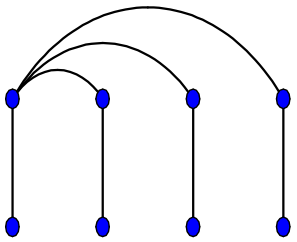


Figure 1.1.18 *: La couronne de $K_{1,3}$*

1.1.14 La couronne voisinage de deux graphe

Définition 1.1.30 *Soit G_1, G_2 deux graphes de n_1, n_2 sommets et m_1, m_2 arêtes. Alors, la couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ est le graphe obtenu par prendre $n_1$copie de G_2 et pour tout $v_i \in V\ (G_1)$; $i \in \{1, ..., n_1\}$, on relie les sommets de G_2 avec les voisins de v_i. La couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ de G_1et G_2 a $n_1 + n_1 n_2$ sommets et $n_1(2n_2 + 1) + n_1 n_2$ arêtes, et quand $G_2 = K_1$, le graphe $G_1 \bigstar G_2$ est appelé: le graphe splitting de G_1, et noté par $S^{'}\ (G_1)$. (Voir*

la Figure 1.1.19).

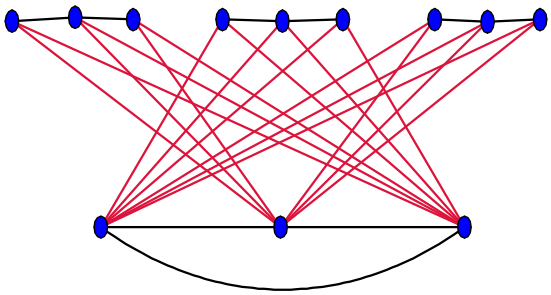


Figure 1.1.19 *: La couronne voisinage* $C_3 \bigstar P_3$

1.1.15 Joint de deux graphes

Définition 1.1.31 *Soient* G_1 *et* G_2 *deux graphes. Le graphe* $G_1 + G_2$ *défini par l'ensemble de sommets* $V(G_1) \cup V(G_2)$ *et l'ensemble d'arêtes* $E(G_1) \cup E(G_2)$ *et l'ensemble de toutes les arêtes possibles joignant les sommets de* $V(G_1)$ *à* $V(G_2)$*, est appelé le graphe adjoint de* G_1*et* G_2*. (Voir la Figure* 1.1.20).

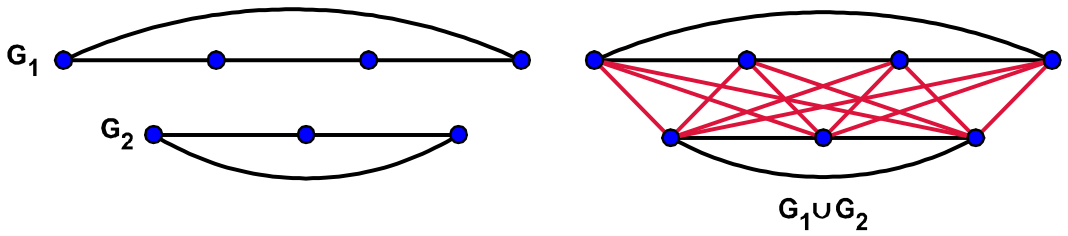


Figure 1.1.20 : Le graphe joint de G_1 et G_2

1.1.16 Invariants de graphes

Clique

Définition 1.1.32 *Une clique dans un graphe* G *est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents, ou est un sous-graphe complet. Le nombre de clique* $\omega(G)$ *de* G*, est le*

cardinal maximal d'une clique dans G. Voir la Figure 1.1.21.

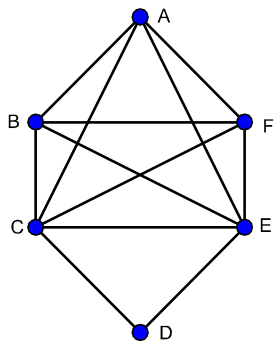


Figure 1.1.21 *: Une clique engendrée par* $\{A,\ B,\ C,\ E,\ F\}$

Stable

Définition 1.1.33 *Etant donné un graphe simple G, on appelle stable de G un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents.*

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

Transversal

Définition 1.1.34 *Un transversal d'un graphe* $G = (V,\ E)$ *est un ensemble* T *de sommets de* V *qui couvre toutes les arêtes de G, i.e, chaque arête de G est incidente à au moins un sommet de* T*. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si* T *est un transversal alors* $V - T$ *est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, et noté* $\tau(G)$*.*

Couplage

Définition 1.1.35 *Etant donné un graphe* $G(V,\ E)$*, on appelle un couplage* M *dans* G *un sous-ensemble d'arêtes de* E *deux a deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par* $\alpha_0(G)$ *la taille d'un couplage maximum dans* G*.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tout les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Recouvrement

Définition 1.1.36 *Etant donné un graphe simple G (V, E) sans sommet isolé, on appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tous les sommets de G.*

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G. Les arêtes en couleur rouge de la la Figure 1.1.22 *forme un recouvrement de cardinalité minimum de G.*

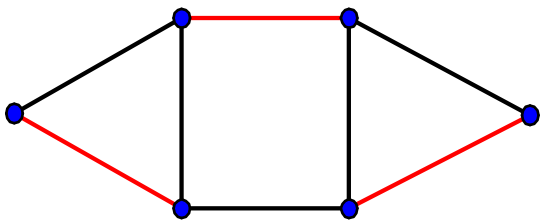


Figure 1.1.22 : Un recouvrement de G

1.2 La coloration dans les graphes

1.2.1 Coloration des sommets

Définition 1.2.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction $c : V \to \{1, 2, ..., k\}$, $k \in \mathbb{N}$).*

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes ($c(v) \neq c(w)$, $\forall v, w \in V$ adjacents).

G est $k-$colorable si on peut colorer ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une

$n-$coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'où la définition du nombre chromatique de G.

1.2.2 La coloration de packing

Définition 1.2.2 *Une coloration de packing d'ordre k dans G, est une fonction $c : V \longrightarrow \{1, ..., k\}$ telle que si $c(u) = c(v)$ implique que la distance entre u et v soit supèrieure à $c(u)$.*

1.2.3 Le nombre chromatique

Définition 1.2.3 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires a une coloration propre des sommets de G.*

On le définit comme étant le plus petit entier k tel que G admet une $k-$coloration, il est dit aussi que G est $\chi(G)-$chromatique

- Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.

Exemple 1.2.1 *$G = P_3$ est $2-$ colorable, $\chi(G) = 2$.*

Remarque 1.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n. Il est clair que $1 \leq \chi(G) \leq n$.*

- *$\chi(G) = 1$ si et seulement si G est un graphe discret.*
- *$\chi(G) = n$ si et seulement si G est un graphe complet.*
- *Pour un cycle C_n,*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2; \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 3; \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.2.4 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 1.2.1 *[23] Si H est un sous-graphe de G, alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.2.2 *[23] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.2.3 *[19] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha}(G) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$ est le degré maximum de G.

Proposition 1.2.4 *[2] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Proposition 1.2.5 *[18] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs résultats sur la coloration de packing de différents types de graphes. Nous examinons notamment les résultats obtenus pour les chaînes, les cycles, les arbres, couronne d'un cycle et les graphes de Mycielski d'une chaîne, cycle et étoile.

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

L'étude de la coloration de packing provient principalement des applications aux réseaux de télécommunication, et en particulier des applications aux diverses variantes du problème d'allocation de fréquences. Ce problème a été posé la première fois aux Etats-Unis, suite à l'établissement de nombreuses régles concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio par la Commission des Communications. En particulier, deux stations de radio de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la réception de l'une n'altére pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion (voir [4]).

2.1.1 i-packing

Définition 2.1.1 *Un sous-ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est considéré comme un $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration de packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration de packing de G est appelé le nombre chromatique de packing, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration de packing est donc une partition $P_k = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_p(G)$. De plus, pour tout sous graphe H d'un graphe G, on a $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Pour tout graphe G d'ordre n, il est possible de réaliser une coloration de packing d'ordre n en attribuant des entiers distincts, de 1 à n, à chaque sommet de V. Par conséquent, une borne supérieure naturelle pour le nombre chromatique de packing serait l'ordre du graphe, bien que cela ne soit pas nécessairement la meilleure solution. Les trois propositions suivantes fournissent les valeurs exactes du nombre chromatique de packing pour une chaîne, un cycle et un graphe complet.

Proposition 2.1.1 *[4] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_p(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4$, $\chi_p(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[4] Pour les cycles C_n,*

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3; & \text{si } n \equiv 0\,[4] \text{ ou } n = 3, \\ 4; & \text{sinon.} \end{cases}$$

La coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ *de* C_n *les séquences des couleurs:*

$$\begin{aligned} 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3 \quad si\ n &= 4r, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,4 \quad si\ n &= 4r+1, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,4 \quad si\ n &= 4r+2, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,2,4 \quad si\ n &= 4r+3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[4] Soit* G *un graphe complet. Alors* $\chi_p\ (K_n) = n$.

Les propositions suivantes fournissent des bornes pour le nombre chromatique de packing d'un graphe quelconque.

Proposition 2.1.4 *[4] Pour tout graphe* G, $\chi_p(G) \leq \tau(G) + 1$, *avec égalité si* G *a le diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[4] Si* G *est un graphe biparti de diamètre* 3. *Alors*

$$\tau(G) \leq \chi_p(G) \leq \tau(G) + 1.$$

Proposition 2.1.6 *[4] Pour tout graphe* G,

$$\omega\,(G) \leq \chi\,(G) \leq \chi_p(G).$$

Proposition 2.1.7 *[4] Soit* G *un graphe. si* $\chi(G) = \chi_p(G)$, *alors* $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.

Proposition 2.1.8 *[4] Pour tout sous graphe* H *d'un graphe* G,

$$\chi_p(H) \leq \chi_p(G).$$

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'aprés la Proposition **2.1.4**, on a forcément $\tau(G) = 1$ c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre de packing chromatique égal à 2.

Proposition 2.1.9 *[4] Pour un graphe connexe G, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.10 *[4] Soit G un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$ où H est un multi-graphe biparti ou G est le joint de K_2 et d'un stable. Pour un sommet v, on définit un $T-$ajout de v comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet w_v, un stable X_v, l'arête vw_v et quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et X_v. Voir la Figure* 2.1.1.

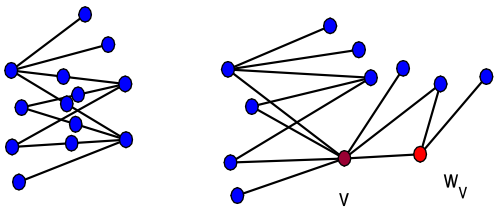


Figure 2.1.1 : Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v

Proposition 2.1.11 *[4] Soit G un graphe. $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si G peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti H avec bipartition (V_2, V_3), en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets dans $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un seul T-ajout à certains sommets de V_3.*

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration de paking très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique de packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [4] ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet petit s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet grand s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de grands voisins de v, alors nous avons la proposition suivante:

Proposition 2.1.12 *[4] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4; & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3; & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3; & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1; & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2; & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.1.13 *[4] L'ordre minimum d'un arbre avec $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$ c'est 4 et pour $\chi_p(T) = 4$ c'est 8. En outre, P_4 est l'arbre unique de 4 sommets qui ont besoin de 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets qui ont besoin de 4 couleurs sont:*

(*i*) *L'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8.*

(*ii*) *L'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux ont le degré 3 et pour chaque sommet central 3 sommets voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement, appelé B_8. Voir la Figure 2.1.2.*

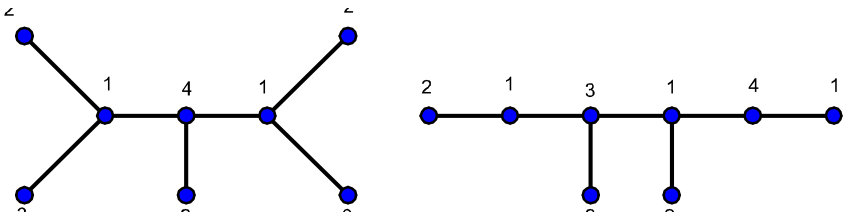


Figure 2.1.2 : Les plus petits arbres avec $\chi_p\ (T) = 4$

Proposition 2.1.14 *[4] Soit T un arbre différent de P_4. Supposons T contient une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$ où t est de degré 1. u et v ont le degré 2. Alors: $\chi_p(T) = \chi_p(T - t)$.*

Théorème 2.1.1 *[4] Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_p(T) \leq \frac{n+7}{4}$$

excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.

2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe

Nous exposons la valeur exacte du nombre chromatique de packing de la couronne d'un cycle, déterminé par [21]. On définit la couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G.

La couronne d'un cycle

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de C_n. Voir la Figure 2.1.3

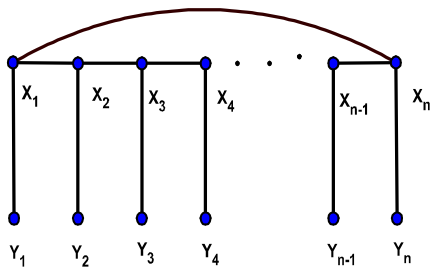


Figure 2.1.3 : La couronne de C_n

Pour la couronne d'un cycle, le résultat est donné par la proposition suivante:

Proposition 2.1.15 *[15] Pour tout entier n,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4; & si \quad n \in \{3,4\}, \\ 5; & sinon. \end{cases}$$

2.1.6 Coloration de packing de Mycielski de certains graphes

Dans cette section, nous présentons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing des graphes de Mycielski obtenues pour les chaînes, les cycles et les étoiles. En outre, nous

déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing d'une étoile grâce à l'étude réalisée par [14].

Coloration de packing de Mycielski d'une chaîne

Théorème 2.1.2 *[14] Pour $n \geq 2$,*

$$\chi_p((\mu(P_n)) = \begin{cases} 2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 2; & n \geq 4, \\ 4; & n = 2,\ 3. \end{cases}.$$

La Figure 2.1.4 montre une coloration de packing de $\mu(P_4)$.

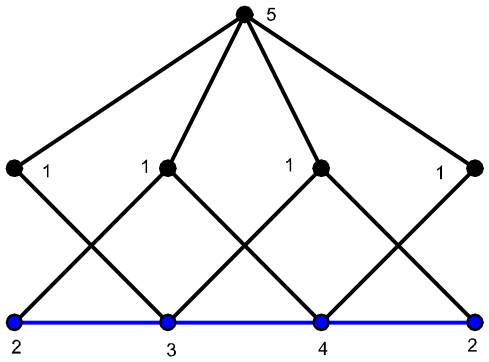


Figure 2.1.4 : Une coloration de packing de $\mu(P_4)$

Coloration de packing de Mycielski d'un cycle

Le théorème suivant donne le nombre chromatique de packing du graphe $\chi_p(\mu(C_n))$ pour tout $n \geq 3$.

Théorème 2.1.3 *[14] Pour tout $n \geq 4$,*

$$\chi_p(\mu(C_n)) = n - \left[\left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-8}{9} \right\rfloor\right] + 1.\ \chi_p(\mu(C_3)) = 5.$$

La figure suivante illustre un exemple d'une coloration de packing de $\mu(C_5)$.

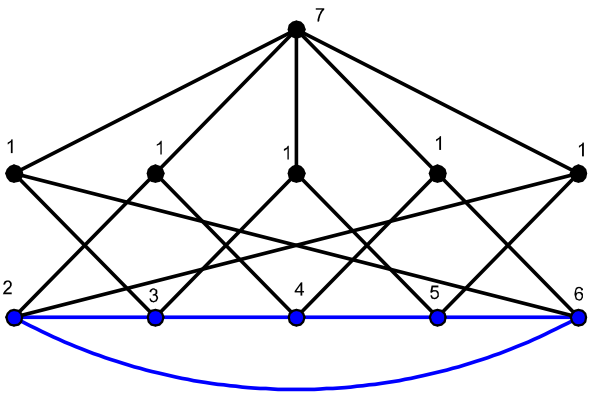


Figure 2.1.5 : Une coloration de packing de $\mu(C_5)$

Coloration de packing de Mycielski d'une étoile

La proposition suivante donne une coloration de packing sur $\mu(K_{1,n})$.

Proposition 2.1.16 *[14] Pour tout* $n \geq 1$, $\chi_p(\mu(K_{1,n})) = 4$.

La figure suivante illustre un graphe $\mu(K_{1,3})$ et sa coloration de packing.

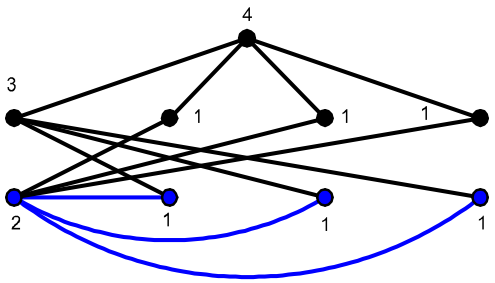


Figure 2.1.6 : Une coloration de packing de $\mu(K_{1,3})$

Chapitre 3

Détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes

Dans ce chapitre, nous présentons nos résultats trouvés sur la détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes. Nous donnons au premier lieu le nombre chromatique de packing de Mycielski de Lollipop et de Tadpol. Ensuite, nous déterminons le nombre chromatique de packing du graphe d'itération de Mycielski appliqué sur les graphes suivants: chaînes, cycles et les étoiles. Nous terminons ce chapitre en calculant le nombre chromatique de packing de $K-$Mycielski d'une chaîne, d'un cycle et d'une étoile.

3.1 Coloration de packing de Mycielski de quelques graphes

3.1.1 Coloration de packing du graphe Mycielski de Lollipop

La figure suivante montre une coloration de packing de $\mu(LP(4,6))$.

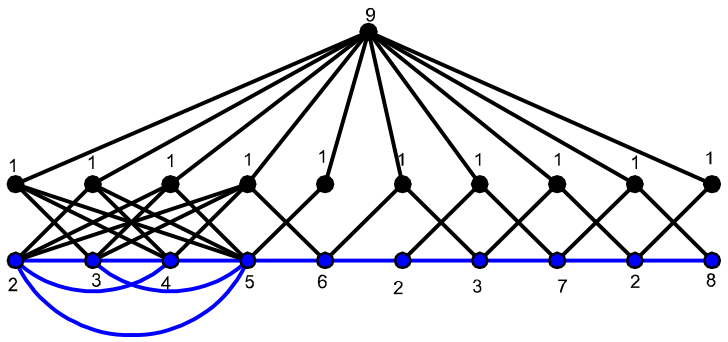


Figure 3.1.1: Une Coloration de packing de $\mu(LP(4,6))$

3.1.2 Coloration de packing du graphe Mycielski de Tadpol

La figure suivante montre une coloration de packing de $\mu(T(4,4))$.

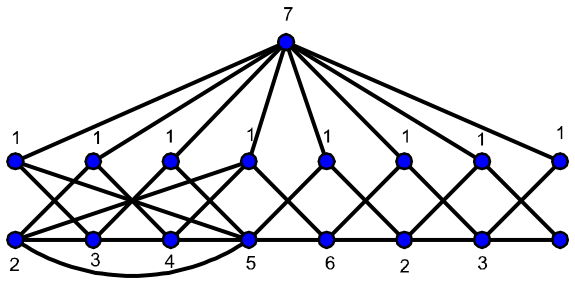


Figure 3.1.2 : Coloration de packing de $\mu(T(4,4))$

3.2 Coloration de packing du graphe d'itération de Mycielski

Dans cette section, on introduit un autre type de graphe appelé, graphe d'itération de Mycielski. On calcule le nombre chromatique de packing des graphes d'itérations de Mycielski d'une chaîne, d'un cycle et une étoile. On commence par donner la définition du graphe d'itération de Mycielski.

Définition 3.2.1 *En appliquant itérativement l'opérateur de Mycielski k fois à un graphe G, nous obtenons précisément le graphe d'itération d'ordre k de Mycielski de G, noté* $\mu^k(G)$. *Autrement dit,* $\mu^k(G) = \mu(\mu(\mu(...\mu(G))))$, *k fois.*

3.2.1 Coloration de packing du graphe d'itération de Mycielski d'une chaîne

Avant de donner le nombre chromatique de packing du graphe d'itération de Mycielski d'une chaîne, on a besoin du lemme suivant.

Théorème 3.2.1 $\chi_p(\mu^2(P_n)) = \begin{cases} 7; & n = 2, \\ 8; & n = 3. \end{cases}$

Preuve. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de la chaîne P_n et par x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i. Soit ω le sommet voisin à tous les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit v'_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i, et x'_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets x_i dans $\mu^2(P_n)$. Soit ω' le sommet correspondant au sommet ω dans $\mu^2(P_n)$. Finalement, soit ω'' le sommet voisin aux sommets $\{\omega', x'_i, v'_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. Soit c une coloration de packing sur $\mu^2(P_n)$.

Premièrement, supposons que $n = 2$. Le graphe $\mu^2(P_n)$ est isomorphe à $\mu(C_5)$. D'après le Théorème 2.1.3, $\chi_p(\mu(C_5)) = 7$. D'où $\chi_p(\mu^2(P_n)) = 7$.

Supposons que $n = 3$. Le graphe $\mu^2(P_n)$ est de diamètre 2. La seule couleur utilisée plusieurs fois est la couleur 1. On distingue 6 cas suivant l'utilisation de la couleur 1.

Cas 1. $c(\omega') = 1$. Dans ce cas, on colore soit les sommets $\{v_1, v_3, v'_1, v'_3, x'_1, x'_3\}$ ou v'_i et x'_i, $i \in \{1, ..., 3\}$ par 1, et les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1. Donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 15 - 7 + 1 = 9$.

Cas 2. $c(\omega'') = 1$. Dans ce cas, on peut colorer les sommets $\{x_1, x_{3,}v_1, v_3\}$ par 1, et les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1, et donc, nous avons

$\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 15 - 5 + 1 = 11$.

Cas 3. $c(\omega) = 1$ et $c(\omega') = 1$. On distingue trois sous cas:

Cas 3.1. Les sommets $\{v_1, v_3, v'_1, v'_3\}$ sont colorés par 1, et alors les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1, et comme $|V(\mu^2(P_n))| = 15$,

$\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 15 - 6 + 1 = 10$.

Cas 3.2. Les sommets v_2 et v'_2 sont colorés par 1, et alors les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1, et donc, nous avons au moins $15 - 4 = 11$ couleurs supplémentaires différentes de 1. Par conséquence $\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 12$.

Cas 3.3. Les sommets v'_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ sont colorés par 1, et alors les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ prennent des couleurs différentes de 1, et donc, nous avons 10 couleurs supplémentaires différentes de 1, c-à-d $\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 11$. Comme c est une coloration de packing optimale, et d'après les trois cas précédents, on conclut que $\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 10$.

Cas 4. $c(\omega) = 1$ et $c(\omega'') = 1$. Dans ce cas, on peut colorer les sommets $\{v_1, v_3\}$ par 1, et les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1, et donc, nous avons $15 - 4 + 1 = 12$ couleurs.

Cas 5. $c(x_i) = 1$ et $c(x'_i) = 1$, $i \in \{1, ..., 3\}$, et alors dans ce cas, les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ prennent des couleurs différentes de 1. Donc, nous avons $15 - 6 + 1 = 10$ couleurs.

Cas 6. Les sommets $\{x_1, x_3, v_1, v_3, v'_1, v'_3, x'_1, x'_3\}$ sont colorés par 1, et alors dans ce cas, les autres sommets de $\mu^2(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons

$15 - 8 + 1 = 8$ couleurs. Par conséquence et d'après les 6 cas précédents, on conclut que la borne inférieure est celle donné au dernier cas, i.e, $\chi_p(\mu^2(P_n)) \geq 8$.

Pour montrer que $\chi_p(\mu^2(P_n)) \leq 8$, on forme une coloration $8-$packing comme suit: posons $c(x_i) = c(x'_i) = c(v_i) = c(v'_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, 3\}$.

Les sommets $\left\{x_2, v_2, v_2', x_2', \omega, \omega', \omega"\right\}$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 parmi les couleurs de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Notons que cette dernière coloration est une coloration de packing, ainsi $\chi_p\left(\mu^2(P_n)\right) = 8$.

■

3.2.2 Coloration de packing du graphe d'itération de Mycielski d'un cycle

Maintenant, on déterminera le nombre chromatique de packing du graphe d'itération de Mycielski d'un cycle

Théorème 3.2.2 *Pour $n = 3$,*

$$\chi_p(\mu^2(C_n)) = 9.$$

Preuve. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets d'un cycle C_n et x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i. Soit ω le sommet voisin à tous les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. On note par v_i', $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i dans $\mu^2(C_n)$, x_i', $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets x_i dans $\mu^2(C_n)$, ω' le sommet correspondant au sommet ω dans $\mu^2(C_n)$. Soit ω'' le sommet voisin aux sommets $\{\omega', x_i', v_i',\ 1 \leq i \leq n\}$. Soit c une coloration de packing sur $\mu^2(C_n)$.

Premièrement, supposons que $n = 3$. Le graphe $\mu^2(C_n)$ est de diamètre 2. La seule couleur utilisée plusieurs fois est la couleur 1. On distingue 6 cas suivant l'utilisation de la couleur 1.

Cas 1. $c(\omega') = 1$. On distingue 2 cas suivant.

Cas 1.1. On peut colorer les sommets v_i' et x_i', $i \in \{1, ..., 3\}$ par 1, les autres sommets de $\mu^2(C_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1, et comme $|V\left(\mu^2(C_n)\right)| = 15$, nous avons $\chi_p\left(\mu^2(C_n)\right) \geq 15 - 7 + 1 = 9$.

Cas 1.2. On utilise la couleur 1 sur les sommets $\{x_1', v_1, v_1'\}$ ou $\{x_2', v_2, v_2'\}$ ou $\{x_3', v_3, v_3'\}$, et les autres sommets du $\mu^2(C_n)$ prennent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p\left(\mu^2(C_n)\right) \geq 15 - 4 + 1 = 12$. Comme c est une coloration de packing optimale, et par la comparaison avec le cas précédent, on conclut que $\chi_p\left(\mu^2(C_n)\right) \geq 9$.

Cas 2. $c(\omega'') = 1$. On distingue 2 cas suivant.

Cas 2.1. On peut colorer les sommets x_i, $i \in \{1, ..., 3\}$ par 1, les autres sommets du $\mu^2(C_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 15-4+1 = 12$.

Cas 2.2. On utilise la couleur 1 sur les sommets $\{x_1, v_1\}$ ou $\{x_2, v_2\}$ ou $\{x_3, v_3\}$, et les autres sommets de $\mu^2(C_n)$ prennent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 15 - 3 + 1 = 13$. Comme c est une coloration de packing optimale, alors on conclut que $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 12$.

Cas 3. $c(\omega) = 1$ et $c(\omega') = 1$. On distingue 2 cas suivant.

Cas 3.1. On peut colorer les sommets v'_i, $i \in \{1, ..., 3\}$ par 1, eet les autres sommets de $\mu^2(C_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 15-5+1 = 11$.

Cas 3.2. On utilise la couleur 1 sur les sommets $\{v_1, v'_1\}$ ou $\{v_2, v'_2\}$ ou $\{v_3, v'_3\}$, et les autres sommets de $\mu^2(C_n)$ prennent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 15-4+1 = 12$. Comme c est une coloration de packing optimale, on conclut que $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 11$.

Cas 4. $c(\omega) = 1$ et $c(\omega'') = 1$. Dans ce cas, on utilise la couleur 1 sur un seul sommet du C_n, les autres sommets du $\mu^2(C_n)$ prennent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 15 - 3 + 1 = 13$.

Cas 5. Si $c(x_i) = 1$ et $c(x'_i) = 1$, $i \in \{1, ..., 3\}$, alors dans ce cas les autres sommets du $\mu^2(C_n)$ prennent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons au moins $15 - 6 + 1 = 10$ couleurs.

Cas 6. Si les sommets $\{x_1, v_1, x'_1, v'_1\}$ ou $\{x_2, v_2, x'_2, v'_2\}$ ou $\{x_3, v_3, x'_3, v'_3\}$ colorés par 1, alors les autres sommets du $\mu^2(C_n)$ reçoivent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 15 - 4 + 1 = 12$. Par conséquence, d'après les 6 cas précédents, on conclut que la borne inférieure est celle indiquée dans le *cas* 1.1, i.e, $\chi_p(\mu^2(C_n)) \geq 9$.

Pour montrer que $\chi_p(\mu^2(C_n)) \leq 9$, on forme une coloration $9-$packing comme suit: posons $c(\omega') = c(x'_i) = c(v'_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., 3\}$.

Les sommets $\{x_i, v_i, \omega, \omega''\}$, $i \in \{1, ..., 3\}$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1 de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Notons que cette dernière coloration est une coloration de packing, ainsi $\chi_p(\mu^2(C_n)) = 9$.

■

3.3 Coloration de packing du graphe $K-$Mycielski

3.3.1 Coloration de packing du graphe $K-$Mycielski d'une chaîne

Proposition 3.3.1 *Pour $K \geq 2$ et $n = 2$,*

$$\chi_p(K - \mu(P_n)) = 4.$$

Preuve. Pour tout $p \in \{1, ..., K\}$, $(K \geq 1)$, on note par P_p, la $p^{ème}$ copie de la chaîne dans le graphe $K - \mu(P_n)$. On note par $v_{p,i}$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommets de la chaîne P_p. On note par $x_{p,i}$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $v_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$. Notons par ω le sommet relié à tous les sommets $x_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit c une coloration de packing sur $K - \mu(P_n)$.

Supposons que $K = 2$ et $n = 2$. Si $c(\omega) \in \{2, 3\}$, alors $c(v_{p,i}) \neq \{2, 3\}$, de même $c(x_{p,i}) \neq \{2, 3\}$ pour p, $K \in \{1, 2\}$ car $d(\omega, v_{p,i}) = 2$ et $d(\omega, x_{p,i}) = 1$ et donc les couleurs 2 et 3 sont utilisées dans ce cas une seule fois sur $K - \mu(P_n)$. Si $c(\omega) = 1$, alors la coleur 1 est utilisée dans ce cas sur les chaînes P_p, $p \in \{1, 2\}$. Par contre on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets $\{x_{p,i},\ 1 \leq p,\ i \leq 2\}$, les couleurs 2 et 3 sont utilisées une seule fois sur chaque chaîne P_p, $p \in \{1, 2\}$ deux fois, et donc nous avons 8 sommets colorés par $1, 2$ et 3 et comme $|V(k - \mu(P_n))| = 9$, nous obtenons $\chi_p(K - \mu(P_n)) \geq 9 - 8 + 3 = 4$. Notons que le graphe $K - \mu(P_n)$ contient un cycle C_5, et d'après les Propositions 2.1.2 et 2.1.9, $\chi_p(K - \mu(P_n)) \geq 4$.

Pour montrer que $\chi_p(K - \mu(P_n)) \leq 4$, on forme une coloration $4-$packing comme suit: Posons $c(x_{p,i}) = 1$, p, $i \in \{1, 2\}$, $c(v_{1,1}) = c(v_{2,1}) = 2$, $c(v_{1,2}) = c(v_{2,2}) = 3$ et $c(\omega) = 4$, et donc cette coloration vérifie bien une coloration de packing, ainsi $\chi_p(K - \mu(P_n)) \leq 4$.

Maintenant, supposons que $n = 3$ et $K \geq 2$. On distingue les deux cas suivants:

Cas 1. La couleur 1 est utilisée seulement sur les sommets $x_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$, $i \in \{1, ..., 3\}$, c-à-d: $c(x_{p,i}) = 1$. Les couleurs 2 et 3 sont utilisées sur les sommets $v_{p,i}$. Soit $c(v_{p,1}) = 2$ et $c(v_{p,2}) = 3$ pour tout $p \in \{1, ..., K\}$. Les autres sommets du graphe $K - \mu(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de $1, 2$ et 3. Donc comme $|V(K - \mu(P_n))| = 6K + 1$,

$\chi_p(K - \mu(P_n)) \geq (6K + 1) - (3K + 2K) + 3 = K + 4$.

Cas 2. La couleur 1 est utilisée sur les sommets $x_{p,i}$ et $v_{p,i}$ pour $p \in \{1, ..., K\}$, $i \in \{1, ..., 3\}$ comme suit: $c(x_{p,i}) = c(v_{p,i}) = 1$ pour $i \in \{1, 3\}$. Pour les sommets $x_{p,2}$, $p \in \{1, ..., K\}$, un seul sommet coloré par 2 ou 3. Sans perte de généralité supposons que $c(x_{1,2}) = 2$ (resp. $c(x_{1,2}) = 3$) et donc $c(x_{p,2}) \neq 2$ (resp. $c(x_{p,2}) \neq 3$) pour tout $p \neq 1$ et $c(v_{1,2}) \neq 2$ (resp. $c(v_{1,2}) \neq 3$) et dans ce cas, on peut mettre $c(v_{p,2}) = 3$ (resp. $c(v_{p,2}) = 2$) pour $p \in \{1, ..., K\}$, et donc, nous avons $3K + 2K + 1 = 5K + 1$ sommets colorés par $1, 2$ et 3. Les autres sommets de $K - \mu(P_n)$ reçoivent des couleurs différentes de $1, 2$ et 3, ainsi $\chi_p(K - \mu(P_n)) \geq (6K + 1) - (5K + 1) + 3 = K + 3$ et comme $K + 4 \geq K + 3$, nous concluons que $\chi_p(k - \mu(P_n)) \geq K + 3$.

Pour montrer que $\chi_p(K - \mu(P_n)) \leq K + 3$, on forme une coloration $(K + 3)$ −packing comme suit: posons $c(x_{p,i}) = c(v_{p,i}) = 1$ pour $i \in \{1, 3\}$, $p \in \{1, ..., K\}$et $c(x_{1,2}) = 2$ et pour tout $p \in \{2, ..., K\}$, $c(v_{p,2}) = 3$. Les autres sommets prennent des différentes couleurs de $\{4, ..., K + 3\}$, qui est une coloration de packing sur $K - \mu(P_n)$ et $\chi_p(K - \mu(P_n)) \leq K + 3$ et notre borne supérieure est démontrée. Figure 3.3.2 illustre une coloration de packing de $3 - \mu(P_3)$.

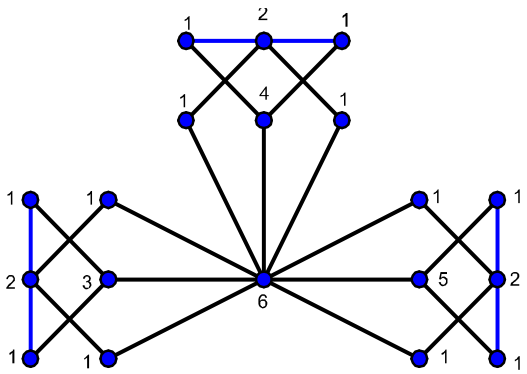


Figure 3.3.2: Coloration de packing de $3 - \mu(P_3)$

■

3.3.2 Coloration de packing du graphe $K-$Mycielski d'un cycle.

Théorème 3.3.1 *Pour tout $n = 3, K \geq 2$,*

$$\chi_p(K - \mu(C_n)) = K + 5.$$

Preuve. Pour tout $p \in \{1, ..., K\}$ $(K \geq 2)$, on note par C_p, la $p^{ème}$ copie du cycle C_n dans le graphe $K - \mu(C_n)$. On note par $v_{p,i}$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommets du cycle C_p. On note par $x_{p,i}$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $v_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$. Notons par ω le sommet relié à tous les sommets $x_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}, i \in \{1, ..., n\}$. Soit c une coloration de packing sur $K - \mu(C_n)$.

Supposons que $n = 3$. Alors, si $c(\omega) = 2$ ou 3, alors dans ce cas, on ne peut pas utiliser ni la couleur 2, ni la couleur 3 sur $K - \mu(C_n)$, et donc $c(\omega) \notin \{2, 3\}$. De même, $c(x_{p,i}) \neq 3$ pour tous $p \in \{1, ..., K\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, car dans ce cas, la couleur 3 est utilisée une seule fois sur $K - \mu(C_n)$ et la coloration de packing c consiste à utiliser le maximum les couleurs $1, 2$ et 3. D'autre part, s'il existe un sommet $x_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$ coloré par 2, et sans perte de généralité, supposons que $c(x_{1,1}) = 2$, alors $c(x_{1,h}) \neq 2$ pour tout $h \neq 1$, ainsi $c(v_{1,i}) \neq 2$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et dans ce cas on peut utiliser la couleur 2 une seule fois sur chaque copie P_l, $l \neq 1$. Ensuite, posons $c(x_{1,2}) = c(x_{1,3}) = 1$ et pour tout $l \in \{2, ..., K\}$, posons $c(x_{l,i}) = 1$, et donc un seul sommet de chaque P_p, $p \in \{1, ..., K\}$ est coloré par 3. Par conséquence, nous avons $3(K - 1) + 2$ coloré par 1, K sommets colorés par 2 et K sommets colorés par 3. Donc, nous avons au total $3(K - 1) + 2 + 2K = 5K - 1$ sommets colorés par $1, 2$ et 3 respectivement. Une autre manière de la coloration est que la couleur 1 est utilisée sur les sommets $x_{p,i}$; $p \in \{1, ..., K\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$ et les couleurs 2 et 3 sont utilisées chacune une seule fois sur les chaînes P_p, $p \in \{1, ..., K\}$ et donc, nous alons trouver le même résultat que le cas précédent. Les autres sommets du graphe $K - \mu(C_n)$ reçoivent par paire des couleurs différentes de $1, 2$ et 3. Comme $|V(K - \mu(C_n))| = 6K + 1$, nous concluons que $\chi_p(K - \mu(C_n)) \geq |V(K - \mu(C_n))| - (5K - 1) = (6K + 1) - (5K - 1) + 3 = K + 5$. Pour montrer que $\chi_p(K - \mu(C_n)) \leq K + 5$, il est facile d'utiliser la coloration de packing suivante: posons $c(x_{p,i}) = 1$; $p \in \{1, ..., K\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, donc nous avons $3K$ sommets colorés par 1. De même, posons: $c(x_{p,1}) = 2$ ainsi $c(x_{p,2}) = 3$ pour $p \in \{1, ..., K\}$, et donc nous avons K sommets colorés par 2, respectivement K sommets colorés par 3. Au total,

nous avons $5K$ sommets colorés par $1, 2$ et 3. Pour les autres sommets du graphe, on utilise $(6K + 1) - 5K = K + 1$ couleurs additionnelles, et donc, nous avons $5K + k + 1 = 6k + 1$ qui est l'ordre de notre graphe et ainsi $\chi_p(K - \mu(C_n)) \leq 6k + 1$. ■

Proposition 3.3.2 *Pour tout* $n = 1$, $K = 2$, $\chi_p(K - \mu(K_{1,n})) = K + 3$.

Preuve. Pour tout $p \in \{1, ..., K\}$ $(K \geq 2)$, on note par $v_{p,i}$, $i \in \{0, ..., n\}$, les sommets de la $p^{ème}$ copie de l'étoile $K_{1,n}$ dans le graphe $K - \mu(K_{1,n})$, tel que $\deg_{K_{1,n}}(v_0) = n$. On note par $x_{p,i}$, $i \in \{0, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $v_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$ tel que le sommet x_0 est correspond au sommet v_0. Notons par ω le sommet relié à tous les sommets $x_{p,i}$, $p \in \{1, ..., K\}$, $i \in \{0, ..., n\}$

Soit c est une coloration de packing sur $K - \mu(K_{1,n})$. Le graphe $K - \mu(K_{1,n})$ est de diamètre 4, donc les couleurs qui peuvent être utilisées plusieurs fois, sont les couleurs 1, 2 et 3 pour tout $n \geq 1$ et $K \geq 2$.

Si $n = 1$ et $K = 2$, alors $K - \mu(K_{1,n})$ est isomorphe à $K - \mu(P_2)$ et par conséquence, $\chi_p(K - \mu(K_{1,n})) = \chi_p(K - \mu(P_2)) = 4$. ■

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude du problème de la coloration de packing . On a commencé dans le premier chapitre par rappeler quelques notions, définitions et notations de base sur la théorie des graphes utilisées tout au long de ce mémoire. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de différents résultats obtenus par les chercheurs à propos de la coloration de packing. Le chapitre 3 est consacré à notre étude sur la coloration de packing. Nos contributions relatives à ce chapitre concerne d'une part la détermination du nombre chromatique de packing de certains graphes. Dans ce contexte, nous avons étudié un type de graphes, appelé graphe de Mycielski. Nous avons obtenu la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe Mycielski de Lollipop et de Tadpol. Ensuite, nous avons déterminé le nombre chromatique de packing du graphe d'itération de Mycielski pour les graphes suivants: les chaînes, les cycles et les étoiles. La deuxième partie de ce mémoire a été consacré à l'étude d'un nouveau type de graphe, il s'agit des graphes de $K-$Mycielski. Dans ce contexte, nous avons réussi à obtenir la valeur exacte du nombre chromatique de packing des graphes: $K-$Mycielski d'une chaîne, $K-$Mycielski d'un cycle et $K-$Mycielski d'une étoile.

Finalement, Comme perspective à notre travail, nous proposons :

• Trouver d'autres valeurs exactes, bornes inférieures et supérieures de $\chi_p(G)$.

• Déterminer le nombre chromatique de packing $\chi_p(\mu(G))$ pour d'autres graphes G, où $\mu(G)$ est le graphe de myceilski de G.

• Déterminer le nombre chromatique de packing du graphe $K-$Mycielski pour d'autres graphes.

Bibliographie

[1] St. Aloysius College, Edathua, Kerala. The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] B. Bresãr, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Packing chromatic numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33-49, 2008.

[5] M. Joice Punitha, Kernel in Interconnection Networks, Ph.D thesis, University of Madras, March 2009.

[6] R. LEMDANI, CHABANE Kwider et ZAHED Ahmed, Sur le Nombre de Subdivision de la Domination Broadcast, 17/06/2015.

[7] R. LEMDANI, A.TAIBAOUI et O. MEZIOUD. Opérations sur le nombre de la coloration de packing. Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle, juin 2015.

[8] R. LEMDANI, A. SOUADKIA et F.S DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 16/06/2016.

[9] R. LEMDANI, K BAKHTI et K. MELIANI, Opérations sur le nombre de la domination broadcast, Mémoire de Master, RO, 14/06/2017.

[10] R. LEMDANI, Y. MOUSSA et O. ALLOUCHE, Etude de la coloration packing dans les graphes, Mémoire de Master, RO, 18/06/2018.

[11] R. LEMDANI, C. OUNNAS et S. ZENIKHRI, Détermination du nombre de la coloration packing de certaines classes de graphes, Mémoire de Master, RO, 2019.

[12] R. LEMDANI, N.R. YAHIAOUI et B. BEN KOUIDER, Opérations sur le nombre de la coloration packing de certains types de graphes, Mémoire de Master, RO, 29/10/2020.

[13] R. LEMDANI. M. BESSERI et I. HADJADJ, Etude et détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 18 Juillet, 2021.

[14] R. LEMDANI, R. SAYAH et O. RAMOUL, Caractérisation des graphes à diamètre $d \geq 1$ avec leurs nombres chromatiques de packing, Mémoire de Master, université de Médéa, 23/06/2023.

[15] D. Laiche, Mémoire présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[16] J. Mycielski, sur le coloriage des graphes, Colloquium Mathematicae 3(1955)161 – 162.

[17] D. Miller**.** Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, (2008).

[18] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 – 177, (1956).

[19] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[20] Christian Sloper. Packing-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[21] E. Sopena, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, JUNE 2015.

[22] A. SOUADKIA, F.S. DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, 2016.

[23] M. A. Tahraoui. Coloring, packing and embedding of graphs. Thèse de doctorat, Université de Lyon, Décembre 2012.

[24] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.D Thesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[25] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[26] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[27] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, Chennai 600034, INDIA.