الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة المدية
كلية العلوم

ملخّص دروس و مسائل في التحليل المركب

وفق البرنامج الدراسي الرّسمي للسنة الثانية ليسانس فيزياء

أسامة حوحو

أستاذ محاضر بقسم علوم المادة

صادق عليه المجلس العلمي لكلية العلوم بتاريخ 02 ديسمبر 2020

الرقم التسلسلي: .....

السنة الجامعية 2020-2021

راجع مادة هذه المطبوعة و قام بتحكيمها كل من:

1. د. ضيف الله عيساوي، أستاذ محاضر بقسم الرياضيات و الإعلام الآلي بكلية العلوم جامعة المدية.
2. د. لزهر بوحجر، أستاذ محاضر بقسم علوم المادة بكلية العلوم جامعة البويرة.

إهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أبي و أمي.

شكر و عرفان

أشكر كلا من الأستاذين و الزميلين، د. ضيف الله عيساوي، أستاذ محاضر بقسم الرياضيات و الإعلام الآلي بكلية العلوم جامعة المدية، و د. لزهر بوحجر، أستاذ محاضر بقسم علوم المادة بكلية العلوم جامعة البويرة، على مراجعتهما لهذه المادة و على ملاحظاتهما القيّمة التي ساهمت بشكل مباشر في تحسين الشكل و المضمون على حد سواء.

المحتويات

إهداء **v**

شكر و عرفان **vii**

تمهيد **xiii**

1 الدالة التحليلية **1**

1.1 الأعداد المركبة 1

1.1.1 حقل الأعداد المركبة 1

2.1.1 مرافق عدد مركب 2

3.1.1 طويلة عدد مركب 3

4.1.1 المستوي المركب 3

5.1.1 التمثيل القطبي 3

6.1.1 التمثيل الهندسي لبعض العمليات على الأعداد المركبة 5

2.1 الدوال المركبة لمتغير مركب 6

1.2.1 مفهوم الدالة المركبة 6

2.2.1 الاستمرارية 7

3.2.1 الاشتقاق 9

4.2.1 معادلات كوشي-ريمان التفاضلية 10

3.1 الدوال التحليلية 13

1.3.1 الدالة التحليلية 13

2.3.1 الدالة التوافقية 13

3.3.1 قواعد اشتقاق الدوال التحليلية 15

4.1 تمارين الباب 1 17

التمرين 1.1: حقل الأعداد المركبة 17

التمرين 2.1: بعض خصائص الأعداد المركبة 17

التمرين 3.1: مبرهنة دي موافر 17

التمرين 4.1: جذور عدد مركب 18

التمرين 5.1: التمثيل القطبي للأعداد المركبة 18

التمرين 6.1: التمثيل الأسي للأعداد المركبة 18
التمرين 7.1: النهايات 18
التمرين 8.1: الاستمرارية 19
التمرين 9.1: بعض خصائص اشتقاق الدوال 19
التمرين 10.1: الاشتقاق 19
التمرين 11.1: معادلات كوشي - ريمان 19
5.1 حلول تمارين الباب 1 21
حل التمرين 1.1 21
حل التمرين 2.1 25
حل التمرين 3.1 27
حل التمرين 4.1 29
حل التمرين 5.1 30
حل التمرين 6.1 31
حل التمرين 7.1 31
حل التمرين 8.1 32
حل التمرين 9.1 33
حل التمرين 10.1 36
حل التمرين 11.1 37

2 الدوال الأساسية **39**
1.2 الدالة الأسية 39
2.2 الدالة اللوغارتمية 40
3.2 الدوال المثلثية 41
4.2 الدوال المثلثية العكسية 43
5.2 الدوال الزائدية 43
6.2 الدوال الزائدية العكسية 44
7.2 الدالة z^α 44
8.2 الدوال الكسرية 45
9.2 تمارين الباب 2 47
التمرين 1.2: الدالة الأسية 47
التمرين 2.2: الدوال المثلثية 47
التمرين 3.2: الدالة اللوغارتمية 47
التمرين 4.2: الدوال الزائدية 48
التمرين 5.2: الدوال العكسية 48
10.2 حلول تمارين الباب 2 49
حل التمرين 1.2 49
حل التمرين 2.2 50
حل التمرين 3.2 57
حل التمرين 4.2 57
حل التمرين 5.2 61

3 مبرهنات أساسية حول الدوال التحليلية 65
1.3 القوس، المنحني المغلق 65
2.3 التكامل الخطي 67
3.3 بعض خصائص التكامل الخطي 70
4.3 مبرهنة كوشي 72
5.3 سلسلة تايلور - سلسلة لورين 78
1.5.3 سلسلة القوى 78
2.5.3 مبرهنة تايلور 79
3.5.3 مبرهنة لورين 80
6.3 النقاط الشاذة 81
1.6.3 الشذوذ المنعزل 81
2.6.3 القطب 82
3.6.3 الشذوذ القابل للإزالة 83
4.6.3 الشذوذ الجوهري 84
5.6.3 الشذوذ عند ∞ 84
6.6.3 تصنيف الشذوذ المنعزل باستخدام سلسلة لورين 85
7.3 التمديد التحليلي 87
8.3 جذور دالة تحليلية 88
9.3 تمارين الباب 3 91
التمرين 1.3: التكامل الخطي 91
التمرين 2.3: طول قوس 91
التمرين 3.3: طويلة التكامل الخطي 91
التمرين 4.3: مبرهنة غرين 91
التمرين 5.3: مبرهنة كوشي 92
التمرين 6.3: سلسلة تايلور 92
التمرين 7.3: سلسلة لورين 92
10.3 حلول تمارين الباب 3 93
حل التمرين 1.3 93
حل التمرين 2.3 95
حل التمرين 3.3 95
حل التمرين 4.3 97
حل التمرين 6.3 98
حل التمرين 7.3 101

4 مبرهنة الباقي و تطبيقاتها في حساب التكامل 105
1.4 مفهوم باقي دالة عند نقطة 105
2.4 حساب باقي دالة عند قطب 107
3.4 مبرهنة الباقي 107
4.4 باقي دالة عند الـ ∞ 109

5.4 مكاملة الدوال الكسرية 111
6.4 مكاملة الدوال المثلثية 115
7.4 التكامل على خط تفرع دالة متعددة القيم 115
8.4 تمارين الباب 4 119
التمرين 1.4: إيجاد باقي دالة 119
التمرين 2.4: تكامل دالة على مسار مغلق - مبرهنة الباقي 119
التمرين 3.4: تكامل دالة على نصف دائرة قطرها لا نهائي 120
التمرين 4.4: عبارة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2k}+1}$ 120
التمرين 5.4: تكامل دالة كسرية مثلثية 121
التمرين 6.4: تكامل جداء دلة كسرية و دالة مثلثية 121
التمرين 7.4: عدد جذور و أقطاب دالة (مبرهنة العمدة) 122
التمرين 8.4: عدد جذور و أقطاب دالة (مبرهنة العمدة) - صياغة عامة 122
9.4 حلول تمارين الباب 4 125
حل التمرين 1.4 125
حل التمرين 2.4 126
حل التمرين 3.4 128
حل التمرين 4.4 130
حل التمرين 5.4 131
حل التمرين 6.4 132

5 تطبيقات 137
1.5 مبرهنة الطويلة العظمى 137
2.5 مبرهنة ليوفيل 139
3.5 مبرهنة روشي 141
4.5 الدالة Γ 142

ا قاموس المصطلحات عربي - إنجليزي 145

ب قاموس المصطلحات إنجليزي - عربي 151

قائمة الأشكال

1.1 المستوي المركب. 3
2.1 التمثيل القطبي للأعداد المركبة. 4
3.1 مجموع عددين مركبين. 5
4.1 طويلة عدد مركب. 6
5.1 مرافق عدد مركب. 6

1.3 القوس في المستوي المركب. 66
2.3 القوس الأملس. 67
3.3 القوس البسيط و المنحني المغلق. 68
4.3 تكامل دالة على قوس. 68
5.3 تكامل دالة على ربع دائرة الوحدة. 70
6.3 المجموعة بسيطة الترابط. G_1 بسيط الترابط بينما G_2 ليس كذلك. 73
7.3 مبرهنة كوشي - مسار مفتوح. 73
8.3 مثال: مبرهنة كوشي - مسار مفتوح. 75
9.3 مبرهنة كوشي - مسار مُغلق. 76
10.3 صيغة كوشي التكاملية. 77
11.3 مبرهنة لورين. 80
12.3 النقطة الشاذة المنعزلة. 82
13.3 تصنيف الشذوذ باستخدام سلسلة لورين. 85
14.3 التمديد التحليلي. 87
15.3 مثال حول استخدام مبرهنة غرين.. 99

1.4 تعريف الباقي. 106
2.4 مبرهنة الباقي. 108
3.4 مثال: مبرهنة الباقي. 108
4.4 الشذوذ المنعزل عند الـ ∞. 109
5.4 تكامل دالة كسرية. 112
6.4 مكاملة دالة على خط تفرع دالة متعددة القيم. 118

7.4 نظرية الباقي: تمرين. 119
8.4 تكامل دالة على نصف دائرة قطرها لا نهائي: تمرين. 120
9.4 تكامل جداء دلة كسرية و دالة مثلثية: تمرين. 123

1.5 مبرهنة الطويلة العظمى. 138
2.5 مبرهنة ليوفيل. 140
3.5 تعريف الدالة Γ. 144

تمهيد

هذا ملخص دروس في مادة التحليل المركب (دالة المتغير المركب)، موجه لطلبة السنة الثانية ليسانس فيزياء. أصل هذه الدروس هو محاضرات ألقيتها على طلبة السنة الثانية ليسانس فيزياء بقسم علوم المادة، كلية العلوم، جامعة المدية بين عامي 2018 و 2020.

إنّ هذه المادة استمرار لمادة التحليل التي درسها الطلبة خلال السنة الأولى بالجامعة، حيث ستوظف العديد من المفاهيم التي درسها الطالب في مادة التحليل من أجل دراسة و فهم مواضيع جديدة و مهمة يحتاجها الطالب في عدة مواد أخرى يدرسها أو سيدرسها خلال مساره الدراسي و البحثي.

تشمل هذه المادة أساسا مفاهيم حول الدوال المركبة لمتغير مركب، حيث نبدأ بتعريف الدالة التحليلية و كيفية حساب بعض الدوال لمتغير مركب، ثمّ نتطرّق إلى بعض المُبرهنات الأساسية في التحليل المركب مثل التكامل الخطي و مُبرهنة كوشي [1] . و في الأخير ندرس مُبرهنة الباقي و كيفية تطبيقها لحساب بعض التكاملات.

و قبل أن أختم هذه الكلمة، أود أن أشير إلى أنني قد اعتمدت على عدة مصادر من كتب، مقالات علمية، و دروس على الخط، ذكرت أهمها في قائمة في باب المصادر، و إنني لأنصح القارئ أن يطلع عليها من أجل التعمق أكثر في موضوع التحليل المركب.

[1] Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857.

باب 1

الدالة التحليلية

1.1 الأعداد المركبة

1.1.1 حقل الأعداد المركبة

تعريف

نُعرّف مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بمجموعة كل ثنائيات الأعداد الحقيقية و التي تحقق قانوني الجمع و الضرب التاليين:

$$\forall x, y, a, b \in \mathbb{R} :$$

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) , \quad (1)$$

$$(x, y) \cdot (a, b) = (ax - by, bx + ay) . \quad (2)$$

يمكن، و بكل سهولة، البرهان على الخواص التالية:

التبديلية: كل من قانوني الجمع و الضرب تبديلي.

التجميعية: كل من قانوني الجمع و الضرب تجميعي.

التوزيعية: قانون الضرب توزيعي على قانون الجمع.

العنصر الحيادي: $(0, 0)$ بالنسبة إلى قانون الجمع، و $(1, 0)$ بالنسبة إلى قانون الضرب.

العنصر النظير: بالنسبة إلى قانون الجمع، يوجد لكل عنصر $(x, y) \in \mathbb{C}$ عنصر نظير من $(x', y') \in \mathbb{C}$ حيث $x' = -x$ و $y' = -y$. أما بالنسبة إلى قانون الضرب، فإنه يوجد لكل عنصر $(x, y) \in$

$\mathbb{C}^*$ [1] عنصر نظير $(x'', y'') \in \mathbb{C}^*$ حيث:

$$x'' = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad y'' = \frac{-y}{x^2+y^2} \ .$$

و بالتالي فإنه يُطلق على $\mathbb{C}$ بـ **حقل الأعداد المركبة.**

ملاحظة:

في ما يلي، سنعتمد الكتابتين الاصطلاحيتين التاليتين:

الأعداد الحقيقية: $\forall x \in \mathbb{R} : (x, 0) \equiv x$.

العدد التخيلي i: $(0, 1) \equiv i$ [2].

لاحظ أنه، باستخدام قانون الضرب و هذين الاصطلاحين، لدينا $i^2 = -1$. كما يمكن أيضا كتابة الأعداد المركبة على الشكل:[3]

$$(x, y) \equiv x + iy \ .$$

تعريف

نعتبر العدد المركب $z = x + iy$، حيث $x, y \in \mathbb{R}$.

- يُسمّى العدد x بـ **الجزء الحقيقي** للعدد المركب z، و نكتب $\Re z = x$.
- يُسمّى العدد y بـ **الجزء التخيلي** للعدد المركب z، و نكتب $\Im z = x$.

2.1.1 مرافق عدد مركب

تعريف

مرافق العدد المركب $z = x + iy$، حيث $x, y \in \mathbb{R}$، هو العدد المركب الذي نرمز له بـ z^* و المُعرف بالعلاقة

$$z^* = x - iy \ . \qquad (3)$$

ملاحظة:

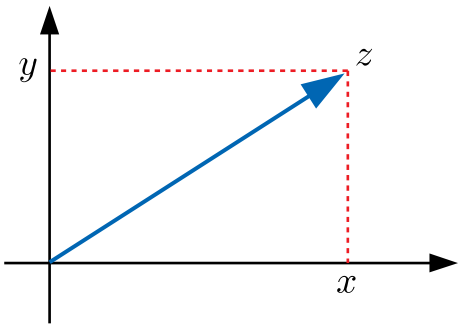
في بعض المراجع، يُرمز للمرافق بـ $\bar{z}$، إلا أننا سنستخدم هنا الرمز z^*.

---

[1] $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$.

[2] في بعض المراجع، يُرمز إلى العدد التخيلي بـ j مكان i، إلا أننا سنستخدم الرمز i هنا.

[3] يُطلق على هذه الكتابة **الشكل الديكارتي (أو الكارتيزي - *Cartesian*)** للعدد المركب.



شكل 1.1: المستوي المركب.

3.1.1 طويلة عدد مركب

تعريف

طويلة العدد المركب $z = x + iy$، حيث $x, y \in \mathbb{R}$، هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $|z|$ و المعرف بـ

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{4}$$

4.1.1 المستوي المركب

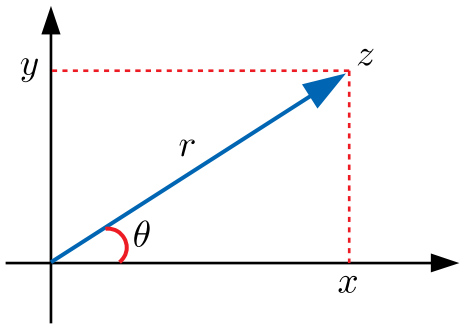
من خلال الكتابة $z = x + iy$، حيث $x, y \in \mathbb{R}$، فإنه يمكن اعتبار الجزأين الحقيقي x و التخيلي y احداثيتي نقطة في المستوي. و بهذا يمكن تمثيل العدد المركب z بشعاع[4] مركبتيه هما x و y كما هو موضح في الشكل 1.1.

تُمثّل مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بمستوٍ نطلق عليه **المستوي المركب**.

5.1.1 التمثيل القطبي

كما أشرنا إليه قبل قليل، فإن العدد المركب $z = x + iy$، حيث $x, y \in \mathbb{R}$، يمثل بشعاع في المستوي المركب ، و x و y هما المركبتين في نظام الاحداثيات الكارتزية. يمكننا الانتقال من هذا النظام إلى نظام

[4] لكن في أحيان كثيرة، سنعتمد مصطلح **النقطة** z، كوننا نهتم فقط بنهاية هذا الشعاع.



شكل 2.1: التمثيل القطبي للأعداد المركبة.

الإحداثيات القطبية كما هو موضح في الشكل 2.1:

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta \ . \tag{5}$$

و بالتالي، يأخذ العدد المركب z ما يُسمّى **الشكل القطبي**

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \ , \tag{6}$$

حيث $r \geq 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$ هما، على التوالي، طويلة و **عمدة** العدد z:

$$r = |z| \quad ; \quad \theta \equiv \mathrm{Arg(z)} \ . \tag{7}$$

ملاحظة:
بما أن الدالتين المثلثيتين $\sin$ و $\cos$ دوريتين، و دورهما هو 2π، فإن كلّ مقدارٍ من الشكل $\theta + 2\pi k$، حيث $k \in \mathbb{Z}$، هو أيضا عمدةٌ للعدد المركّب z.
عندما نختار العمدة بحيث $0 \leq \mathrm{Arg(z)} < 2\pi$ (في بعض المراجع $-\pi < \mathrm{Arg(z)} \leq \pi$) فإننا نتكلّم حينئذٍ عمّا يُسمّى **القيمة الرئيسية** لعمدة العدد المركب z.

مثال

نعتبر العدد المركب $z = 1 - i$، و نكتبه وفق الصيغة القطبية كما يلي:
الطويلة:

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \ .$$

العمدة:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \quad ; \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0 \ ,$$

و بالتالي فإن القيمة الرئيسية للعمدة هي $\theta = \frac{7\pi}{4}$، و بذلك نصل إلى الصيغة القطبية التالية:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) \ .$$

كما يمكننا كتابة الصيغة القطبية التالية

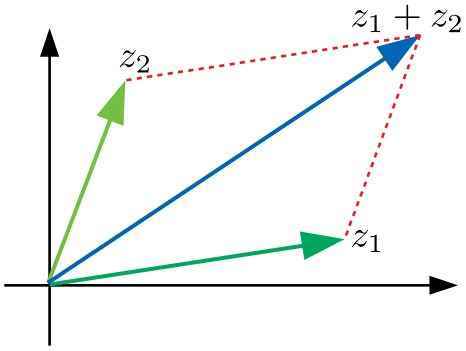
$$z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}) \ ,$$

و هذا لكون الدوال المثلثية دورية (أنظر الملاحظة أعلاه).

6.1.1 التمثيل الهندسي لبعض العمليات على الأعداد المركبة

في ما يلي المعنى الهندسي لبعض العمليات على الأعداد المركبة كما يلي:

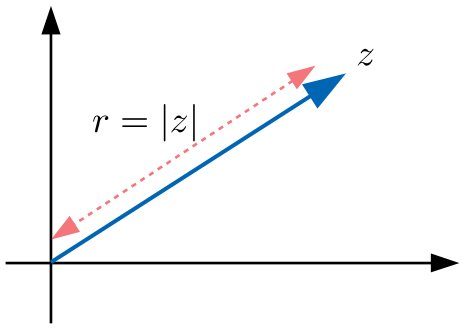
الجمع: يُمثل مجموع عددين مركبين بمجموع الشعاعين المرفقين بهذين العددين، أنظر الشكل 3.1.



شكل 3.1: مجموع عددين مركبين.

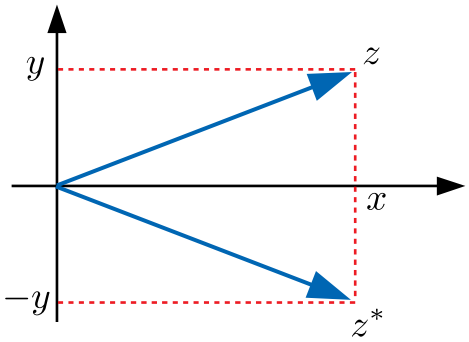
الطويلة: طويلة عدد مركب في المستوي المركب هو المسافة التي تفصله عن المبدأ، أنظر الشكل 4.1.

فمثلا، مجموعة الأعداد التي طويلتها r هي تلك النقاط التي تبعد عن المبدأ بالمقدار r، و هذا هو تعريف الدائرة التي مركزها المبدأ $(z = 0)$ و نصف قطرها r.



شكل 4.1: طويلة عدد مركب.

المرافق: يُمثّل مرافق عدد مركب بنظير الشعاع المرفق بذلك العدد بالنسبة إلى محور الفواصل، كما في الشكل 5.1.



شكل 5.1: مرافق عدد مركب.

2.1 الدوال المركبة لمتغير مركب

1.2.1 مفهوم الدالة المركبة

تعريف

الدالة المركبة لمتغير مركب هي دالة ترفق بكل عدد مركب $z \in \mathcal{D}$ عددا مركبا $w \in \mathcal{R}$، حيث $\mathcal{D}, \mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$.
يُسمّى $\mathcal{D}$ بـ **ميدان** (مجموعة التعريف) الدالة، و $\mathcal{R}$ بـ **مدى** (مجموعة الوصول) الدالة.

لتكن f دالة مركبة لمتغير مركب من $\mathcal{D}$ نحو $\mathcal{R}$، و ليكن $z \in \mathcal{D}$. إن المقدار $f(z)$ عدد مركب له جزء حقيقي و آخر تخيلي. لنضع:

$$\Re f(z) \equiv U \quad ; \quad \Im f(z) \equiv V \ . \tag{8}$$

لكن بما أن المتغير z هو دالة للمتغيرين $x, y \in \mathbb{R}$ حيث: $z = x + iy$, فإن U و V بدورهما دالتان حقيقيتان لمتغيرين حقيقيين:

$$U = U(x, y) \quad ; \quad V = V(x, y) \ , \tag{9}$$

و نكتب

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y) \ . \tag{10}$$

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{C}$ كما يلي:

$$f(z) = z^2 + 1 - i \ .$$

بكتابة $z = x + iy$ نحصل على

$$\begin{aligned} f(z) &= (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy - 1) \\ \Rightarrow U(x, y) &= x^2 - y^2 + 1, \ V(x, y) = 2xy - 1 \ . \end{aligned}$$

2.2.1 الاستمرارية

تعريف

يُقال عن الدالة المركبة f للمتغير المركب z أنها مستمرة عند النقطة $z_0 \in \mathcal{D}$ إذا و فقط إذا تحقق

$$\forall \epsilon > 0, \exists r(\epsilon) > 0; \forall z \in \mathcal{D} : \ |z - z_0| < r(\epsilon) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \ . \quad (11)$$

أو بعبارة أخرى، كلّما اقتربنا من النقطة z_0 في الميدان $\mathcal{D}$ فإن قيمة الدالة f تقترب من $f(z_0)$ في مجموعة المدى $\mathcal{R}$:

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \ . \quad (12)$$

ملاحظة:
يمكن كتابة شرط الاستمرارية (المعادلة (12)) بشكل مختلف لكن مكافئ له. بوضع $z = z_0 + h$ فإننا نحصل على شرط الاستمرارية التالي:

$$\lim_{h \to 0} f(z_0 + h) = f(z_0) \ . \quad (13)$$

مثال

نعتبر الدالتين

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j \quad ; \ \alpha_j \in \mathbb{C} \ ,$$

$$g(z) = \begin{cases} z & : z \neq 1 \\ 0 & : z = 1 \end{cases}$$

سنبين أن f مستمرة عند $\forall z_0 \in \mathbb{C}$، بينما الدالة g مستمرة عند $\forall z_0 \in \mathbb{C} - \{1\}$.
لدينا، بالنسبة إلى الدالة f، ما يلي:

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} : \ \lim_{z \to z_0} f(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z_0^j = f(z_0) \ .$$

أي أن الدالة f مستمرة على مجموعة الأعداد المركبة.
ندرس الآن استمرارية الدالة g. نقسّم الدراسة إلى فرعين:
الفرع الأول: من أجل $z_0 \neq 1$. في هذه الحالة لدينا:

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} - \{1\} : \ \lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} z = z_0 = g(z_0) \ .$$

إذن، الدالة مستمرة على $\mathbb{C} - \{1\}$.
الفرع الثاني: من أجل $z_0 = 1$. لدينا ما يلي:

$$\lim_{z\to 1} g(z) = \lim_{z\to 1} z = 1 \neq g(1) \ .$$

إذن الدالة غير مستمرة عند النقطة $z_0 = 1$.

3.2.1 الاشتقاق

تعريف

تُعرّف مشتقة الدالة f عند النقطة $z \in \mathcal{D}$ بالنهاية، إن وُجدت،

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \ , \tag{14}$$

و نرمز لها بـ $f'(z)$ أو $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)$.
كما يُقال عن الدالة f أنها لا تقبل الاشتقاق عند z إذا كانت النهاية (14) غير موجودة.

ملاحظة:
نقول عن نهاية أنها غير موجودة إن كانت لا تملك قيمة محددة و وحيدة أو كانت غير منتهية.

مثال

نعتبر الدالتين

$$f(z) = z^2 \ ,$$
$$g(z) = z^* \ .$$

نريد في ما يلي دراسة قابلية اشتقاق هاتين الدالتين.

- الدالة f: بتطبيق التعريف نجد

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2zh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2z + h) = 2z \ ,$$

أي أن النهاية موجودة و ذلك من أجل جميع قيم $z \in \mathbb{C}$ و بالتالي تكون الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$.

- الدالة g: بتطبيق التعريف مجددا نحصل على

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^*-z^*}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^*}{h}\ .$$

لكن هذه النهاية غير موجودة (لا توجد لها قيمة وحيدة)، و يمكن ملاحظة ذلك من خلال كتابة h على الشكل القطبي:

$$h=|h|(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow\frac{h^*}{h}=\cos 2\theta-i\sin 2\theta\ .$$

لاحظ أنه عندما $h\to 0$ فإن العمدة θ تبقى غير محددة، و عليه تكون النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{h^*}{h}$ غير محددة أيضا، و منه نخلص إلى أن الدالة g لا تقبل الاشتقاق في أي نقطة من المستوي المركب.

ملاحظة:
إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 فهي بالضرورة مستمرة عند تلك النقطة. البرهان على هذه الملاحظة بسيط و هو كما يلي:

$$\begin{aligned}
&f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\\
\Rightarrow&\lim_{h\to 0}\left[f(z_0+h)-f(z_0)\right]=f'(z_0)\lim_{h\to 0}h=0\\
\Rightarrow&\lim_{h\to 0}f(z_0+h)=f(z_0)\ .
\end{aligned}$$

إذن، انطلاقا من فرضية قابلية الاشتقاق، وصلنا إلى شرط الاستمرارية. وبهذا ننهي البرهان.

تجدر الإشارة هنا إلى أن القضية العكسية ليست دوما صحيحة، أي أنه توجد بعض الدوال تكون مستمرة عند نقطة ما لكنها لا تقبل الاشتقاق عندها. فمثلا الدالة $f(z)=z^*$ مستمرة عند جميع نقاط المستوي بينما لا تقبل الاشتقاق على الإطلاق.

4.2.1 معادلات كوشي-ريمان التفاضلية

سنتعرف في ما يلي على طريقة عملية للحكم على قابلية اشتقاق دالة عند نقطة معطاة. تشتمل هذه الطريقة على المعادلات التفاضلية بمشتقات جزئية لدوال حقيقية ذات متغيرات حقيقية. تُعرف هذه المعادلات بـ **معادلات كوشي-ريمان**[5] .

[5] Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857. Bernhard Riemann, 1826-1866.

لتكن f دالة مركبة لمتغير مركب تُكتب، كما رأينا سابقا، على الشكل

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y) \ . \tag{15}$$

و لتكن f' هي مشتقة f عند النقطة z و التي نكتبها على الشكل:

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) \ , \tag{16}$$

حيث تعبّر α و β عن الجزأين الحقيقي و التخيلي للدالة المشتقة على التوالي.

بمفاضلة المعادلة (15) نستطيع أن نكتب:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}U + i\mathrm{d}V \ . \tag{17}$$

و من جهة أخرى، نستطيع أن نستخرج عبارة $\mathrm{d}f$ من المعادلة (16) كما يلي:

$$\mathrm{d}f = (\alpha+i\beta)\mathrm{d}z = (\alpha+i\beta)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y) = (\alpha\mathrm{d}x - \beta\mathrm{d}y) + i(\beta\mathrm{d}x + \beta\mathrm{d}y) \ , \tag{18}$$

أين استعملنا العلاقة

$$z = x + iy \Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \ . \tag{19}$$

بمقارنة المعادلتين (17) و (18) نستنتج العلاقتين

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \alpha\mathrm{d}x - \beta\mathrm{d}y \ , \\ \mathrm{d}V &= \beta\mathrm{d}x + \alpha\mathrm{d}y \ . \end{aligned} \tag{20}$$

لكن تفاضل الدالتين U و V يُكتب كما يلي:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y \ , \\ \mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y \ . \end{aligned} \tag{21}$$

و أخيرا، من خلال جملتي المعادلتين (20) و (21) نصل إلى النتيجة:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \ , \\ \beta &= \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \ . \end{aligned} \tag{22}$$

تُسمّى هاتين العلاقتين الأخيرتين بـ **معادلات كوشي-ريمان التفاضلية.**

يمكن تلخيص ما سبق في القضية التالية:

الدالة $f = U + iV$ تقبل الاشتقاق عند النقطة z $\Leftarrow$ معادلات كوشي-ريمان التفاضلية (المعادلة (22)) تكون محققة.

كما أن الاتجاه العكسي للاستلزام في القضية أعلاه صحيح أيضا، بمعنى:

U و V دالتان حقيقيتان تقبلان الاشتقاق عند النقطة (x, y) و تحققان معادلات كوشي-ريمان التفاضلية (المعادلة (22)) $\Leftarrow$ الدالة f المعطاة بالعلاقة $f(z) = U + iV$ تقبل الاشتقاق عند النقطة $z = x + iy$ و الدالة المشتقة هي

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} \ . \tag{23}$$

مثال

نريد إيجاد الدالة المشتقة لكل من الدالتين

$$g(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \ . \qquad ; \qquad f(z) = |z|^2 + \frac{1}{2}(z^2 - z^{*2})$$

- نهتم أولا بالدالة f. باستخدام العلاقة $z = x + iy$ يمكننا إعادة كتابة الدالة f كما يلي:

$$f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy \ .$$

نضع

$$V(x, y) = 2xy \ , \qquad ; \qquad U(x, y) = x^2 + y^2$$

ثم نحسب المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \qquad ; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y \ ,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 2x \ .$$

لاحظ هنا أن معادلات كوشي-ريمان (المعادلة (22)) محققة فقط من أجل $z = 0$، أي أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند جميع النقاط $z \in \mathbb{C}^*$.

- نركز الآن على الدالة g. نضع

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad ; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -6xy \ ,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6xy \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \ .$$

لاحظ أن معادلات كوشي-ريمان في هذه الحالة محققة، و بالتالي فإن الدالة g تقبل الاشتقاق عند النقطة z. لكن ما هي عبارة الدالة المشتقة؟ من أجل ذلك نستخدم المعادلة (23) فنجد من دون أي صعوبة العبارة:

$$g'(z) = 3\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) \equiv 3z^2 \ .$$

3.1 الدوال التحليلية

1.3.1 الدالة التحليلية

تعريف

نقول عن الدالة f أنها تحليلية على الميدان $\mathcal{D}$ إذا كانت تقبل الاشتقاق عند جميع نقاط هذا الميدان.

يمكن استغلال معادلات كوشي-ريمان من أجل الحكم على تحليلية دالة $f = U + iV$، و ذلك كما يلي. إذا كان الجزآن الحقيقي U و التخيلي V يحققان الشرطين:

1. تقبلان الاشتقاق عند جميع نقاط ميدان $\mathcal{D}$،
2. تحققان معادلات كوشي-ريمان عند جميع نقاط الميدان $\mathcal{D}$،

فعندئذ يمكننا القول أن الدالة f تحليلية على الميدان $\mathcal{D}$.

مثال

باعتبار نفس الدالة في المثال السابق:

$$g(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \ ,$$

فإنّ

$$U(x,y) = x^2 + y^2 \qquad ; \qquad V(x,y) = 2xy \ .$$

لاحظ أن الدالتين U و V تقبلان الاشتقاق باستمرار (بالنسبة للمشتقتين الجزئيتين بالنسبة إلى x و y) و ذلك على جميع نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$. إضافة إلى هذا، فإن معادلتي كوشي-ريمان محققة

(أنظر المثال السابق) على $\mathbb{R}^2$. إذن يمكن استنتاج أن الدالة g تقبل الاشتقاق عند جميع نقاط $\mathbb{C}$ و هي بذلك تحليلية على هذه المجموعة.

2.3.1 الدالة التوافقية

نعتبر الدالة الحقيقية لمتغيرين حقيقيين، $\psi(x,y)$، و نفرض أنها مستمرة و كذلك مشتقاتها الجزئية حتى الرتبة الثانية.

تعريف

نقول عن ψ أنها دالة توافقية إذا كانت تحقق معادلة لابلاس:

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0\ . \tag{24}$$

حسب هذا التعريف فإن الجزأين الحقيقي و التخيلي لدالة تحليلية هما دالتين توافقيتين. و في ما يلي سنثبت هذا.

لتكن $f = U + iV$ دالة تحليلية على ميدان $\mathcal{D}$. هذا معناه أن U و V تحققان معلادلات كوشي-ريمان:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y}\ ,\\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial y}\ .\end{aligned}$$

باشتقاق هاتين المعادلتين بالنسبة إلى x و y على الترتيب، نحصل على الجملة:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\ ,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\ ,\end{aligned} \tag{25}$$

أما لو نشتق بالنسبة إلى y و x على الترتيب، فنحصل على الجملة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \,, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \,. \end{aligned} \tag{26}$$

نجمع معادلتي الجملة (25) طرفا إلى طرف، و نفس الشيء بالنسبة إلى الجملة (26). نتحصل على المعادلتين:

$$\Delta U = 0 \quad ; \quad \Delta V = 0 \,, \tag{27}$$

حيث Δ يرمز لمؤثر لابلاس[6] في المستوي :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \,. \tag{28}$$

و عليه يكون كل من U و V دالتان توافقيتان. و هذا هو المطلوب إثباته ابتداءً.

قضية

يُقال عن الجزأين الحقيقي و التخيلي لدالة تحليلية أنهما **دالتان مترافقتان توافقيا.**

3.3.1 قواعد اشتقاق الدوال التحليلية

في ما يلي بعض قواعد اشتقاق الدوال التحليلية، و التي تشبه تلك الخاصة بالدوال الحقيقية. تجدر الإشارة إلى أنه يمكن البرهان على جميع هذه القواعد باستخدام تعريف الاشتقاق.

لتكن f، g و h دوال تحليلية. لدينا ما يلي:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \,, \tag{29}$$

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad , \forall \lambda \in \mathbb{C} \,, \tag{30}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \,, \tag{31}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad , f(z) \neq 0 \,, \tag{32}$$

$$(f\,(g(z)))' = f'\,(g(z))\;\, g'(z) \,, \tag{33}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f}} \,. \tag{34}$$

[6] Pierre-Simon Laplace, 1749-1827.

ملاحظة:

1. تُسمّى المعادلة (33) بقانون اشتقاق تركيب الدوال.
2. المعادلة (34) صالحة فقط إذا كانت الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

4.1 تمارين الباب 1

التمرين 1.1: حقل الأعداد المركبة

برهن على ما يلي:

1. قانونا الجمع و الضرب عمليتان داخليتان في مجموعة الأعداد المركبة.
2. قانونا الجمع و الضرب تبديليان و تجميعيان.
3. توزيعية الضرب على الجمع.
4. العنصر الحيادي بالنسبة للجمع هو $(0,0)$ و بالنسبة للضرب هو $(1,0)$.
5. لكل عدد مركب نظير بالنسبة للجمع و الضرب.

التمرين 2.1: بعض خصائص الأعداد المركبة

في ما يلي $z, w \in \mathbb{C}$.

1. بين أن مقلوب العدد $z \neq 0$ يكتب من الشكل $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$. استنتج أن $\frac{1}{i} = -i$.
2. برهن أن $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ و $\Im z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$.
3. برهن على العلاقات التالية:

(ا) $(z+w)^* = z^* + w^*$

(ب) $(zw)^* = z^* w^*$

(ج) $|zw| = |z||w|$

(د)

(ه) $|z^*| = |z|$

(و) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

التمرين 3.1: مبرهنة دي موافر

نهدف في هذا التمرين إلى إثبات مُبرهنة دي موافر[7].

[7] Abraham de Moivre, 1667-1754.

1. نعتبر الأعداد المركبة
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.
أوجد عبارة كل من: $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج z^n $(n \in \mathbb{Z})$.

2. برهن أن

- $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$
- $\sin 5\theta = \sin\theta\,(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1)$

التمرين 4.1: جذور عدد مركب

1. أوجد عبارة $z^{\frac{1}{n}}$، حيث $n \in \mathbb{N}^*$. (نعتبر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$)
2. استنتج جميع جذور المعادلة $z^n = 1$، ثم المعادلة $z^4 = -16$.

التمرين 5.1: التمثيل القطبي للأعداد المركبة

أكتب الأعداد التالية على الشكل القطبي:

- $1 + i\sqrt{3}$
- $-2 + 2i$
- $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$
- -7
- $2i$

التمرين 6.1: التمثيل الأسي للأعداد المركبة

باستخدام سلسلة ماكلورين[8] للدالة الأسية بين أن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (دستور أولر[9]).

التمرين 7.1: النهايات

1. أوجد النهايات التالية:

- $\lim\limits_{z\to 1-i} z^2 + 2z + 5$

[8] Colin Maclaurin, 1698-1746.
[9] Leonhard Euler, 1707-1783.

- $\lim_{z\to i} \frac{(3z+2)(z+1)}{z^2+4z-2}$
- $\lim_{z\to -1+2i} \frac{z^2-3iz-3+i}{z+1-2i}$

2. بين أن النهاية $\lim_{z\to 0} \frac{z}{z^*}$ غير موجودة.

التمرين 8.1: الاستمرارية

1. بين أن الدالة $f(z) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n z^n$ ($\alpha_n \in \mathbb{C}$, N عدد طبيعي) مستمرة، بينما الدالة

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & , z \neq a \\ 0 & , z = a \end{cases},$$

مستمرة لما $a = 0$ و غير مستمرة لما $a \neq 0$ ($a \in \mathbb{C}$).

2. هل الدالة $f(z) = \frac{z^2+1}{z-i}$ مستمرة عند $z = i$ ؟ كيف يمكننا إعادة تعريف الدالة $f(z)$ حتى تكون مستمرة ؟

التمرين 9.1: بعض خصائص اشتقاق الدوال

لتكن f و g دالتان تحليليتان. برهن على صحة العلاقات التالية و ذلك باستخدام تعريف الاشتقاق:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)' &= f' \pm g' \,, \\
(\lambda f)' &= \lambda f' \quad , \forall \lambda \in \mathbb{C} \,, \\
(fg)' &= f'g + fg' \,, \\
\left(\frac{1}{f}\right)' &= -\frac{f'}{f^2} \quad , f(z) \neq 0 \,, \\
(f\,(g(z)))' &= f'\,(g(z))\ g'(z) \,, \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f}} \,.
\end{aligned}$$

التمرين 10.1: الاشتقاق

1. باستخدام تعريف الاشتقاق، أوجد الدالة المشتقة لـ $f(z) = z^2 + 3z - 2$.

2. هل الدالة $f(z) = z^*$ مستمرة ؟ هل تقبل الاشتقاق ؟ و ماذا يمكن قوله حول تحليلية هذه الدالة ؟

التمرين 11.1: معادلات كوشي - ريمان

1. بين أن $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ دالة توافقية.
2. ابحث عن الدالة $v(x,y)$ التي تجعل $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية.
3. أوجد عبارة الدالة $f(z)$.

5.1 حلول تمارين الباب 1

حل التمرين 1.1

1. البرهان على أن قانوني الجمع و الضرب عمليتان داخليتان في مجموعة الأعداد المركبة:

نكتب أولا تعريف عمليتي الجمع $(+)$ و الجداء $(\cdot)$:

$$\forall u, v, x, y \in \mathbb{R} :$$
$$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y) \ , \tag{35}$$
$$(u, v) \ \cdot \ (x, y) = (ux - vy, uy + vx) \ . \tag{36}$$

لدينا القضية التالية صحيحة دوما:

$$\forall \ u, v, x, y \in \mathbb{R}, \ \exists \ s, t \in \mathbb{R} : \ s = u + x, \ t = v + y \ . \tag{37}$$

و عليه فإن حاصل مجموع عددين مركبين، الموضح في المعادلة (35)، هو أيضا عدد مركب. و بالتالي فإن عملية الجمع داخلية في مجموعة الأعداد المركبة.

و على نفس المنوال، فالقضية أدناه صحيحة أيضا:

$$\forall \ u, v, x, y \in \mathbb{R}, \ \exists \ s, t \in \mathbb{R} : \ s = ux - vy, \ t = uy + vx \ , \tag{38}$$

أي أن جداء عددين مركبين كيفيين هو عدد مركب. و عليه فإن قانون الجداء عملية داخلية في مجموعة الأعداد المركبة.

2. البرهان على أن قانوني الجمع و الضرب عمليتان تبديليتان و تجميعيتان:

(ا) خاصية التبديلية:

$\forall \ u, v, x, y \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} (u, v) + (x, y) &= (u + x, v + y) \ , && \text{تعريف قانون الجمع} \\ &= (x + u, y + v) \ , && \text{جمع الأعداد الحقيقية تبديلي} \\ &= (x, y) + (u, v) \ . && \text{استخدمنا تعريف قانون الجمع مجددا} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u, v) \cdot (x, y) &= (ux - vy, uy + vx) \ , && \text{تعريف قانون الجداء} \\ &= (xu - yv, xv + yu) \ , && \text{جداء و جمع الأعداد الحقيقية تبديلي} \\ &= (x, y) \cdot (u, v) \ . && \text{استخدمنا تعريف قانون الجداء مجددا} \end{aligned}$$

(ب) خاصية التجميعية:

$\forall\ s,t,u,v,x,y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Big((s,t)+(u,v)\Big)+(x,y) &= (s+u,t+v)+(x,y)\ ; && \text{تطبيق قانون الجمع للعددين بين القوسين}\\
&= \big(s+[u+x],t+[v+y]\big)\ ; && \text{لأن الجمع تجميعي في مجموعة الأعداد الحقيقية}\\
&= (s,t)+(u+x,v+y)\ ; && \text{استخدمنا تعريف قانون الجمع مجددا}\\
&= (s,t)+\Big((u,v)+(x,y)\Big)\ . && \text{إذن جمع الأعداد المركبة تجميعي}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s,t)\cdot\Big((u,v)\cdot(x,y)\Big) &= (s,t)\cdot(ux-vy,uy+vx)\ ; && \text{تطبيق قانون الجداء للعددين بين القوسين}\\
&= \Big(s(ux-vy)-t(uy+vx)\ ,\quad s(uy+vx)+t(ux-vy)\Big)\\
&= \Big((su-tv)x-(sv+tu)y\ ,\quad (su-tv)y+(sv+tu)x\Big)\\
&= (su-tv,sv+tu)\cdot(x,y)\ ; && \text{طبقنا تعريف قانون الجداء}\\
&= \Big((s,t)\cdot(u,v)\Big)\cdot(x,y)\ . && \text{إذن جداء الأعداد المركبة تجميعي}
\end{aligned}$$

3. البرهان على خاصية توزيعية الضرب على الجمع:

$\forall\ s,t,u,v,x,y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(s,t)\cdot\Big((u,v)+(x,y)\Big) &= (s,t)\cdot(u+x,v+y)\ ,\\
&= \Big(s(u+x)-t(v+y),s(v+y)+t(u+x)\Big)\ ,\\
&= \Big((su-tv)+(sx-ty),(sv+tu)+(sy+tx)\Big)\ ,\\
&= (su-tv,sv+tu)\ +\ (sx-ty,sy+tx)\ ,\\
&= (s,t)\cdot(u,v)\ +\ (s,t)\cdot(x,y)\ .
\end{aligned}$$

4. العنصر الحيادي:

(ا) عملية الجمع:

تعريف

يُقال عن العدد المركب (s,t) أنه العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع في مجموعة

الأعداد المركبة، إذا و فقط إذا تحقق:

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ \exists!\ s,t \in \mathbb{R}:\ (x,y)+(s,t)=(x,y)\ . \qquad (39)$$

باستخدام تعريف قانون الجمع في مجموعة الأعداد المركبة، نجد ما يلي:

$$(x,y)+(s,t)=(x,y) \Rightarrow\ x+s=x;\ y+t=y\ \Rightarrow\ s=t=0\ . \qquad (40)$$

إذن العنصر الحيادي لعملية الجمع في مجموعة الأعداد المركبة هو العدد المركب $(0,0)$، و نصطلح على كتابته من الشكل:

$$(0,0)\equiv 0\ .$$

(ب) عملية الجداء:

تعريف

يُقال عن العدد المركب (s,t) أنه العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجداء في مجموعة الأعداد المركبة، إذا و فقط إذا تحقق:

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ \exists!\ s,t \in \mathbb{R}:\ (x,y)\cdot(s,t)=(x,y)\ . \qquad (41)$$

باستخدام تعريف قانون الجداء في مجموعة الأعداد المركبة، نجد ما يلي:

$$(x,y)\cdot(s,t)=(x,y) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xs-yt=x \\ xt+ys=y \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ .$$

نحل جملة المعادلتين أعلاه فنجد:

$$\Delta\, s = \Delta_s \quad ; \quad \Delta\, t = \Delta_t\ , \qquad (42)$$

حيث عرفنا المقادير التالية:

$$\Delta_s = \Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2+y^2 \quad ; \quad \Delta_t = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (43)$$

حتى نحصل على حل واحد فقط، يجب أن يكون Δ غير معدوم، و هذا يتحقق عندما لا ينعدم x و y معًا. نحصل حينئذ على الحل

$$s = 1 \quad ; \quad t = 0 \ .$$

لكن عندما يكون $x = y = 0$ فإن المعادلة (41) محققة أيضا من أجل $(s,t) = (1,0)$. و بالتالي فإن العنصر الحيادي لعملية الجداء في مجموعة الأعداد المركبة هو العدد المركب $(1,0)$، و نصطلح على كتابته من الشكل:

$$(1,0) \equiv 1 \ .$$

5. العنصر النظير:

(ا) عملية الجمع:

تعريف

يُقال عن العنصر (s,t) أنه نظير العنصر (x,y) بالنسبة إلى عملية الجمع، إذا و فقط إذا كان مجموعهما هو العنصر الحيادي للجمع. و نكتب:

$$(x,y) + (s,t) = (0,0) \ . \qquad (44)$$

باستخدام التعريف أعلاه فإنه يمكن استنتاج و بكل سهولة أن نظير العدد المركب (x,y) هو $(-x,-y)$.

ملاحظة:

يمكن كتابة العنصر النظير للعدد (x,y) بالنسبة للجمع من الشكل:

$$(-x,-y) = (-1,0)\cdot(x,y) \equiv -(x,y) \ . \qquad (45)$$

(ب) عملية الجداء:

تعريف

يُقال عن العنصر (u,v) أنه نظير العنصر (x,y) بالنسبة إلى عملية الجداء إذا و فقط إذا كان جداؤهما هو العنصر الحيادي للجداء. و نكتب:

$$(x,y)\cdot(u,v) = (1,0) \ . \qquad (46)$$

باستخدام التعريف أعلاه فإنه يمكن إيجاد نظير العدد المركب (x, y) كما يلي:

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot(u,v)=(1,0) &\Rightarrow (xu-yv, xv+yu)=(1,0)\ ,\\ &\Rightarrow \begin{cases} xu-yv=1\ ,\\ yu+xv=0\ .\end{cases}\\ &\Rightarrow \Delta u=\Delta_u \quad ; \quad \Delta v=\Delta_v\ , \qquad (47)\end{aligned}$$

حيث عرفنا المقادير التالية:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2+y^2\ ,\\ \Delta_u &= \begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix} = x\\ \Delta_v &= \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix} = -y\ .\end{aligned}$$

إنه لمن الواضح أن العدد المركب المعدوم $(0,0)$ ليس له نظير بالنسبة إلى عملية الجداء، لأن المحدد Δ معدوم في هذه الحالة، و لا نستطيع القسمة على الصفر لإيجاد عبارة كل من u و v باستخدام المعادلة (47).

أما من أجل كل عدد مركب غير معدوم $(x,y)\neq(0,0)$ فإن نظيره بالنسبة للجداء هو:

$$(u,v)=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})\ . \qquad (48)$$

حل التمرين 2.1

1. مقلوب عدد مركب:

مقلوب العدد $z\neq 0$:

$$\forall z\in\mathbb{C}^*:\ \frac{1}{z}=\frac{1}{z}\frac{z^*}{z^*}=\frac{z^*}{z^*z}=\frac{z^*}{|z|^2}\ . \qquad (49)$$

مقلوب العدد التخيلي i :

$$\frac{1}{i}=\frac{i^*}{|i|^2}=\frac{-i}{1}=-i\ . \qquad (50)$$

2. الجزآن الحقيقي و التخيلي لعدد مركب:

$$\begin{aligned} z = \Re z \ + \ i\Im z \Rightarrow z^* &= \Re z \ - \ i\Im z \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Re z = \frac{1}{2}(z + z^*) \ , \\ \Im z = \frac{1}{2i}(z - z^*) \ . \end{array} \right. \end{aligned} \tag{51}$$

3. البرهان على ما يلي:

(ا) $(z + w)^* = z^* + w^*$ ؟

$$\begin{aligned} \forall z, w \in \mathbb{C} : \ (z + w)^* &= \Big((\Re z + i\Im z) + (\Re w + i\Im w) \Big)^* \\ &= \Big((\Re z + \Re w) + i(\Im z + \Im w) \Big)^* \\ &= (\Re z + \Re w) - i(\Im z + \Im w) \\ &= (\Re z - i\Im z) \ + \ (\Re w - i\Im w) \\ &= z^* \ + \ w^* \ . \end{aligned} \tag{52}$$

(ب) $(zw)^* = z^* w^*$ ؟

$$\begin{aligned} \forall z, w \in \mathbb{C} : \ (zw)^* &= \Big((\Re z + i\Im z)(\Re w + i\Im w) \Big)^* \\ &= \Big((\Re z \Re w - \Im z \Im w) + i(\Re z \Im w + \Im z \Re w) \Big)^* \\ &= (\Re z \Re w - \Im z \Im w) - i(\Re z \Im w + \Im z \Re w) \\ &= (\Re z - i\Im z)\Re w \ - \ (i\Re z + \Im z)\Im w \\ &= (\Re z - i\Im z)\Re w \ - \ i(\Re z - i\Im z)\Im w \\ &= (\Re z - i\Im z)(\Re w - i\Im w) \\ &= z^* w^* \ . \end{aligned} \tag{53}$$

(ج) $|zw| = |z||w|$ ؟

$$\begin{aligned}
\forall z, w \in \mathbb{C}: \ |zw| &= |(\Re z + i\Im z)(\Re w + i\Im w)| \\
&= |(\Re z \Re w - \Im z \Im w) + i(\Re z \Im w + \Im z \Re w)| \\
&= \sqrt{(\Re z \Re w - \Im z \Im w)^2 + (\Re z \Im w + \Im z \Re w)^2} \\
&= \sqrt{\begin{array}{l} \Re^2 z \Re^2 w + \Im^2 z \Im^2 w - 2\Re z \Re w \Im z \Im w \\ +\Re^2 z \Im^2 w + \Im^2 z \Re^2 w + 2\Re z \Re w \Im z \Im w \end{array}} \\
&= \sqrt{\Re^2 z (\Re^2 w + \Im^2 w) + \Im^2 z (\Re^2 w + \Im^2 w)} \\
&= \sqrt{(\Re^2 z + \Im^2 z)(\Re^2 w + \Im^2 w)} \\
&= \sqrt{\Re^2 z + \Im^2 z}\ \sqrt{\Re^2 w + \Im^2 w)} \\
&= |z|\ |w| \ . \qquad (54)
\end{aligned}$$

(د) $|z^*| = |z|$ ؟

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}: \ |z^*| &= |(x+iy)^*| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \ . \qquad (55)
\end{aligned}$$

(هـ) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ؟

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}: \ \left|\frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{1}{|z|^2}\ z^*\right| \\
&= \left|\frac{1}{|z|^2}\right|\ |z^*| \\
&= \frac{1}{|z|^2}\ |z| \\
&= \frac{1}{|z|} \ . \qquad (56)
\end{aligned}$$

حل التمرين 3.1

1. إيجاد عبارة كل من:

أولا: $z_1 z_2$.

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 \Big((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) \Big) \\
&= r_1 r_2 \Big(\cos(\theta_1 + \theta_2) \ + i \ \sin(\theta_1 + \theta_2) \Big) \qquad (57)
\end{aligned}$$

ثانيا: $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\begin{aligned} z_1/z_2 &= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\Big((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(-\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\,\Big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\Big) \qquad (58) \end{aligned}$$

ثالثا: z^n.

$$\begin{aligned} &n=0 \quad z^0 = 1 \\ &n=1 \quad z^1 = r(\cos\theta \;+\; \sin\theta) \\ &n=2 \quad z^2 = z\cdot z = r^2\Big(\cos(\theta+\theta) \;+\; i\sin(\theta+\theta)\Big) = r^2(\cos 2\theta \;+\; i\sin 2\theta) \\ &n=3 \quad z^3 = z^2\cdot z = r^3\Big(\cos(2\theta+\theta) \;+\; i\sin(2\theta+\theta)\Big) = r^3(\cos 3\theta \;+\; i\sin 3\theta) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\qquad z^n = r^n(\cos n\theta \;+\; i\sin n\theta)\,. \qquad (59) \end{aligned}$$

باتباع خطوات مماثلة، يمكننا الوصول إلى العلاقة التالية من أجل $\frac{1}{z^n}$:

$$z^{-n} = r^{-n}\Big(\cos(-n\theta) \;+\; i\sin(-n\theta)\Big)\,. \qquad (60)$$

و بالتالي فإنه يمكننا كتابة العلاقة التالية من أجل n عدد صحيح كيفي:

$$\forall n\in\mathbb{Z}:\;\; z^n = r^n(\cos n\theta \;+\; i\sin n\theta)\,. \qquad (61)$$

نبرهن على المعادلة (61) بالتراجع: نفرض أن العلاقة الأخيرة محققة من أجل n و نبرهن على صحتها من أجل $n+1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} = z^n z &= r^{n+1}\Big(\cos(n\theta+\theta) \;+\; i\sin(n\theta+\theta)\Big) \\ &= r^{n+1}\Big(\cos(n+1)\theta \;+\; i\sin(n+1)\theta\Big)\,. \qquad (62) \end{aligned}$$

لاحظ أن المعادلة (62) هي نفسها المعادلة (61) و لكن بتعويض n بـ $n+1$. و بهذا نكون قد برهنا على العلاقة المطلوبة بالتراجع.

2. عبارة $\cos 5\theta$ و $\sin 5\theta$:
نضع $z = \cos\theta + i\sin\theta$ (أي أن الطويلة $r = 1$)، و نستخدم المعادلة (61) من أجل $n = 5$، فنجد:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta\ . \tag{63}$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = (&\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta)\\ &+ i(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)\ .\end{aligned} \tag{64}$$

بمطابقة المعادلتين (63) و (64) نستنتج

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\ , \tag{65}$$

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\ . \tag{66}$$

في المعادلة (65)، حيثما نجد $\sin^2\theta$ نعوضها بـ $1 - \cos^2\theta$ فنحصل على:

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1 - \cos^2\theta) + 5\cos\theta(1 - \cos^2\theta)^2\\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\ .\end{aligned} \tag{67}$$

أما في المعادلة (66) فنستخرج أولا $\sin\theta$ كعامل مشترك ثم نُحدث التعويض كما سبق، فنجد:

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \sin\theta\Big(5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\Big)\\ &= \sin\theta\Big(5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos^2\theta)^2\Big)\\ &= \sin\theta\ (16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1)\ .\end{aligned} \tag{68}$$

حل التمرين 4.1

1. إيجاد عبارة $z^{\frac{1}{n}}$، حيث $n \in \mathbb{N}^*$.
نضع $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $z^{\frac{1}{n}} = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$، حيث r و s موجبان، و θ و φ حقيقيان. لدينا ما يلي:

$$z^{\frac{1}{n}} = s(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z = s^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\ . \tag{69}$$

لكن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، و بالتالي بعد المطابقة نحصل على:

$$\begin{cases} s^n\cos n\varphi = r\cos\theta\ , \\ s^n\sin n\varphi = r\sin\theta\ . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = r^{\frac{1}{n}}\ , \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ . \end{cases} \tag{70}$$

إذن وصلنا إلى العبارة المنشودة:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\big(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}\big) \ + \ i\sin\big(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}\big)\Big) \equiv w_k \ . \qquad (71)$$

لاحظ الخاصية الدورية للمقادير w_k:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_{\pm n} \ , \\ w_1 &= w_{\pm(n+1)} \ , \\ w_2 &= w_{\pm(n+2)} \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

أي أنه توجد n قيمة مختلفة للجذر من الرتبة n $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)$ و هي w_0، w_1، ... , w_{n-1}.

2. إيجاد جميع جذور المعادلة

: $z^n = 1$

$$\begin{aligned} z^n = 1 = 1(\cos 0 \ + \ i\sin 0) \Rightarrow z \equiv w_k &= 1^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\frac{0+2\pi k}{n} \ + \ i\sin\frac{0+2\pi k}{n}\Big) \\ &= \Big(\cos\frac{2\pi k}{n} \ + \ i\sin\frac{2\pi k}{n}\Big) \ , \ k = 0,\dots,n-1 \ . \end{aligned}$$

: $z^4 = -16$

$$\begin{aligned} z^4 = -16 = 16(\cos\pi \ + \ i\sin\pi) \Rightarrow z \equiv w_k &= 16^{\frac{1}{4}}\Big(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} \ + \ i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\Big) \ , \\ &= 2\Big(\cos\frac{(2k+1)\pi}{4} \ + \ i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\Big) \ , \ k = 0,1,2,3 \ . \end{aligned}$$

و نجد الجذور التالية:

$$w_0 = \sqrt{2}\,(1+i),\ w_1 = \sqrt{2}\,(-1+i),\ w_2 = \sqrt{2}\,(-1-i),\ w_3 = \sqrt{2}\,(1-i)\,.$$

حل التمرين 5.1

ليكن العدد المركب z المُعطى على الشكل الكارتزي: $z = x + iy$. يُمكن كتابة هذا العدد على الشكل القطبي $z = r(\cos\theta \ + \ i\sin\theta)$ حيث

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \ , \qquad (72)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \ , \qquad (73)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \ . \qquad (74)$$

باستخدام هاتين العلاقتين الآخيرتين، نكتب الأعداد التالية على الشكل القطبي:

$$\begin{aligned}
1+i\sqrt{3} &= 2(\cos\frac{\pi}{3} \ + \ i\sin\frac{\pi}{3}) \ , \\
-2+2i &= 2(\cos\frac{\pi}{4} \ + \ i\sin\frac{\pi}{4}) \ , \\
\sqrt{6}-i\sqrt{2} &= \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{6} \ + \ i\sin\frac{\pi}{6}) \ , \\
-7 &= 7(\cos\pi \ + \ i\sin\pi) \ , \\
2i &= 2(\cos\frac{\pi}{2} \ + \ i\sin\frac{\pi}{2}) \ .
\end{aligned}$$

حل التمرين 6.1

تُكتب سلسلة ماكلورين للدالة الأسية e^z من الشكل:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ . \tag{75}$$

بجعل $z = i\theta$، حيث θ حقيقي، تصبح السلسلة أعلاه

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \ \frac{\theta^n}{n!} \ . \tag{76}$$

و بما أن مربع العدد التخيلي i هو $i^2 = -1$ فإنه يمكن استنتاج ما يلي:

$$\forall p \in \mathbb{N} : \ (i)^{2p} = (-1)^p \ , \ (i)^{2p+1} = i(-1)^p \ . \tag{77}$$

و عليه فمن السهل إعادة كتابة سلسلة ماكلورين أعلاه من الشكل:

$$e^{i\theta} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} \ + \ i\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \ . \tag{78}$$

إن المجموع الأول يمثل سلسلة ماكلورين لدالة جب التمام $\cos\theta$، أمّا المجموع الثاني فهو لدالة الجب $\sin\theta$، و عليه نصل إلى النتيجة المنشودة في هذا التمرين:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{79}$$

حل التمرين 7.1

1. حساب النهايات التالية:

$$\lim_{z\to 1-i} z^2+2z+5 = (1-i)^2+2(1-i)+5 = 7-4i\ ,$$
$$\lim_{z\to i}\frac{(3z+2)(z+1)}{z^2+4z-2} = \frac{(3i+2)(i+1)}{i^2+4i-2} = \frac{-1+5i}{-3+4i} = \frac{23-11i}{25}\ ,$$
$$\lim_{z\to -1+2i}\frac{z^2-3iz-3+i}{z+1-2i} = \lim_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)(z-1-i)}{z+1-2i} = \lim_{z\to -1+2i}(z-1-i) = -2+i\ .$$

2. النهاية $\lim_{z\to 0}\frac{z}{z^*}$: نضع $z=re^{i\theta}$ و بالتالي

$$z\longrightarrow 0 \ \Leftrightarrow\ r\longrightarrow 0\ ,$$
$$\Rightarrow\ \lim_{z\to 0}\frac{z}{z^*} = \lim_{r\to 0}\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{2i\theta}\ .$$

لاحظ أن النهاية أعلاه تتعلق بالزاوية θ و التي هي كيفية لمّا $z\longrightarrow 0$. و بالتالي فلا توجد لها قيمة واحدة، و نقول حينئذ أن النهاية $\lim_{z\to 0}\frac{z}{z^*}$ غير موجودة.

حل التمرين 8.1

1. استمرارية الدالتين f و g:

الدالة f:

$$\forall z_0\in\mathbb{C}:\ \lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = \sum_{n=0}^{N}\alpha_n z_0^n = f(z_0)\ ,$$

أي أن الدالة f مستمرة عند كل نقطة من المستوي المركب.

الدالة g: (ا) دراسة الاستمرارية عند $z_0\neq a$:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} g(z) = \lim_{z\longrightarrow z_0} z^2 = z_0^2 = g(z_0)\ ,$$

إذن g مستمرة عند كل $z_0\neq a$.

(ب) دراسة الاستمرارية عند $z_0=a$:

$$\lim_{z\longrightarrow a} g(z) = \lim_{z\longrightarrow a} z^2 = a^2\ .$$

نميّز حالتين:

$a=0\Rightarrow \lim_{z\longrightarrow a} g(z) = 0 = g(0)$ الدالة مستمرة عند a

$a\neq 0\Rightarrow \lim_{z\longrightarrow a} g(z) = a^2 \neq g(0)$ الدالة غير مستمرة عند a

2. استمرارية الدالة $f(z)=\frac{z^2+1}{z-i}$ عند $z=i$ ؟

إنه لمن الواضح أن $f(i)$ غير مُعرّف، إلّا أنه لو قمنا بحساب النهاية نجد

$$\lim_{z\longrightarrow i} f(z)=\lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2+1}{z-i}=\lim_{z\longrightarrow i}\frac{(z-i)(z+i)}{z-i}=\lim_{z\longrightarrow i} z+1=2i\ ,$$

أي أن النهاية موجودة. و عليه لو نعيد تعريف الدالة كما يلي:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{z^2+1}{z-i} & :z\neq i\ ,\\ 2i & :z=i\ ,\end{cases}$$

فإننا نحصل على دالة مستمرة عند كل z_0 من $\mathbb{C}$.

حل التمرين 9.1

لتكن f و g دالتان تحليليتان على مجموعة $G\subseteq\mathbb{C}$.

البرهان على الخاصية $(f\pm g)'=f'\pm g'$

$$\begin{aligned}\forall z\in G:(f\pm g)'(z)&=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(f\pm g)(z+h)-(f\pm g)(z)}{h}\ ,\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\Big(f(z+h)\pm g(z+h)\Big)-\Big(f(z)\pm g(z)\Big)}{h}\ ,\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\Big(f(z+h)-f(z)\Big)\pm\Big(g(z+h)-g(z)\Big)}{h}\ ,\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\pm\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\ ,\\ &=f'(z)\pm g'(z)\ ,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f\pm g)'=f'\pm g'\ .$$

البرهان على الخاصية $(\lambda f)'=\lambda f'$

$$\begin{aligned}\forall z\in G,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}:(\lambda f)'(z)&=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(\lambda f)(z+h)-(\lambda f)(z)}{h}\ ,\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\lambda f(z+h)-\lambda f(z)}{h}\ ,\\ &=\lambda\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\ ,\\ &=\lambda\ f'(z)\ ,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda f)'=\lambda f'\ .$$

البرهان على الخاصية $(fg)' = f'g + fg'$

$$\begin{aligned}
\forall z \in G : (f\cdot g)'(z) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(f\cdot g)(z+h) - (f\cdot g)(z)}{h} \ , \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \ , \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z+h) + \Big(f(z)g(z+h) - f(z)g(z+h)\Big) - f(z)g(z)}{h} \ , \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\Big(f(z+h) - f(z)\Big)g(z+h) + f(z)\Big(g(z+h) - g(z)\Big)}{h} \ , \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\Big(f(z+h) - f(z)\Big)g(z+h)}{h} \ + \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z)\Big(g(z+h) - g(z)\Big)}{h} \ , \\
&= g(z) \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \ + \ f(z) \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \ , \\
&= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \ ,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (fg)' = f'g + fg' \ .$$

البرهان على الخاصية $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

نفرض أن $\forall z \in G : \ f(z) \neq 0$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
\forall z \in G : \left(\frac{1}{f}\right)'(z) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(z+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(z)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(z+h)} - \frac{1}{f(z)}}{h} \ , \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{-\frac{f(z+h)-f(z)}{h}}{f(z+h)f(z)} \ , \\
&= \frac{\lim\limits_{h\longrightarrow 0} -\frac{f(z+h)-f(z)}{h}}{\lim\limits_{h\longrightarrow 0} f(z+h)f(z)} \ , \\
&= -\frac{f(z)'}{f^2(z)} \ ,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \ .$$

البرهان على الخاصية $\Big(f\left(g(z)\right)\Big)' = f'\left(g(z)\right)\ g'(z)$

أي أننا نريد البرهان على اشتقاق تركيب دالتين. نفرض في ما يلي أن الدالة g تحليلية على المجموعة

G، بينما الدالة f فتحليلية على $g(G)$. إضافة إلى ذلك، نرمز لتركيب الدالتين f و g بـ $f \circ g$ حيث:

$$\forall z \in G : (f \circ g)(z) \equiv f(g(z)) \ .$$

لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned} \forall z \in G : \ (f \circ g)(z) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(f \circ g)(z+h) - (f \circ g)(z)}{h} \ , \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\Big(g(z+h)\Big) - f\Big(g(z)\Big)}{h} \ . \end{aligned} \tag{80}$$

نكتب نشر تايلور[10] من الرتبة الأولى للدالة $g(z+h)$ بجوار z فنحصل على

$$g(z+h) = g(z) + hg'(z) \ ,$$

ثمّ نعوّض في المعادلة (80) فنحصل على العبارة

$$\forall z \in G : \ (f \circ g)(z) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\Big(g(z) + hg'(z)\Big) - f\Big(g(z)\Big)}{h} \ . \tag{81}$$

نكتب الآن نشر تايلور من الرتبة الأولى للدالة $f\Big(g(z) + hg'(z)\Big)$ بجوار $f\Big(g(z)\Big)$،

$$f\Big(g(z) + hg'(z)\Big) = f\Big(g(z)\Big) + hg'(z)f'\Big(g(z)\Big) \ ,$$

ثم نعوض في المعادلة (81) فنصل إلى ما يلي:

$$\begin{aligned} \forall z \in G : \ (f \circ g)(z) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{hg'(z)f'\Big(g(z)\Big)}{h} \ , \\ &= g'(z)f'\Big(g(z)\Big) = g'(z)(f' \circ g)(z) \ , \\ \Rightarrow (f \circ g)' &= g'(f' \circ g) \ . \end{aligned}$$

البرهان على الخاصية $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f}}$

[10] Brook Taylor, 1685-1731.

نفرض في ما يلي أن الدالة العكسية لـ f موجودة و لا تنعدم على $f(G)$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}\forall z \in G:\ f'(z) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\ ,\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{h}{f(z+h)-f(z)}}\ ,\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{(z+h)-z}{f(z+h)-f(z)}}\ ,\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{f^{-1}\Big(f(z+h)\Big)-f^{-1}\Big(f(z)\Big)}{f(z+h)-f(z)}}\ ,\end{aligned} \tag{82}$$

حيث استخدمنا في العلاقة الأخيرة الخاصية : $f^{-1}\Big(f(z)\Big) = z$.

نُعرّف المقدار $\tilde{h} \equiv f(z+h)-f(z)$ فيكون لدينا:

$$h \longrightarrow 0 \ \Rightarrow\ \tilde{h} \longrightarrow 0\ .$$

بالتعويض في المعادلة (82) نصل إلى النتيجة التالية:

$$\begin{aligned}\forall z \in G:\ f'(z) &= \frac{1}{\lim\limits_{\tilde{h}\longrightarrow 0} \frac{f^{-1}\Big(f(z)+\tilde{h}\Big)-f^{-1}\Big(f(z)\Big)}{\tilde{h}}}\ ,\\ &= \frac{1}{f^{-1\prime}(f(z))}\ .\end{aligned}$$

و حيث أن $f' \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ و $f^{-1\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f}$ فنكون بهذا قد أثبتنا العلاقة المطلوبة ابتداء.

حل التمرين 10.1

1. باستخدام تعريف الاشتقاق، نبحث عن الدالة المشتقة لـ $f(z) = z^2+3z-2$.

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\ ,\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\Big((z+h)^2+3(z+h)-2\Big)-\Big(z^2+3z-2\Big)}{h}\ ,\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{h^2+2hz+3h}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\ h+2z+3\ ,\\ &= 2z+3\ .\end{aligned}$$

2. استمرارية و قابلية اشتقاق الدالة $f(z) = z^*$:

أولا، دراسة الاستمرارية :

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} : \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \longrightarrow z_0} z^* = z_0^* = f(z_0) ,$$

أي أن الدالة f مستمرة عند كل نقطة z_0 من مجموعة الأعداد المركبة.

ثانيا، دراسة قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(z+h)^* - z^*}{h} ,$$
$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^*}{h} . \qquad (83)$$

نكتب h من الشكل الأسي، $h = |h|e^{i\varphi}$. و عليه يكون لدينا

$$h \longrightarrow 0 \Rightarrow \forall \varphi \in \mathbb{R} : \ |h| \longrightarrow 0 ,$$

و بالتعويض في المعادلة (83) نصل إلى العبارة

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{|h| \longrightarrow 0} e^{-2i\varphi} = e^{-2i\varphi} .$$

بما أن العمدة φ عدد حقيقي كيفي، فإن النهاية أعلاه لا تأخذ قيمة محددة، و عليه يتضح لدينا أن الدالة z^* لا تقبل الاشتقاق عند جميع الأعداد المركبة. إذن هذه الدالة ليست تحليلية.

حل التمرين 11.1

1. حتى تكون الدالة $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ توافقية، يجب أن تحقق معادلة لابلاس $\Delta u = 0$. لدينا ما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(\sin y - x \sin y + y \cos y) \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(-2 \sin y + x \sin y - y \cos y) ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \sin y) \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \sin y + 2 \sin y + y \cos y) .$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv \Delta u = 0 ,$$

أي أن الدالة u توافقية.

2. نبحث عن الدالة $v(x,y)$ التي تجعل $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية. و يكون ذلك محققا لمّا:

- u و v تقبلان الاشتقاق باستمرار مرتين على الأقل على مجموعة ما $G \subseteq \mathcal{C}$،
- u و v تحققان معادتي كوشي-ريمان التفاضليتين على المجموعة G.

واضح أن الدالة u تقبل الاشتقاق باستمرار ما لا نهاية من المرات على المجموعة $\mathbb{R}^2$. نبحث إذن عن دالة $v(x,y)$ و التي يجب أن تقبل الاشتقاق باستمرار مرتين على الأقل على كل أو جزء من $\mathbb{R}^2$، و تحقق معادتي كوشي-ريمان

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(-x\cos y + \cos y - y\sin y)\ , \tag{84}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\ = e^{-x}(-x\sin y + \sin y + y\cos y)\ . \tag{85}$$

نُكامل المعادلة (85) بالنسبة إلى y فنجد

$$v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)\ +\ \lambda(x)\ ,$$

حيث ثابت التكامل λ هو دالة للمتغير الذي لم نكامل عليه (أي اعتبرناه ثابتا عند المكاملة بالنسبة إلى y). نُعوّض الآن هذه العبارة في المعادلة (84) فنستنتج أن $\lambda'(x)=0$ أي أن λ ثابت. و بالتالي تكون عبارة v هي

$$v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)\ +\ \lambda\ .$$

واضح أيضا أن v تقبل الاشتقاق باستمرار ما لا نهاية من المرات على $\mathbb{R}^2$. إذن الدالة $f=u+iv$ تحليلية على $\mathcal{C}$.

3. إيجاد عبارة الدالة $f(z)$ بدلالة $z=x+iy$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y)+iv(x,y)\ ,\\
&= e^{-x}(x\sin y - y\cos y)\ + ie^{-x}(x\cos y + y\sin y)\ + i\lambda\ ,\\
&= e^{-x}(x\sin y - y\cos y + ix\cos y + iy\sin y)\ + i\lambda\ ,\\
&= e^{-x}\Big(ix(\cos y - i\sin y) - y(\cos y - i\sin y)\Big)\ + i\lambda\ ,\\
&= e^{-x}(ix-y)(\cos y - i\sin y)\ + i\lambda\ ,\\
&= i(x+iy)e^{-x}e^{-iy}\ + i\lambda\ ,\\
&= ize^{-z}\ + i\lambda\ .
\end{aligned}$$

باب 2

الدوال الأساسية

سندرس في هذا الباب الدوال الأولية المركبة لمتغير مركب. نهتم بالخصوص بصياغة هذه الدوال بدلالة الجزئين الحقيقي و التخيلي للمتغير المركب. في ما يلي سنضع

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ ,$$

حيث $x, y, \theta \in \mathbb{R}$، و $r \geq 0$.

1.2 الدالة الأسية

تعريف

تُعرّف الدالة الأسية لمتغير مركب بـ

$$e^z = e^{x+iy} \equiv e^x(\cos y + i\sin y)\ . \qquad (1)$$

ملاحظة:

- يمكن بكل سهولة تبيان أن الدالة الأسية تحليلية على $\mathbb{C}$.
- في العلاقة (1) أعلاه، استخدمنا $e^{iy} = \cos y + i\sin y$، (أنظر التمرين (6.1)).

مثال

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi\ ,$$
$$e^{1+i\pi} = e(\cos\pi + i\sin\pi) = -e\ ,$$
$$e^{-1+i\sqrt{3}} = e^{-1}(\cos\sqrt{3} + i\sin\sqrt{3})\ .$$

نهتم الأن بإيجاد الدالة المشتقة للدالة الأسية. بما أن الدالة الأسية تحليلية على $\mathbb{C}$ فإنه يمكننا إيجاد الدالة المشتقة باستخدام المعادلة (23):

$$e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y \equiv U(x,y) + iV(x,y)\ , \tag{2}$$
$$(e^z)' = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z\ , \tag{3}$$

و هذا متوافق مع اشتقاق الدالة الأسية الحقيقية.

تعريف

نعرّف الدالة الأسية a^z، $a \in \mathbb{C}$، كما يلي:

$$a^z = e^{z\ln a}\ , \tag{4}$$

حيث ln هي الدالة اللوغارتمية التي سندرسها في ما بعد.

2.2 الدالة اللوغارتمية

تعريف

تُعرف الدالة اللوغارتمية للمتغير المركب بـ

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + lne^{i\theta} = \ln r + i\theta\ . \tag{5}$$

إن الدالة اللوغارتمية هي دالة متعددة القيم، أي أنه توجد أكثر من قيمة للدالة موافقة لنفس النقطة

z. يمكن ملاحظة ذلك من خلال ما يلي:

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi k)} \quad ; \ k \in \mathbb{Z} \ .$$
$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi k) \ . \tag{6}$$

لاحظ أنه يوجد عدد غير منتهٍ من قيم الدالة اللوغارتمية التي توافق نفس النقطة z.

تعريف

تُعرف القيمة الرئيسية للدالة اللوغارتمية بـ

$$\mathrm{P.V}\ln z = \ln r + i\theta \ , \tag{7}$$

حيث θ هي عمدة المتغير z مع $-\pi < \theta \leq \pi$.

إن دالة القيمة الرئيسية اللوغارتمية هي دالة تحليلية على ميدان الأعداد المركبة التي عمدتها ضمن المجال $-\pi < \theta \leq \pi$.

مثال

$$\mathrm{P.V}\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \ ,$$
$$\mathrm{P.V}\ln(-2) = \ln(2e^{i\pi}) = \ln\sqrt{2} + i\pi \ .$$

تعريف

تُعرف الدالة اللوغارتمية ذات الأساس a، $a \in \mathbb{C}$، بالعلاقة

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a} \ . \tag{8}$$

3.2 الدوال المثلثية

تعريف

نعرف دالة الجيب و جيب التمام لمتغير مركب كما يلي:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \ , \tag{9}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \ . \tag{10}$$

يمكن إيجاد الجزأين الحقيقي و التخيلي للدالتين الجيب و جيب التمام بالعبارتين (أنظر التمرين (2.2))

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \ , \tag{11}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \ . \tag{12}$$

مثال

$$\cos(3i) = \cosh 3 = \frac{1}{2}(e^3 + e^{-3}) \ ,$$

$$\sin(2 - 3i) = \sin 2 \cosh 3 - i \cos 2 \sinh 3 \ .$$

يمكننا، استنادا إلى تعريف الدالتين الجيبيتين أعلاه، تعريف الدوال المثلثية الأخرى كما يلي:

تعريف

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \ , \tag{13}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \ , \tag{14}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \ . \tag{15}$$

نترك مسألة إيجاد الجزأين الحقيقي و التخيلي للدوال أعلاه كتمرين للقارئ، (أنظر التمرين (2.2)).

ملاحظة:

من خلال تعريف الدوال المثلثية السابقة، فإنه يمكن ملاحظة أنها دوال وحيدة القيم و تحليلية على $\mathbb{C}$ (باستثناء بعض النقط لبعض الدوال).

4.2 الدوال المثلثية العكسية

يمكن البرهان على صيغ الدوال المثلثية العكسية التالية (أنظر التمرين (5.2)):

$$\sin^{-1} z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) , \tag{16}$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) , \tag{17}$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) , \tag{18}$$

$$\text{cotan}^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right) , \tag{19}$$

$$\sec^{-1} z = -i \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) , \tag{20}$$

$$\csc^{-1} z = -i \ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right) . \tag{21}$$

ملاحظة:
لاحظ أن الدوال المثلثية العكسية تُكتب بدلالة الدالة اللوغارتمية، و حيث أن هذه الأخيرة متعددة القيم (كما رأينا هذا قبل قليل)، فإنّ الدوال المثلثية العكسية بدورها متعددة القيم.

5.2 الدوال الزائدية

تعريف

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) , \tag{22}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) , \tag{23}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} . \tag{24}$$

سنبرهن في التمرين (4.2) على أن الجزأين الحقيقي و التخيلي للدوال الزائدية أعلاه تُكتب:

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \ , \tag{25}$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \ , \tag{26}$$

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{\sinh 2x + i \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} \ . \tag{27}$$

ملاحظة:
إن الدالتين الزائديتين cosh و sinh تحليليتان على $\mathbb{C}$، أمّا الدالة tanh فتحليلية على $\mathbb{C}$ باستثناء النقاط التي تجعل المقام $(\cosh z)$ معدومًا.

6.2 الدوال الزائدية العكسية

يمكن البرهان على صيغ الدوال الزائدية العكسية التالية (أنظر التمرين (5.2)):

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \ , \tag{28}$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \ , \tag{29}$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \ . \tag{30}$$

ملاحظة:
لاحظ أن الدوال الزائدية العكسية تُكتب بدلالة الدالة اللوغارتمية، و بالتالي فإن هذه الدوال متعددة القيم.

7.2 الدالة z^α

يمكن تعريف الدالة z^α، حيث $\alpha \in \mathbb{C}$، بالعلاقة

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \ . \tag{31}$$

على حسب قيم α فإن الدالة z^α قد تكون متعددة أو وحيدة القيم. فباستخدام تعريف الدالة اللوغارتمية، يمكن الوصول إلى المعادلة

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i(\theta + 2k\pi))} \ . \tag{32}$$

يمكننا أن نميز الحالات الثلاث التالية:

α **عدد صحيح:** فيصبح لدينا العدد 2π مضروب في عدد صحيح، و بالتالي يكون لدينا

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \ . \tag{33}$$

لاحظ أن الدالة z^α تأخذ قيمة وحيدة عند النقطة z.

α **عدد كسري:** في هذه الحالة يمكن كتابة $\alpha = \frac{m}{n}$ حيث n و m عددان صحيحان أوليان في ما بينهما. في هذه الحالة، توجد n قيمة مختلفة للدالة z^α توافق القيم $k = 0, \ldots, n-1$.

α **عدد أصمّ أو غير حقيقي:** إذا كان α عدد أصم أو عدد مركب له جزء تخيلي غير معدوم فإنه يوجد عدد لا نهائي من القيم الممكنة للدالة z^α.

8.2 الدوال الكسرية

تعريف

الدالة الكسرية لمتغير مركب هي دالة تُكتب من الشكل $\frac{P(z)}{Q(z)}$ حيث P و Q كثيري حدود للمتغير المركب z.

إن الدوال الكسرية هي دوال تحليلية على $\mathbb{C}$ باستثناء عدد منته من النقط (جذور المقام).

9.2 تمارين الباب 2

التمرين 1.2: الدالة الأسية

برهن على ما يلي:

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
2. $|e^z| = e^{\Re z}$.
3. $\forall k \in \mathbb{Z},\ e^{z+i2\pi k} = e^z$.
4. $z^i = e^{-\theta-2\pi k}\left(\cos\ln r + i\sin\ln r\right)$;$z = re^{i\theta}$,$k \in \mathbb{Z}$.
5. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

التمرين 2.2: الدوال المثلثية

1. برهن أن جذور $\sin z$ و $\cos z$ جميعها حقيقية.
2. أوجد كلا من الجزأين الحقيقي و التخيلي للدوال التالية:

$$\sin z,\ \cos z,\ \sec z,\ \csc z,\ \tan z,\ \cot z\ .$$

3. أوجد عبارة $\sin(1+i)$ و $\cos(re^{i\theta})$.
4. بين أن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
5. برهن أن:

(ا) $\forall z \in \mathbb{C}:\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

(ب) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}:\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1\cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$.

(ج) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}:\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1\cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$.

(د) $\forall z \in \mathbb{C}:\ e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

التمرين 3.2: الدالة اللوغارتمية

أحسب ما يلي:

- $\ln i$
- $\ln(-1)$

- $\ln(2+3i)$
- $\log_2(1-i)$
- $\log_{-2}(1-i)$

التمرين 4.2: الدوال الزائدية

1. أوجد الجزأين الحقيقي و التخيلي للدوال الزائدية $\sinh z$، $\cosh z$ و $\tanh z$.

2. برهن على ما يلي:

   (ا) $\forall z \in \mathbb{C}: \ \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

   (ب) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$.

   (ج) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$.

3. بين العلاقة بين الدوال المثلثية و الزائدية التالية:

   (ا) $\sin iz = i \sinh z$.

   (ب) $\cos iz = \cosh z$.

   (ج) $\tan iz = i \tanh z$.

التمرين 5.2: الدوال العكسية

1. أوجد عبارة لكل من $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$ و $\tan^{-1} z$ حيث $\sin^{-1} 0 = 0$, $\cos^{-1} 1 = 0$ و $\tan^{-1} 0 = 0$.

2. نفس السؤال السابق من أجل: $\sinh^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$ و $\tanh^{-1} z$ حيث $\sinh^{-1} 0 = 0$, $\cosh^{-1} 1 = 0$ و $\tanh^{-1} 0 = 0$.

10.2 حلول تمارين الباب 2

حل التمرين 1.2

البرهان على ما يلي :

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$:

$$
\begin{aligned}
& z_1 = x_1 + iy_1 \quad ; \quad z_2 = x_2 + iy_2 \ , \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{z_1}{=}e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \\ e^{z_2}{=}e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \end{array} \right. \\
\Rightarrow e^{z_1}e^{z_2} &= \Big(e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\Big)\Big(e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)\Big) \ , \\
&= e^{x_1+x_2}\Big((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)\Big) \ , \\
&= e^{x_1+x_2}\Big(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\Big) \ , \\
&= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \ , \\
&= e(z_1 + z_2) \ .
\end{aligned}
$$

2. $|e^z| = e^{\Re z}$:

$$
\begin{aligned}
z = x + iy \ \Rightarrow |e^z| &= |e^x(\cos y + i \sin y)| \ , \\
&= \sqrt{\Big(e^x \cos y\Big)^2 + \Big(e^x \sin y\Big)^2} \ , \\
&= e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} \ , \\
&= e^x \equiv e^{\Re z} \ .
\end{aligned}
$$

3. $\forall k \in \mathbb{Z},\ e^{z+i2\pi k} = e^z$.

$$
\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z} : e^{z+i2\pi k} &= e^{x+i(y+2\pi k)} \ , \\
&= e^x\Big(\cos(y + 2\pi k) + i \sin(y + 2\pi k)\Big) \ , \\
&= e^x(\cos y + i \sin y) \ , \\
&= e^z \ .
\end{aligned}
$$

4. $z^i = e^{-\theta-2\pi k}\left(\cos\ln r + i\sin\ln r\right)$:

$$\begin{aligned} z = re^{i\theta} = re^{i\theta+i2\pi k} \Rightarrow z^i &= e^{i\ln z}\ , \\ &= e^{i\ln(re^{i\theta+i2\pi k})}\ , \\ &= e^{i\left(\ln r+i(\theta+2\pi k)\right)}\ , \\ &= e^{-\theta-2\pi k}(\cos\ln r\ + i\sin\ln r)\ . \end{aligned}$$

5. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$:

$$\begin{aligned} z = i \Leftrightarrow r = 1,\ \theta &= \frac{\pi}{2}\ , \\ \Rightarrow i^i &= e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}(\cos\ln 1\ + i\sin\ln 1) = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}\ . \\ k = 0 \Rightarrow i^i &= e^{-\frac{\pi}{2}}\ . \end{aligned}$$

حل التمرين 2.2

في ما يلي نضع $z = x + iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$.

1. نبرهن على أن جذور $\sin z$ و $\cos z$ حقيقية:

أولا، $\sin z$:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \sin z = 0 \Rightarrow \quad & e^{iz} = e^{-iz} \\ \Rightarrow \quad & e^{i(x+iy)} = e^{-i(x+iy)} \\ \Rightarrow \quad & e^{-y+ix} = e^{y-ix} \\ \Rightarrow \quad & e^{-y}(\cos x\ + i\sin x) = e^{y}(\cos x\ - i\sin x) \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} e^{-y}\cos x = e^{y}\cos x\ , \\ e^{-y}\sin x\ = -e^{y}\sin x\ . \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & x = k\pi,\ y = 0\ ;\ k \in \mathbb{Z}\ , \\ \Rightarrow \quad & z = x + iy = k\pi\ , \end{aligned}$$

أي أن جذور $\sin z$ تقع على محور الأعداد الحقيقية.

ثانيا، $\cos z$ **:**

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 \Rightarrow \quad & e^{iz} = -e^{-iz} \\
\Rightarrow \quad & e^{i(x+iy)} = -e^{-i(x+iy)} \\
\Rightarrow \quad & e^{-y+ix} = -e^{y-ix} \\
\Rightarrow \quad & e^{-y}(\cos x \ + i \sin x) = -e^{y}(\cos x \ - i \sin x) \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} e^{-y} \cos x = -e^{y} \cos x \ , \\ e^{-y} \sin x \ = e^{y} \sin x \ \ . \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ y = 0 \ ; \ k \in \mathbb{Z} \ , \\
\Rightarrow \quad & z = x + iy = (2k+1)\frac{\pi}{2} \ ,
\end{aligned}$$

أي أن جذور $\cos z$ تقع على محور الأعداد الحقيقية.

2. إيجاد عبارة الجزأين الحقيقي و التخيلي للدوال التالية:

أولا، $\sin z$ **:**

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ , \\
&= \frac{1}{2i}\Big(e^{iz} - e^{-iz}\Big) \ , \\
&= \frac{1}{2i}\Big(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\Big) \ , \\
&= \frac{1}{2i}\Big(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\Big) \ , \\
&= \frac{1}{2i}\Big(e^{-y}(\cos x \ + i \sin x) - e^{y}(\cos x \ - i \sin x)\Big) \ , \\
&= \frac{1}{2i}\Big(- (e^{y} - e^{-y}) \cos x \ + i(e^{y} + e^{-y}) \sin x\Big) \ , \\
&= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin x \ + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x\Big) \ , \\
&= \sin x \cosh y \ + i \cos x \sinh y \ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re \sin z = \sin x \cosh y \quad ; \quad \Im \sin z = \cos x \sinh y \ .$$

ثانيا، $\cos z$ **:**

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ , \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{iz}+e^{-iz}\Big)\ , \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\Big)\ , \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{-y+ix}+e^{y-ix}\Big)\ , \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{-y}(\cos x\ +i\sin x)+e^{y}(\cos x\ -i\sin x)\Big)\ , \\
&= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x\ -i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x\Big)\ , \\
&= \cos x\cosh y\ -i\sin x\sinh y\ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re\cos z = \cos x\cosh y \quad ; \quad \Im\cos z = -\sin x\sinh y\ .$$

ثالثا، $\sec z$ **:**

$$\begin{aligned}
\sec z &= \frac{1}{\cos z}\ , \\
&= \frac{1}{\cos x\cosh y\ -i\sin x\sinh y}\ , \\
&= \frac{\cos x\cosh y\ +i\sin x\sinh y}{\Big(\cos x\cosh y\ -i\sin x\sinh y\Big)\Big(\cos x\cosh y\ +i\sin x\sinh y\Big)}\ , \\
&= \frac{\cos x\cosh y\ +i\sin x\sinh y}{\Big(\cos x\cosh y\Big)^2+\Big(\sin x\sinh y\Big)^2}\ .
\end{aligned}$$

نحسب المقام في العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$\begin{aligned}
\Big(\cos x\cosh y\Big)^2+\Big(\sin x\sinh y\Big)^2 &= \cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y\ , \\
&= \cos^2 x\ (1+\sinh^2 y)+\sin^2 x\sinh^2 y\ , \\
&= \cos^2 x+(\cos^2 x+\sin^2 x)\sinh^2 y\ , \\
&= \cos^2 x+\sinh^2 y\ .
\end{aligned}$$

و عليه نحصل على عبارة الدالة $\sec z$ التالية:

$$\sec z = \frac{\cos x \cosh y \ + i \sin x \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \ .$$

$$\Rightarrow \Re \sec z = \frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \quad ; \quad \Im \sec z = \frac{\sin x \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \ .$$

رابعا، $\csc z$ **:**

$$\begin{aligned}
\csc z &= \frac{1}{\sin z} \ , \\
&= \frac{1}{\sin x \cosh y \ + i \cos x \sinh y} \ , \\
&= \frac{\sin x \cosh y \ - i \cos x \sinh y}{\Big(\sin x \cosh y \ + i \cos x \sinh y \Big) \Big(\sin x \cosh y \ - i \cos x \sinh y \Big)} \ , \\
&= \frac{\sin x \cosh y \ - i \cos x \sinh y}{\Big(\sin x \cosh y \Big)^2 + \Big(\cos x \sinh y \Big)^2} \ .
\end{aligned}$$

نحسب المقام في العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$\begin{aligned}
\Big(\sin x \cosh y \Big)^2 + \Big(\cos x \sinh y \Big)^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \ , \\
&= \sin^2 x \ (1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y \ , \\
&= \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x) \sinh^2 y \ , \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y \ .
\end{aligned}$$

و عليه نحصل على عبارة الدالة $\csc z$ التالية:

$$\csc z = \frac{\sin x \cosh y \ - i \cos x \sinh y}{\sin^2 x + \sinh^2 y} \ .$$

$$\Rightarrow \Re \csc z = \frac{\sin x \cosh y}{\sin^2 x + \sinh^2 y} \quad ; \quad \Im \csc z = \frac{- \cos x \sinh y}{\sin^2 x + \sinh^2 y} \ .$$

خامسا، $\tan z$ **:**

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}\ , \\
&= \frac{\sin x\cosh y\ + i\cos x\sinh y}{\cos x\cosh y\ - i\sin x\sinh y}\ , \\
&= \frac{\Big(\sin x\cosh y\ + i\cos x\sinh y\Big)\Big(\cos x\cosh y\ + i\sin x\sinh y\Big)}{\Big(\cos x\cosh y\ - i\sin x\sinh y\Big)\Big(\cos x\cosh y\ + i\sin x\sinh y\Big)}\ , \\
&= \frac{\sin x\cos x\cosh^2 y - \sin x\cos x\sinh^2 y\ + i\Big(\sin^2 x\cosh y\sinh y + \cos^2 x\cosh y\sinh y\Big)}{\cos^2 x\ + \sinh^2 y}\ , \\
&= \frac{\sin x\cos x\ (\cosh^2 y - \sinh^2 y)\ + i(\sin^2 x + \cos^2 x)\cosh y\sinh y}{\cos^2 x\ + \sinh^2 y}\ , \\
&= \frac{\sin x\cos x\ + i\cosh y\sinh y}{\cos^2 x\ + \sinh^2 y}\ , \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{\sin 2x\ + i\sinh 2y}{\cos^2 x\ + \sinh^2 y}\ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re\tan z = \frac{1}{2}\ \frac{\sin 2x}{\cos^2 x\ + \sinh^2 y} \quad ; \quad \Im\tan z = \frac{1}{2}\ \frac{\sinh 2y}{\cos^2 x\ + \sinh^2 y}\ .$$

سادسا، $\cot z$ **:**

$$\begin{aligned}
\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}\ , \\
&= \frac{\cos x\cosh y\ - i\sin x\sinh y}{\sin x\cosh y\ + i\cos x\sinh y}\ , \\
&= \frac{\Big(\cos x\cosh y\ - i\sin x\sinh y\Big)\Big(\sin x\cosh y\ - i\cos x\sinh y\Big)}{\Big(\sin x\cosh y\ - i\cos x\sinh y\Big)\Big(\sin x\cosh y\ + i\cos x\sinh y\Big)}\ , \\
&= \frac{\sin x\cos x\ (\cosh^2 y - \sinh^2 y)\ - i(\sin^2 x + \cos^2 x)\cosh y\sinh y}{\sin^2 x\ + \sinh^2 y}\ , \\
&= \frac{\sin x\cos x\ - i\cosh y\sinh y}{\sin^2 x\ + \sinh^2 y}\ , \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{\sin 2x\ - i\sinh 2y}{\sin^2 x\ + \sinh^2 y}\ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re\cot z = \frac{1}{2}\ \frac{\sin 2x}{\sin^2 x\ + \sinh^2 y} \quad ; \quad \Im\cot z = \frac{1}{2}\ \frac{-\sinh 2y}{\sin^2 x\ + \sinh^2 y}\ .$$

3. إيجاد عبارة $\sin(1+i)$ و $\cos(re^{i\theta})$:

$$\sin(1+i) = \sin 1 \ \cosh 1 \ + i \cos 1 \ \sinh 1 \ .$$

$$\begin{aligned} \cos(re^{i\theta}) &= \cos(r\cos\theta \ + ir\sin\theta) \ , \\ &= \cos(r\cos\theta) \ \cosh(r\sin\theta) \ - i\sin(r\cos\theta) \ \sinh(r\sin\theta) \ . \end{aligned}$$

4. تبيان أن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$:
بداية، نكتب سلسلة ماكلورين للدالة الأسية:

$$e^{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} \ .$$

ثم نضع $\varphi = i\theta$ فنحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\theta^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0,2,4,6,\ldots} i^n \frac{\theta^n}{n!} \qquad + \qquad \sum_{n=1,3,5,7,\ldots} i^n \frac{\theta^n}{n!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} i^{2p} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} \qquad + \qquad \sum_{p=0}^{\infty} i^{2p+1} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (i^2)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} \qquad + \qquad i\sum_{p=0}^{\infty} (i^2)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} \qquad + \qquad i\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \ . \end{aligned}$$

لاحظ أن المجموع الأول في العلاقة الأخيرة ما هو إلا سلسلة ماكلورين للدالة $\cos\theta$ أما المجموع الثاني فهو الدالة $\sin\theta$. و عليه نصل إلى النتيجة المطلوب البرهان عليها:

$$e^{i\theta} = \cos\theta \ + i\sin\theta \ .$$

5. في ما يلي، نضع

$$z = x + iy, \ z_1 = x_1 + iy_1, \ z_2 = x_2 + iy_2 \ ,$$

و نبرهن على

(ا) $\forall z \in \mathbb{C} : \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1$:

$$\begin{aligned}
\sin^2 z \ + \cos^2 z &= \Big(\sin x \cosh y \ + i \cos x \sinh y \Big)^2 \ + \ \Big(\cos x \cosh y \ - i \sin x \sinh y \Big)^2 \ , \\
&= \big(\sin^2 x \ \cosh^2 y \ - \cos^2 x \ \sinh^2 y \ + 2i \sin x \cos x \ \sinh y \cosh y \big) \\
&\quad + \big(\cos^2 x \ \cosh^2 y \ - \sin^2 x \ \sinh^2 y \ - 2i \sin x \cos x \ \sinh y \cosh y \big) \ , \\
&= (\cos^2 x \ + \sin^2 x)(\cosh^2 y - \sinh^2 y) \ , \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

(ب) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$:

$$\begin{aligned}
\sin(z_1 \pm z_2) &= \sin \big((x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \big) \ , \\
&= \sin(x_1 \pm x_2) \cosh(y_1 \pm y_2) \ + i \cos(x_1 \pm x_2) \sinh(y_1 \pm y_2) \ , \\
&= (\sin x_1 \cos x2 \pm \cos x_1 \sin x_2)(\cosh y_1 \cosh y_2 \pm \sinh y_1 \sinh y_2) \\
&\quad + i(\cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2)(\sinh y_1 \cosh y_2 \pm \cosh y_1 \sinh y_2) \ , \\
&= \sin x_1 \cos x2 \cosh y_1 \cosh y_2 + \cos x_1 \sin x_2 \sinh y_1 \sinh y_2 \\
&\quad + i(\cos x_1 \cos x_2 \sinh y_1 \cosh y_2 - \sin x_1 \sin x_2 \cosh y_1 \sinh y_y) \\
&\quad \pm \Big\{ \sin x_1 \cos x_2 \sinh y_1 \sinh y_2 + \cos x_1 \sin x_2 \cosh y_1 \cosh y_2 \\
&\quad + i(\cos x_1 \cos x_2 \cosh y_1 \sinh y_2 - \sin x_1 \sin x_2 \sinh y_1 \cosh y_2) \Big\} \ , \\
&= (\sin x_1 \cosh y_1 + i \cos x_1 \sinh y_1)(\cos x_2 \cosh y_2 - i \sin x_2 \sinh y_2) \\
&\quad \pm (\cos x_1 \cosh y_1 - i \sin x_1 \sinh y_1)(\sin x_2 \cosh y_2 + i \cos x_2 \sinh y_2) \ , \\
&= \sin z_1 \cos z_2 \ \pm \ \cos z_1 \sin z_2 \ .
\end{aligned}$$

(ج) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$:

$$\begin{aligned}
\cos(z_1 \pm z_2) &= \cos \big((x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \big) \ , \\
&= \cos(x_1 \pm x_2) \cosh(y_1 \pm y_2) \ - i \sin(x_1 \pm x_2) \sinh(y_1 \pm y_2) \ , \\
&= (\cos x_1 \cos x2 \mp \sin x_1 \sin x_2)(\cosh y_1 \cosh y_2 \pm \sinh y_1 \sinh y_2) \\
&\quad - i(\sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2)(\sinh y_1 \cosh y_2 \pm \cosh y_1 \sinh y_2) \ , \\
&= \cos x_1 \cos x2 \cosh y_1 \cosh y_2 - \sin x_1 \sin x_2 \sinh y_1 \sinh y_2 \\
&\quad - i(\sin x_1 \cos x_2 \sinh y_1 \cosh y_2 + \cos x_1 \sin x_2 \cosh y_1 \sinh y_y) \\
&\quad \pm \Big\{ \cos x_1 \cos x_2 \sinh y_1 \sinh y_2 - \sin x_1 \sin x_2 \cosh y_1 \cosh y_2 \\
&\quad - i(\sin x_1 \cos x_2 \cosh y_1 \sinh y_2 + \cos x_1 \sin x_2 \sinh y_1 \cosh y_2) \Big\} \ , \\
&= (\cos x_1 \cosh y_1 - i \sin x_1 \sinh y_1)(\cos x_2 \cosh y_2 - i \sin x_2 \sinh y_2) \\
&\quad \mp (\sin x_1 \cosh y_1 + i \cos x_1 \sinh y_1)(\sin x_2 \cosh y_2 + i \cos x_2 \sinh y_2) \ , \\
&= \cos z_1 \cos z_2 \ \mp \ \sin z_1 \sin z_2 \ .
\end{aligned}$$

(د) $\forall z \in \mathbb{C}: \ e^{iz} = \cos z + i \sin z$:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \\ e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z \end{cases} \\
\Rightarrow &2e^{iz} = 2\cos z \ + 2i \sin z \ , \\
\Rightarrow &e^{iz} = \cos z \ + i \sin z \ .
\end{aligned}$$

حل التمرين 3.2

نهتم في ما يلي بالقيمة الرئيسية لدالة اللوغارتم:

$$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r \ + i\theta \ ; \ \theta \in]-\pi, \pi] \ .$$

$$\begin{aligned}
\ln i &= \ln(1e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\frac{\pi}{2} \ . \\
\ln(-1) &= \ln(1e^{i\pi}) = i\pi \ . \\
\ln(2+3i) &= \ln(\sqrt{13}\ e^{i \arctan \frac{3}{2}}) = \ln \sqrt{13} \ + i \arctan \frac{3}{2} \ . \\
\log_2(1-i) &= \frac{\ln(1-i)}{\ln 2} = \frac{\ln(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})}{\ln 2} = \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2} \ - i\frac{\pi}{4 \ln 2} = \frac{1}{2} \ - i\frac{\pi}{4 \ln 2} \ . \\
\log_{-2}(1-i) &= \frac{\ln(1-i)}{\ln(-2)} = \frac{\ln(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})}{\ln(2e^{i\pi})} = \frac{\ln \sqrt{2} \ - i\frac{\pi}{4}}{\ln 2 \ + i\pi} = \frac{2\ln^2 2 \ - \pi^2 \ - 3i\pi \ln 2}{4(\ln^2 2 \ + \pi^2)} \ .
\end{aligned}$$

حل التمرين 4.2

نعتبر في ما يلي

$$z = x + iy, \ z_1 = x_1 + iy_1, \ z_2 = x_2 + iy_2 \ .$$

1. إيجاد الجزأين الحقيقي و التخيلي للدوال الزائدية:

أولا، $\sinh z$ **:**

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \ , \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\Big) \ , \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cos y \ i + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\sin y \ , \\ &= \sinh x \ \cos y \ + i\cosh x \ \sin y \ .\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re\sinh z = \sinh x \ \cos y \quad ; \quad \Im\sinh z = \cosh x \ \sin y$$

ثانيا، $\cosh z$ **:**

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \ , \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)\Big) \ , \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos y \ + i\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin y \ , \\ &= \cosh x \ \cos y \ + i\sinh x \ \sin y \ .\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re\cosh z = \cosh x \ \cos y \quad ; \quad \Im\cosh z = \sinh x \ \sin y$$

ثالثا، $\tanh z$ **:**

$$\begin{aligned}
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}\ , \\
&= \frac{\sinh x\ \cos y\ + i\cosh x\ \sin y}{\cosh x\ \cos y\ + i\sinh x\ \sin y}\ , \\
&= \frac{\Big(\sinh x\ \cos y\ + i\cosh x\ \sin y\Big)\Big(\cosh x\ \cos y\ - i\sinh x\ \sin y\Big)}{\Big(\cosh x\ \cos y\ + i\sinh x\ \sin y\Big)\Big(\cosh x\ \cos y\ - i\sinh x\ \sin y\Big)}\ , \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x\cos^2 y\ + \sinh^2 x\sin^2 y}\Big\{\sinh x\cosh x\cos^2 y + \sinh x\cosh x\sin^2 y \\
&\quad + i(\cosh^2 x\sin y\cos y - \sinh^2 x\sin y\cos y)\Big\}\ , \\
&= \frac{\sinh x\cosh x(\cos^2 y + \sin^2 y) + i(\cosh^2 x - \sinh^2 x)\sin y\cos y}{\cosh^2 x\cos^2 y\ + \sinh^2 x\sin^2 y}\ , \\
&= \frac{\sinh x\cosh x + i\sin y\cos y}{\cosh^2 x\cos^2 y\ + (\cosh^2 x\ - 1)\sin^2 y}\ , \\
&= \frac{\sinh x\cosh x + i\sin y\cos y}{\cosh^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) - \sin^2 y}\ , \\
&= \frac{\sinh x\cosh x + i\sin y\cos y}{\cosh^2 x\ - \sin^2 y}\ , \\
&= \frac{\sinh 2x\ + i\sin 2y}{\cosh 2x\ + \cos 2y}\ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Re\tanh z = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x\ + \cos 2y} \quad ; \quad \Im\tanh z = \frac{\sin 2y}{\cosh 2x\ + \cos 2y}\ .$$

2. البرهان على ما يلي:

$$: \forall z \in \mathbb{C} :\ \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (ا)$$

$$\begin{aligned}
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \Big(\cosh x\ \cos y\ + i\sinh x\ \sin y\Big)^2 - \Big(\sinh x\ \cos y\ + i\cosh x\ \sin y\Big)^2\ , \\
&= (\cosh^2 x\ \cos^2 y\ - \sinh^2 x\ \sin^2 y + 2i\sinh x\cosh x\ \sin y\cos y) \\
&\quad - (\sinh^2 x\ \cos^2 y\ - \cosh^2 x\ \sin^2 y\ + 2i\sinh x\cosh x\ \sin y\cos y)\ , \\
&= (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cos^2 y + \sin^2 y)\ , \\
&= 1\ .
\end{aligned}$$

(ب) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$:

$$\begin{aligned}
\sinh(z_1 \pm z_2) &= \sinh\big((x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)\big) \ , \\
&= \sinh(x_1 \pm x_2)\cos(y_1 \pm y_2) \ + i\cosh(x_1 \pm x_2)\sin(y_1 \pm y_2) \ , \\
&= \Big(\sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2\Big)\Big(\cos y_1 \cos y_2 \mp \sin y_1 \sin y_2\Big) \\
&\quad + i\Big(\cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2\Big)\Big(\sin y_1 \cos y_2 \pm \cos y_1 \sin y_2\Big) \ , \\
&= \sinh x_1 \cosh x_2 \cos y_1 \cos y_2 - \cosh x_1 \sinh x_2 \sin y_1 \sin y_2 \\
&\quad + i(\cosh x_1 \cosh x_2 \sin y_1 \cos y_2 + \sinh x_1 \sinh x_2 \cos y_1 \sin y_2) \\
&\quad \pm \Big\{ \cosh x_1 \sinh x_2 \cos y_1 \cos y_2 - \sinh x_1 \cosh x_2 \sin y_1 \sin y_2 \\
&\quad + i(\cosh x_1 \cosh x_2 \cos y_1 \sin y_2 + \sinh x_1 \sinh x_2 \sin y_1 \cos y_2)\Big\} \ , \\
&= (\sinh x_1 \cos y_1 \ + i\cosh x_1 \sin y_1)(\cosh x_2 \cos y_2 \ + i\sinh x_2 \sin y_2) \\
&\quad \pm (\cosh x_1 \cos y_1 \ + i\sinh x_1 \sin y_1)(\sinh x_2 \cos y_2 \ + i\cosh x_2 \sin y_2) \ , \\
&= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2 \ .
\end{aligned}$$

(ج) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$:

$$\begin{aligned}
\cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh\big((x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)\big) \ , \\
&= \cosh(x_1 \pm x_2)\cos(y_1 \pm y_2) \ + i\sinh(x_1 \pm x_2)\sin(y_1 \pm y_2) \ , \\
&= \Big(\cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2\Big)\Big(\cos y_1 \cos y_2 \mp \sin y_1 \sin y_2\Big) \\
&\quad + i\Big(\sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2\Big)\Big(\sin y_1 \cos y_2 \pm \cos y_1 \sin y_2\Big) \ , \\
&= \cosh x_1 \cosh x_2 \cos y_1 \cos y_2 - \sinh x_1 \sinh x_2 \sin y_1 \sin y_2 \\
&\quad + i(\sinh x_1 \cosh x_2 \sin y_1 \cos y_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 \cos y_1 \sin y_2) \\
&\quad \pm \Big\{ \sinh x_1 \sinh x_2 \cos y_1 \cos y_2 - \cosh x_1 \cosh x_2 \sin y_1 \sin y_2 \\
&\quad + i(\sinh x_1 \cosh x_2 \cos y_1 \sin y_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 \sin y_1 \cos y_2)\Big\} \ , \\
&= (\cosh x_1 \cos y_1 \ + i\sinh x_1 \sin y_1)(\cosh x_2 \cos y_2 \ + i\sinh x_2 \sin y_2) \\
&\quad \pm (\sinh x_1 \cos y_1 \ + i\cosh x_1 \sin y_1)(\sinh x_2 \cos y_2 \ + i\cosh x_2 \sin y_2) \ , \\
&= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \ .
\end{aligned}$$

3. العلاقة بين الدوال المثلثية و الزائدية :

(ا) $\sin iz = i \sinh z$:

$$\begin{aligned} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \sin(iz) &= \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} \ , \\ &= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} \ , \\ &= i \ \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \ , \\ &= i \sinh z \ . \end{aligned}$$

(ب) $\cos iz = \cosh z$:

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos(iz) &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} \ , \\ &= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} \ , \\ &= \cosh z \ . \end{aligned}$$

(ج) $\tan iz = i \tanh z$:

$$\begin{aligned} \tan(iz) &= \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} \ , \\ &= \frac{i \sinh z}{\cosh z} \ , \\ &= i \tanh z \ . \end{aligned}$$

حل التمرين 5.2

1. إيجاد عبارات الدوال المثلثية العكسية التالية:

أولا، $\arcsin z$ **:**

من جهة لدينا تعريف الدالة العكسية للدالة الجيبية

$$\forall w \in \mathbb{C}, \ \exists z \in \mathbb{C} : \ z = \sin w \Rightarrow w = \arcsin z \ .$$

و من جهة أخرى لدينا تعريف الدالة الجيبية

$$z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) \Rightarrow e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0 \ .$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة في e^{iw} فنجد:

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0 \ .$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمجهول e^{iw} نحصل على

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \ ,$$

ثم بإدخال اللوغاريتم على طرفي العلاقة أعلاه نصل إلى العبارة التالية:

$$\begin{aligned} iw + 2ik\pi &= \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \ , \ k \in \mathbb{Z} \ , \\ \Rightarrow w \equiv \arcsin z &= -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \ - 2k\pi \ . \end{aligned}$$

ظهر المعامل k في العلاقتين السابقتين لكون اللوغاريتم دالة متعددة القيم كما رأينا ذلك سابقا. نهتم في ما يلي بعبارة الدالة العكسية الجيبية التي تحقق $\arcsin 0 = 0$. بالتعويض في عبارة $\arcsin z$ أعلاه يمكننا أن نستنتج و بكل سهولة $k = 0$ و عليه نخلص إلى النتيجة التالية:

$$\arcsin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \ .$$

ثانيا، $\arccos z$:
باتباع خطوات مماثلة لما سبق نستطيع إيجاد عبارة الدالة العكسية لجيب التمام:

$$z = \cos w \Rightarrow w = \arccos z \ .$$

$$\begin{aligned} z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) &\Rightarrow e^{iw} + e^{-iw} = 2z \ , \\ \Rightarrow \left(e^{iw}\right)^2 - 2ze^{iw} + 1 &= 0 \ , \\ \Rightarrow e^{iw} &= z + \sqrt{z^2-1} \ , \\ \Rightarrow w \equiv \arcsin z &= -i\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \ - 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ . \\ \arccos 1 = 0 &\Rightarrow k = 0 \ , \\ \Rightarrow \arccos z &= -i\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \ . \end{aligned}$$

ثالثا، $\arctan z$ **:**

$$z = \tan w \Rightarrow w = \arctan z \ .$$

$$z = \tan w = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})}{\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})} \ ,$$
$$\Rightarrow \left(e^{iw}\right)^2 = \frac{(1+iz)^2}{1+z^2} = \frac{(1+iz)^2}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{1+iz}{1-iz} \ ,$$
$$\Rightarrow e^{iw} = \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}} \ ,$$
$$\Rightarrow w \equiv \arctan z = -i \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}} \ - 2k\pi = \frac{-i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \ - 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$
$$\arctan 0 = 0 \Rightarrow k = 0 \ ,$$
$$\Rightarrow \arctan z = \frac{-i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \ .$$

2. إيجاد عبارات الدوال الزائدية العكسية التالية:

أولا، $\sinh^{-1} z$ **:**

$$z = \sinh w \Rightarrow w = \sinh^{-1} z \ .$$

$$z = \sinh w = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w}) \ ,$$
$$\Rightarrow (e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0 \ ,$$
$$\Rightarrow e^w = z + \sqrt{z^2+1} \ ,$$
$$\Rightarrow w \equiv \sinh^{-1} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2+1}\right) - 2ik\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$
$$\sinh^{-1} 0 = 0 \Rightarrow k = 0 \ ,$$
$$\Rightarrow \sinh^{-1} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \ .$$

ثانيا، $\cosh^{-1} z$ **:**

$$z = \cosh w \Rightarrow w = \cosh^{-1} z \ .$$

$$\begin{aligned}
& z = \cosh w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) \ , \\
\Rightarrow & (e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0 \ , \\
\Rightarrow & e^w = z + \sqrt{z^2 - 1} \ , \\
\Rightarrow & w \equiv \cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) - 2ik\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ . \\
& \cosh^{-1} 1 = 0 \Rightarrow k = 0 \ , \\
\Rightarrow & \cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \ .
\end{aligned}$$

ثالثا، $\tanh^{-1} z$ **:**

$$z = \tanh w \Rightarrow w = \tanh^{-1} z \ .$$

$$\begin{aligned}
& z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh z} = \frac{\frac{1}{2}(e^w - e^{-w})}{\frac{1}{2}(e^w + e^{-w})} \ , \\
\Rightarrow & (e^w)^2 = \frac{1+z}{1-z} \ , \\
\Rightarrow & e^w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \ , \\
\Rightarrow & w \equiv \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} - 2ik\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ . \\
& \tanh^{-1} 0 = 0 \Rightarrow k = 0 \ , \\
\Rightarrow & \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} \ .
\end{aligned}$$

باب 3

مبرهنات أساسية حول الدوال التحليلية

1.3 القوس، المنحني المغلق

ليكن العدد المركب $z(t)$ المُعطى بالعلاقة

$$z(t) = x(t) + iy(t)\ , \tag{1}$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ دالتان مستمرتان على المجال $[\alpha, \beta]$، و t هو وسيط حقيقي محصور بين α و β.

تعريف

في المستوي المركب، عندما يتغير الوسيط t فإن تغير z يرسم منحني نسمّيه قوس، لاحظ الشكل 1.3.

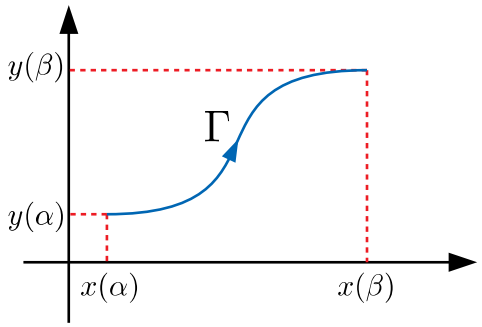
يُعبّر، رياضيا، عن القوس بكتابة من الشكل

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C};\ z(t) = x(t) + iy(t);\ \alpha \leq t \leq \beta\}\ . \tag{2}$$

تعريف

يُقال عن قوس أنّه أملس (smooth) إذا كانت المشتقة z' (مشتقة z بالنسبة إلى الوسيط t)

1. غير معدومة.
2. مستمرة على المجال $[\alpha, \beta]$.



شكل 1.3: القوس في المستوي المركب.

مثال

مثال: ليكن القوسان الموضحان في الشكل 2.3.
إنّ القوس Γ_1 يحقق الشرطين أعلاه:

$$\forall t \in [0,\pi] : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{array} \right. \tag{3}$$

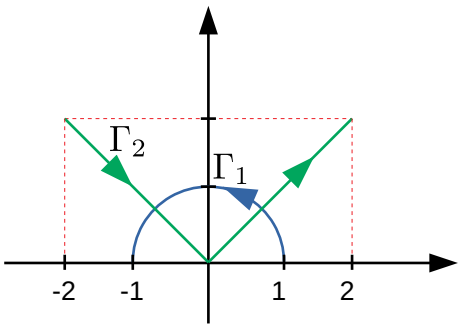
لاحظ أن x' و y' دالتان مستمرتان على المجال $[0,\pi]$ و يستحيل أن تنعدما معا،

$$z' = x' + iy' \neq 0 \ ,$$

و عليه فإن القوس Γ_1 أملس.
أما القوس Γ_2 فلا يحقق الشرط الأول:

$$\forall t \in [-2,2] : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = |t| \end{array} \right. \tag{4}$$

لاحظ أن مشتقة الدالة y بالنسبة إلى t، y'، غير معرّفة عند $t = 0$ أي أن y' غير مستمرة عند $t = 0$ و بالتالي فإن القوس Γ_2 غير أملس (عند نقطة المبدأ).



شكل 2.3: القوس الأملس.

تعريف

نقول عن قوس أنه بسيط (و يُسمّى أيضا قوس جوردن (Jordan)) إذا كان لا يقطع نفسه بين نقطتي البداية و النهاية. و إذا كانت إضافة إلى ذلك، نقطتا البداية و النهاية منطبقتين فإننا نحصل على قوس مغلق نسميه منحني جوردن.

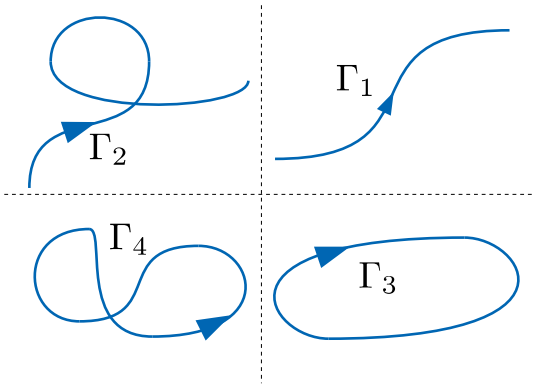
مثال

في الشكل 3.3، لدينا القوس Γ_1 بسيط، بينما القوس Γ_2 ليس بسيط، أمّا Γ_3 فيُعتبر منحنى جوردن لكن المنحني المغلق Γ_4 ليس منحني جوردن.

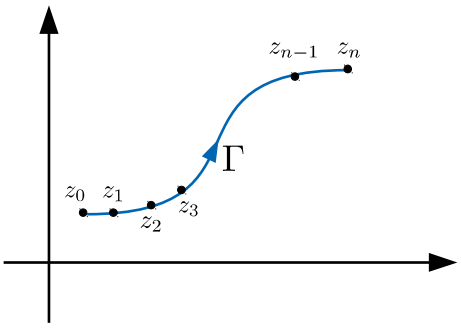
2.3 التكامل الخطي

نعتبر الدالة المركبة لمتغير مركب، f، مستمرة على القوس Γ. نقسم القوس إلى n جزء كما هو موضح في الشكل 4.3.
نعتبر المجموع S_n المعرف بـ:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta z_j \ , \qquad (5)$$



شكل 3.3: القوس البسيط و المنحني المغلق.



شكل 4.3: تكامل دالة على قوس.

حيث $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ و ξ_j نقطة كيفية على القوس Γ محصورة بين النقطتين z_{j-1} و z_j. من البديهي أن قيمة S_n تتعلق بكيفية تقسيمنا للقوس Γ (من خلال اختيارنا لعدد التقسيمات n و مواضع النقاط z_j)، لكن عندما يكون n كبيرا بما يكفي فإن S_n يتقارب نحو قيمة وحيدة و التي نُطلق عليها تسمية تكامل الدالة f على القوس Γ، و نكتب:

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} S_n \ . \tag{6}$$

ملاحظة:
كل دالة تحليلية على قوس Γ فهي تقبل التكامل على ذلك القوس:

$$f \text{ تحليلية على } \Gamma \Leftarrow f \text{ مستمرة على } \Gamma \Leftarrow f \text{ قابلة للتكامل على } \Gamma.$$

في ما يلي طريقة إيجاد تكامل دالة على قوس أملس: لتكن $x(t)$ و $y(t)$ دالتان حقيقيتان لمتغير حقيقي مستمرتان على المجال $t \in [\alpha, \beta]$ و كذلك مشتقتيهما $x'(t)$ و $y'(t)$. و ليكن Γ القوس الأملس المعرف بـ: $\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t);\ t \in [\alpha, \beta]\}$. ليكن $U(x,y)$ و $V(x,y)$ الجزآن الحقيقي و التخيلي للدالة $f(z)$: $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_\Gamma (U+iV)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \ , \\
&= \int_\alpha^\beta (U+iV)(x'\mathrm{d}t + iy'\mathrm{d}t) \ , \\
&= \int_\alpha^\beta \Big((Ux' - Vy') + i(Uy' + Vx')\Big)\mathrm{d}t \ ,
\end{aligned} \tag{7}$$

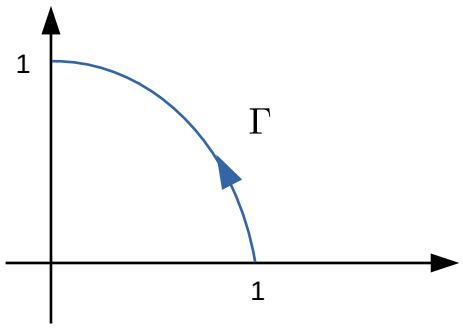
حيث استعملنا $\mathrm{d}x = x'\mathrm{d}t$ و $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}t$.

مثال

نريد إيجاد التكامل $\int_\Gamma \mathrm{d}z$ حيث القوس Γ هو ربع دائرة الوحدة الموضح في الشكل 5.3.
يُعبّر عن نقاط القوس Γ بالعلاقة $z(t) = x(t) + iy(t) = \cos t + i \sin t$، من أجل $t \in [0, \pi/2]$. باستخدام المعادلة (7) نجد التكامل

$$\int_\Gamma \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x' + iy')\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t + i\cos t)\mathrm{d}t = -1 + i \ .$$

(في هذا المثال لدينا $f(z) = 1$ أي أن $U = 1$ و $V = 0$.)



شكل 5.3: تكامل دالة على ربع دائرة الوحدة.

3.3 بعض خصائص التكامل الخطي

نعتبر دالتين مركبتين لمتغير مركب، مستمرتين على القوس Γ المُعرّف بـ:

$$\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t);\ t \in [\alpha, \beta]\}\ .$$

ليكن Γ' القوس المنطبق على Γ و الموجه عكس اتجاه القوس Γ. و ليكن Γ_1 و Γ_2 قوسين كيفيين حيث $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. يمكن البرهان على الخصائص التالية للتكامل الخطي:

- $\int\limits_{\Gamma} \Big(f(z) + g(z)\Big)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma} g(z)\mathrm{d}z$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}:\ \int\limits_{\Gamma} \lambda f(z)\mathrm{d}z = \lambda \int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$
- $\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\Gamma'} f(z)\mathrm{d}z$
- $\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$

كما يمكن البرهان على أنه إذا كان طول القوس Γ يساوي L و طويلة الدالة f محدودة من الأعلى،

$$\forall z \in \Gamma:\ |f(z)| \leq M\ ,$$

فإن ما يلي محقق :

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq ML\ .$$

تبديل المتغير :

أحيانا يكون من الأسهل تغيير متغير التكامل لحساب بعض التكاملات. فمثلا لإيجاد التكامل $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ نعتبر التحويل $z = g(\xi)$، حيث g دالة معلومة. لدينا ما يلي:

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma'} f\left(g(\xi)\right) g'(\xi)\mathrm{d}\xi \ , \tag{8}$$

حيث $g'(\xi) = \frac{\mathrm{d}g(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$ و Γ' هو القوس المرفق بـ Γ وفق التحويل g: $\Gamma = g(\Gamma')$.

مثال

نبحث عن التكامل $\int_\Gamma ze^{-z^2}\mathrm{d}z$ حيث Γ هو الخط المستقيم الذي يربط نقطة المبدأ و النقطة $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-1+i)$.
يكون من السهل اعتبار التحويل التالي لإيجاد التكامل أعلاه:

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-z^2} \ , \\ \mathrm{d}\xi &= -2ze^{-z^2}\mathrm{d}z \ . \end{aligned}$$

و بالتالي يُكتب التكامل قيد الدراسة كما يلي :

$$\int_\Gamma ze^{-z^2}\mathrm{d}z = \frac{-1}{2}\int_{\Gamma'} \mathrm{d}\xi \ ,$$

لكن ما هو شكل القوس Γ' ؟ لاحظ أنه لدينا ما يلي :

$$\begin{aligned} z \in \Gamma \Rightarrow z &= -t + it = t(-1+i) \ ; \ t \in \left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] \ , \\ \Rightarrow \xi &= e^{-t^2(-1+i)^2} = e^{2it^2} \ . \end{aligned}$$

نضع $\varphi = 2t^2$ و عليه يكون

$$t \in \left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] \Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \ .$$

إذن نحصل على النتيجة التالية:

$$\xi \in \Gamma' \Rightarrow \xi = e^{i\varphi} \ ; \ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \ ,$$

أي أن Γ' عبارة عن نصف دائرة علوية (مركزها المبدأ و نصف قطرها الوحدة). و حسب نتيجة المثال السابق فإن قيمة التكامل المدروس تساوي

$$\int_{\Gamma} ze^{-z^2}\mathrm{d}z = \frac{-1}{2}(-1+i) = \frac{1}{2}(1-i)\ .$$

4.3 مبرهنة كوشي

تعريف

يُقال عن المجموعة $G \subset \mathbb{C}$ أنها بسيطة الترابط (simply connected) إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \Gamma \subset G : E \subset G\ , \tag{9}$$

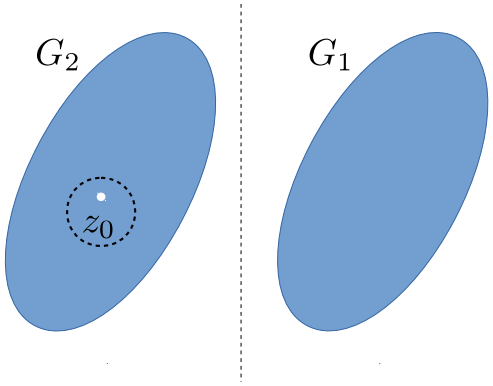
حيث Γ عبارة عن منحنٍ مُغلق، و E هي مجموعة النقاط المحصورة داخل Γ.

مثال

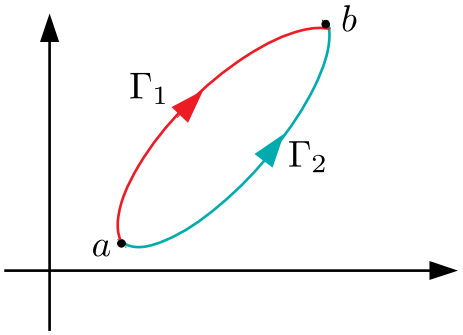
نعتبر المجموعتين G_1 و G_2 كما هو موضح في الشكل 6.3. نقول عن G_1 أنها بسيطة الترابط لأنه لو نختار أي منحنٍ مغلق داخل G_1 فإن الحيز الموجود داخله يبقى دوما جزءًا من G_1. أمّا المجموعة G_2 فليست بسيطة الترابط لأننا لو اخترنا على سبيل المثال منحنٍ من G_2 يحتوي بداخله النقطة z_0 فإن المجموعة المحددة بهذا المنحني تُصبح غير محتواة في G_2.

مبرهنة كوشي (مسار مفتوح)

لتكن النقطتين $a, b \in \mathbb{C}$، و ليكن Γ_1 و Γ_2 قوسين بسيطين كيفيين طرفاهما النقطتين a و b و لهما نفس التوجيه، انظر الشكل 7.3



شكل 6.3: المجموعة بسيطة الترابط. G_1 بسيط الترابط بينما G_2 ليس كذلك.



شكل 7.3: مبرهنة كوشي - مسار مفتوح.

إذا كانت دالة f تحليلية على كل من القوسين Γ_1 و Γ_2 و على جميع النقاط المحصورة بينهما، فإن

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \ . \qquad (10)$$

إذن فإن مبرهنة كوشي تنص على أن التكامل الخطي (إن توفرت الشروط المذكورة في نص المبرهنة) لدالة بين نقطتين مستقل عن المسار الذي يربط هاتين النقطتين.

مثال

نريد مكاملة الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ و ذلك على الأقواس Γ_1، Γ_2 و Γ_3، لاحظ الشكل 8.3.
لحساب التكامل، سنستخدم المعادلة (7)، و عليه نبحث عن الجزأين الحقيقي و التخيلي للدالة $f(z)$ كما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\equiv U(x,y)+iV(x,y)\ ,$$
$$\Rightarrow U(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ V(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\ . \qquad (11)$$

أولا: التكامل على Γ_1

تُكتب معادلة المسار كما يلي،

$$x(t)=-\cos t\ ,\ y(t)=\sin t\ ;\ t\in[0,\pi]\ . \qquad (12)$$

بالتعويض في المعادلة (7) نجد التكامل

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z=-i\pi\ . \qquad (13)$$

ثانيا: التكامل على Γ_2

تُكتب معادلة المسار كما يلي،

$$x(t)=t\ ,\ y(t)=1-|t|\ ;\ t\in[-1,1]\ . \qquad (14)$$

بالتعويض في المعادلة (7) نجد التكامل

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z=-i\pi\ . \qquad (15)$$

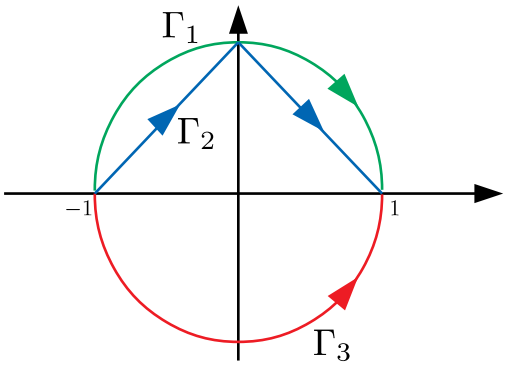
ثالثا: التكامل على Γ_3

تُكتب معادلة المسار كما يلي،

$$x(t)=-\cos t\ ,\ y(t)=-\sin t\ ;\ t\in[0,\pi]\ . \qquad (16)$$

بالتعويض في المعادلة (7) نجد التكامل

$$\int_{\Gamma_3} f(z)\mathrm{d}z=i\pi\ . \qquad (17)$$



شكل 8.3: مثال: مبرهنة كوشي - مسار مفتوح.

لاحظ أن تكامل الدالة f على كل من المسارين Γ_1 و Γ_2 له نفس القيمة. و هذه النتيجة مُتوقعة لأن الدالة f تبقى تحليلية في جميع النقاط المحصورة بين هذين المسارين، و حسب مبرهنة كوشي فإن للتكامل نفس القيمة على المسارين المُعتبرين. إلّا أن التكامل على المسار Γ_3 أخذ قيمة مختلفة عن التكامل على المسارين الآخرين، لأنّه توجد نقطة $(z = 0)$ بين المسار Γ_1 (أو Γ_2) و المسار Γ_3 أين الدالة f ليست تحليلية.

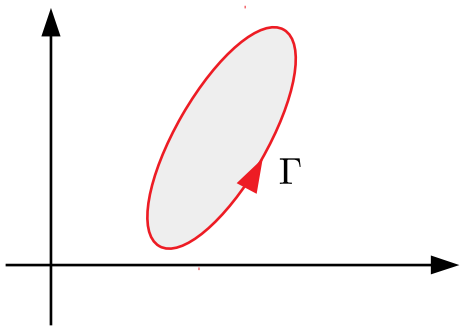
عندما تكون الدالة f تحليلية على مجموعة بسيطة الترابط فإن تكاملها على أي مسار Γ، يربط نقطة البداية a بنقطة النهاية b، يُعطى بالعلاقة

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = F(b) - F(a)\ , \tag{18}$$

حيث F هي الدالة الأصلية لـ f: $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = f$.

مثال

نريد إيجاد تكامل الدالة e^{2z} على مسار كيفي يربط النقطتين $a = -i/2$ و $b = (1+i)/2$.
لاحظ أن الدالة الأسية تحليلية على $\mathbb{C}$، و أن هذه الأخيرة مجموعة بسيطة الترابط، و الدالة الأصلية



شكل 9.3: مبرهنة كوشي - مسار مُغلق.

في هذه الحالة هي $\frac{1}{2}e^{2z}$، و عليه فإن التكامل المطلوب يساوي

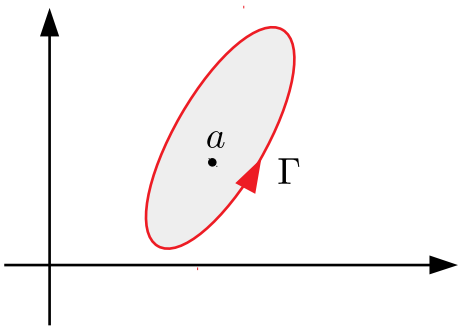
$$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \left[\frac{e^{2z}}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(e^{1+i} - e^{-i}) .$$

مبرهنة كوشي (مسار مُغلق)

إذا كانت دالة f تحليلية على و بداخل المنحني المُغلق Γ (أنظر الشكل 9.3) فإن تكاملها على هذا المسار يكون دوما معدوما:

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0 . \qquad (19)$$

ملاحظة:
عندما يكون المنحني المُغلق مُوجّها عكس اتجاه عقارب الساعة (الاتجاه الموجب) فإن التكامل المُغلق في هذه الحالة يُرمز إليه بـ $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$. تُكتب مبرهنة كوشي إذن: $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.



شكل 10.3: صيغة كوشي التكاملية.

مبرهنة موريرا

لتكن f دالة مستمرة على $G \subset \mathbb{C}$. إذا كان

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0 \ ,$$

من أجل أي منحنٍ مغلق $\Gamma \subset G$، فإن f تحليلية على G.

صيغة كوشي التكاملية (تكامل كوشي)

لتكن f دالة تحليلية على المنحني المُغلق Γ و أيضا بداخله، و لتكن a نقطة داخل هذا المنحني، لاحظ الشكل 10.3. يُعطى تكامل كوشي بالعلاقة

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \ , \qquad (20)$$

حيث $n \in \mathbb{N}$.

5.3 سلسلة تايلور - سلسلة لورين

1.5.3 سلسلة القوى

تعريف

تُسمّى السلسلة غير المنتهية

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \ z, a, a_n \in \mathbb{C}$$

بسلسلة قوى (power series).

توجد ثلاث حالات فيما يخص تقارب سلسلة القوى. يوجد عدد حقيقي موجب R حيث:

1. تتقارب السلسلة مطلقا من أجل $|z-a| < R$ (قرص مركزه النقطة a و نصف قطره R).
2. تتباعد السلسلة من أجل $|z-a| > R$ (نقاط المستوي خارج القرص الذي مركزه a و نصف قطره R).
3. قد تتقارب أو تتباعد السلسلة من أجل $|z-a| = R$ (الدائرة التي مركزها النقطة a و نصف قطرها R).

ملاحظة:
يُسمّى R نصف قطر تقارب السلسلة، و يُسمّى القرص الذي معادلته $|z-a| < R$ بقرص التقارب.

مثال

تُعطى سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. نبحث عن نصف قطر تقاربها، R. نستخدم أدوات دراسة تقارب السلاسل العددية، مثل اختبار النسبة: نضع $\alpha_n = (-1)^n z^n$ و منه نجد

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = |z| \ .$$

حسب اختبار النسبة، فإن السلسلة تتقارب من أجل:

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 1 \ .$$

أي أن نصف قطر تقارب السلسلة قيد الدراسة هو $R = 1$، و السلسلة تتقارب من أجل جميع النقاط الموجودة داخل القرص الذي مركزه المبدأ و نصف قطره الوحدة.
يمكن البرهان على أن السلسلة تتباعد من أجل النقاط الموجودة على دائرة الوحدة، $|z| = 1$.

ملاحظة:
ضمن قرص التقارب، فإنه يمكننا تعريف مشتقة السلسلة (و أيضا تكاملها على قوس داخل قرص التقارب) و يكون ذلك باشتقاق (أو المكاملة) كل حد من حدود السلسلة:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \; ; \; |z-a| < R \; ,$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} \; , \tag{21}$$

$$\int_{\Gamma} S \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1} \Big|_{z_i}^{z^f} \; ,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \Big((z_f - a)^{n+1} - (z_i - a)^{n+1} \Big) \; , \tag{22}$$

حيث أن المسار Γ موجود داخل قرص تقارب السلسلة S،

$$\Gamma \subset \{ z \in \mathbb{C} : \; |z-a| < R \} \; ,$$

و z_i و z_f يمثلان طرفي هذا المسار.

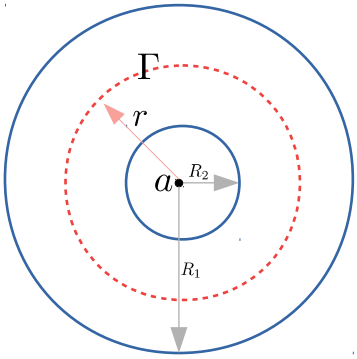
2.5.3 مبرهنة تايلور

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجموعة $G \subset \mathbb{C}$، و لتكن a نقطة من G.

سلسلة تايلور لدالة بجوار نقطة

سلسلة تايلور (Taylor) أو نشر تايلور للدالة f بجوار النقطة a هو السلسلة غير المنتهية

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \; . \tag{23}$$



شكل 11.3: مبرهنة لورين.

إن سلسلة تايلور عبارة عن سلسلة قوى، فهي تتقارب ضمن قرص تقارب نصف قطره R و الذي يمثل في هذه الحالة المسافة بين النقطة a و أقرب نقطة شاذة للدالة f [1]

ملاحظة:

عندما يكون $a = 0$ فإننا نحصل على سلسلة ماكلورين (Maclaurin):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) \ . \tag{24}$$

3.5.3 مبرهنة لورين

لتكن f دالة تحليلة داخل الحلقة $R_2 < |z - a| < R_1$، لاحظ الشكل 11.3.

سلسلة لورين

سلسلة لورين (Laurent) هي السلسلة غير المنتهية المعرّفة بـ:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n \ , \tag{25}$$

حيث المعاملات a_n تُعطى بالعلاقة

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \mathrm{d}z \ , \tag{26}$$

[1] النقطة الشاذة هي نقطة تكون الدالة عندها غير تحليلية.

من أجل دائرة كيفية $\mathcal{C}$ مركزها a و نصف قطرها $R_2 < r < R_1$.

يمكن كتابة سلسلة لورين[2] على الشكل

$$f(z) = \big(a_0 + a_a(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots\big) + \left(\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \ldots\right). \tag{27}$$

تُسمّى مجموعة الحدود الأولى الجزء التحليلي (analytical part) و مجموعة الحدود الثانية الجزء الأساسي (principal part).

عندما يكون الجزء الأساسي معدومًا فإن سلسلة لورين تؤول إلى سلسلة تايلور.

6.3 النقاط الشاذة

تعريف

نقول عن العدد المركب z_0 أنه نقطة شاذة (singular point) للدالة f إذا كانت هذه الأخيرة غير تحليلية عند تلك النقطة.

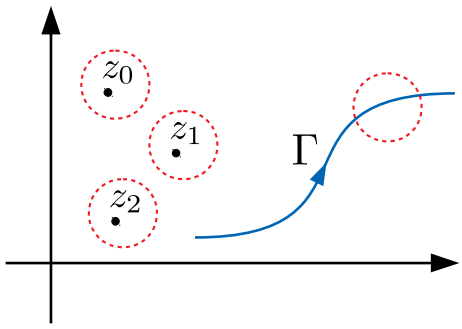
مثال

نعتبر الدالتين $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ و $g(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$. الدالة f غير تحليلية عند $z_0 = 0$ فهي بذلك تمثل نقطة شاذة لها. أما الدالة g فهي غير تحليلية عند النقطتين $z_1 = -i$ و $z_2 = i$، أي أن للدالة g نقطتين شاذتين $\pm i$.

في ما يلي أنواع و طرق دراسة النقاط الشاذة:

1.6.3 الشذوذ المنعزل

[2] Pierre Alphonse Laurent, 1813-1854.



شكل 12.3: النقطة الشاذة المنعزلة.

تعريف

لتكن z_0 نقطة شاذة للدالة f. نقول عن z_0 أنها نقطة شاذة معزولة (isolated singularity) إذا وُجدت دائرة نصف قطرها δ و مركزها z_0 بحيث لا تحتوي على أي نقطة شاذة أخرى.
عندما لا يمكننا إيجاد دائرة تحتوي على z_0 فقط، فإن z_0 ليست نقطة شاذة معزولة.

مثال

لتكن f دالة غير تحليلية عند النقاط z_0، z_1 و z_2. و لتكن g دالة ليست تحليلية على القوس Γ. أنظر الشكل 12.3.
لاحظ أنه يمكننا إيجاد دوائر مراكزها النقاط z_0، z_1 و z_2 على التوالي بحيث تحتوي على نقطة شاذة واحدة فقط (مركز الدائرة)، و عليه فإن z_0، z_1 و z_2 نقاط شاذة معزولة.
لكن في المقابل، لا يمكن بأي حال إيجاد دائرة مركزها أحد نقاط القوس Γ و لا تحتوي نقاط شاذة أخرى، حيث أنه مهما كان نصف القطر صغيرا فإننا سنجد دوما جزءًا من Γ داخل الدائرة. و بالتالي فإن نقاط القوس نقاط شاذة غير معزولة.

2.6.3 القطب

تعريف

يُقال عن النقطة الشاذة المعزولة z_0 للدالة f أنها قطب من الرتبة n $(n \in \mathbb{N})$ إذا كانت النهاية

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \qquad (28)$$

موجودة، منتهية و غير معدومة.

ملاحظة:
نسمي القطب من الرتبة 1 قطبًا بسيطًا.

مثال

نعتبر الدوال $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$، $g(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ و $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$.
من الواضح أن للدالة f نقطة شاذة معزولة عند $z_0 = 1$. بحساب النهاية المعطاة في العلاقة (28) نجد، من أجل $n = 2$،

$$\lim_{z \to 1} (z-1)^2 f(z) = 1 \ ,$$

أي أن $z_0 = 1$ عبارة عن قطب من الرتبة 2.
و بالنسبة إلى الدالة g فهي تملك نقطتين شاذتين معزولتين هما $z_1 = -i$ و $z_2 = i$. لدينا ما يلي:

$$\lim_{z \to -i} (z+i) g(z) = \frac{1}{2}(1+i) \quad , \quad \lim_{z \to i} (z-i) g(z) = \frac{1}{2}(1-i) \ .$$

إذن كل من النقطتين $\pm i$ عبارة عن قطب بسيط.
أما في ما يخص الدالة h فلها نقطة شاذة معزولة عند $z_3 = 0$، لكن النهاية

$$\lim_{z \to 0} z^n h(z)$$

غير موجودة من أجل جميع قيم $n \in \mathbb{N}$. و عليه فإن $z_3 = 0$ ليست قطبًا.

3.6.3 الشذوذ القابل للإزالة

تعريف

تكون النقطة الشاذة المعزولة z_0 للدالة f قابلة للإزالة إذا وُجدت النهاية

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \ . \tag{29}$$

ملاحظة:
يمكن إعادة تعريف الدالة f عند النقطة z_0 بالعلاقة $f(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} f(z)$. في هذه الحالة تصبح f دالة تحليلية عند z_0.

مثال

للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z_0 = 0$ لأن النهاية $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ موجودة.
إنّ الدالة $\tilde{f}$ و المعرفة بـ

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) = \frac{\sin z}{z} & : z \neq 0 \ , \\ \lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1 & : z = 0 \ , \end{cases}$$

دالة تحليلية على $\mathbb{C}$.

4.6.3 الشذوذ الجوهري

تعريف

إذا لم تكن النقطة الشاذة المعزولة قطبًا و لا تقبل الإزالة فإنها تُسمّى نقطةً شاذة جوهرية (essential singularity).

مثال

للدالة $f(z) = e^{\frac{1}{z-2+i}}$ نقطة شاذة معزولة عند $z_0 = 2 - i$. لاحظ أن هذه النقطة ليست قطبا كما لا يمكن إزالتها، و بالتالي فهي نقطة شاذة جوهرية للدالة f.

5.6.3 الشذوذ عند ∞

تعريف

يُصنّف الشذوذ عند $z \to \infty$ لدالة $f(z)$ حسب نوع الشذوذ عند $z \to 0$ للدالة $f(\frac{1}{z})$.

مثال

نريد دراسة الشذوذ عند $z \to \infty$ للدالة $f(z) = z^2 + 1$. و من أجل ذلك ندرس النقاط الشاذة للدالة $f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2} + 1$. من الواضح أن هذه الأخيرة تملك نقطة شاذة عند $z_0 = 0$. لدينا ما يلي

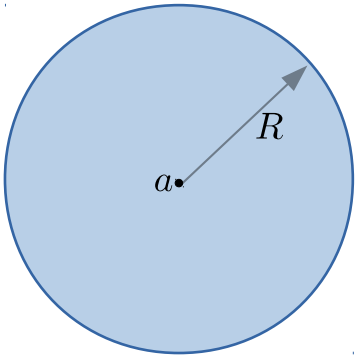
$$\lim_{z \to 0} z^2 f(\frac{1}{z}) = 1$$

أي أن $z_0 = 0$ عبارة عن قطب من الرتبة 2 للدالة $f(\frac{1}{z})$، و عليه تكون الـ ∞ أيضا قطباً من الرتبة 2 للدالة $f(z)$.

6.6.3 تصنيف الشذوذ المنعزل باستخدام سلسلة لورين

لتكن f دالة تحليلية على القرص $|z - a| < R$ باستثناء المركز a، لاحظ الشكل 13.3.
يمكن معرفة نوع النقطة الشاذة المنعزلة a باستخدام سلسلة لورين للدالة f عند النقطة a ، و ذلك كما يلي:

1. إذا كان الجزء الأساسي غير موجود فإن a نقطة شاذة قابلة للإزالة.



شكل 13.3: تصنيف الشذوذ باستخدام سلسلة لورين.

مثال

نعتبر الدالة $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. تُكتب سلسلة لورين كما يلي:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots\ .$$

لاحظ أن الجزء الأساسي غير موجود و عليه تكون $z=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.

2. إذا كان الجزء الأساسي يحتوي على عدد غير منتهٍ من الحدود فإن a نقطة شاذة جوهرية.

مثال

تُكتب سلسلة لورين للدالة $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ عند النقطة $a=0$ كما يلي:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\ .$$

لاحظ أن لسلسلة لورين جزء أساسي فقط و الذي به عدد لا نهائي من الحدود. و عليه فإن $a=0$ نقطة شاذة جوهرية للدالة f.

3. إذا كان الجزء الأساسي به عدد منتهٍ من الحدود،

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \ ,$$

حيث $a_{-n} \neq 0$، فإن a قطب من الرتبة n.

مثال

سلسلة لورين للدالة $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$ عند النقطة $a = i$ تُكتب

$$f(z) = \frac{e^z}{z-i} = e^i \left(\frac{1}{z-i} + 1 + \frac{z-i}{2!} + \frac{(z-i)^2}{3!} + \ldots \right) \ .$$

لاحظ أنه يوجد حد واحد فقط بالجزء الأساسي، و بالتالي فإن النقطة $a = i$ قطب بسيط.

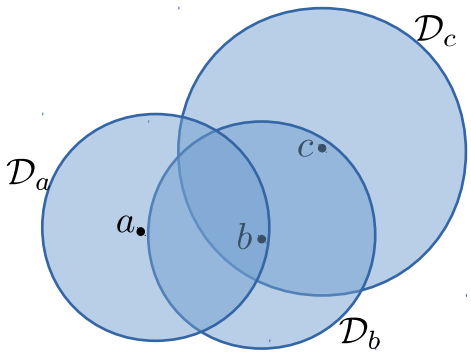
7.3 التمديد التحليلي

لتكن $f_a(z)$ سلسلة القوى

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ , \tag{30}$$

و $\mathcal{D}_a$ قرص تقاربها، لاحظ الشكل 14.3. نعتبر نقطة $b \in \mathcal{D}_a$ و نحسب مشتقات f_a عندها كما يلي:

$$\begin{aligned}
f_a(b) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n \ , \\
f_a'(b) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1} \ , \\
&\vdots \quad \vdots \\
f_a^{(\ell)}(b) &= \sum_{n=\ell}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\ell+1) a_n (b-a)^{n-\ell} \ , \\
&\vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$



شكل 14.3: التمديد التحليلي.

نضع $b_n = \frac{f_a^{(n)}(b)}{n!}$ و نشكّل سلسلة تايلور التالية

$$f_b(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \ , \tag{31}$$

التي نفرض أنها تتقارب ضمن القرص $\mathcal{D}_b$ الذي مركزه النقطة b، لاحظ الشكل 14.3.

تُسمّى الدالة f_b التمديد التحليلي للدالة f_a (analytic continuation).

نعرّف الدالة

$$f(z) = \begin{cases} f_a(z) & : z \in \mathcal{D}_a \\ f_b(z) & : z \in \mathcal{D}_b \end{cases} \ .$$

إن الدالة f تحليلية على المجموعة $\mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b$. بهذه الطريقة أمكننا تمديد تعريف الدالة f_a عند نقاط لا تنتمي إلى قرص تقاربها. و باختيار نقطة أخرى، و لتكن $c \in \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b$، و اتباع نفس الخطوات السابقة يمكننا تمديد تعريف الدالة f عند نقاط خارج $\mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b$.

في الحالة العامة، يمكن توسيع مجال تحليلية دالة ما لتشمل نقاط خارج المجموعة المعرّفة عليها، و ذلك بطريقة التمديد التحليلي.

8.3 جذور دالة تحليلية

تعريف

لتكن f دالة تحليلية على الميدان $G \subset \mathcal{C}$.
نقول عن العدد المركب z_0 أنه جذر من الرتبة k للدالة f إذا أمكننا كتابة

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \,, \tag{32}$$

حيث g دالة تحليلية على G و $g(z_0) \neq 0$.

مثال

نعتبر الدالة $f(z) = (z - i)^2 \cos z$. إن العدد $z_0 = i$ جذر من الرتبة 2 (و نقول أيضا، جذر مضاعف) للدالة f.

نعتبر سلسلة تايلور للدالة f بجوار النقطة z_0:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \,. \tag{33}$$

إذا كان $f(z_0) = 0$ و كانت جميع مشتقات الدالة f حتى الرتبة $k - 1$ معدومة عند z_0،

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(k-1)} = 0 \,, \tag{34}$$

$$f^{(k)}(z_0) \neq 0 \,, \tag{35}$$

فإنه يمكننا كتابة $f(z)$ على الشكل

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots \equiv (z - z_0)^k g(z) \,, \tag{36}$$

أين عرّفنا الدالة

$$g(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z - z_0)^2 + \cdots \,. \tag{37}$$

من خلال المعادلة (37) فإننا نستنتج أن z_0 جذر من الرتبة k.

كما يمكن، و بسهولة، البرهان على القضية العكسية: أي أنه إذا كان z_0 جذر من الرتبة k فهذا يستلزم انعدام جميع مشتقات f حتى الرتبة $k - 1$ عند النقطة z_0.

إذن، خلصنا إلى النتيجة التالية:

جذر دالة تحليلية

يكون z_0 جذرًا من الرتبة k للدالة f إذا و فقط إذا كانت:

- جميع مشتقاتها حتى الرتبة $k-1$ معدومةً عند z_0:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \ ,$$

- و المشتقة من الرتبة k غير معدومة:

$$f^{(k)}(z_0) \neq 0 \ .$$

9.3 تمارين الباب 3

التمرين 1.3: التكامل الخطي

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z+1-2i}$، حيث Γ هو قطعة المستقيم التي تربط النقطتين 1 و i.
2. $\oint_{\Gamma} z^* \mathrm{d}z$، حيث Γ هو محيط نصف قرص علوي نصف قطره R.

التمرين 2.3: طول قوس

برهن على أنه يمكن التعبير عن طول القوس Γ بالتكامل $\int_{\Gamma} |\mathrm{d}z|$.

التمرين 3.3: طويلة التكامل الخطي

نعتبر دالة f قابلة للتكامل على منحني $\mathcal{C}$ طوله ℓ.

1. برهن صحة المتراجحة

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\, |\mathrm{d}z| \,.$$

2. بين أنه إذا كان $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathcal{C}$: فإن $|\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z| \leq M\ell$.

التمرين 4.3: مبرهنة غرين

1. لتكن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دالتين حقيقيتين لمتغيرين حقيقيين. نفرض أن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ و مشتقتيهما الجزئيتين جميعها مستمرة على الميدان $\mathcal{R}$ و أيضا على محيطه $\mathcal{C}$. علاوة على ذلك، نفرض أن كل مستقيم يوازي محور الفواصل يقطع $\mathcal{C}$ في نقطتين على الأكثر.

   أثبت مبرهنة غرين[3] :

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\mathcal{C}} \left(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \right) \,.$$

2. تحقق من مبرهنة غرين من أجل $P(x,y) = 2xy - x^2$، $Q(x,y) = x + y^2$، و ميدان التكامل هو المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y = x^2$ و $x = y^2$.

[3] George Green, 1793-1841.

التمرين 5.3: مبرهنة كوشي

أثبت مبرهنة كوشي باستخدام مبرهنة غرين.

التمرين 6.3: سلسلة تايلور

نعتبر الدالة $\ln(1+z)$:

1. أكتب سلسلة تايلور و استنتج نصف قطر تقاربها.
2. أوجد سلسلة تايلور للدالة $\ln \frac{1+z}{1-z}$، و ما هو نصف قطر تقاربها ؟

التمرين 7.3: سلسلة لورين

أكتب سلسلة لورين للدوال التالية، و ذلك بجوار النقاط الشاذة، مبينا في كل مرة الجزء التحليلي و الجزء الأساسي. استنتج نوع النقطة الشاذة.

1. $f(z) = \frac{e^{z/2}}{z-2}$.
2. $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^2}$
3. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$
4. $f(z) = (z-1)\sin \frac{1}{z-1}$

10.3 حلول تمارين الباب 3

حل التمرين 1.3

حساب التكاملات التالية:

1. $\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z+1-2i}$، حيث Γ هو قطعة المستقيم التي تربط النقطتين 1 و i :

أولا، كتابة f من الشكل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1-2i} \quad ; \quad z = x + iy;$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{x+1+i(y-2)} = \frac{x+1-i(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^2} \equiv u(x,y) + iv(x,y) \ ,$$
$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x+1}{(x+1)^2+(y-2)^2} \quad ; \quad v(x,y) = \frac{2-y}{(x+1)^2+(y-2)^2} \ .$$

ثانيا، كتابة المعادلات الوسيطية :

المسار Γ عبارة عن قطعة مستقيم يربط النقطتين $1 \equiv (1,0)$ و $i \equiv (0,1)$. معادلة هذا المستقيم هي

$$y = -x + 1 \ , \ x \in [0,1] \ .$$

نفرض أن Γ مُوجّه من النقطة $(1,0)$ نحو $(0,1)$. و عليه يمكننا كتابة المعادلتين الوسيطيتين للإحداثيتين x و y كما يلي:

$$x(t) = 1 - t \ ,$$
$$\Rightarrow y(t) = -x + 1 = t \ ,$$

حيث $t \in [0,1]$، و المشتقتين من الرتبة الأولى بالنسبة للوسيط t بالعلاقتين

$$x' = -1 \ , \ y' = 1 \ .$$

إضافة إلى ذلك، تُصبح عبارتي الجزأين الحيقي و التخيلي للدالة f كما يلي:

$$u(x,y) = v(x,y) = \frac{1}{2(2-t)} \ .$$

ثالثا، حساب التكامل :

بتعويض جميع المقادير السابقة المتعلقة بالوسيط t في عبارة التكامل الخطي، المعادلة (7)،

نحصل على النتيجة التالية:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Big((ux' - vy') + i(uy' + vx')\Big)\mathrm{d}t \ , \\ &= \int_0^1 \frac{-1}{2-t}\mathrm{d}t \ , \\ &= \ln(2-t)\Big|_0^1 = -\ln 2 \ .\end{aligned}$$

2. $\oint_{\Gamma} z^*\mathrm{d}z$، حيث Γ هو محيط نصف قرص علوي نصف قطره R :

نستطيع اتباع خطوات مماثلة للحل السابق، أي إيجاد الجزأين الحقيقي و التخيلي للدالة المُراد مُكاملتها ، كتابة المعادلات الوسيطية للمسار، ثم التعويض في عبارة التكامل الخطي. إلّا أننا في ما يلي سنتبع طريقة مختلفة قليلا و ذلك لكون الدالة التي نريد مكاملتها و أيضا المسار لهما شكلين بسيطين.

أولا، نجزئ المسار Γ إلى جزأين: نصف دائرة علوية مركزها المبدأ و نصف قطرها R، نرمز لها بـ $\mathcal{C}$، و قطعة مستقيم تربط النقطتين $(-R,0) \equiv -R$ و $(R,0) \equiv R$، نرمز لها بـ $\mathcal{L}$، و نكتب إذن:

$$\begin{aligned}&\Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \ , \\ &\Rightarrow \oint_{\Gamma} z^*\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} z^*\mathrm{d}z \ + \ \int_{\mathcal{L}} z^*\mathrm{d}z \ .\end{aligned}$$

تختلف عبارة z على حسب قطعة المسار، $\mathcal{C}$ أو $\mathcal{L}$،

$$\begin{aligned}&z = Re^{i\theta} && \theta \in [0,\pi] && : \forall z \in \mathcal{C} \ , \\ &z = x + 0i = x && x \in [-R,R] && : \forall z \in \mathcal{L} \ .\end{aligned}$$

و بالتالي يُمكننا كتابة التكامل قيد الدراسة كما يلي:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} z^* \mathrm{d}z &= \int_0^{\pi} \left(Re^{i\theta}\right)^* \mathrm{d}\left(Re^{i\theta}\right) \; + \int_{-R}^{R} x^* \mathrm{d}x \; , \\
&= \int_0^{\pi} Re^{-i\theta} \left(iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right) \; + \int_{-R}^{R} x \mathrm{d}x \; , \\
&= iR^2 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \; + \int_{-R}^{R} x \mathrm{d}x \; , \\
&= iR^2\theta\Big|_0^{\pi} \; + \; \frac{1}{2}x^2\Big|_{-R}^{R} \; , \\
&= i\pi R^2 \; .
\end{aligned}$$

حل التمرين 2.3

نبرهن في ما يلي على أنه يمكننا التعبير عن طول القوس Γ بالتكامل $\int_{\Gamma} |\mathrm{d}z|$.

لتكن معادلة المسار Γ مُعطاة بالعلاقة $y = y(x)$. و عليه فإن

$$\forall z \in \Gamma : \; z = x + iy(x) \; .$$

كما أنه لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + iy'\mathrm{d}x = (1 + iy')\mathrm{d}x \; , \\
&\Rightarrow |diffz| = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \; ,
\end{aligned}$$

حيث اعتبرنا $\mathrm{d}x$ موجب، و هذا يكون صحيحا إذا كان التكامل وفق قيم متزايدة للفاصلة x. إذن يُمكننا حساب التكامل $\int_{\Gamma} |\mathrm{d}z|$ كما يلي:

$$\int_{\Gamma} |\mathrm{d}z| = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \; , \tag{38}$$

حيث x_i و x_f هما فاصلتي طرفي المسار Γ، $(x_i < x_f)$. إنّ المعادلة (38) تمثل طول المسار الذي معادلته $y(x)$، أي طول المسار Γ، و هو المطلوب إثباته في هذا التمرين.

حل التمرين 3.3

1. البرهان على صحة المتراجحة $\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$:

حسب تعريف التكامل الخطي المُعطى في المعادلة (6) و الذي نعيد كتابته هنا:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta z_j \ ,$$

فإنه يُمكننا كتابة ما يلي:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta z_j\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta z_j\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|\,|\Delta z_j| \ .\end{aligned}$$

إن السطر الآخير من المتراجحة أعلاه ما هو إلا تعريف التكامل الخطي للدالة $|f(z)|$ على نفس المسار $\mathcal{C}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|\,|\Delta z_j| \equiv \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\,|\mathrm{d}z| \ ,$$

و بالتالي تُصبح المتراجحة السابقة كما يلي:

$$\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\,|\mathrm{d}z| \ ,$$

و هو المطلوب إثباته.

2. إذا كان $\forall z \in \mathcal{C} : \ |f(z)| \leq M$ فإنه يكون لدينا

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{C} : \ \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z \right| &\leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\ |\mathrm{d}z| \ , \\ &\leq \underbrace{\int_{\mathcal{C}} M\ |\mathrm{d}z|}_{= M \int_{\mathcal{C}} |\mathrm{d}z| = M\ell} \ , \\ \Rightarrow \forall z \in \mathcal{C} : \ \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z \right| &\leq M\ell \ . \end{aligned}$$

حل التمرين 4.3

كمثال تطبيقي، نعتبر ميدان التكامل هو المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y = x^2$ و $x = y^2$، كما هو موضح في الشكل 15.3. نهدف إلى التحقق من مبرهنة غرين و ذلك من أجل $P(x,y) = 2xy - x^2$، و $Q(x,y) = x + y^2$.

إن حافة ميدان التكامل محددة بمنحنيي الدالتين $y = x^2$ (موضح في الشكل باللون الأزرق) و $x = y^2$ (موضح في الشكل باللون البرتقالي). لنرمز لمسار الدالة الأولى بـ $\mathcal{C}_1$ و مسار الدالة الثانية بـ $\mathcal{C}_2$. يلتقي هاذان المساران عند نقطة المبدأ و النقطة $(1,1)$.

من جهة لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \ . \\ &\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_{\mathcal{C}_1} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) \ + \int_{\mathcal{C}_2} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) \ . \end{aligned} \tag{39}$$

على المسار $\mathcal{C}_1$ (مُوجه من نقطة المبدأ نحو النقطة $(1,1)$) فإنه لدينا

$$\begin{aligned} y &= x^2 \ , \\ \mathrm{d}y &= 2x\mathrm{d}x \ , \\ P &= 2xy - x^2 = 2x^2 - x^2 \ , \\ Q &= x + y^2 = x + x^4 \ . \end{aligned}$$

بالتعويض في التكامل $\int_{\mathcal{C}_1} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$ نحصل على

$$\int_{\mathcal{C}_1} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)\mathrm{d}x = \frac{7}{6} \ . \tag{40}$$

أمّا على المسار $\mathcal{C}_2$ (مُوجه من النقطة $(1,1)$ نحو نقطة المبدأ) فلدينا

$$\begin{aligned} x &= y^2 \ , \\ \mathrm{d}x &= 2y\mathrm{d}y \ , \\ P &= 2xy - x^2 = 2y^3 - y^4 \ , \\ Q &= x + y^2 = 2y^2 \ . \end{aligned}$$

ثم بالتعويض في التكامل $\int_{\mathcal{C}_2} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$ فإننا نحصل على:

$$\int_{\mathcal{C}_2} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_0^1 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2)\mathrm{d}y = \frac{-17}{15} \ . \tag{41}$$

في الأخير، نعوض النتيجتين (40) و (41) في المعادلة (39) فنحصل على النتيجة التالية

$$\oint_{\mathcal{C}} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30} \ . \tag{42}$$

هذا من جهة، و من جهة أخرى لدينا

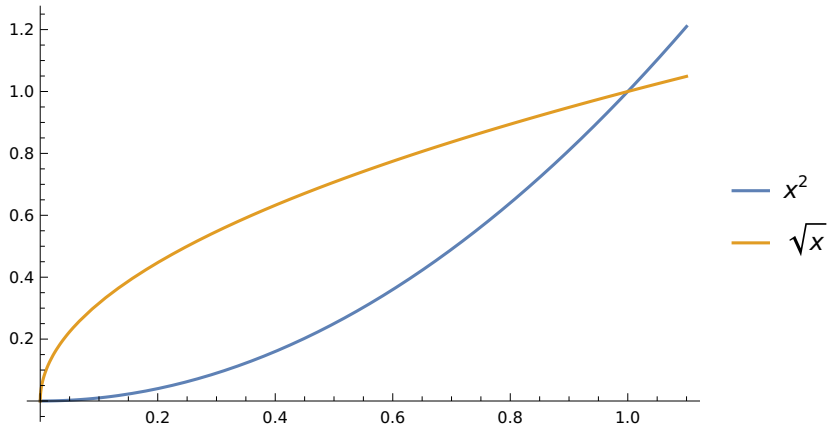
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left\{ \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y \ , \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (1 - 2x)\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y \ , \\ &= \int_0^1 (\sqrt{y} - y - y^2 + y^4)\mathrm{d}y \ , \\ &= \frac{1}{30} \ . \end{aligned} \tag{43}$$

من خلال العلاقتين (42) و (43) فإننا نلاحظ أنّ

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\mathcal{C}} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$$

أي أن مبرهنة غرين محققة، و هو المطلوب.

حل التمرين 6.3



شكل 15.3: مثال حول استخدام مبرهنة غرين..

1. **أولا، سلسلة تايلور للدالة** $f(z) = \ln(1+z)$ **بجوار الصفر :**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} ,$$
$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} .$$

ثانيا، نصف قطر التقارب :
نضع $a_n(z) = (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

اختبار النسبة

إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 ,$$

فإن السلسلة اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة.

نستخدم في ما يلي اختبار النسبة لإيجاد نصف قطر التقارب :

$$\begin{aligned} a_n(z) &= (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \ , \\ \Rightarrow a_{n+1}(z) &= (-1)^{n+1} \frac{z^{n+2}}{n+2} \ . \\ \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| &= |z| \frac{n+1}{n+2} \ , \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| &= |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = |z| \ . \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 1 \ ,$$

أي أن نصف قطر تقارب الدالة $\ln(1+z)$ هو $R = 1$.

2. **سلسلة تايلور للدالة** $\ln \frac{1+z}{1-z}$:

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ \Rightarrow \ln(1-z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ \Rightarrow \ln \frac{1+z}{1-z} &= \ln(1+z) - \ln(1-z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=0,2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$n \equiv 2\ell, \ \ell \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell+1}}{2\ell+1} \ .$$

نصف قطر التقارب : نضع $b_\ell(z) = \frac{z^{2\ell+1}}{2\ell+1}$، و نستخدم اختبار النسبة لإيجاد نصف قطر

التقارب:

$$\begin{aligned} b_\ell(z) &= \frac{z^{2\ell+1}}{2\ell+1} \\ \Rightarrow b_{\ell+1}(z) &= \frac{z^{2\ell+3}}{2\ell+3} \\ \Rightarrow \left|\frac{b_{\ell+1}(z)}{b_\ell(z)}\right| &= |z|^2\,\frac{2\ell+1}{2\ell+3} \\ \Rightarrow \lim_{\ell\to\infty}\left|\frac{b_{\ell+1}(z)}{b_\ell(z)}\right| &= |z|^2 \\ \lim_{\ell\to\infty}\left|\frac{b_{\ell+1}(z)}{b_\ell(z)}\right| < 1 &\Rightarrow |z| < 1\ , \end{aligned}$$

أي أن نصف قطر التقارب هو $R = 1$.

حل التمرين 7.3

بصفة عامة إذا كانت الدالة g تحليلية عند و بجوار النقطة a فإنه يمكننا كتابة سلسلة تايلور كما يلي:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(a)\frac{(z-a)^n}{n!}\ .$$

في ما يلي نبحث عن سلسلة لورين لبعض الدوال، مع استنتاج الجزأين التحليلي و الأساسي، و أيضا نوع النقطة الشاذة.

1. $f(z) = \frac{e^{z/2}}{z-2}$:

النقطة الشاذة : واضح أن للدالة f نقطة شاذة معزولة عند $a = 2$.

سلسلة تايلور للدالة $g(z) = e^{\frac{1}{2}z}$ **بجوار** $a = 2$:

$$e^{\frac{1}{2}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\,2}}{2^n}\,\frac{(z-2)^n}{n!} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n n!}\ .$$

سلسلة لورين للدالة f :

نقسم طرفي المعادلة الأخيرة على $z-2$ فنحصل على سلسلة لورين للدالة f :

$$\begin{aligned} \frac{e^{z/2}}{z-2} \equiv f(z) &= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{n-1}}{2^n n!}\ , \\ &= \frac{e}{z_2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^{n-1}}{2^n n!}\ . \end{aligned}$$

الجزآن الأساسي و التحليلي:

الجزء الأساسي : $\frac{e}{z_2}$.

الجزء التحليلي : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{n-1}}{2^n n!}$.

نوع النقطة الشاذة : بما أن الجزء الأساسي يحتوي على حد واحد فقط، فإن النقطة $a = 2$ قطب بسيط.

2. $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^2}$:

النقطة الشاذة : واضح أن للدالة f نقطة شاذة معزولة عند $a = 0$.

سلسلة تايلور للدالة $g(z) = \sin z$ **بجوار** $a = 0$**:**

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

سلسلة لورين للدالة f **:**

نطرح المقدار z من طرفي المعادلة الأخيرة ثم نقسم على z^2 فنحصل على سلسلة لورين للدالة f :

$$\frac{\sin z - z}{z^2} \equiv f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} .$$

الجزآن الأساسي و التحليلي:

الجزء الأساسي : غير موجود.

الجزء التحليلي : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

نوع النقطة الشاذة : بما أنه لا يوجد الجزء الأساسي فإن النقطة $a = 0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.

3. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$:

نستطيع إعادة كتابة عبارة الدالة f كما يلي:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} .$$

نضع $g_1(z) = \frac{-1}{z-1}$ و $g_2(z) = \frac{2}{z-2}$.

النقطة الشاذة : واضح أن للدالة f نقطتين شاذتين هما $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$.

سلسلة تايلور للدالة g_2 بجوار a_1 :

$$g_2(z) = -2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \ .$$

يمكن البرهان على أن السلسلة أعلاه تتقارب من أجل $|z-1| < 1$.

سلسلة لورين للدالة f بجوار a_1 :

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z-2)} \equiv f(z) &= \frac{-1}{z-1} \ + \ \frac{2}{z-2} \ , \\ &= \frac{-1}{z-1} \ - \ 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \ .\end{aligned}$$

الجزآن الأساسي و التحليلي بجوار a_1 :

الجزء الأساسي : $\frac{-1}{z-1}$.

الجزء التحليلي : $-2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$.

نوع النقطة الشاذة a_1 : بما أن الجزء الأساسي بجوار النقطة $a_1 = 1$ به حد واحد فإن هذه النقطة قطب بسيط.

سلسلة تايلور للدالة g_1 بجوار a_2 :

$$g_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n \ .$$

يستطيع القارئ أن يبين أن هذه السلسلة تتقارب من أجل $|z-2| < 1$.

سلسلة لورين للدالة f بجوار a_2 :

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z-2)} \equiv f(z) &= \frac{-1}{z-1} \ + \ \frac{2}{z-2} \ , \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n \ + \ \frac{2}{z-2} \ .\end{aligned}$$

الجزآن الأساسي و التحليلي بجوار a_2 :

الجزء الأساسي : $\frac{2}{z-2}$.

الجزء التحليلي : $-\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n$.

نوع النقطة الشاذة a_2 **:** بما أن الجزء الأساسي بجوار النقطة $a_2 = 2$ به حد واحد فإن هذه النقطة قطب بسيط.

4. $f(z) = (z-1)\sin\frac{1}{z-1}$:

النقطة الشاذة : تملك الدالة f نقطة شاذة معزولة عند $a = 1$.

سلسلة لورين للدالة f **:**

نكتب أولا سلسلة تايلور لدالة الجيب بجوار الصفر:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

و نعوض z بـ $\frac{1}{z-1}$ فنحصل على السلسلة

$$\sin\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!} ,$$

ثم بضرب طرفي المعادلة الأخيرة في $z-1$ فنحصل على سلسلة لورين للدالة f :

$$(z-1)\sin\frac{1}{z-1} \equiv f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{2n}(2n+1)!} .$$

الجزآن الأساسي و التحليلي:

الجزء الأساسي : غير موجود.

الجزء التحليلي : $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{2n}(2n+1)!}$.

نوع النقطة الشاذة : بما أنه لا يوجد الجزء الأساسي فإن النقطة $a = 1$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.

باب 4

مبرهنة الباقي و تطبيقاتها في حساب التكامل

1.4 مفهوم باقي دالة عند نقطة

نعتبر دالة f تحليلية على الدائرة Γ و كذلك داخلها ما عدا النقطة a (نقطة شاذة)، لاحظ الشكل 1.4.
تُكتب سلسلة لوران للدالة f عند النقطة a على الشكل

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots \ , \quad (1)$$

حيث تُعطى المعاملات a_n بـ

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z \quad , \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \ . \quad (2)$$

عندما نكامل السلسلة 1 على الدائرة Γ فإننا نكتب

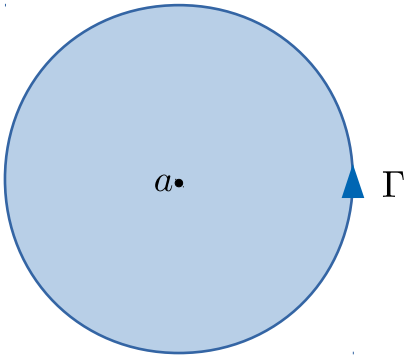
$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_\Gamma (z-a)^n \mathrm{d}z \ . \quad (3)$$

يمكن البرهان بكل سهولة على النتيجة التالية:

$$\oint_\Gamma (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & ; n \in \mathbb{Z} - \{-1\} \\ 2\pi i & ; n = -1 \end{cases} \quad (4)$$

و عليه فإنه يمكن تبسيط المعادلة (4) إلى

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1} \ . \quad (5)$$



شكل 1.4: تعريف الباقي.

لاحظ أنه بمكاملة الدالة f على الدائرة Γ فإن جميع الحدود المشتملة على المعاملات a_n اختفت باستثناء الحد الذي معامله a_{-1}.

تعريف

يُسمّى الحد a_{-1} بـ باقي (residue) الدالة f عند النقطة a، و نكتب

$$\mathrm{Res}_a f(z) = a_{-1} \ .$$

مثال

نعتبر الدالة $f(z) = e^{\frac{-1}{z}}$. من الواضح أن للدالة f نقطة شاذة جوهرية عند $a = 0$. نبحث عن باقي الدالة عند هذه النقطة:
تُكتب سلسلة لوران للدالة f كما يلي :

$$f(z) = e^{\frac{-1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^n} \ .$$

الباقي هو معامل الحد الموافق لـ $n = -1$:

$$\mathrm{Res}_0 f(z) = a_{-1} = -1 \ .$$

2.4 حساب باقي دالة عند قطب

إذا كانت للدالة f قطبا من الرتبة n عند النقطة a، فإنه يمكن حساب باقي الدالة عند هذا القطب من خلال العلاقة

$$\mathrm{Res}_a f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-a)^n f(z)\right) \ . \tag{6}$$

مثال

نعتبر الدالة $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$، و التي تملك قطبين بسيطين عند $z_1 = -1$ و $z_2 = 1$. من خلال المعادلة (6) نجد باقي الدالة f عند z_1 و z_2 كما يلي:

$$\mathrm{Res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2} \ ,$$
$$\mathrm{Res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2} \ .$$

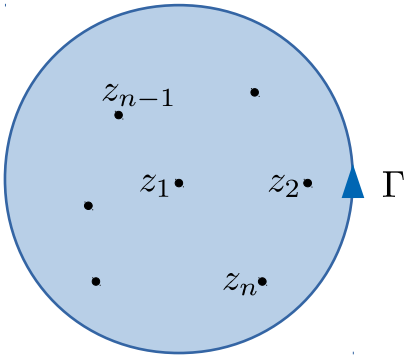
3.4 مبرهنة الباقي

إذا كانت للدالة f نقاطا شاذة z_j $(j = 1, \ldots, n)$ داخل الدائرة Γ، لاحظ الشكل 2.4، فإن تكاملها على هذه الدائرة يُعطى بالعلاقة

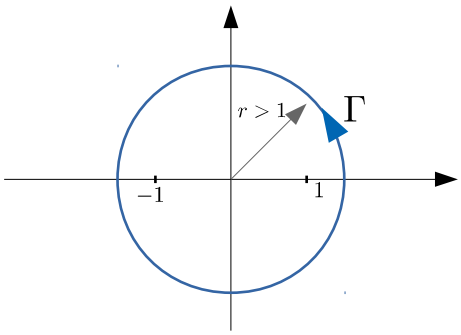
$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j} f(z) \ . \tag{7}$$

مثال

لتكن الدالة $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$. وجدنا في ما سبق أن لهذه الدالة نقطتين شاذتين عند ± 1 و الباقي عندهما $\mathrm{Res}_{\pm 1} f(z) = \frac{1}{2}$. نعتبر دائرة كيفية Γ مركزها المبدأ و نصف قطرها $r > 1$، لاحظ الشكل 3.4.



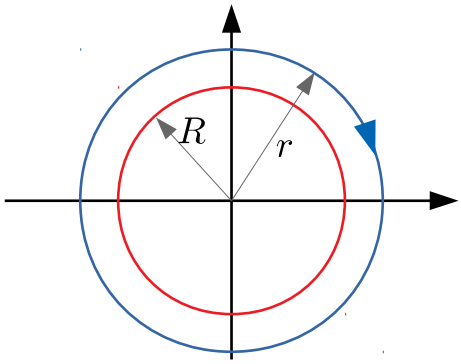
شكل 2.4: مبرهنة الباقي.



شكل 3.4: مثال: مبرهنة الباقي.

نبحث عن تكامل f على الدائرة Γ: بتطبيق مبرهنة الباقي (المعادلة (7)) نجد:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{-1} f(z) + \mathrm{Res}_{1} f(z)\right) = 2\pi i \ . \tag{8}$$



شكل 4.4: الشذوذ المنعزل عند الـ ∞.

4.4 باقي دالة عند الـ ∞

تعريف

نقول عن نقطة الـ ∞ أنها نقطة شاذة معزولة للدالة f إذا وُجد عدد حقيقي $R > 0$ حيث تكون f دالة تحليلية داخل الحلقة $R < |z| < \infty$، أنظر الشكل 4.4.

نريد هنا إيجاد باقي دالة عند $z = \infty$، و سنبين علاقة هذا الأخير مع الباقي عند $z = 0$. ثم نعيد صياغة مبرهنة الباقي بدلالة الباقي عند ∞.

نعتبر الدالة f تحليلية على الحلقة $R < |z| < \infty$، و لتكن (C) دائرة كيفية مركزها $z = 0$ و نصف قطرها r $(R < r < \infty)$ و موجهة في الاتجاه السالب[1]، أنظر الشكل 4.4. نكتب سلسلة لورين عند نقطة كيفية داخل الحلقة كما يلي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,, \tag{9}$$

حيث a_n ثوابت مركبة. كما بينا سابقا، فإنه بمكاملة الدالة f على الدائرة $\mathcal{C}$ فإننا نحصل على:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i a_{-1} \Rightarrow a_{-1} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \,. \tag{10}$$

[1] اختيار الاتجاه السالب (وفق اتجاه عقارب الساعة) كان من أجل أن تبقى النقطة الشاذة $z = \infty$ على يسار متحرك على الدائرة يسير مع نفس اتجاه عقارب الساعة. إن هذا الاصطلاح (بقاء النقاط الشاذة على اليسار) متوافق مع اختيار الاتجاه الموجب بالنسبة للنقاط الشاذة عندما تكون داخل مسار مغلق.

تعريف

يُسمّى المعامل a_{-1} المعطى في المعادلة (10) بـ **باقي الدالة** f **عند الـ** ∞، و نكتب:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \ . \tag{11}$$

يمكن التعبير عن باقي الدالة f عند $z = \infty$ بدلالة باقي دالة أخرى عند $z = 0$، و ذلك كما يلي: نقوم أولا بتغيير متغير التكامل (11)، ليصبح

$$z \longrightarrow \frac{1}{z} \qquad , \qquad \mathrm{d}z \longrightarrow \frac{-\mathrm{d}z}{z^2} \ , \tag{12}$$

فيأخذ التكامل الشكل

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}\mathrm{d}z \ , \tag{13}$$

حيث أن التكامل الأخير يكون على الدائرة $\mathcal{C}'$ التي مركزها النقطة $z = 0$ و نصف قطرها r' حيث $0 < r' < \frac{1}{R}$. لاحظ أن الطرف الثاني من المعادلة (11) ما هو إلا تعريف باقي الدالة $f(\frac{1}{z})/z^2$ عند النقطة $z = 0$. إذن وجدنا العلاقة التالية:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = \mathrm{Res}_{z=0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2} \ . \tag{14}$$

نحن الآن في وضعية تسمح لنا بصياغة ثانية لمبرهنة الباقي:

مبرهنة الباقي - صياغة ثانية

إذا كانت الدالة f تحليلية على و بداخل دائرة موجهة موجبا $\mathcal{C}$ باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة داخلها، فإن تكامل f على $\mathcal{C}$ يُكتب:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2} \ . \tag{15}$$

مثال

نريد حساب تكامل الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ على دائرة موجهة موجبا $\mathcal{C}$ مركزها $z=0$ و نصف قطرها $r>1$.
لو طبّقنا مبرهنة الباقي - الصياغة الأولى (المعادلة (7)) فسنجد:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z=z_j} f(z)\ , \tag{16}$$

حيث أن للدالة f قطبين داخل $\mathcal{C}$ هما $\pm i$ و الباقي عندهما هو $\mathrm{Res}_{z=\pm i} f(z) = \frac{\pm 1}{2i}$. و بالتالي يكون تكامل f على $\mathcal{C}$ معدوما، $\oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0$.
أما لو نطبّق الصياغة الثانية لمبرهنة الباقي (المعادلة (15)) فإننا نكتب:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2+1}\ . \tag{17}$$

لكن الدالة $\frac{1}{z^2+1}$ تحليلية عند $z=0$ أي أن الباقي هنا معدوم، و منه نستنتج أن

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0\ .$$

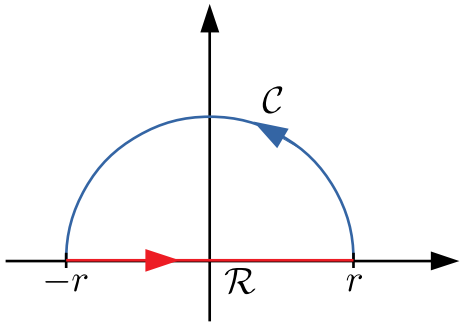
5.4 مكاملة الدوال الكسرية

في ما يلي ندرس طريقة إيجاد تكاملات من الشكل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\ , \tag{18}$$

حيث f دالة حقيقية لمتغير حقيقي تحقق الشروط التالية:

1. f دالة كسرية: ناتج قسمة كثيري حدود، $f=\frac{P_n}{Q_m}$، حيث n و m هما درجتا كثيري الحدود P_n و Q_m على التوالي.
2. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$، أي أن $\forall x\in[-\infty,\infty]:\ Q_m(x)\neq 0$.
3. درجة البسط أصغر من درجة المقام حيث $m-n\geq 2$.



شكل 5.4: تكامل دالة كسرية.

سنستخدم مبرهنة الباقي من أجل إيجاد التكامل (18). من أجل ذلك، نعتبر مجددا الدالة f لكن بمتغير مركب، $f(z)$، و نبحث عن التكامل المنحني المغلق $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ من أجل المنحني Γ الموضح في الشكل 5.4.

لاحظ أن Γ عبارة عن اتحاد نصف دائرة علوية مع القطر المنطبق على محور الفواصل. و عليه نكتب معادلة المسار كما يلي:

$$\Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{R};\ \mathcal{C} = \{z = re^{i\theta};\ \theta \in [0,\pi]\},\ \mathcal{R} = [-r, r]\ ,$$

من أجل $r > 0$ مُعطى.
بتطبيق مبرهنة الباقي نجد

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} f(z)\ , \tag{19}$$

حيث أن المجموع يكون مقصورا على النقاط الشاذة للدالة f الموجودة داخل المنحني Γ.
من جهة أخرى، نستطيع كتابة التكامل على المنحني Γ على الشكل

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \ + \int_{\mathcal{R}} f(z)\mathrm{d}z\ . \tag{20}$$

على المسار $\mathcal{R}$ لدينا $z = x$، و بالتالي نكتب

$$\int_{\mathcal{R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x\ ,$$

أما على المسار $\mathcal{C}$ فإن $z = re^{i\theta}$ حيث $\theta \in [0, \pi]$، و عليه نجد التكامل

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = ir \int_0^{\pi} e^{i\theta} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \ .$$

من خلال المعادلة (19) و المعادلة (20) و من أجل $r \to \infty$ نستنتج أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} f(z) \ - \lim_{r\to\infty} \left[ir \int_0^{\pi} e^{i\theta} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \right] \ , \qquad (21)$$

حيث، هذه المرة، المجموع يكون على جميع النقاط الشاذة للدالة f المتواجدة في النصف العلوي للمستوي المركب.بما أن f دالة كسرية فنقاطها الشاذة عبارة عن أقطاب، و بالتالي يكون حساب البواقي من خلال المعادلة (7). يبقى إذن تحديد قيمة التكامل المعبر عنه في الحد الثاني من المعادلة (21). سنبين في ما يلي أن هذا الأخير معدوم من أجل $r \to \infty$:
لدينا العلاقة التالية

$$\left| \int_0^{\pi} re^{i\theta} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \right| \leq \int_0^{\pi} r|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \ .$$

بوضع

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k = r^n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k r^{k-n} e^{ik\theta} \ , \qquad (22)$$

$$Q_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k z^k = r^m \sum_{k=0}^{n} \beta_k r^{k-m} e^{ik\theta} \ , \qquad (23)$$

α_k و β_k ثوابت معطاة, نستطيع كتابة $|f|$ من الشكل

$$|f(re^{i\theta})| = \frac{|P_n|}{|Q_m|} = \frac{1}{r^{m-n}} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k r^{k-n} e^{ik\theta} \right|}{\left| \sum_{k=0}^{n} \beta_k r^{k-m} e^{ik\theta} \right|} \ .$$

لاحظ أنه يمكن استنتاج، و بسهولة، النهاية

$$\lim_{r\to\infty} r|f(re^{i\theta})| = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{m-n-1}} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k r^{k-n} e^{ik\theta} \right|}{\left| \sum_{k=0}^{n} \beta_k r^{k-m} e^{ik\theta} \right|} = 0 \ ,$$

و ذلك لكون $m - n \geq 2$ كما فرضناه منذ البداية.
إذن نخلص إلى النتيجة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j} \mathrm{Res}_{z_j} f(z) \ . \tag{24}$$

تذكّر أن المجموع يكون على جميع أقطاب الدالة f المتواجدة في نصف المستوي العلوي.

مثال

نريد إيجاد التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \ .$$

نضع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. إنه لمن الواضح أنّ f تحقق الشروط الثلاث التي تكلمنا عنها سابقا: دالة كسرية، معرفة على $\mathbb{R}$، و درجة البسط أصغر من درجة المقام بالمقدار 2 على الأقل. و بالتالي يأخذ التكامل أعلاه القيمة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\pi i \sum_{j} \mathrm{Res}_{z_j} f(z) \quad ; \ z \in \mathbb{C} \ .$$

إن للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ قطبين عند $\pm i$، أي أن أحدها يقع في نصف المستوي العلوي (i) و الآخر في النصف السفلي $(-i)$. نهتم فقط بالقطب الأول و نبحث عن باقي الدالة f عنده:

$$\mathrm{Res}_i f(z) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \ ,$$

و بالتالي يكون التكامل المطلوب مساويا إلى

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\pi i \mathrm{Res}_i f(z) = \pi \ .$$

6.4 مكاملة الدوال المثلثية

ندرس الآن تكاملات من الشكل

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta \ ,$$

حيث f دالة حقيقية.

نستطيع إيجاد التكامل أعلاه بتطبيق مبرهنة الباقي: نعتبر العدد المركب $z = e^{i\theta}$. لدينا العلاقات التالية:

$$\sin\theta = \frac{z - z^*}{2i} \ , \tag{25}$$

$$\cos\theta = \frac{z + z^*}{2} \ , \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz} \ . \tag{27}$$

إذن نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{\mathcal{C}} f\left(\frac{z - z^*}{2i}, \frac{z + z^*}{2}\right) \frac{\mathrm{d}z}{iz} \ , \tag{28}$$

حيث $\mathcal{C}$ هي دائرة الوحدة: $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} \ ; \ \theta \in [0, 2\pi]\}$. نفرض أنه لا توجد نقاط شاذة للدالة $\frac{f\left(\frac{z-z^*}{2i}, \frac{z+z^*}{2}\right)}{z}$ على الدائرة $\mathcal{C}$. و عليه فإن مبرهنة الباقي تعطينا النتيجة التالية:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} \frac{f\left(\frac{z-z^*}{2i}, \frac{z+z^*}{2}\right)}{z} \ , \tag{29}$$

حيث المجموع يكون على جميع النقاط الشاذة الموجودة في نصف القرص العلوي.

7.4 التكامل على خط تفرع دالة متعددة القيم

حتى نتمكن من استعمال مبرهنة الباقي يجب أن تكون الدالة قيد الدراسة تحليلية على مسار مغلق و بداخله باستثناء عدد منته من الأقطاب. لكن إن كانت الدالة متعددة القيم فإنها غير تحليلية على خط التفرع. و عليه يجب اختيار مسار مغلق لا يحتوي على أي جزء من خط التفرع.

لتوضيح الفكرة أكثر، نعتبر المثال التالي لمكاملة دالة متعددة القيم. يمكن تطبيق ما في هذا المثال على تكامل دوال أخرى.

مثال

نريد إيجاد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,, \tag{30}$$

الذي يمكن البرهان على أنه متقارب (باستخدام اختبار المقارنة مثلا).
نعتبر الدالة f المعرفة بـ

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}\,. \tag{31}$$

لاحظ أن f دالة متعددة القيم و ذلك لوجود دالة الجذر التربيعي $\sqrt{z}$. إذن يجب علينا تحديد خط تفرع للدالة f. نعلم أن للدالة $\sqrt{z}$ نقطتي تفرع هما $z_0 = 0$ و $z_1 = \infty$، و بالتالي فإن كل نصف مستقيم ينطلق من المبدأ يمثل خط تفرع الدالة f. نظرا لكون التكامل المطلوب هو على المجال $[0, \infty]$ فإن اختيارنا لخط التفرع سيكون الأعداد الحقيقية الموجبة.
من أجل تطبيق مبرهنة الباقي لإيجاد التكامل (30) فإننا أولا نعتبر المسار Γ الموضح في الشكل 6.4، ثم نبحث عن التكامل $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ من أجل $R \to \infty$ و $\epsilon \to 0$:

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{L}_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{L}_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{32}$$

على المسار الدائري $\mathcal{C}_R$ لدينا $z = Re^{i\theta}$ فتكون طويلة التكامل

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\mathcal{C}_R} |f(z)|\,|\mathrm{d}z|\,, \tag{33}$$

حيث $|\mathrm{d}z| = R\mathrm{d}\theta$ و

$$|f(z)| = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R^4 + 2R^2\cos 2\theta + 1}} \leq \frac{\sqrt{R}}{|R^2-1|}\,. \tag{34}$$

عند أخذ النهاية $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\mathrm{d}z\right| = 0\,, \tag{35}$$

أي أن $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

بنفس الطريقة نجد التكامل على المسار الدائري $\mathcal{C}_\epsilon$ يحقق:

$$\left|\int_{\mathcal{C}_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi\epsilon\sqrt{\epsilon}}{|\epsilon^2-1|} \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\mathcal{C}_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{C}_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{36}$$

أما على المسار $\mathcal{L}_1$ فلدينا $z = x + i\epsilon$ و $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$، و عليه نجد ما يلي:

$$\int_{\mathcal{L}_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{\sqrt{x+i\epsilon}}{x^2+1+2i\epsilon x-\epsilon^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{37}$$

نبحث عن الجذر التربيعي للعدد المركب $x + i\epsilon$، فنجد:

$$\sqrt{x+i\epsilon} = \sqrt{(re^{i\theta})} = \sqrt{r}e^{\frac{i}{2}\theta} \quad : r = \sqrt{x^2+\epsilon^2},\ \tan\theta = \frac{\epsilon}{x}\,, \tag{38}$$

و عليه نحصل على النهاية $\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{x+i\epsilon} = \sqrt{x}$، و نخلص إلى عبارة التكامل:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{L}_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \equiv I\,. \tag{39}$$

باتباع نفس الخطوات نجد التكامل على المسار $\mathcal{L}_2$:

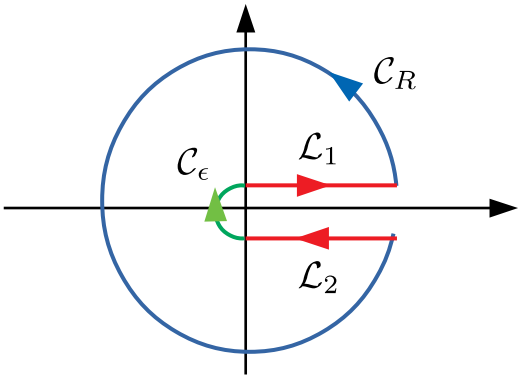
$$z = x - i\epsilon = re^{i(2\pi-\theta)} \quad : r = \sqrt{x^2+\epsilon^2},\ \tan\theta = \frac{\epsilon}{x}\,,$$

$$\sqrt{x-i\epsilon} = -\sqrt{r}e^{\frac{i}{2}\theta} \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{x-i\epsilon} = -\sqrt{x}\,,$$

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{L}_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_\infty^0 \frac{-\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \equiv I\,. \tag{40}$$

بهذا نكون قد وجدنا عبارة تكامل f على المسار Γ:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2I\,. \tag{41}$$



شكل 6.4: مكاملة دالة على خط تفرع دالة متعددة القيم.

لكن في المقابل، نستطيع إيجاد نفس التكامل باستخدام مبرهنة الباقي:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_j \mathrm{Res}_{z_j} f(z)\ , \tag{42}$$

حيث أن المجموع هو على جميع أقطاب الدالة f الموجودة داخل المسار Γ. واضح أنه لدينا قطبين عند $\pm i$، حيث باقي الدالة f عندهما يساوي

$$\mathrm{Res}_{\pm i} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm 1 - i)\ . \tag{43}$$

إذن فإننا نحصل على:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sqrt{2}\pi\ , \tag{44}$$

و يكون التكامل المطلوب إيجاده من الأول مساويا لـ:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ . \tag{45}$$

8.4 تمارين الباب 4

التمرين 1.4: إيجاد باقي دالة

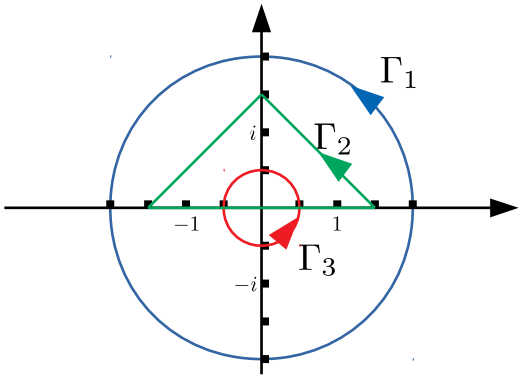
أوجد باقي الدالة f عند جميع نقاطها الشاذة، و ذلك من أجل:

- $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
- $f(z) = \frac{\sin z}{z^\ell}$، حيث ℓ عدد طبيعي غير معدوم.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$
- $f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}$

التمرين 2.4: تكامل دالة على مسار مغلق - مبرهنة الباقي

أوجد قيمة التكامل $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ من أجل:

1. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ و $\Gamma = \Gamma_1$، لاحظ الشكل 7.4. نفس السؤال من أجل $\Gamma = \Gamma_2$ ثم $\Gamma = \Gamma_3$.
2. $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}$ و Γ هو دائرة مركزها المبدأ و نصف قطرها كيفي.



شكل 7.4: نظرية الباقي: تمرين.

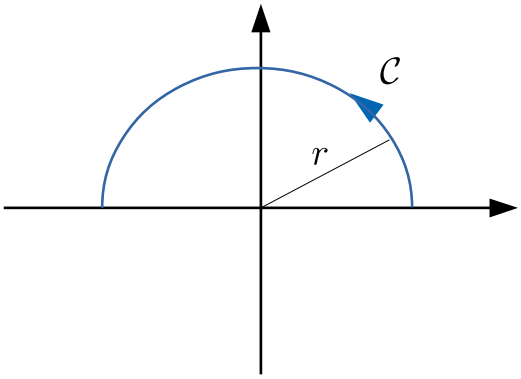
التمرين 3.4: تكامل دالة على نصف دائرة قطرها لا نهائي

نعتبر دالة f تحليلية على نصف دائرة علوية، لاحظ الشكل 8.4، مركزها المبدأ و نصف قطرها r.

نفرض أن الدالة f تحقق الشرط $|f(z)| \leq \frac{M}{r^\ell}$، حيث ℓ عدد حقيقي و $M > 0$، و ذلك من أجل كل نقاط نصف الدائرة.

أوجد الشرط الذي يجب أن يحققه الوسيط ℓ حتى يكون تكامل الدالة f على نصف الدائرة معدومًا لمّا يكون نصف القطر لا نهائيا.

تطبيق: اعتبر الدالة $f(z) = \frac{1}{z^\alpha + \beta}$، حيث α و β عددان مركبان. متى يكون تكامل f على نصف الدائرة العلوية لا نهائية القطر معدوما ؟



شكل 8.4: تكامل دالة على نصف دائرة قطرها لا نهائي: تمرين.

التمرين 4.4: عبارة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2k}+1}$

باستخدام مبرهنة الباقي، بين أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}+1}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\pi i \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-i\pi\frac{2j+1}{2k}}}{\prod\limits_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}\left(1-e^{i\pi\frac{\ell-j}{k}}\right)},$$

حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

التمرين 5.4: تكامل دالة كسرية مثلثية

بين ما يلي:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta + 2\cos\theta + 2\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\theta \;=\; \sqrt{2}\pi\ .$$

التمرين 6.4: تكامل جداء دلة كسرية و دالة مثلثية

نريد في ما يلي إيجاد عبارة تكامل من الشكل

$$\int_0^{\infty} \cos mx\ f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

حيث $m > 0$ و f دالة كسرية تحقق بعض الشروط يلي ذكرها.

1. نعتبر التكامل

$$\oint_\Gamma e^{imz} f(z)\,\mathrm{d}z\ ,$$

حيث Γ هو المسار المغلق المبين في الشكل 9.4. نفرض أنه على الجزء الدائري من المسار Γ لدينا

$$|f(z)| \le \frac{M}{r^k} \qquad ;\ k > 0\ .$$

برهن على العلاقة التالية:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

2. بين أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ تحقق شروط السؤال السابق، ثم أوجد عبارة التكامل

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\ .$$

التمرين 7.4: عدد جذور و أقطاب دالة (مبرهنة العمدة)

لتكن f دالة مركبة لمتغير مركب، تحليلية على المسار المغلق البسيط Γ. نفرض أن الدالة f تحليلية أيضا بداخل Γ باستثناء القطب α ذي الرتبة p. إضافة إلى ذلك، نفرض وجود جذر β من الرتبة n للدالة f داخل Γ.

برهن على العلاقة التالية:

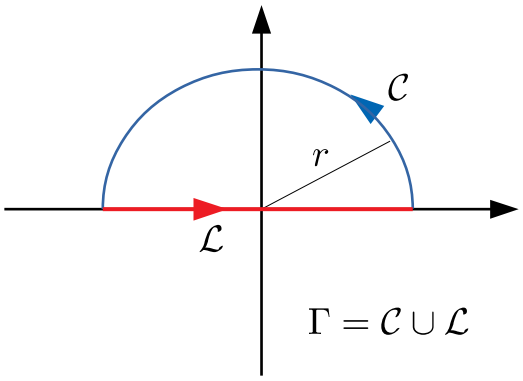
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = n - p\,.$$

التمرين 8.4: عدد جذور و أقطاب دالة (مبرهنة العمدة) - صياغة عامة

لتكن f دالة مركبة لمتغير مركب، تحليلية على المسار المغلق البسيط Γ. نفرض أن الدالة f تحليلية أيضا بداخل Γ باستثناء الأقطاب α_j ذات الرتبة p_j، $j = 1, \ldots, P$. إضافة إلى ذلك، نفرض وجود الجذور β_k من الرتبة n_k للدالة f داخل Γ، $k = 1, \ldots, N$.

برهن على العلاقة التالية:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{N} n_k \sum_{j=1}^{P} p_j\,.$$



شكل 9.4: تكامل جداء دلة كسرية و دالة مثلثية: تمرين.

9.4 حلول تمارين الباب 4

حل التمرين 1.4

إيجاد باقي الدالة f عند جميع نقاطها الشاذة :

- $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$:

تملك الدالة f نقطتين شاذتين (قطبين بسيطين) عند $z_1=i$ و $z_2=-i$. باستخدام المعادلة (6) فإننا نجد باقي هذه الدالة عند قطبيها كما يلي:

$$\mathrm{Res}_{z_1} f(z)=\lim_{z\to z_1}\Big((z-z_1)f(z)\Big)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{-i}{2}\,,$$
$$\mathrm{Res}_{z_2} f(z)=\lim_{z\to z_2}\Big((z-z_2)f(z)\Big)=\lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i}=\frac{i}{2}\,.$$

- $f(z)=\frac{\sin z}{z^\ell}$:

لاحظ أن لهذه الدالة نقطة شاذة عند $a=0$، حيث أنها تكون قابلة للإزالة من أجل $\ell=1$ (راجع المثال المُعطى في الدرس على الصفحة 84) و تكون قطباً من الرتبة $\ell-1$ لمّا $\ell>1$ (للوصول إلى هذه النتيجة، يُستعمل تعريف القطب كما هو مُعطى في الدرس على الصفحة 82).
لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
\forall \ell\in\mathbb{N}^*:\ \mathrm{Res}_a f(z) &= \lim_{z\to a}\frac{1}{(\ell-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(\ell-1)}}{\mathrm{d}z^{\ell-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(\ell-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(\ell-1)}}{\mathrm{d}z^{\ell-1}} z^\ell\frac{\sin z}{z^\ell}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(\ell-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(\ell-1)}}{\mathrm{d}z^{\ell-1}}\sin z\\
&= \begin{cases}\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{(\ell-1)!}(-1)^{\frac{1}{2}(\ell-1)}\sin z & ;\ \ell\equiv \text{فردي}\\ \displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{(\ell-1)!}(-1)^{\frac{1}{2}(\ell-2)}\cos z & ;\ \ell\equiv \text{زوجي}\end{cases}\\
&= \begin{cases}0 & ;\ \ell\equiv \text{فردي}\\ \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}(\ell-2)}}{(\ell-1)!} & ;\ \ell\equiv \text{زوجي}\end{cases}
\end{aligned}\quad ;\ n\in\mathbb{N}\,,$$

ملاحظة:
يُمكننا الوصول إلى نفس النتيجة أعلاه بكتابة سلسلة لورين للدالة $\frac{\sin z}{z^\ell}$ بجوار الصفر، ثم استخراج معامل الحد $\frac{1}{z}$. يُترك هذا كتمرين للقارئ.

- $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$:

تملك هذه الدالة قطبين بسيطين هما $z_1 = \frac{-i\pi}{2}$ و $z_2 = \frac{i\pi}{2}$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z\to z_1} \Big((z-z_1)f(z)\Big)\,, \\
&= \lim_{z\to \frac{-i\pi}{2}} \big(z+\frac{i\pi}{2}\big)\frac{\sin z}{z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\,, \\
&= \lim_{z\to \frac{-i\pi}{2}} \frac{\sin z}{z-\frac{i\pi}{2}}\,, \\
&= \frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\pi}\,. \\
\mathrm{Res}_{z_2} f(z) &= \lim_{z\to z_2} \Big((z-z_2)f(z)\Big)\,, \\
&= \lim_{z\to \frac{i\pi}{2}} \big(z-\frac{i\pi}{2}\big)\frac{\sin z}{z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\,, \\
&= \lim_{z\to \frac{i\pi}{2}} \frac{\sin z}{z+\frac{i\pi}{2}}\,, \\
&= \frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

- $f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}$:

على خلاف ما سبق فلهذه الدالة نقطة شاذة جوهرية (عند النقطة $a=0$) و لا نستطيع استخدام المعادلة (6). لإيجاد الباقي في هذه الحالة نحتاج أولا إلى كتابة سلسلة لورين، كما يلي:

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\Rightarrow e^{\frac{-1}{z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^{-2n}\,,
\end{aligned}$$

ثُمّ نجد الباقي و الذي هو معامل الحد $\frac{1}{z}$. لاحظ أنه لا يوجد هذا الحد في سلسلة لورين أعلاه، أي أن معامله معدوم و نكتب إذن:

$$\mathrm{Res}_a f(z) = 0\,.$$

حل التمرين 2.4

تنص مبرهنة الباقي على

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j} \mathrm{Res}_{z_j} f(z) \ ,$$

حيث f مستمرة على Γ و المجموع يكون على جميع النقاط الشاذة للدالة f الموجودة بداخل المسار المغلق Γ.

1. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$:

للدالة f قطبين بسيطين عند النقطتين $z_\pm = \pm i$. نحسب باقي الدالة عندهما كما يلي:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_\pm} f(z) &= \lim_{z\to z_\pm} (z - z_\pm) f(z) \ , \\
&= \lim_{z\to z_\pm} \frac{z - z_\pm}{z^2+1} \ , \\
&= \lim_{z\to z_\pm} \frac{z - z_\pm}{(z - z_+)(z - z_-)} \ , \\
&= \lim_{z\to z_\pm} \frac{1}{z - z_\mp} \ , \\
&= \frac{\pm 1}{2i} \ .
\end{aligned}$$

نحسب الآن التكامل $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$:

من أجل $\Gamma = \Gamma_1$:
توجد النقطتين الشاذتان $z_\pm$ داخل المسار المغلق Γ_1 و عليه نكتب:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} &= 2\pi i \Big(\mathrm{Res}_{z_+} f(z) \ + \ \mathrm{Res}_{z_-} f(z) \Big) \\
&= 2\pi i (\frac{1}{2i} + \frac{-1}{2i}) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

من أجل $\Gamma = \Gamma_2$:
في هذه الحالة فإن z_+ هي النقطة الشاذة الوحيدة الموجودة بداخل المسار Γ_2 و عليه نجد:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} &= 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z_+} f(z) \\
&= 2\pi i \ \frac{1}{2i} \\
&= \pi \ .
\end{aligned}$$

من أجل $\Gamma = \Gamma_3$:
لاحظ أنه لا توجد أي نقطة شاذة بداخل المسار Γ_3 و عليه يكون التكامل معدومًا:

$$\oint_{\Gamma_3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = 0 \ .$$

2. $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}$:

تملك هذه الدالة نقطة شاذة جوهرية عند $a = 0$ (نقطة المبدأ). و باعتبار Γ دائرة مركزها المبدأ و نصف قطرها كيفي فإن مبرهنة الباقي تُكتب

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \ \mathrm{Res}_0 f(z) \ .$$

نبحث عن باقي الدالة عند المبدأ، و ذلك من خلال معامل الحد $\frac{1}{z}$ من سلسلة لورين:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \Rightarrow e^{\frac{-1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^n} \ , \\ \Rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^{n+1}} \ . \\ \Rightarrow \mathrm{Res}_0 \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} &= 1 \ , \end{aligned}$$

و عليه يصبح التكامل

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \ .$$

حل التمرين 3.4

لدينا ما يلي

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \mathbb{C} : \ |f(z)| \leq \frac{M}{r^\ell} \ , \\
&\Rightarrow \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| \ |\mathrm{d}z| \ , \\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathcal{C}} \frac{M}{r^\ell} \ |\mathrm{d}z| \ .
\end{aligned}$$

لكن من أجل $z \in \mathcal{C}$ فإنه يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
&z = re^{i\theta} \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ , \\
&\Rightarrow |\mathrm{d}z| = |ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta| = r\mathrm{d}\theta \ .
\end{aligned}$$

و عليه فإن طويلة التكامل أعلاه تحقق المتراجحة

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \int_0^\pi \frac{M}{r^\ell} r\mathrm{d}\theta \ , \\
&\Rightarrow \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \frac{M\pi}{r^{\ell-1}} \ .
\end{aligned}$$

و بحساب النهاية نجد

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq M\pi \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\ell-1}} \ , \\
&\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq 0 \ , \\
&\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \right| = 0 \ , \\
&\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0 \ ,
\end{aligned}$$

و هو المطلوب البرهان عليه.

حل التمرين 4.4

نعتبر الدالة $f(z) = \frac{1}{z^{2k}+1}$ و المسار المُغلق Γ الذي هو عبارة عن اتحاد نصف دائرة علوية، $\mathcal{C}$، مركزها المبدأ و نصف قطرها R، و المجال $[-R, R]$:

$$\Gamma = \mathcal{C} \cup [-R, R] \ .$$

بتطبيق مبرهنة الباقي يمكننا كتابة

$$\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^{2k}+1} = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} \frac{1}{z^{2k}+1} \ ,$$

$$\Leftrightarrow \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2k}+1} + \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z^{2k}+1} = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} \frac{1}{z^{2k}+1} \ .$$

نبحث الآن عن أقطاب الدالة $\frac{1}{z^{2k}+1}$ ثم عن باقي هذه الدالة عندها. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
&z^{2k}+1 = 0 \Rightarrow z^{2k} = -1 = e^{i2j+1\pi} \ , \ j \in \mathcal{Z} \ . \\
&z = re^{i\theta} \Rightarrow z^{2k} = r^{2k}e^{i2k\theta} \ , \\
&\Rightarrow r^{2k}e^{i2k\theta} = e^{i2j+1\pi} \ , \\
&\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{(2j+1)\pi}{2k} \end{cases} \ , \ j = 0, \ldots, 2k-1 \\
&\Rightarrow z_j = e^{i\frac{(2j+1)\pi}{2k}} \ .
\end{aligned}$$

نهتم الآن بالأقطاب الموجودة في نصف المستوي العلوي:

$$\begin{aligned}
0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow 0 &\leq \frac{(2j+1)\pi}{2k} \leq \pi \ , \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq j \leq k - \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow j = 0, \ldots, k-1 \ .
\end{aligned}$$

نبحث عن باقي الدالة $\frac{1}{z^{2k}+1}$ عند هذه الأقطاب:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_j}\frac{1}{z^{2k}+1} &= \lim_{z\to z_j}\frac{z-z_j}{z^{2k}+1}\,,\\
&= \lim_{z\to z_j}\frac{z-z_j}{\prod_{\ell=0}^{2k-1}(z-z_\ell)}\,,\\
&= \lim_{z\to z_j}\frac{1}{\prod_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}(z-z_\ell)}\,,\\
&= \frac{1}{\prod_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}(z_j-z_\ell)}\,,\\
&= \frac{1}{\prod_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}\left(e^{i\frac{(2j+1)\pi}{2k}}-e^{i\frac{(2\ell+1)\pi}{2k}}\right)}\,,\\
&= \frac{e^{-i\frac{(2j+1)\pi}{2k}}}{\prod_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}\left(1-e^{i\frac{\ell-j}{k}\pi}\right)}\,.
\end{aligned}$$

و بالتالي تُكتب عبارة التكامل السابقة كما يلي:

$$\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2k}+1}+\int_{\mathcal{C}}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2k}+1}=2\pi i\sum_{j=0}^{k-1}\frac{e^{-i\frac{(2j+1)\pi}{2k}}}{\prod_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}\left(1-e^{i\frac{\ell-j}{k}\pi}\right)}\,.$$

بأخذ النهاية $R\to\infty$ فإن التكامل على نصف الدائرة $\mathcal{C}$ ينعدم (أنظر حل التمرين (3.4))، و عليه فإننا نصل إلى النتيجة المطلوب البرهان عليها:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2k}+1}=2\pi i\sum_{j=0}^{k-1}\frac{e^{-i\frac{(2j+1)\pi}{2k}}}{\prod_{\ell=0;\ \ell\neq j}^{2k-1}\left(1-e^{i\frac{\ell-j}{k}\pi}\right)}\,.$$

حل التمرين 5.4

نضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in[0,2\pi]$ أي أن z ينتمي إلى دائرة الوحدة، و التي سنرمز

لها في ما يلي بـ $\mathcal{C}$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2}(z+z^*)\ ,\\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}(z-z^*)\ ,\ |z| = 1\ ,\ \mathrm{d}z = iz\mathrm{d}\theta\ .\end{aligned}$$

و عليه يكون لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta + 2\cos\theta + 2\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\theta &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{\mathrm{d}z}{iz}}{\sqrt{2}\frac{1}{2i}(z-z^*) + 2\frac{1}{2}(z+z^*) + 2\sqrt{2}}\,\mathrm{d}z\ ,\\ &= \sqrt{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{(1+i\sqrt{2})z^2 + 4iz - (1-i\sqrt{2})}\,\mathrm{d}z\ ,\\ &= \sqrt{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{(1+i\sqrt{2})(z+\frac{i}{1+i\sqrt{2}})(z+\frac{3i}{1+i\sqrt{2}})}\,\mathrm{d}z\ .\end{aligned}$$

واضح جدا أن للدالة المُكاملة أعلاه قطبين بسيطين هما $z_1 = \frac{-i}{1+i\sqrt{2}}$ و $z_2 = 3z_1$، حيث $|z_1| < 1$ و $|z_2| > 1$ أي أن z_1 موجود داخل دائرة الوحدة، و z_2 خارجها. و عليه عندما نطبق مبرهنة الباقي على التكامل أعلاه نجد:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta + 2\cos\theta + 2\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\theta &= \sqrt{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{(1+i\sqrt{2})(z+\frac{i}{1+i\sqrt{2}})(z+\frac{3i}{1+i\sqrt{2}})}\,\mathrm{d}z\\ &= \sqrt{2}\ 2\pi i \mathrm{Res}_{z_1} \frac{\mathrm{d}z}{(1+i\sqrt{2})(z+\frac{i}{1+i\sqrt{2}})(z+\frac{3i}{1+i\sqrt{2}})}\ ,\\ &= \sqrt{2}\ 2\pi i\ \frac{1}{2i}\\ &= \sqrt{2}\ \pi\ ,\end{aligned}$$

و هو المطلوب إيجاده في هذا التمرين.

حل التمرين 6.4

1. نبرهن على العلاقة $\lim_{r\to\infty}\int_{\mathcal{C}_r} e^{imz}f(z) = 0$:

لدينا:

$$\left|\int_{\mathcal{C}_r} e^{imz}f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\mathcal{C}_r} |e^{imz}|\ |f(z)|\ |\mathrm{d}z|\ .$$

على المسار $\mathcal{C}_r$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \ ; \ 0 \leq \theta \leq \pi \ , \\ \mathrm{d}z &= ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta \ , \\ e^{imz} &= e^{-mr\sin\theta}e^{imr\cos\theta} \ . \end{aligned}$$

لكن لدينا

$$\begin{aligned} |e^{imz}| &= e^{-mr\sin\theta} \ , \\ |\mathrm{d}z| &= r\mathrm{d}\theta \ , \\ |f(z)| &\leq \frac{M}{r^k} \ ; \ k, M > 0 \ , \end{aligned}$$

و عليه نصل إلى العبارة التالية:

$$\left| \int\limits_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \frac{M}{r^{k-1}} \int\limits_0^{\pi} e^{-mr\sin\theta}\mathrm{d}\theta \ .$$

و بما أن الدالة $\sin\theta$ متناظرة بالنسبة إلى المحور $x = \frac{1}{2}\pi$ على المجال $[0, \pi]$ فإنه يمكننا كتابة

$$\int\limits_0^{\pi} e^{-mr\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta}\mathrm{d}\theta \ ,$$

و عليه نحصل على المتراجحة

$$\left| \int\limits_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \frac{2M}{r^{k-1}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta}\mathrm{d}\theta \ .$$

إضافة إلى ذلك، يُمكن استنتاج المتراجحة التالية هندسيا:

$$\forall\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] : \ \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$$

و منه نجد:

$$e^{mr\sin\theta} \geq e^{\frac{2}{\pi}\theta mr} \Rightarrow e^{-mr\sin\theta} \leq e^{-\frac{2}{\pi}\theta mr} \ ,$$

و بمكاملة طرفي هذه المتراجحة نجد

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta}\mathrm{d}\theta \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\theta mr}\mathrm{d}\theta = \frac{-\pi}{2mr}(e^{-mr} - 1) \ .$$

إذن وصلنا إلى النتيجة التالية :

$$\left| \int_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z) \mathrm{d}z \right| \leq \frac{M\pi}{mr^k}(1 - e^{-mr}) \ .$$

الآن نحسب النهاية لمّا $r \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z) \mathrm{d}z \right| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{M\pi}{mr^k}(1 - e^{-mr}) = 0 \ ,$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \left| \int_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z) \mathrm{d}z \right| = 0 \ ,$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{C}_r} e^{imz} f(z) \mathrm{d}z = 0 \ .$$

2. (ا) نبيّن أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ تحقق شروط السؤال السابق، أي

$$\exists k, M > 0 : \ \forall z \in \mathcal{C}_r, \ \left| \frac{1}{z^2+1} \right| \leq \frac{M}{r^k} \ .$$

من أجل ذلك نختار r مقدارا كبيرا كفاية، و ليكن مثلا $r > 2$. نستطيع ان نبين بسهولة ما يلي:

$$|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 \Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{r^2 - 1} \ .$$

$$r^2 > 2 \Rightarrow \frac{1}{2}r^2 < 1 \Rightarrow r^2 > \frac{1}{2}r^2 + 1 \ ,$$

$$\Rightarrow r^2 - 1 > \frac{1}{2}r^2 \ ,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2 - 1} < \frac{2}{r^2} \ .$$

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{2}{r^2} \ ,$$

$$\Rightarrow M = 2, \ k = 2 \ .$$

(ب) إيجاد عبارة التكامل $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$:

نعتبر الآن مسارًا مغلقا مكون من نصف الدائرة $\mathcal{C}_r$ و المجال $[-r,r]$. يمكن كتابة مبرهنة الباقي كما يلي:

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\mathcal{C}_r} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{\mathrm{z_j}} \frac{\mathrm{e^{imz}}}{\mathrm{z^2+1}}\ ,$$

حيث نهتم بالباقي عند النقاط الشاذة الموجودة داخل المسار المغلق. واضح أن للدالة أعلاه قطبين بسيطين أحدهما فقط موجود داخل المسار المغلق و هو $a=i$. نحسب الباقي عند هذا القطب و نجده :

$$\mathrm{Res_i} \frac{\mathrm{e^{imz}}}{\mathrm{z^2+1}} = \frac{e^{-m}}{2i}\ ,$$

و عليه تصبح عبارة التكامل كما يلي:

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\mathcal{C}_r} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \pi e^{-m}\ .$$

و بالانتقال إلى النهاية $r \to \infty$ فإن التكامل على نصف الدائرة يكون معدوم حسب نتيجة السؤال السابق. و عليه نحصل على:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \pi e^{-m}\ ,\\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx)+i\sin(mx)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \pi e^{-m}\ ,\\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;+ i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \pi e^{-m}\ .
\end{aligned}$$

لكن التكامل الثاني يساوي الصفر لأنه تكامل دالة فردية على مجال متناظر. إذن نصل إلى

الإجابة على هذا السؤال :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-m}\ .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-m}\ ,$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,e^{-m}\ .$$

باب 5

تطبيقات

1.5 مبرهنة الطويلة العظمى

مبرهنة الطويلة العظمى

لتكن f دالة تحليلية على الميدان $\mathcal{D}$. إذا وُجد $a \in \mathcal{D}$ حيث:

$$\forall z \in \mathcal{D} : \ f(z) \leq f(a) \ ,$$

فإن الدالة f ثابتة على $\mathcal{D}$.

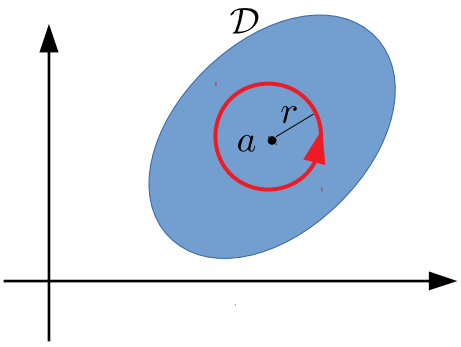
ملاحظة:
يُمكن صياغة المبرهنة أعلاه كما يلي:

لا يمكن لطويلة دالة تحليلية على ميدان $\mathcal{D}$ أن تأخذ قيمة عظمى إلا إذا كانت دالة ثابتة.

نبرهن على المبرهنة أعلاه كما يلي: نختار دائرة $\mathcal{C}$ داخل الميدان $\mathcal{D}$ مركزها النقطة a و نصف قطرها r كيفي (بشرط أن تبقى الدائرة داخل الميدان $\mathcal{D}$)، لاحظ الشكل 1.5.

بتطبيق مبرهنة الباقي (أو تكامل كوشي)، يمكن كتابة كا يلي:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z \ . \tag{1}$$



شكل 1.5: مبرهنة الطويلة العظمى.

بحساب طويلة طرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| ,$$
$$\Rightarrow |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{|f(z)|}{|z-a|}\,|\mathrm{d}z| . \qquad (2)$$

و بكتابة معادلة الدائرة $\mathcal{C}$:

$$z = a + re^{i\theta} \qquad ; \ 0 \leq \theta < 2\pi , \qquad (3)$$

نحصل على المتراجحة:

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{0}^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta . \qquad (4)$$

الآن، بفرض أن $|f(a)|$ هو القيمة العظمى لطويلة الدالة f على الميدان $\mathcal{D}$ فإنه يكون لدينا ما يلي:

$$|f(a+re^{i\theta})| \leq |f(a)| , \qquad (5)$$

من أجل جميع قيم $0 \leq \theta < 2\pi$ و r كيفي (طبعا، بشرط بقاء الدائرة $\mathcal{C}$ داخل الميدان $\mathcal{D}$). إذن نصل إلى النتيجة:

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(a)|\,\mathrm{d}\theta = |f(a)| , \qquad (6)$$

أي أن

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\ ,$$

$$\Rightarrow |f(a)| = |f(a+re^{i\theta})|\ . \tag{7}$$

إن المعادلة (7) صالحة من أجل a، r، و θ كيفية (ضمن الميدان $\mathcal{D}$) ، و هذا لا يكون صحيحا إلا إذا كانت الدالة f ثابتة. و بهذا نكون قد بيّنا صحة المبرهنة أعلاه.

2.5 مبرهنة ليوفيل

مبرهنة ليوفيل

إذا كانت الدالة المركبة لمتغير مركب، f:

1. دالة كاملة (تحليلية على حقل الأعداد المركبة) ;
2. دالة محدودة، أي: $\exists M \geq 0 : \ |f(z)| \leq M \ ; \forall z \in \mathbb{C}$,

فإن f دالة ثابتة على $\mathbb{C}$.

يمكن البرهان على مبرهنة ليوفيل[1] باستخدام مبرهنة الباقي، و ذلك كما يلي: نعتبر نقطتين كيفيتين مختلفتين، a و b، من المستوي المركب. و نعتبر دائرة $\mathcal{C}$ نصف قطرها r و مركزها أحد هاتين النقطتين، و لتكن a مثلا، و تحتوي بداخلها النقطة الأخرى كما في الشكل 2.5.

نعتبر الدالتين $\frac{f(z)}{z-a}$ و $\frac{f(z)}{z-b}$، حيث f دالة تحقق شروط المبرهنة أعلاه، و نكاملهما على الدائرة $\mathcal{C}$. باستخدام مبرهنة الباقي[2] نجد بكل سهولة:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\ , \tag{8}$$

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-b}\mathrm{d}z\ . \tag{9}$$

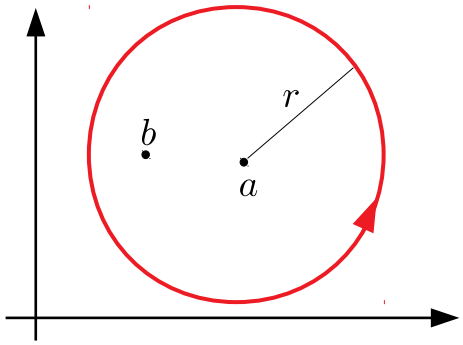
بطرح المعادلة الأخيرة من التي قبلها نجد

$$f(a) - f(b) = \frac{a-b}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\mathrm{d}z\ , \tag{10}$$

---

[1] Joseph Liouville, 1809-1882.

[2] أو تطبيق تكامل كوشي.



شكل 2.5: مبرهنة ليوفيل.

ثم بأخذ طويلة الطرفين نحصل على

(11)

$$|f(a)-f(b)| = \left| \frac{a-b}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{a-b}{2\pi} \oint_C \left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| \, |\mathrm{d}z| \, .$$

تذكر أن الدالة f محدودة، $|f(z)| \leq M$، و أن نقاط الدائرة $\mathcal{C}$ التي نكامل عليها تحقق

$$z = re^{i\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi; \qquad \Rightarrow |z| = r\ ;\ |\mathrm{d}z| = r\mathrm{d}\theta\ , \tag{12}$$

و عليه نصل إلى المتراجحة التالية:

$$|f(a)-f(b)| \leq \frac{M|a-b|}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{|z-b|}\ . \tag{13}$$

لكن $|z-b|$ يحقق المتراجحة:

$$|z-b| = |(z-a)+(a-b)| \geq |z-a| - |a-b| = r - |a-b|\ , \tag{14}$$

و بالتالي نخلص إلى العلاقة:

$$|f(a)-f(b)| \leq \frac{M|a-b|}{r(r-|a-b|)}\ . \tag{15}$$

تذكر أننا فرضنا في بداية البرهان أن نصف القطر، r، هو مقدار كيفي، فلو نختار بالخصوص $r \to \infty$ نجد:

$$|f(a)-f(b)| \leq 0 \Rightarrow f(a) = f(b)\ . \tag{16}$$

إلا أننا فرضنا أن النقطتين a و b كيفيتين أيضا، و عليه فإن للدالة f نفس القيمة عند جميع نقاط المستوي المركب. و بهذا نكون قد أكملنا البرهان على مبرهنة ليوفيل.

3.5 مبرهنة روشي

مبرهنة روشي

لتكن f و g دالتان لمتغير مركب تحليليتان على منحنٍ بسيط مغلق Γ و كذلك بداخله.
إذا كان

$$\forall z \in \Gamma : \ |g(z)| < |f(z)| \ ,$$

فإن للدالتين $f+g$ و f نفس عدد الجذور بداخل المسار Γ.

يُبرهن على مبرهنة روشي[3] كما يلي. لدينا، من خلال التمرين (8.4) نحصل على العلاقتين

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f'+g'}{f+g}\,\mathrm{d} = N1 \ , \tag{17}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d} = N2 \ , \tag{18}$$

حيث N_1 و N_2 هما عدد جذور $f+g$ و f، على التوالي، داخل المسار Γ.
بطرح المعادلة الأخيرة من التي قبلها نجد:

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \left(\frac{f'+g'}{f+g} - \frac{f'}{f}\right)\,\mathrm{d}z \ , \tag{19}$$

و بكتابة $h = \frac{g}{f}$، نحصل على

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{h'}{h+1}\,\mathrm{d}z \ . \tag{20}$$

لكن بفرض أن $\forall z \in \Gamma : \ |g(z)| < |f(z)|$، أي أن $|h| < 1$ و بالتالي يستحيل أن ينعدم $h+1$، و عليه فإن

$$\frac{1}{h+1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} h^{\ell} \ ,$$

$$\Rightarrow N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \oint_{\Gamma} h' h^{\ell} \mathrm{d}z \ . \tag{21}$$

بما أن التكامل الأخير معدوم فإن $N_1 - N_2 = 0$ أي أن $N_1 = N_2$ و هو المطلوب البرهان عليه.

[3] Eugène Rouché, 1832-1910.

4.5 الدالة Γ

تعريف

تُعرّف دالة Γ للمتغير المركب z، حيث $\Re z > 0$، بالعلاقة:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \ . \tag{22}$$

مثال

من أجل $z = 1$ لدينا

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 \ . \tag{23}$$

صيغة التناظر

تحقق الدالة Γ صيغة التناظر التالية:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ . \tag{24}$$

يُبرهن على صيغة التناظر باستخدام تعريف الدالة Γ: بمكاملة المعادلة (22) بالتجزئة من أجل $z+1$ نجد العلاقة:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} \mathrm{d}t \ , \\ &= -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \ . \end{aligned} \tag{25}$$

إن الحد الأول من العلاقة الأخيرة ينعدم، و بالتالي فإننا نخلص إلى النتيجة

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{t} \mathrm{d}t = z\Gamma(z) \ , \tag{26}$$

و هي العلاقة المُراد البرهان عليها ابتداءًا.

الدالة Γ لعدد طبيعي

تكتب الدالة Γ لعدد طبيعي كما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \Gamma(n+1) = n! \ . \tag{27}$$

نبرهن على هذه العلاقة باستخدام المعادلة (24) بصورة تراجعية:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) = n! \ .\end{aligned} \tag{28}$$

ملاحظة:
تسمّى دالة Γ، أحيانا بدالة العاملي، و ذلك حتى من أجل قيم z مركبة. و نكتب:

$$z! \equiv \Gamma(z+1) \ . \tag{29}$$

من تعريف الدالة $\Gamma(z)$ فإن ميدان تعريفها هو نصف المستوي الأيمن $(\Re z > 0)$. إلا أنه يمكن تمديد تعريف هذه الدالة عند نقاط النصف الأيسر للمستوي المركب $(\Re z < 0)$، وذلك عن طريق التمديد التحليلي. تُستثنى القيم الصحيحة السالبة (بما فيها الصفر) التي تمثل أقطابا بسيطة للدالة Γ. يُمكن البرهان على العلاقة التالية، و التي تظهر صراحة أقطاب الدالة Γ:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!\ k^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k)} \ . \tag{30}$$

كما نُعطي العلاقة التالية للدالة Γ:

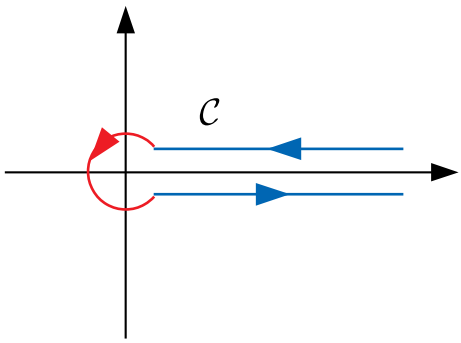
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \ , \tag{31}$$

حيث γ هو ثابت أولر[4] و المعرف بـ

$$\gamma = \lim_{p\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \ln p) \approx 0.5772157 \ . \tag{32}$$

و في ما يلي بعض خصائص الدالة Γ:

[4] Euler's constant



شكل 3.5: تعريف الدالة Γ.

1. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

2.
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{m})\Gamma(z+\frac{2}{m})\cdots\Gamma(z+\frac{m-1}{m}) = m^{\frac{1}{2}-mz}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mz)\ ,$$
حيث $m \in \mathbb{N}^*$.

3. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1}\right) + \cdots$

4.
$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \oint_{\mathcal{C}} t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t\ ,$$
حيث $\mathcal{C}$ هو المسار الموضح في الشكل 3.5.

5.
$$\Gamma(z) = \frac{i}{2\sin \pi z} \oint_{\mathcal{C}} (-t)^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} (-t)^{-z} e^{-t} \mathrm{d}t\ ,$$
حيث $\mathcal{C}$ هو المسار الموضح في الشكل 3.5.

الملاحق ا

قاموس المصطلحات عربي - إنجليزي

المصطلح العربي	المصطلح الانجليزي
أسي	exponential
احداثية	coordinate
اختبار التقارب	convergence test
اختبار النسبة	ratio test
استمرارية	continuity
اشتقاق	dffierentiation
باقي	residue
برهان	proof
برهان بالتراجع	proof by mathematical induction
برهان بالخلف	proof by contradiction
بسط	numerator
تباعد	divergence
تبديل المتغير	change of variable
تبديلية	commutativity
تجميعية	associativity
تحليل	analysis
تحليل مركب	complex analysis
تحويل	transformation
تركيب الدوال	function composition
تفاضل	dffierential
تفرع	branch
تقارب	convergence
تقارب شرطي	conditional convergence
تقارب مطلق	absolute convergence

integral	تكامل
line integral	تكامل خطي
analytic continuation	تمديد تحليلي
distributivity	توزيعية
constant	ثابت
root	جذر
principal part	جزء أساسي
analytical part	جزء تحليلي
imaginary part	جزء تخيلي
real part	جزء حقيقي
field	حقل
complex field	حقل الأعداد المركبة
branch cut	خط تفرع
circle	دائرة
unit circle	دائرة الوحدة
function	دالة
exponential function	دالة الأسية
primitive function	دالة الأصلية
sine function	دالة الجيب
tangent function	دالة الظل
factorial function	دالة العاملي
analytical function	دالة تحليلية
harmonic function	دالة توافقية
cosine function	دالة جيب التمام
real function	دالة حقيقية
periodic function	دالة دورية
hyperbolic function	دالة زائدية
cotangent function	دالة ظل التمام
inverse function	دالة عكسية
dffierentiable function	دالة قابلة للاشتقاق
fractal function	دالة كسرية
logarithmic function	دالة لوغارتمية
multi-valued function	دالة متعددة القيم
trigonometric function	دالة مثلثية
complex function	دالة مركبة
continuous function	دالة مستمرة
single-valued function	دالة وحيدة القيمة
angle	زاوية
group	زمرة

series	سلسلة
numerical series	سلسلة عددية
power series	سلسلة قوة
vector	شعاع
modulus	طويلة
irrational number	عدد أصم
prime number	عدد أولي
imaginary number	عدد تخيلي
real number	عدد حقيقي
integer number	عدد صحيح
natural number	عدد طبيعي
rational number	عدد كسري
complex number	عدد مركب
argument	عمدة
element	عنصر
identity element	عنصر حيادي
inverse element	عنصر نظير
infinite	غير منتهي
law	قانون
addition law	قانون الجمع
multiplication law	قانون الضرب
inner law	قانون داخلي
disc	قرص
convergence disc	قرص التقارب
pole	قطب
simple pole	قطب بسيط
double pole	قطب مضاعف
polar	قطبي
curve	قوس
smooth curve	قوس أملس
simple curve	قوس بسيط
principal value	قيمة رئيسية
cartesian	كارتيزي
polynomial	كثير حدود
fraction	كسر
infinity	ما لا نهاية
theorem	مبرهنة
inequality	متراجحة
variable	متغير

real variable	متغير حقيقي
complex variable	متغير مركب
interval	مجال
sum	مجموع
domain (of the function)	مجموعة التعريف
range (of the function)	مجموعة الوصول
determinant	محدد
bounded	محدود
axis	محور
abscissa axis	محور التراتيب
ordinate axis	محور الفواصل
conjugate	مرافق
harmonic conjugate	مرافق توافقي
component	مركبة
plane	مستوي
complex plane	مستوي مركب
derivative	مشتقة
partial derivative	مشتقة جزئية
matrix	مصفوفة
equation	معادلة
dffierential equation	معادلة تفاضلية
partial dffierential equation	معادلة تفاضلية بمشتقات جزئية
ordinary dffierential equation	معادلة تفاضلية عادية
characteristic function	معادلة مميزة
coefficient	معامل
denominator	مقام
inverse	مقلوب
curve	منحني
closed curve	منحني مغلق
expansion	منشور
domain	ميدان
radius	نصف القطر
lower semi-circle	نصف دائرة سفلية
upper semi-circle	نصف دائرة علوية
convergence radius	نصف قطر التقارب
point	نقطة
singular point	نقطة شاذة
essential singular point	نقطة شاذة جوهرية
removable singular point	نقطة شاذة قابلة للإزالة

isolated singular point	نقطة شاذة معزولة
limit	نهاية
parameter	وسيط

الملاحق ب

قاموس المصطلحات إنجليزي - عربي

المصطلح الانجليزي	المصطلح العربي
abscissa axis	محور التراتيب
absolute convergence	تقارب مطلق
addition law	قانون الجمع
analysis	تحليل
analytic continuation	تمديد تحليلي
analytical function	دالة تحليلية
analytical part	جزء تحليلي
angle	زاوية
argument	عمدة
associativity	تجميعية
axis	محور
bounded	محدود
branch	تفرع
branch cut	خط تفرع
cartesian	كارتيزي
change of variable	تبديل المتغير
characteristic function	معادلة مميزة
circle	دائرة
closed curve	منحني مغلق
coefficient	معامل
commutativity	تبديلية
complex analysis	تحليل مركب
complex field	حقل الأعداد المركبة
complex function	دالة مركبة

عدد مركب	complex number
مستوي مركب	complex plane
متغير مركب	complex variable
مركبة	component
تقارب شرطي	conditional convergence
مرافق	conjugate
ثابت	constant
استمرارية	continuity
دالة مستمرة	continuous function
تقارب	convergence
قرص التقارب	convergence disc
نصف قطر التقارب	convergence radius
اختبار التقارب	convergence test
احداثية	coordinate
دالة جيب التمام	cosine function
دالة ظل التمام	cotangent function
قوس ، منحني	curve
مقام	denominator
مشتقة	derivative
محدد	determinant
دالة قابلة للاشتقاق	dffierentiable function
تفاضل	dffierential
معادلة تفاضلية	dffierential equation
اشتقاق	dffierentiation
قرص	disc
توزيعية	distributivity
تباعد	divergence
ميدان	domain
مجموعة التعريف	domain (of the function)
قطب مضاعف	double pole
عنصر	element
معادلة	equation
نقطة شاذة جوهرية	essential singular point
منشور	expansion
أسي	exponential
دالة الأسية	exponential function
دالة العاملي	factorial function
حقل	field
دالة كسرية	fractal function

كسر	fraction
دالة	function
تركيب الدوال	function composition
زمرة	group
مرافق توافقي	harmonic conjugate
دالة توافقية	harmonic function
دالة زائدية	hyperbolic function
عنصر حيادي	identity element
عدد تخيلي	imaginary number
جزء تخيلي	imaginary part
متراجحة	inequality
غير منتهي	infinite
ما لا نهاية	infinity
قانون داخلي	inner law
عدد صحيح	integer number
تكامل	integral
مجال	interval
مقلوب	inverse
عنصر نظير	inverse element
دالة عكسية	inverse function
عدد أصم	irrational number
نقطة شاذة معزولة	isolated singular point
قانون	law
نهاية	limit
تكامل خطي	line integral
دالة لوغارتمية	logarithmic function
نصف دائرة سفلية	lower semi-circle
مصفوفة	matrix
طويلة	modulus
دالة متعددة القيم	multi-valued function
قانون الضرب	multiplication law
عدد طبيعي	natural number
بسط	numerator
سلسلة عددية	numerical series
معادلة تفاضلية عادية	ordinary dffierential equation
محور الفواصل	ordinate axis
وسيط	parameter
مشتقة جزئية	partial derivative
معادلة تفاضلية بمشتقات جزئية	partial dffierential equation

دالة دورية	periodic function
مستوي	plane
نقطة	point
قطبي	polar
قطب	pole
كثير حدود	polynomial
سلسلة قوة	power series
عدد أولي	prime number
دالة الأصلية	primitive function
جزء أساسي	principal part
قيمة رئيسية	principal value
برهان	proof
برهان بالخلف	proof by contradiction
برهان بالتراجع	proof by mathematical induction
نصف القطر	radius
مجموعة الوصول	range (of the function)
اختبار النسبة	ratio test
عدد كسري	rational number
دالة حقيقية	real function
عدد حقيقي	real number
جزء حقيقي	real part
متغير حقيقي	real variable
نقطة شاذة قابلة للإزالة	removable singular point
باقي	residue
جذر	root
سلسلة	series
قوس بسيط	simple curve
قطب بسيط	simple pole
دالة الجيب	sine function
دالة وحيدة القيمة	single-valued function
نقطة شاذة	singular point
قوس أملس	smooth curve
مجموع	sum
دالة الظل	tangent function
مبرهنة	theorem
تحويل	transformation
دالة مثلثية	trigonometric function
دائرة الوحدة	unit circle
نصف دائرة علوية	upper semi-circle

متغير	variable
شعاع	vector

المصادر

[1] وليام ر. دريك: التحليل المركب و تطبيقاته. ترجمة سعدون إبراهيم عثمان البراهيم و أبو بكر الصديق بيومي. النشر العلمي و المطابع - جامعة الملك سعود. (2012)

[2] محمود عبد الرحمان البرعي و آخرون: معجم المصطلحات العلمية. مكتبة الأنجلو المصرية. (2008)

[3] أبو بكر خالد سعد الله: معجم الرياضيات. ديوان المطبوعات الجامعية. (2013)

[4] محمد بن قادة و آخرون: معجم الرياضيات. المعهد التربوي الوطني. (1972)

[5] لجنة الرياضيات بمجمع اللغة العربية: معجم الرياضيات. مجمع اللغة العربية. (2003)

[6] J. Mathews, R. Howell: Complex analysis for mathematics and engineering. Jones & Bartlett Publishers (2012)

[7] M. Spiegel, S. Lipschutz, J. Schiller, D. Spellman: Schaum's outline of complex variables, (schaum's outline series). (2009)

[8] R. Nevanlinna: Introduction to complex analysis. Addison-Wesley publishing company. (1969)

[9] John R. Conway: Functions of one complex variables. Second edition. Springer. (1978)