République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Khadidja Abdellatif

Monotocity methods with some applications

Soutenu publiquement le 23 juin 2024 devant le jury composé de

Hocine Ayadi	*M C A.* Univ. Médéa	Président
Rezak SOUILAH	*M C A.* Univ. Médéa	Encadreur
Khaled BOUADJILA	*M C A.* Univ. Médéa	Examinateur

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier ***Allah****, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.*

Je remercie tout particulièrement Monsieur ***R. SOUILAH****, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.*

Mes remerciements vont également à Monsieur ***H. AYADI****, président du jury qui a accepté de relire ce travail.*

Je remercie vivement Monsieur ***K. BOUADJILA*** *qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.*

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

DEDICACE

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance... aussi, c'est tout simplement que : je dédie ce modeste travail
À ma trés chère Mère.

Tu représenter pour moi la source inépuisable de tendresse de patience, de sacrifice et l'exemple de dévoiement qui n'a pas cessé de m'encourager. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie.
À mon très cher Père.

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévoiement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. En hommage à vos sacrifices et que tu as consentis dans mon éducation et ma formation le long de ces années.

À mes chères sœurs ≪Dalila et Ahlem ≫ et mes chers frères ≪Marouan et Mohamed ≫

À qui je souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde

À mon cher enfant ≪Alaa≫

À mes chères amies ≪Maroua, Faiza, Lina, Amira, Fatima Zohra≫ à mes amies et tous collègues de analyse mathématique et applications université de Yahia fares, promotion 2024.

Khadidja

Résumé

Le but de ce mémoire est d'introduire la méthode de monotonie pour la résolution de quelques problèmes elliptiques.

Mots-clés :Opérateurs bornés, Opérateurs monotones, hémicontinuité, demicontinuité , opérateurs pseudo monotones, équations aux-dérivées partielles elliptiques.

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de l'ensemble Ω
$\rightharpoonup$	la convergence faible
p.p.	presque partout
V	un espace de Banach
H	un espace de Hilbert
V'	le dual topologique de V
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Banach V
$(.,.)$	le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m\times N}$	l'espace des matrices réelles.
Id	désigne la matrice d'identité.
$f^+=\max(f,0)$, $f^-=\max(-f,0)$	la partie positive et négative de la fonction f
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues
$\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$	espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω
$\mathscr{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω
$\mathscr{D}'(\Omega)=(\mathscr{D}(\Omega))'$	l'espace des distributions

Introduction générale

La théorie des opérateurs monotones est actuellement un domaine actif de recherche, ils jouent un rôle important dans de nombreuses branches des mathématiques telles que l'analyse convexe, l'optimisation, théorie des équations aux dérivées partielles, inéquations variationnelles. Ils ont également des applications dans d'autres domaines tels que la théorie des graphes et les circuits électriques analogiques.

La première utilisation de la condition de monotonie dans les espaces de Hilbert remonte à M. Golomb [19], dans l'étude des équations intégrales non linéaires de Hammerstein. Golomb a déclaré qu'un opérateur A sur un espace de Hilbert H satisfait à la « condition de Lipschitz » si

$$\forall\, u,\, v \in H \quad \langle A(u)-A(v), u-v\rangle \geq -k\|u-v\|_H^2 \tag{1}$$

avec un paramètre k qui peut être négatif ou positif ainsi que zéro (de sorte que l'hypomonotonie et la forte monotonie soient couvertes à le même temps). L'idée a attiré peu d'attention à l'époque des travaux de Golomb, et a été relancée vers les années 1959 et 1960 par les mathématiciens russes M. M. Vainberg [43, 44], R. I. Kachurovskii [22] et le mathématicien argentin E. H. Zarantonello [45]. Dans [22], R. I. Kachurovskii a prolongé le concept de monotonie aux applications agissant d'un espace de Banach dans son dual. Il a observé que la différentielle de Fréchet d'une fonction convexe est une fonction monotone, et a en fait également inventé le terme « monotone » pour décrire ces fonctions.

Dans [45], E. H. Zarantonello a étendu la relation d'ordre des fonctions réelles au cas vectoriel. Plus précisément, soit D un sous-ensemble non vide d'un espace de Hilbert H et $A,\, B:\, H \to H$ deux opérateurs. Il a déclaré que B est plus lent que A si

$$\forall\, u,\, v \in D \quad \langle A(u)-A(v), u-v\rangle \geq \langle B(u)-B(v), u-v\rangle, \tag{2}$$

qui est noté $A \succcurlyeq B$. Il a ensuite appelé A (isotoniquement) monotone si $A \succcurlyeq 0$, c'est-à-dire

$$\forall u,\, v \in D \quad \langle A(u)-A(v), u-v \rangle \geq 0, \tag{3}$$

et A est uniformément monotone si $A \succcurlyeq Id$. Dans [32], G. J. Minty a donné la définition d'un opérateur monotone à travers d'une relation linéaire. Pour tout sous-ensemble E de $H \times H$, il a défini la relation linéaire M comme suit :

$$(x_1, y_1)M(x_2, y_2) \quad \text{à condition que} \quad \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0. \tag{4}$$

Un opérateur A d'un sous-ensemble D de H dans H est appelé monotone sur D à condition que D soit un sous-ensemble du domaine de A, et le graphe de la restriction de A à D est totalement ordonné par la relation M, c'est-à-dire

$$(u, A(u))M(v, A(v)) \quad \text{pour tout } u,\, v \in D, \tag{5}$$

ce qui signifie aussi que A satisfait (3).

Dans son article [45], E. H. Zarantonello a démontré le théorème de surjectivité suivant :

Théorème 0.1. *On suppose que H est un espace de Hilbert. Si $A : H \to H$ est un opérateur monotone et lipschitzien alors l'opérateur $I + A$ est surjectif.*

Un peu plus tard, ce théorème a été généralisé par G. Minty [32] pour les opérateurs A continus, monotones. Browder dans [8] a déclaré que cette généralisation par Minty est équivalente au célèbre théorème de Lax-Milgram 5.2. Ensuite dans [6], F. Browder a démontré que le résultat du théorème 0.1 reste vraie en remplaçant l'hypothèse de continuité par une autre plus faible de demicontinuité "i.e., A est continu de H fort dans H faible".

Pour les espaces de Banach réflexifs V et les opérateurs $A : V \to V'$, le résultat de base obtenu indépendamment par Browder [7] et Minty [33] déclare que si A est un opérateur monotone, hémicontinu, (i.e., la fonction $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$), et coercif, i.e.

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad \|u\|_V \to +\infty) \tag{6}$$

alors A est surjectif.

Ce théorème et ses extensions à diverses classes d'opérateurs A qui satisfont des conditions de monotonie modifiées (Browder [9, 10, 11, 12, 11], Leray-Lions [28], Hartman-Stampacchia

[20]) sont à la base de l'application de la théorie des opérateurs monotones pour obtenir des théorèmes d'existence généraux pour des problèmes aux-limites non linéaires.

H. Brezis, dans son article pionnier [5], a introduit une vaste classe d'opérateurs, qu'il a classés comme pseudomonotones, étendant ainsi le théorème d'existence de Minty-Browder. Plus précisément, un opérateur $A : V \to V'$ est pseudomonotone, si pour chaque suite (u_n), telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0, \tag{7}$$

il s'ensuit que

$$\langle A(u), u - v \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n - v \rangle \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{8}$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. L'objectif du deuxième chapitre est de présenter les opérateurs monotones et leurs applications dans la résolution de quelques problèmes elliptiques. Le troisième chapitre est consacré pour les opérateurs pseudomonotones avec quelques applications.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé i

Notation ii

Introduction générale iii

1 Préliminaires 1

1 Espaces de Lebesgue 1
2 Espaces de Sobolev 5

2 Méthode des opérateurs monotones 8

1 Différents types de continuité 8
2 Opérateurs bornés 12
3 Opérateurs coercifs 14
4 Opérateurs monotones 15
5 Applications du théorème de Minty-Browder 26

3 Opérateurs pseudomonotones 31

1 Notions générales 31
2 Opérations sur les opérateurs pseudomonotones 38
3 Opérateurs du calcul des variations 44
4 Applications du théorème de Brezis 45

Préliminaires

1

Chapitre

Sommaire

1 Espaces de Lebesgue 1
2 Espaces de Sobolev 5

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels.

1.1 Espaces de Lebesgue

1.1.1 Notions générales

DÉFINITION 1.1

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :
Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et de Hilbert Pour $p = 2$ muni de produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

PROPOSITION 1.1 – Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$ [4]. Les assertions suivantes sont vraies.

1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.
2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

LEMME 1.1 (Inégalité de Young [4])

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour tout réel positif a et b, on a

$$a\,b \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{p'}\,b^{p'}.$$

LEMME 1.2 (Inégalité de Convexité [4])

Soient $a \geq 0$, $b \geq 0$ et soit $1 \leq p < +\infty$. On a

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

PROPOSITION 1.2 – Inégalité de Hölder [4]. Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f\,g \in L^1$ et

$$\int |f\,g| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}}.$$

PROPOSITION 1.3 – Compacité $L^p - L^q$ [4]. Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. De plus, l'injection est compacte pour $p < q$.

1.1.2 Mode de convergence dans les espaces $L^p(\Omega)$

DÉFINITION 1.2: Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$

Soient $p \in [1, \infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.

- On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.
- On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^{p'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- On dit que f_n converge faible $*$ vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0, \ \forall g \in L^1.$$

PROPOSITION 1.4 – [4]. Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

THÉORÈME 1.1 ([4, 14]): Soit X un espace normé et supposons que $x_n \to x$ (faiblement). Alors :

1. (x_n) est bornée dans la norme de X, c'est-à-dire $\sup \|x_n\| < \infty$.
2. La limite faible x de (x_n) est unique.

LEMME 1.3 (Lemme de Fatou [27])

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0, +\infty[$ on a

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

PROPOSITION 1.5 – Théorème de convergence dominée [27]. Soit $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que

1. $f_n \longrightarrow f$ p.p dans Ω.
2. il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g$ p.p dans Ω.

Alors

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

La proposition suivante est la réciproque partielle du proposition 1.5.

PROPOSITION 1.6 – [23]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction g de $L^p(\Omega)$ telles que :

1. $f_{n_k}(x) \longrightarrow g(x)$ p.p. sur Ω.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 1.5.

PROPOSITION 1.7 – [38]. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables sur E qui converge ponctuellement presque partout sur E vers f. Supposons qu'il existe une suite $\{g_n\}$ de fonctions mesurables non négatives sur E qui converge ponctuellement presque partout sur E vers g et domine $\{f_n\}$ sur E dans le sens où

$$|f_n| \leq g_n \text{ sur } E \text{ pour tout } n.$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n = \int_E g < \infty,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

La proposition suivante donne le lien entre la bornitude et la convergence faible dans les espaces de Lebesgues réfléxifs.

PROPOSITION 1.8 – [3]. Soit $1 < p < \infty$ et soient f_n des fonctions dans $L^p(\mu)$ convergeant presque partout (ou en mesure) vers une fonction f. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\{f_n\}$ vers f dans la topologie faible de $L^p(\mu)$ est la bornitude de $\{f_n\}$ dans la norme de $L^p(\mu)$.

1.1.3 Opérateurs de Nemytskii (opérateurs de superposition)

DÉFINITION 1.3: (Fonction de Carathéodory)

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dite que f est de Carathéodory si :

1. $f(.,s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$,
2. $f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue presque partout $x \in \Omega$.

DÉFINITION 1.4: (Opérateur de Nemitski)

Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. l'opérateur N_f défini par $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemitski relatif à f.

THÉORÈME 1.2 (Continuité de l'opérateur de Nemytskii[35]): Si f est de Carathéodory et elle existe une fonction positive $a \in L^{p'}(\Omega)$ et une constante $b > 0$, tels que

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{p-1}.$$

alors l'opérateur de Nemytskii est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$.

1.2 Espaces de Sobolev

DÉFINITION 1.5: (Espaces de Sobolev ($W^{1,p}(\Omega)$))

On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$,pour $1 \le p \le +\infty$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\right), & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 1.9 – Complétude, séparabilité, et réflexivité de $W^{1,p}(\Omega)$ [1, 4] . L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et séparable pour $1 \le p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

DÉFINITION 1.6: (Espaces de Sobolev$W_0^{1,p}(\Omega)$)

Soit $1 \le p < +\infty$. On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, (c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$)

Le théoréme suivant donne une Caractérisation de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ via le théoreme de trace (voir [36])

THÉORÈME 2.1: On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega); \quad v|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

DÉFINITION 1.7: (Espace de Sobolev $W^{-1,p'}(\Omega)$)

L'espace de Sobolev $W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$; c'est-à-dire : l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires continues sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

DÉFINITION 1.8: (Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$)

Soient $p \in [1,+\infty[$ et $\{f_n, f\}$ une famille de $W^{1,p}(\Omega)$.

- On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

- On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

THÉORÈME 2.2 (Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov [34]):
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathscr{C}^1$, on a :

- Si $p < N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in \left[1, p^*\right)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
- si $p = N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1,+\infty)$
- Si $p > N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}(\overline{\Omega})$ est compacte. En particulier l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact pour tout $p \in [1,+\infty)$

THÉORÈME 2.3 (Inégalité de Poincaré [24]): Soit $1 \leq p < +\infty$, on suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction de $\mathbb{R}^N$ alors, il existe une constante positive $C = C(p,N,\Omega)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad , \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

par conséquence l'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$ définie une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle.

THÉORÈME 2.4 (Astuce topologique [27]): Soit X un espace topologique et x_n une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x . Alors la suite entière x_n converge vers x .

THÉORÈME 2.5 (Banach-Steinhaus[4]): Soit V un espace de Banach et Y un espace normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille arbitraire d'éléments de $L(V,Y)$ telle que

$$\sup_{i\in I} \|T_i(u)\|_Y < \infty \quad \forall u \in V.$$

Alors,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(V,Y)} < \infty.$$

Méthode des opérateurs monotones

Chapitre 2

Sommaire

1	Différents types de continuité	8
2	Opérateurs bornés	12
3	Opérateurs coercifs	14
4	Opérateurs monotones	15
5	Applications du théorème de Minty-Browder	26

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et V' son dual topologique.

2.1 Différents types de continuité

2.1.1 Opérateurs hémicontinus

DÉFINITION 2.1

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est hémicontinu si $\forall u, v, w \in V$, la fonction $t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXAMPLE 2.1

Tout opérateur linéaire de V dans V' est hémicontinu.

SOLUTION.

Soient $A : V \to V'$ un opérateur linéaire, et u, v, w trois éléments de V. La fonction réelle

$$\phi(t) = t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle = \langle A(u), w\rangle + t\langle A(v), w\rangle$$

est affine, et en conséquence elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1. *Pour démontrer que $A : V \to V'$ est hémicontinu, il suffit de démontrer que la fonction réelle $\varphi(t) = \langle A(u+tv), w\rangle$ est continue en point 0 pour tour u, v et w dans V ; c'est-à-dire :*

$$\lim_{t\to 0}\langle A(u+tv), w\rangle = \langle A(u), w\rangle \quad \forall u, v, w \in V.$$

EXAMPLE 2.2

Tout opérateur continu de V dans V' est hémicontinu.

SOLUTION.

Soient $A : V \to V'$ un opérateur linéaire continu, et u, v, w. trois éléments de V. On considère la fonction réelle φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \varphi(t) = \langle A(u + t\,v), w\rangle. \end{aligned}$$

Pour démontrer que A est hémicontinu, il suffit de démontrer que la fonction φ est continue en point 0 ; c'est à dire :

$$\langle A(u + t\,v), w\rangle \to \langle A(u), w\rangle \quad \text{quand } t \to 0.$$

Soit (t_n) une suite réelle qui converge vers 0. Donc la suite $(u_n) = (u + t_n\,v)$ converge fortement dans V vers la fonction u, et comme A est continue de V fort dans V' fort, alors

$$A(u_n) \to A(u) \quad \text{fortement dans } V'.$$

Par conséquent

$$\langle A(u_n), w\rangle \to \langle A(u), w\rangle.$$

Ainsi, la fonction φ est continue en point 0.

EXAMPLE 2.3: (Opérateur Laplacien)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On définit l'opérateur laplacien $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, d\,x.$$

L'opérateur A est linéaire et par conséquent il est hemicontinu.

EXAMPLE 2.4

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p > 2$, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $C > 0$ satisfaisant, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$|f(s)| \leq C\,(1 + |s|)^{p-2}. \tag{2.1}$$

On considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} A : & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p'}(\Omega) \\ & u & \mapsto & A(u) = f(u)\dfrac{\partial\, u}{\partial\, x_i}. \end{array}$$

Montrer que A est hémicontinu.

SOLUTION.

Soient u, v et w trois élément de $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Afin de démontrer que A est hémicontinu, il suffit de démontrer que la fonction réelle $\varphi(t) = \langle A(u + t\,v), w\rangle$ est continue en point 0. Soit (t_n) une suite réelle convergente vers 0. On veut démontrer que

$$\varphi(t_n)=\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}w\,dx\to\varphi(0)=\int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}w\,dx, \tag{2.2}$$

où $u_n=u+t_nv$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En utilisant le fait que la suite (u_n) converge fortement vers u dans $L_0^{p-1}(\Omega)$, alors, par le Théorème 1.2, il découle que

$$f(u_n)\to f(u)\quad\text{fortement dans } L^{\frac{p-1}{p-2}}(\Omega).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\alpha=\dfrac{p}{p'}$, on en déduit que la suite $f(u_n)w$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$, et par suite

$$f(u_n)w\to f(u)w\quad\text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega),$$

et on a (2.2), puisque $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge fortement vers $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\Omega)$.

2.1.2 Opérateurs demicontinus

DÉFINITION 2.2

On dit que l'opérateur $A:V\to V'$ est demicontinu si A est continu de V fort dans V' faible, c-à-d., si $u_n\to u$ fortement dans V, alors $A(u_n)\to A(u)$ faiblement dans V'.

THÉORÈME 1.1: Si $A:V\to V'$ est un opérateur continu, alors A est demicontinu.

Preuve.

On suppose que $A:V\to V'$ est un opérateur continu. Soit (u_n) une suite qui converge fortement vers $u\in V$. Puisque A est continu il découle que

$$A(u_n)\to A(u)\quad\text{fortement dans } V'.$$

Par conséquent

$$A(u_n)\to A(u)\quad\text{faiblement dans } V'.$$

Ainsi, on a prouvé que l'opérateur A est demicontinu.

THÉORÈME 1.2: Tout opérateur demicontinu est hémicontinu.

Preuve.

On suppose que $A:V\to V'$ est un opérateur demicontinu. Soient u, v et w trois éléments de V. On veut démontrer que la fonction réelle $\varphi(t)=\langle A(u+tv),w\rangle$ est continue en point 0. Soit (t_n) une suite réelle qui converge vers 0. On pose

$$u_n = u + t_n v, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque (u_n) converge fortement vers u dans V et A est démicontinu, alors

$$A(u_n) \rightharpoonup A(u) \quad \text{faiblement dans } V'.$$

Par suite, il vient

$$\langle A(u_n), w \rangle \to \langle A(u), w \rangle,$$

cela implique que φ est continue en point 0, ce qui signifie que l'opérateur A est hémicontinu.

2.1.3 Opérateurs fortement continus

DÉFINITION 2.3

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est fortement continu (ou totalement continu) si A est continu de V faible dans V' fort, c-à-d., si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V, alors $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ fortement dans V'.

EXAMPLE 2.5

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{p-1},$$

où $b > 0$ et a une fonction positive appartenant à $L^{p'}(\Omega)$. D'après le théorème 1.2, l'opérateur de Nemytskii $\tilde{f}$ associé à f est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. On définit l'opérateur $A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \to V' = W^{-1,p'}(\Omega)$ par :

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega \tilde{f}(u)\varphi \, dx.$$

Montrer que A est fortement continu.

SOLUTION.

Soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers u dans $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors, par le théorème de Rellich-Kondrachov, on a

$$u_n \to u \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega),$$

et comme $\tilde{f}$ est continue de $L^p(\Omega)$ fort dans $L^{p'}(\Omega)$ fort, alors

$$\tilde{f}(u_n) \to \tilde{f}(u) \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega). \tag{2.3}$$

Soit φ une fonction de V. En utilisant l'inégalité de Hölder, puis celle de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\langle Au_n - A(u), \varphi\rangle\right| &\leq \int_\Omega |\tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u)||\varphi|\,dx \\ &\leq \|\tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C_\Omega\|\tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Au_n - A(u)\|_{V'} \leq C_\Omega\|\tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u)\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{2.4}$$

En utilisant (2.3), on peut passer à la limite dans (2.4), pour conclure que

$$A(u_n) \to A(u) \quad \text{fortement dans } V' = W^{-1,p'}(\Omega).$$

2.2 Opérateurs bornés

2.2.1 Opérateurs bornés

DÉFINITION 2.4: (Opérateur borné)

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est borné, s'il transforme les bornés de V en bornés de V'.

EXAMPLE 2.6

Montrer que l'opérateur défini dans l'exemple 2.4 est borné.

SOLUTION.

Soient u, v et φ trois élément de $W_0^{1,p}(\Omega)$. En utilisant la condition de croissance (2.1) sur f, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}|\langle A(u), \varphi\rangle|_{W^{-1,p'}(\Omega)\cdot W_0^{1,p}(\Omega)} &= \left|\int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx\right| \\ &= \int_\Omega |f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi|dx \\ &\leq \int_\Omega |f(u)|\cdot|\frac{\partial u}{\partial x_i}|\cdot|\varphi|dx \\ &\leq C\int_\Omega (1+|u|)^{p-2}|\frac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi|dx.\end{aligned}$$

Appliquant à droite l'inégalité de de Hölder avec l'exposant $\alpha = \frac{p}{2}$, on trouve

$$\begin{aligned}
|\langle A(u),\varphi\rangle|_{W^{-1,p'}(\Omega)\cdot W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq C\left(\int_\Omega (1+|u|)^{(p-2)\alpha'}|dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\cdot\left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^\alpha|\varphi|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\\
&\leq C\left(\int_\Omega (1+|u|)^p|dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\cdot\left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{\frac{p}{2}}|\varphi|^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{2}{p}}\\
&\leq C\left(\int_\Omega (1+|u|)^p|dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\cdot\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}\\
&\leq C'\delta_u\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C'\|1+|u|\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}$$

Ainsi, A est borné.

EXAMPLE 2.7: (Opérateur de Volterra)

Soient $E = \mathscr{C}([0,1],R)$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans R, muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup x\in[0,1]|f(x)|$. On considère l'opérateur de Volterra

$$\begin{aligned}
A:\ E &\longrightarrow E,\\
f &\longrightarrow Af,
\end{aligned}$$

défini par

$$Af(t) = \int_0^t f(s)ds \quad \textit{pour tout } t\in[0,1].$$

Démontrer que l'opérateur A est borné.

SOLUTION.

Pour tout $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|Af(t)| &= \left|\int_0^t f(s)\,ds\right|\\
&\leq \int_0^t |f(s)|ds\\
&\leq \int_0^t \sup_{s\in[0,1]}|f(s)|ds\\
&\leq t\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, ceci implique que l'opérateur de Volterra A est borné.

DÉFINITION 2.5: (Opérateur localement borné [15])

On dit que l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est localement borné, si pour tout $u \in V$, il existe deux constantes $r = r(u) > 0$ et $\rho = \rho(u) > 0$ telles que

$$\|v - u\|_V \leq r \quad \text{implique} \quad \|A(v) - A(u)\|_{V'} \leq \rho.$$

La proposition suivante donne une caractérisation pour les opérateurs localement bornés.

PROPOSITION 2.1. [42] Un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est dit localement borné si l'image d'une suite convergente est bornée.

THÉORÈME 2.1: Tout opérateur demicontinu est localement borné.

Preuve.

Soit (u_n) une suite qui converge fortement vers $u \in V$. Puisque A est demicontinu alors (Au_n) est faiblement converge vers $A(u) \in V'$. Par conséquent (Au_n) est bornée, ainsi, A est localement borné.

2.3 Opérateurs coercifs

DÉFINITION 2.6: (Opérateur coercif)

On dit que l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est coercif si

$$\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{s \longrightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty \text{ et } \langle A(u), u \rangle \geq \zeta(\|u\|)\|u\|.$$

En d'autres termes, A est coercif si

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

EXAMPLE 2.8

L'opérateur laplacien est coercif. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle A(u), u \rangle &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où $\dfrac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

2.4 Opérateurs monotones

2.4.1 Différents types de monotonie

DÉFINITION 2.7: (Opérateur monotone)

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est monotone si

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u)-A(v), u-v\rangle \geq 0.$$

On dit que A est strictement monotone si de plus $\langle A(u)-A(v), u-v\rangle > 0$ implique $u \neq v$.

EXAMPLE 2.9: (Application non expansive)

Soit un espace de Hilbert H. On dit que l'application $f : H \to H$ est non expansive si

$$\|f(u)-f(v)\| \leq \|u-v\|, \quad \forall u, v \in H. \tag{2.5}$$

- Montrer que $A = \mathrm{id}_H - f$ est un opérateur monotone.

SOLUTION.

Soient u et v deux éléments de H. En utilisant (2.5), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= \big((\mathrm{id}-f)(u)-(\mathrm{id}-f)(v), u-v\big)_H \\
&= \big(u-v-(f(u)-f(v)), u-v\big)_H \\
&= \|u-v\|_H^2 - \big(f(u)-f(v), u-v\big)_H \\
&\geq \|u-v\|_H^2 - \|f(u)-f(v)\|_H \|u-v\|_H \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

EXAMPLE 2.10

Soient H est un espace de Hilbert, et $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire positif, c'est à dire :

$$(A(u), v)_H \geq 0, \quad \forall v \in H.$$

Il est très facile de montrer que A est monotone.

EXAMPLE 2.11

Soient $V = L^2(G)$ et F un opérateur vérifiant :

$$F : V \longrightarrow V',$$
$$\psi \longrightarrow F(\psi) = \max\{0, \psi\},$$

$$\langle F(\varphi), \psi \rangle_{V',V} = \langle \max\{0, \varphi\}, \psi \rangle_V \qquad \forall \in V.$$

Montrer que F est monotone.

SOLUTION.

Soient $\varphi, \psi \in V$, On introduit la partition suivante de G :

$$G_+^+ = \{x \in G : \varphi(x) > 0, \psi(x) > 0 \quad a.e\ dans\ \ G\}.$$

$$G_+^- = \{x \in G : \varphi(x) > 0, \psi(x) \leq 0 \quad a.e\ dans\ \ G\}.$$

$$G_-^+ = \{x \in G : \varphi(x) \leq 0, \psi(x) > 0 \quad a.e\ dans\ \ G\}.$$

$$G_-^- = \{x \in G : \varphi(x) \leq 0, \psi(x) \leq 0 \quad a.e\ dans\ \ G\}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\langle F(\varphi) - F(\psi), \varphi - \psi \rangle_{V',V} &= \langle \max\{0,\varphi\} - \max\{0,\psi\}, \varphi - \psi \rangle_V \\
&= \int_G (\max\{0,\varphi\} - \max\{0,\psi\})(\varphi - \psi) dx \\
&= \int_{G_+^+} (\varphi - \psi)(\varphi - \psi) dx + \int_{G_+^-} \varphi(\varphi - \psi) dx \\
&\quad + \int_{G_-^+} -\psi(\varphi - \psi) dx + \int_{G_-^-} (0-0)(\varphi - \psi) dx \\
&\geq -\int_{G_+^-} \varphi\psi\, dx - \int_{G_-^+} \psi\varphi\, dx \geq 0.
\end{aligned}$$

tell que :

$$2(\varphi^2 - \varphi\psi - \psi\varphi + \psi^2) \geq -\varphi\psi - \psi\varphi.$$

En utilisant le fait que $\varphi\psi \leq 0$ dans $G_+^- \cup G_-^+$. finalement, F est monotone.

DÉFINITION 2.8: (Opérateur fortement monotone)

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est fortement monotone s'il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout u et v dans V, on a

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq m\|u - v\|^2.$$

Remarque 2.2. *Il est clair que tout opérateur fortement monotone est strictement monotone.*

EXAMPLE 2.12: (Application contractante)
Soit un espace de Hilbert H. On dit que l'application $f : H \to H$ est une contraction s'il existe $0 < \lambda < 1$, telle que

$$\|f(u)-f(v)\| \leq \lambda \|u-v\|, \quad \forall u, v \in H. \tag{2.6}$$

- Montrer que $A = \mathrm{id}_H - f$ est un opérateur fortement monotone.

SOLUTION.

Soient u et v deux éléments de H. en utilisant (2.6), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= \big((\mathrm{id}-f)(u)-(\mathrm{id}-f)(v), u-v\big)_H \\
&= \big(u-v-(f(u)-f(v)\big), u-v\big) \\
&= \|u-v\|^2 - \big(f(u)-f(v), u-v\big) \\
&\geq \|u-v\|^2 - \|f(u)-f(v)\|\|u-v\| \\
&\geq (1-\lambda)\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

EXAMPLE 2.13: (Opérateur de la projection orthogonale)
Soit K un sous-ensemble convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert H. On définit l'opérateur $P_K : H \longrightarrow H$ par :

$$P_K(x) = \left\{ z \in K; \quad \|z-x\| = \inf_{y \in K} \|y-x\| \right\}.$$

Montrer que P_K est un opérateur strictement monotone.

SOLUTION.

Tout d'abord on prouve que l'application P_k satisfait l'inégalité variationnelle suivante : pour tout $x \in H$,

$$\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle \leq 0 \quad \forall y \in K. \tag{2.7}$$

En effet, si $y \in K$ et $\lambda \in]0,1[$, alors $y_\lambda = \lambda y + (1-\lambda)x \in K$ et par conséquent

$$\|x - P_K(x)\| \leq \|x - y_\lambda\| = \|(x - P_K(x)) - \lambda\big(y - P_K(x)\big)\|.$$

On élève au carré les deux côtés de la dernière inégalité, on obtient

$$0 \leq \lambda^2 \|y - P_K(x)\|^2 - 2\lambda\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle. \tag{2.8}$$

Donc l'inégalité (2.7) découle en divisant (2.8) par $\lambda > 0$ et faisant λ tendre vers 0. Soit z un élément de H. En utilisant l'inégalité (2.7), il vient

$$\langle z - P_K(z), y - P_K(z)\rangle \leq 0 \quad \forall y \in K. \tag{2.9}$$

De (2.7) et (2.9), il s'en suit que

$$\langle x-z, P_K(x)-P_K(z)\rangle \geq \|P_K(x)-P_K(z)\|^2 \quad \forall x, z \in H,$$

ce qui montre bien que l'opérateur P_K est strictement monotone.

EXAMPLE 2.14: (Opérateur Laplacien)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On définit l'opérateur laplacien $A: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx.$$

Cet opérateur est fortement monotone.

SOLUTION.

Effectivement, si u et v deux éléments de $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= \langle A(u-v), u-v\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)\, dx \\ &= \|u-v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

EXAMPLE 2.15: (Opérateur p-Laplacien)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $1 < p < +\infty$, on définit l'opérateur $A: W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ par :

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx.$$

L'opérateur A est fortement monotone.

SOLUTION.

Soient u et v deux éléments de V. En utilisant l'inégalité

$$\left(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\right)(a-b) \geq C_p \begin{cases} |a-b|^p & \text{si} \quad p \geq 2, \\ (1+|a|+|b|)^{p-2}|a-b|^2 & \text{si} \quad 1<p<2, \end{cases} \tag{2.10}$$

avec $C_p > 0$ une constante, a et b sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$, on obtient

1. Cas $p \geq 2$.

$$\begin{aligned}\langle Au-Av, u-v\rangle &= \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla(u-v)dx) \\ &\geq C_p \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \, dx \\ &\geq C_p \|u-v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} > 0\end{aligned}$$

2. Cas $1 < p < 2$.

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla(u-v))\,dx \\
&\geq C_P \int_\Omega (1+|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-2}|\nabla u - \nabla v|^2\,dx \\
&\geq C_p \left(\int_\Omega (1+|\nabla u||\nabla v|)^{\frac{-(p-2)}{\alpha-1}}\right)^{1-\alpha}\left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\alpha} \\
&\geq C_p \left(\int_\Omega (1+|\nabla u||\nabla v|)^{p}\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p}\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\geq C_p \|1+|\nabla u|+|\nabla v|\|^{p-2}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|\nabla u - \nabla v\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

2.4.2 Quelques propriétés des opérateurs monotones

THÉORÈME 4.1: Si $A : V \to V'$ est un opérateur linéaire et monotone, alors A est continu.

Preuve.

Soit $A : V \to V'$ un opérateur linéaire et monotone. Puisque A est linéaire, pour démontrer que A est continu, il suffit de démontrer que A est borné. Autrement dit, On doit démontrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|A(v)\|_{V'} \leq C\|v\|_V \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On suppose par l'absurde que l'opérateur A n'est pas borné. Cela signifie que pour tout entier naturel n, il existe un élément u_n de V tel que

$$\|A(u_n)\|_{V'} > n\|u_n\|_V.$$

On définit la suite

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_V} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par construction, on a $\|v_n\|_V = 1$, et donc,

$$\|A(v_n)\|_{V'} > n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Puisque la suite (v_n) est bornée dans V qui est réflexif. Par conséquent, il existe une sous-suite (v_{n_k}) qui converge faiblement vers $v \in V$.
Le fait que A est un opérateur linéaire et monotone, alors la suite $\left(A(v_{n_k})\right)$ devrait converger faiblement dans V'. Cela signifie qu'il existe un vecteur $w \in V'$ tel que :

$$A(v_{n_k}) \to w \quad \text{faiblement dans } V'.$$

Par conséquent, la suite $\left(A(v_{n_k})\right)$ est bornée. En d'autres termes, il existe une constante C telle que,

$$\|A(v_{n_k})\|_{V'} \leq C \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Cela contredit (2.11). Donc A doit être borné.

THÉORÈME 4.2: Si $A : V \to V'$ est un opérateur monotone, alors A est localement borné.

Preuve.

On suppose par l'absurde que A n'est pas localement borné. Donc, il existe une suite (u_n) de V qui converge vers $u \in V$, telle que la suite (Au_n) n'est pas bornée. Sans perte de généralité, on peut prendre $u = 0$. On considère la suite

$$s_n := (1 + \|A(u_n)\|_{V'} \|u_n\|)^{-1}.$$

En utilisant la monotonie de l'opérateur A, on a

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - v \rangle \geq 0,$$

et

$$\langle A(u_n) - A(-v), u_n - (-v) \rangle \geq 0,$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \pm s_n \langle A(u_n), v \rangle &\leq s_n \left(\langle A(u_n), u_n \rangle - \langle A(\pm v), u_n \mp v \rangle \right) \\ &\leq s_n \left(\|A(u_n)\|_{V'} \|u_n\| + \|A(\pm v)\|_{V'} \|u_n\| + \|v\| \right) \\ &\leq 1 + \|A(\pm v)\|_{V'} (D + \|v\|), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|u_n\| \leq D$, pour une certaine constante strictement positive.

$$\sup_n |\langle s_n A(u_n), v \rangle| < \infty \quad \forall v \in V.$$

Selon (2.5), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_n \|s_n A(u_n)\|_{V'} \leq C.$$

Donc il découle que $s_n \|A(u_n)\|_{V'} \leq C$, et par conséquent

$$\|A(u_n)\|_{V'} \leq \frac{C}{s_n} = C \left(1 + \|A(u_n)\|_{V'} \|u_n\|_V\right).$$

Il s'ensuit, après avoir développé l'expression, que

$$\|A(u_n)\|_{V'} \leq \frac{C}{1 - C\|u_n\|},$$

ce qui montre que $\|A(u_n)\|_{V^*}$ est borné pour certains $n \geq n_0$, puisque $\|u_n\| \to 0$. Ainsi, on a une contradiction.

THÉORÈME 4.3: Si V est de dimension finie et $A : V \to V'$ est un opérateur monotone et hémicontinu, alors A est continu.

Preuve.

Soit (u_n) une suite de V qui converge fortement vers $u \in V$. Par le Théorème 4.2, l'opérateur A est localement borné, et par conséquent la suite $(A(u_n))$ est bornée dans V' qui est réflexif. Par conséquent la suite $(A(u_n))$ admet une sous-suite telle que

$$A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi \quad \text{faiblement dans } V'. \tag{2.12}$$

Comme V' est de dimension finie, alors

$$A(u_{n'}) \to \xi \quad \text{fortement dans } V'. \tag{2.13}$$

Soit $v \in V$. En utilisant la monotonie de A, il vient

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v \rangle \geq \langle A(v), u_{n'} - v \rangle. \tag{2.14}$$

Passant à la limite in (2.14), il s'ensuit que

$$\langle \xi - A(v), u - v \rangle \geq 0. \tag{2.15}$$

Soit $w \in V$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Appliquant (2.15) à $v = u + t\,w$ et divisant l'inégalité obtenue par $t > 0$, on obtient

$$\langle \xi - A(u + t\,w), w \rangle \leq 0. \tag{2.16}$$

Faisant alors tendre t vers 0. Comme A est hémicontinu, il vient

$$\langle \xi - A(u), w \rangle \leq 0. \tag{2.17}$$

Cette inégalité est aussi vraie pour -w, donc en fait

$$\langle \xi - A(u), w \rangle = 0 \quad \forall w \in V. \tag{2.18}$$

Soit $\xi = A(u)$. Donc on a arrivé à démontrer que la suite $(A(u_n))$ admet une sous-suite fortement convergente vers $A(u)$, et par conséquent, en appliquant le Théorème 2.4, la suite toute entière converge fortement vers $A(u)$.

THÉORÈME 4.4 ([15]): Soit $A : V \to V'$ un opérateur monotone hémicontinu. Si (u_n) une suite de V telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans V, $A(u_n) \rightharpoonup f$ dans V' et $\langle A(u_n), u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$, alors $A(u) = f$.

Preuve.

Soit (u_n) une suite de vecteurs de V qui satisfait les hypothèses du Théorème 4.4. Alors, en utilisant la monotonie de A, on a

$$\langle f - A(v), u - v \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle A(u_n) - A(v), u_n - v \rangle \geq 0,$$

pour tout $v \in V$. Soit $w \in V$ et $t > 0$, en posant $v = u + t\,w$ dans l'inégalité ci-dessus, il vient

$$t \langle f - A(u + t\,w), w \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Par conséquent,

$$\langle f - A(u + t\,w), w \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

L'hémicontinuité de A implique alors

$$\langle f - A(u), w \rangle = \lim_{t \to 0^+} \langle f - A(u + t\,w), w \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } w \in V.$$

Par conséquent $A(u) = f$.

DÉFINITION 2.9: (Différentiabilité au sens de Gâteaux)

Soient X et Y deux espace de Banach. On dit que l'application $F : X \to Y$ est Gâteaux différentiable en poit $x_0 \in X$ s'il existe une application $F'(x_0) : X \to Y$ linéaire continue telle que pour tout $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t\,h) - F(x_0)}{t} = F'(x_0). \tag{2.19}$$

On dit que F est Gâteaux différentiable sur X si l'elle en tout point $x_0 \in X$.

THÉORÈME 4.5 (Convexité et la monotonie): Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable au sens de Gâteaux sur V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est convexe (strictement convexe),
2. F' est monotone(strictement monotone).

Preuve.

Fixant $u, v \in V$ et posant $\varphi(t) = F((1-t)u + t\,v)$. Alors la fonction réelle φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\varphi'(t) = \langle F'((1-t)u = t\,v), v - u \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si F est convexe sur V, alors φ l'est également sur $\mathbb{R}$, et par conséquent φ' est une fonction croissante. Ainsi il découle que

$$\varphi'(0) = \langle F'(u), v - u \rangle \leq \langle F'(v), v - u \rangle, \tag{2.20}$$

ce qui prouve que F' est monotone. D'autre part, si F' est monotone, la fonction φ' est croissante, et par conséquent F est convexe. De façon similaire on peut traiter le cas "strictement".

Application 2.1

L'opérateur de p-Laplacien $\Delta_p : V = W_0^{1,p}(\Omega) \to V' = V = W^{-1,p'}(\Omega)$ défini par

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p(u), v\rangle &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx\end{aligned}$$

est strictement monotone.

Preuve.

On considère la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx. \tag{2.21}$$

1. On prouve que la fonctionnelle J est Gâteaux différentiable et que $J' = -\Delta_p$. Avec les notations suivantes

$$A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad ; g(s) = \frac{1}{p}|s|^p \quad ; g'(s) = |s|^{p-2}s \quad , p > 2$$

la fonctionnelle $J(u)$ s'écrit comme suit :

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega g(A_i u(x))\,dx.$$

Par le théorème de la valeur moyenne, on a

$$g(A_i u + \lambda A_i v) - g(A_i u) = g'(A_i u + \theta\lambda A_i v).\lambda A_i v \quad ; 0 \le \theta \le 1.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\left\langle J'(u), v\right\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(J(u+tv) - J(u)) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega (g(Au+tAv) - g(Au))\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega g'(A_i u + \theta\, tA_i v)\cdot tA_i v\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega g'(A_i u(x))\cdot A_i v(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \\ &= \left\langle -\Delta_p, v\right\rangle.\end{aligned}$$

Donc $J' = -\Delta_p$.

2. La strictement convexité de la fonctionnelle J découle directement de celle de la fonction $s \mapsto g(s) = \frac{1}{p}|s|^p$ et la linéarité de l'intégrale.

THÉORÈME 4.6 (Minty-Browder [32, 6, 15]): Soit $A : V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.

Preuve.

L'idée est d'utiliser la méthode de Galerkin.

(i) On suppose que V soit de dimension infinie (si V est de dimension finie, la surjectivité de A découle par la partie (ii) de cette preuve). Puisque V est séparable, il existe une famille dénombrable $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ de vecteurs v_i de V linéairement indépendants tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ dense dans V, où $V_n = vect\{v_1, ..., v_n\}$.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, il existe $u_n \in V_n$ tel que

$$\langle A(u_n), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_n \quad \text{et } \|u_n\| \leq C,$$

où C est une indépendante de n.

Pour chaque $n \geq 1$, soit $A_n := A|_{V_n}$. Alors l'opérateur $A_n : V_n \to V_n'$ défini de cette façon est monotone puisque

$$\langle A_n(u) - A_n(v), u - v \rangle = \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V_n.$$

Puisque A_n est également hémicontinu (comme A) et que V_n est de dimension finie, alors, par le Théorème 4.3, A_n est continu.

Soit $f_n := f|_{V_n} \in V_n'$, de sorte que $\|f_n\|_{V_n'} \leq \|f\|_{V'}$. Alors

$$\frac{1}{\|v\|}\big(\langle A_n(v), v \rangle - \langle f_n, v \rangle\big) \geq \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|} - \|f\|_{V'} \quad \text{pour tout } v \in V_n,\ v \neq 0.$$

Puisque A est coercif, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\langle A_n(v) - f_n, v \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in V_n \text{ avec } \|v\| = C.$$

Puisque $A_n : V_n \to V_n'$ est continue, alors par le Théorème du point fixe de Brouwer, il existe $u_n \in \overline{B(0; C)}$ tel que

$$A_n(u_n) = f_n,$$

au sens suivant

$$\langle A(u_n) - f, v \rangle = \langle A_n(u_n) - f_n, v \rangle = 0 \quad \text{pour tout } v \in V_n. \tag{2.22}$$

(iii) Bornitude de la suite $(A(u_n))$ dans V'. Puisque A est localement borné, il existe $r > 0$ et $\rho > 0$ telles que

$$\|v\| \leq r \quad \text{implique} \quad \|A(v)\| \leq \rho.$$

En combinant cette propriété avec la monotonie de A et la relation $\langle A(u_n), u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle$ (qui découle de (ii)) on obtient

$$\begin{aligned}\langle A(u_n), v\rangle &\le \langle A(u_n), u_n\rangle - \langle A(v), u_n\rangle + \langle A(v), v\rangle \\ &= \langle f, u_n\rangle - \langle A(v), u_n\rangle + \langle A(v), v\rangle \\ &\le C\|f\|_{V'} + C\rho + r\rho \quad \text{pour tout } n \ge 1 \text{ et pour tout } \|v\| \le r.\end{aligned}$$

La bornitude de la suite $(A(u_n))$ résulte alors de la relation

$$\|A(u_n)\|_{V'} = \frac{1}{r}\sup_{\|v\|\le r}\langle A(u_n), v\rangle.$$

(iv) Il existe une sous-suite (u_m) de la suite (u_n) ayant les propriétés suivantes :

$$u_m \to u \quad \text{faiblement dans } V, \quad A(u_m) \to f \quad \text{faiblement dans } V',$$

et

$$\langle A(u_m), u_m\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

Puisque la suite (u_n) est bornée dans V et la suite $(A(u_n))$ est bornée dans V' et que V est réflexif, alors il existe une sous-suite (u_m) de (u_n) telle que

$$u_m \to u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{2.23}$$

et

$$A(u_m) \to g \quad \text{faiblement dans } V'. \tag{2.24}$$

En utilisant (2.22), (2.23) et (2.24), on obtient

$$\langle g, v_k\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle A(u_m), v_k\rangle = \langle f, v_k\rangle \quad \text{pour tout } k \ge 1.$$

Par conséquent

$$\langle g, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m.$$

Par densité de $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ dans V, il découle que

$$\langle g, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Par conséquent $g = f$, et donc

$$A(u_m) \to f \quad \text{faiblement dans } V'. \tag{2.25}$$

Enfin, on a

$$\lim_{m\to\infty}\langle A(u_m), u_m\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle f, u_m\rangle = \langle f, u\rangle.$$

(v) D'après le Théorème 4.4, il résulte que $A(u) = f$. Par conséquent, A est surjectif. Si on suppose de plus que A est strictement monotone, alors A est injectif.

2.5 Applications du théorème de Minty-Browder

2.5.1 Problème elliptique linéaire.

On considère le problème elliptique linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.26}$$

où Ω est un ouvert borné de R^N et M est une matrice elliptique bornée; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi.\xi, \qquad |M(x)\xi| \leq \beta|\xi|. \tag{2.27}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et presque partout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que f est une fonction $L^2(\Omega)$.

- Montrer que le problème (2.26) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

SOLUTION.

On définit l'opérateur A : $V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$ par :

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

On va montrer que l'opérateur A est borné, monotone, hémicontinu, et coercif.

1. **L'opérateur A est borné.** Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, en utilisant l'hypothèse (2.27) et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle A(u), \varphi\rangle| &= \left| \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx \right| \\ &\leq \beta \int_\Omega |\nabla u||\nabla\varphi| \, dx \\ &\leq \beta \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \beta \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

   Par suite, il en résulte que

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle A(u), \varphi\rangle| \leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

   Donc l'opérateur A transforme les bornés de $H_0^1(\Omega)$ en des bornés de $H^{-1}(\Omega)$.

2. **L'opérateur A est strictement monotone.** Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, avec $u \neq v$. En utilisant l'hypothèse (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle A(u)-A(v),u-v\rangle &= \langle A(u-v),u-v\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v) \\ &\geq \alpha\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 > 0.\end{aligned}$$

3. **L'opérateur A est hémicontinu.**
   Soient u, v et $w \in H_0^1(\Omega)$. On va montrer que $\phi(t)=\langle A(u+tv),w\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \langle A(u+tv),w\rangle \\ &= \langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla(u+tv),w\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla w\,dx + t\int_\Omega M(x)\nabla v\cdot\nabla w\,dx, \\ &= c_1 + c_2 t.\end{aligned}$$

   Donc ϕ est une fonction affine, et par conséquent elle est continue.

4. **L'opérateur A est coercif.**

$$\langle Au,u\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u(x)\nabla u(x)dx \geq \alpha\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \alpha||u||^2$$

$$\lim_{||u||\to+\infty}\frac{\langle Au,u\rangle}{||u||} \geq \frac{\alpha||u||^2}{\alpha||u||^2}||u|| > \alpha||u|| \geq +\infty. \tag{2.28}$$

Donc l'opérateur A satisfait toutes les hypothèses du théorème 4.6. En conséquence, le problème (2.26) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.5.2 Théorème de Lax-Milgram

THÉORÈME 5.1 (Théorème de représentation de Riesz [39]): Soient H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H. Alors il existe élément unique u de H tel que :

$$f(v)=(u,v)_H; \quad \forall v \in H.$$

Preuve.

1. **Existence.**
   On distingue deux cas.
   (a). Si $f \equiv 0$, il suffit de prendre $u=0$ comme un représentant de f.
   (b). Si $f \not\equiv 0$, alors il existe un élément non nul u_0 de $(\ker f)^\perp$. Dès que f est continue, $\ker f$ est un sous-espace fermé de H, alors

$$H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp.$$

Soit $v \in H$. Il est clair que $w = u_0 f(v) - f(u_0)v$ est un élément de $\ker f$, et en conséquence, on a

$$0 = (u_0, w) = \big(u_0, u_0 f(v) - f(u_0)v\big) = \|u_0\|^2 f(v) - f(u_0)(u_0, v).$$

Par suit, il vient

$$f(v) = \left(\frac{f(u_0)u_0}{\|u_0\|^2}, v\right).$$

Donc, on peut prendre $u = \dfrac{f(u_0)u_0}{\|u_0\|^2}$ comme un représentant de f.

2. **Unicité.** On suppose qu'il existe deux éléments u_1 et u_2 de H tels que

$$f(v) = (u_1, v); \quad \forall v \in H, \tag{2.29}$$

et

$$f(v) = (u_2, v); \quad \forall v \in H. \tag{2.30}$$

En soustrayant (2.30) de (2.29), il vient

$$(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H. \tag{2.31}$$

Prenant $v = u_1 - u_2$ dans (2.31), il s'ensuit que $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$, ce qui implique que $u_1 = u_2$.

THÉORÈME 5.2 (Lax-Milgram [26]): Soient H un espace de Hilbert, et a une forme bilinéaire sur $H \times H$ telle qu'il existe deux constantes strictement positives α et β telles que

1. $\forall u, v \in H, \quad |a(u,v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H$ (a est continue sur $H \times H$),
2. $\forall v \in H, \quad a(v,v) \geq \alpha \|u\|_H^2$ (a est coercive).

Soit L une forme linéaire sur H. Alors, le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ \\ a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H. \end{cases} \tag{2.32}$$

admet une unique solution.

Preuve.

On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ u &\mapsto A(u) \end{aligned}$$

où $A(u)$ est l'unique représentant de Riesz de la forme linéaire continue $a(u,.)$. Donc, on a :

$$a(u,v) = (Au, v), \quad \forall v \in H. \tag{2.33}$$

L'opérateur A défini ainsi est linéaire. En effet si $u, w \in H$, et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(A(u+t\,w),v)_H &= a(u+t\,w,v)\\ &= a(u,v)+t\,a(w,v)\\ &= (A(u),v)_H + t(A(w),v)_H\\ &= (A(u)+t\,A(w),v)_H \quad \forall v\in H,\end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de a par rapport à la deuxième variable. Par conséquent :

$$(A(u+t\,w)-A(u)-t\,A(w),v)_H = 0 \quad \forall v\in H.$$

En choisissant $v = A(u+t\,w)-A(u)-t\,A(w)$, il s'en suit que :

$$\|A(u+t\,w)-A(u)-t\,A(w)\|_H^2 = 0,$$

ce qui implique que $A(u+t\,w) = A(u)+t\,A(w)$.

Il est clair que le problème variationnelle (2.32) est équivalent au

$$\begin{cases}\text{Trouver une unique élément } u\in H \text{ tel que :}\\ \\ A(u)=f,\end{cases} \tag{2.34}$$

où f est l'unique représentant de Riesz de la forme linéaire continue L. Afin de démontrer que le problème (2.34) admet au-mois une solution, il suffit de démontrer que l'opérateur A satisfait toutes les hypothèses du Théorème de Minty-Browder 4.6. Pour l'unicité, il suffit de démontrer que l'opérateur A est strictement monotone.

1. *A est borné.*
   En utilisant la continuité de a et $a(u,v) = (Au,v)_H$, il vient :
   $$\begin{aligned}\|A(u)\|_H^2 = (Au,Au)_H = a(u,Au)\\ &\le \beta\|u\|_H\|Au\|_H\\ &\le \frac{1}{2}\beta^2\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|Au\|_H^2.\end{aligned}$$
   D'où $\|A(u)\|_H \le \beta\|u\|_H$.
2. *A est strictement monotone.*
   Soient $u,v\in H$. On veut démontrer que :
   $$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle_H \ge 0.$$
   On a :
   $$\begin{aligned}\langle A(u)-A(v),u-v\rangle_H &= a(u-v,u-v)\\ &\ge \alpha\|u-v\|_H^2.\end{aligned}$$
3. *A est hémicontinu.*
   Soient $u,v,w\in H$. On va démontrer que la fonction :
   $$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad t\mapsto\varphi(t) = \langle A(u+t\,v),w\rangle_H$$
   est continue. En effet,
   $$\begin{aligned}\varphi(t) &= (A(u+t\,v),w)_H\\ &= a(u+t\,v,w)\\ &= a(u,w)+t\,a(v,w),\end{aligned}$$
   ce qui montre que φ est une fonction affine et donc continue.

4. *A est coercif :*

   On a :

$$\frac{\langle A(u),u\rangle_H}{\|u\|_H}=\frac{a(u,u)}{\|u\|_H}\geq\alpha\|u\|_H.$$

   Ceci implique que :

$$\frac{\langle A(u),u\rangle_H}{\|u\|_H}\to+\infty\quad\text{lorsque}\quad\|u\|_H\to\infty.$$

Opérateurs pseudomonotones

Chapitre 3

Sommaire

1	Notions générales	31
2	Opérations sur les opérateurs pseudomonotones	38
3	Opérateurs du calcul des variations	44
4	Applications du théorème de Brezis	45

3.1 Notions générales

DÉFINITION 3.1: (Opérateur pseudomonotone)

On dit que l'opérateur A est pseudomonotone si

(i) A est borné.

(ii) lorsque $u_n \rightharpoonup u$ dans V faiblement et $\limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ alors

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V.$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la pseudo-monotonie.

PROPOSITION 3.1. [31] Soit $A : V \longrightarrow V'$. L'opérateur A est pseudomonotone si et seulement si A est borné et satisfait la condition suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } V \\ \text{et } \limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} A(u_n) \rightharpoonup A(u) \text{ faiblement dans } V' \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Preuve.

1. On suppose que (3.1) est satisfaite. Soit (u_n) une suite de V telle que

$$u_n \to u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.2}$$

et

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} \leq 0. \tag{3.3}$$

Alors, pour tout $v \in V$, on a

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - v\rangle_{V',V} &\geq \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} \\ &\quad + \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u - v\rangle_{V',V} \\ &= \langle Au, u - v\rangle_{V',V}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que A est pseudomonotone.

2. On suppose que A est pseudomonotone. Soit (u_n) une suite de V satisfait l'hypothèse (3.1). Alors

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{3.4}$$

Prenant $v = u$ dans (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} \leq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} = 0.$$

Soit $w \in V$ et $t \in \mathbb{R}$. En choisissant $v = u - t\,w$ dans (3.4), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\langle Au, t\,w\rangle_{V',V} &\leq \liminf\langle Au_n, u_n - u + t\,w\rangle_{V',V} \\ &= \lim\langle Au_n, u_n - u\rangle_{V',V} + \liminf\langle Au_n, t\,w\rangle_{V',V} \\ &= \liminf\langle Au_n, t\,w\rangle_{V',V}.\end{aligned}$$

En prenant d'abord $t > 0$ et ensuite $t < 0$, on en déduit facilement que

$$\lim\langle Au_n, w\rangle_{V',V} = \langle Au, w\rangle_{V',V}.$$

pour tout $w \in V$, et par conséquent,

$$A(u_n) \rightharpoonup A(u) \text{ faiblement dans } V'.$$

PROPOSITION 3.2. [27, 31] Soit $A: V \longrightarrow V'$. l'opérateur A est pseudomonotone si et seulement si A est borné et satisfait la condition suivante :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } V \\ A(u_n) \longrightarrow \xi \quad \text{faiblement dans } V' \\ \limsup\limits_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \xi = A(u) \text{ et } \langle A(u_n), u_n\rangle \longrightarrow \langle A(u), u\rangle. \tag{3.5}$$

Preuve.

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{3.6}$$

1. On suppose que A est un opérateur pseudomonotone. Soit (u_n) une suite de V

telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.7}$$

$$A(u_n) \rightharpoonup A(u) \quad \text{faiblement dans } V', \tag{3.8}$$

et

$$\limsup \langle A(u_n), u_n \rangle \leq \langle \xi, u \rangle \tag{3.9}$$

Puisque A pseudo-monotonie, alors

$$\liminf \langle A(u_n), u_n - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle, \quad \text{pour tout } v \in V,$$

d'où en développant le crochet de dualité, il vient

$$\liminf \langle A(u_n), u_n \rangle - \langle \xi, v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle. \tag{3.10}$$

Prenant $v = u$, on en déduit que

$$\liminf \langle A(u_n), u_n \rangle \geq \langle \xi, u \rangle \tag{3.11}$$

En combinant (3.9) et (3.11), on en déduit que

$$\langle A(u_n), u_n \rangle \rightarrow \langle \xi, u \rangle. \tag{3.12}$$

De (3.10) et (3.12), il s'ensuit que

$$\langle \xi, u - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle.$$

Soit $w \in V$. Prenant $v = u + t\,w$ pour $t > 0$, puis pour $t < 0$, on en déduit que $\xi = A(u)$.

2. On suppose maintenant que la condition (3.5) est satisfait. Soit (u_n) une suite de V telle

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.13}$$

et

$$\limsup_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0. \tag{3.14}$$

Comme A est borné, on peut extraire une sous-suite telle que

$$A(u_{n_k}) \rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } V'. \tag{3.15}$$

Puisque

$$\langle A(u_{n_k}), u_{n_k} \rangle \rightarrow \langle \xi, u \rangle$$

alors, Par l'hypothèse (3.5), il découle que

$$\xi = A(u),$$

et

$$\langle A(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle \to \langle A(u), u\rangle.$$

Par conséquent,

$$\langle A(u_{n_k}), u_{n_k} - v\rangle \to \langle A(u), u - v\rangle.$$

Donc A est pseudomonotone.

EXAMPLE 3.1: (Opérateur de Leray-Lions [27])
Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une fonction de Carathéodory vérifiant :

1. Il existe $k \in L^{p'}(\Omega)$ est constante C tels que

$$\forall (x,s,\lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad |F(x,s,\lambda)| \leq k(x) + C(|s|^{p-1} + |\lambda|^{p-1}) \tag{3.16}$$

2. Pour x et s fixés, F est monotone par rapport à λ,
3. Il existe une constant $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (x,s,\lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad F(x,s,\lambda)\cdot\lambda \geq \alpha|\lambda|^{p}. \tag{3.17}$$

On définit l'opérateur $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p'}(\Omega)$ par :

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\cdot v, \quad \forall u,\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Montrer que l'opérateur A est pseudomonotone.

SOLUTION.

Montrer que A est borné.
Soient u et v sont deux fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Grâce à la condition de croissance (3.16), il vient

$$\begin{aligned}
\left|\langle A(u), v\rangle\right| &= \left|\int_\Omega F(x,u,\nabla u)(x)\cdot\nabla v(x)\,dx\right| \\
&= \int_\Omega |F(x,u,\nabla u)(x)||\nabla v(x)|\,dx \\
&\leq \int_\Omega \left|k(x) + C(|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1})\right||\nabla v(x)|dx \\
&\leq \int_\Omega |k(x)||\nabla v(x)|\,dx + C\int_\Omega |u(x)|^{p-1}|\nabla v(x)|\,dx + C\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla v(x)|\,dx \\
&\leq \left[\|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + C\|u\|_{L^p(\Omega)} + C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right]\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|A(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + C\|u\|_{L^p(\Omega)} + C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.$$

Donc, A transforme les bornés de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en des bornés de $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Maintenant, on montre que A est pseudomonotone, et coercif.

1. A **est coercif.** En utilisant la condition (3.17), il s'en suit que

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega (F(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla u(x) dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx.\end{aligned}$$

   Par suite

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \geq \alpha \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

   D'où $\dfrac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \to +\infty$ si $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$.

2. A **est pseudomonotone.**

   Soit (u_n) une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.18}$$

   et

$$A(u_n) \longrightarrow \xi \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{3.19}$$

   On suppose de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx \leq \langle \xi, u\rangle. \tag{3.20}$$

Par la condition de croissance (3.16), la suite $F(x, u_n, \nabla u_n)$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Donc, on peut extraire une sous-suite, toujours notée u_n, telle que

$$F(x, u_n, \nabla u_n) = g_n \longrightarrow g \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{3.21}$$

De (3.19) et (3.21), il vient

$$\xi = -\operatorname{div}(g). \tag{3.22}$$

Par (3.20) et (3.22), il en résulte que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \cdot \nabla u_n \, dx \leq \int_\Omega g \cdot \nabla u \, dx. \tag{3.23}$$

Maintenant, en utilisant la monotonie de F par rapport à sa troisième variable, il vient pour tout ϕ de $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$

$$\int_\Omega [F(x,u_n,\nabla u_n)-F(x,u_n,\phi)]\cdot[\nabla u_n-\phi]dx\geq 0, \tag{3.24}$$

soit

$$\int_\Omega g_n\cdot\nabla u_n dx-\int_\Omega g_n\cdot\phi\, dx-\int_\Omega F(x,u_n,\phi)\cdot[\nabla u_n-\phi]dx\geq 0 \tag{3.25}$$

Puisque la suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui, par le théorème de Rellich 2.4, s'injecte de façon compacte dans $L^p(\Omega)$, alors on na

$$u_n\longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega). \tag{3.26}$$

Par suite, en utilisant le théorème de La réciproque partielle de Lebesgue dominée 1.6, il en résulte que

$$u_n\longrightarrow u \quad \text{p.p } x\in\Omega, \tag{3.27}$$

et il existe une fonction h de $L^2(\Omega)$ telle que

$$|u_n(x)|\leq h(x) \quad \text{p.p } x\in\Omega. \tag{3.28}$$

Comme F est continue par rapport à la deuxième variable, alors

$$F(x,u_n,\phi)\longrightarrow F(x,u,\phi) \quad \text{p.p } x\in\Omega. \tag{3.29}$$

En utilisant la condition de croissance (3.16) et (3.28), il découle que

$$\left|F(x,u_n,\phi)\right|\leq k(x)+Ch+C|\phi|=\psi\in L^{p'}(\Omega). \tag{3.30}$$

Tenant compte de (3.29) et (3.30), on peut appliquer le théorème de convergence dominée **??**, pour conclure que

$$F(x,u_n,\phi)\longrightarrow F(x,u,\phi) \quad \text{fortement dans } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{3.31}$$

Par conséquent

$$\int_\Omega F(x,u_n,\phi)\cdot[\nabla u_n-\phi]dx\longrightarrow\int_\Omega F(x,u,\phi)\cdot[\nabla u-\phi]dx, \tag{3.32}$$

et

$$\int_\Omega g_n\cdot\phi\, dx\longrightarrow\int_\Omega g\cdot\phi\, dx. \tag{3.33}$$

En utilisant (3.23), (3.32) et (3.33), on peut passer à la limite supérieure dans (3.25), pour obtenir

$$\int_\Omega g\cdot\nabla u dx-\int_\Omega g\cdot\phi\, dx-\int_\Omega F(x,u,\phi)\cdot[\nabla u-\phi]dx\geq 0,$$

soit

$$\int_\Omega [g-F(x,u,\phi)]\cdot[\nabla u-\phi]dx\geq 0,$$

Prenant $\phi = \nabla u - t\varphi$ avec $t > 0$, il vient

$$\int_\Omega [g - F(x, u, \nabla u + t\varphi)] \cdot \varphi \, dx \geq 0,$$

d'où en faisant tendre t vers 0 et en utilisant le théorème de convergence dominée,

$$\int_\Omega [g - F(x, u, \nabla u)] \cdot \varphi \, dx \geq 0,$$

on en déduit que $g = F(x, u, \nabla u)$; c'est à dire $\xi = A(u)$.
Reprenons alors la monotone de F par rapport à la troisième variable

$$\int_\Omega [F(x, u_n, \nabla u_n) - F(x, u_n, \nabla u)] \cdot [\nabla u_n - \nabla u] dx \geq 0,$$

soit

$$\int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx \geq \int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u \, dx + \int_\Omega F(x, u_n, \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) dx, \tag{3.34}$$

De (3.32) et (3.33), il s'en suit que

$$\int_\Omega F(x, u_n, \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) dx \longrightarrow 0, \tag{3.35}$$

et

$$\int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u \, dx \longrightarrow \int_\Omega g \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega F(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx, \tag{3.36}$$

Par conséquent, passant à la limite inférieure dans (3.34),il vient

$$\liminf \int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx \geq \int_\Omega F(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx = \langle A(u), u \rangle.$$

Par hypothèse

$$\limsup \int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx \leq \langle \xi, u \rangle = \langle A(u), u \rangle.$$

Puisque par l'étape précédente $\xi = A(u)$, on a montré que

$$\int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \langle A(u_n), u \rangle \longrightarrow \langle A(u), u \rangle.$$

Donc que A est bien un opérateur pseudomonotone.

3.2 Opérations sur les opérateurs pseudomonotones

PROPOSITION 3.3. [46] Soient $A, B : V \longrightarrow V'$ deux opérateurs. Les assertions suivantes sont vraies

1. Si A est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudomonotone.
2. Si A et B sont pseudomonotones, alors $A+B$ l'est également.
3. Si A est pseudomonotone et B est fortement continu, alors $A+B$ est pseudomonotone.

Preuve.

1. On suppose que $A : V \to V'$ est borné, hémicontinu et monotone. Soit (u_n) une suite de V telle que

$$u_n \to u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.37}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0. \tag{3.38}$$

Puisque A est monotone, alors

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle \geq \langle Au, u_n - u\rangle \to 0.$$

Par conséquent,

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \geq 0. \tag{3.39}$$

De (3.38) et (3.39), on en déduit que

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle \to 0,$$

puisque pour cette suite, les limites supérieure et inférieure sont égales à zéro. Soit $v = u + t(w-u)$ avec $t > 0$. La monotonie de A donne

$$\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0$$

et donc

$$t\langle Au_n, u - w\rangle \geq \langle -Au_n, u_n - u\rangle + \langle Av, u_n - u\rangle + t\langle Av, u - w\rangle.$$

Cela implique

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Av, u - w\rangle \quad \text{pour tout } w \in V.$$

L'opérateur A est hémicontinu. Ainsi, en laissant t tendre vers 0, on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Au, u - w\rangle \quad \text{pour tout } w \in V,$$

ainsi A est pseudomonotone.

2. On suppose que $A,\ B : V \to V'$ sont pseudomonotones. Soit (u_n) une suite de V telle que

$$u_n \to u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.40}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0. \tag{3.41}$$

Cela implique

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0. \tag{3.42}$$

Si on suppose par l'absurde qu'il existe une sous-suite, toujours notée u_n, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = a > 0,$$

et par conséquent, $\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq -a$. L'opérateur B étant pseudomonotone, alors

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle \geq \langle Bu, u - w\rangle \quad \text{pour tout } w \in V.$$

En prenant $w = u$, on arrive à la contradiction $a \leq 0$.
Puisque A et B sont pseudomonotones, il résulte de (3.42) que, pour tout $w \in V$,

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Au, u - w\rangle,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle \geq \langle Bu, u - w\rangle,$$

et par conséquent,

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - w\rangle \geq \langle Au + Bu, u - w\rangle \quad \text{pour tout } w \in V,$$

donc $A + B$ est pseudomonotone.

3. On suppose que A est pseudomonotone et B est fortement continu. Afin de démontrer que $A + B$ est pseudomonotone, il suffit de démontrer que B. Soit (u_n) une suite de V telle que

$$u_n \to u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.43}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0. \tag{3.44}$$

De (3.43), et le fait que B est fortement continue, il découle que

$$Bu_n \to Bu \quad \text{fortement dans } V'. \tag{3.45}$$

Par conséquent,

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle \geq \langle Bu, u - w\rangle \quad \text{pour tout } w \in V.$$

Donc B est pseudomonotone.

Application 3.1

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p>1$ et $V=W_0^{1,p}(\Omega)$. On se donne une application $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ continue et monotone au sens suivant :

$$\big[F(\xi)-F(\eta)\big]\cdot(\xi-\eta)\geq 0;\quad \forall \xi,\,\eta\in\mathbb{R}^N. \tag{3.46}$$

On suppose de plus que F satisfait la condition de croissance :

$$|F(\xi)|\leq c\left(1+|\xi|^{p-1}\right),\quad \forall \xi\in\mathbb{R}^N \tag{3.47}$$

où c est une constante positive. On définit l'opérateur $A:\ V\to V'$ par :

$$A(u)=-\operatorname{div}(F(\nabla u)).$$

Montrer que l'opérateur A est pseudomonotone.

SOLUTION.

Tenant compte de la proposition 3.3, il suffit de démontrer que l'opérateur A est borné, monotone, et hémicontinu.

1. A **est borné.** Soient u et φ deux éléments de V. En utilisant l'hypothèse (3.47), on obtient

$$\begin{aligned}\big|\langle Au,\varphi\rangle\big| &= \left|\int_\Omega F(\nabla u).\nabla\varphi\,dx\right|\\ &\leq \int_\Omega |F(\nabla u)|.|\nabla\varphi|\,dx\\ &\leq \int_\Omega c\left(1+|\nabla u|^{p-1}\right)|\nabla\varphi|\,dx\\ &\leq c\|\varphi\|_V + c\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx.\end{aligned}$$

Appliquant à droite l'inégalité de de Hölder, il vient

$$\begin{aligned}\big|\langle Au,\varphi\rangle\big| &\leq c\|\varphi\|_V + c\|u\|_V^{\frac{p}{p'}}\|\varphi\|_V\\ &\leq c(1+\|u\|_V^{\frac{p}{p'}})\|\varphi\|_V.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Au\|_{V'}\leq c(1+\|u\|_V^{\frac{p}{p'}}).$$

Donc l'opérateur A transforme les bornés de V en des bornés de V'. Ce qui signifie que A est borné.

2. A **est monotone.** Soient u et φ deux éléments de V. En utilisant la monotonie de F, on trouve

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle = \int_\Omega (F(\nabla u)-F(\nabla v))\cdot(\nabla u-\nabla v)\,dx \geq 0.$$

3. *A* **est hémicontinu.** Soient u, v et $w \in V$. Il suffit de démontrer que la fonction réelle φ défini par

$$\varphi(t)=\langle A(u+tv),w\rangle = \int_\Omega F(\nabla u+t\nabla v)\cdot(\nabla w)\,dx, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

est continue en point 0. Soit (t_n) une suite réelle convergeant vers 0. On définit la suite (u_n) par

$$u_n = u + t_n v \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Puisque F est continue de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors :

$$F(\nabla u_n)\to F(\nabla u) \quad \text{p.p. } x\in\Omega. \tag{3.48}$$

En utilisant la condition de croissance (3.47) et la bornitude de la suite (t_n), on peut trouver une fonction positive k appartenant à $L^{p'}(\Omega)$ telle que

$$\left|F(\nabla u_n)\right| \leq k(x) \quad \text{p.p. } x\in\Omega. \tag{3.49}$$

En utilisant (3.48) et (3.49), alors par le théorème de convergence dominée, il vient

$$F(\nabla u_n)\cdot\nabla w \to F(\nabla u)\cdot\nabla w \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

THÉORÈME 2.1 (Brezis (1968)[2, 37]): Tout opérateur A pseudomonotone et coercif est surjectif; cela signifie, pour tout $f\in V'$, il y a au moins une solution à l'équation

$$A(u)=f. \tag{3.50}$$

Preuve.

1. **Étape 1 : Approximation de Galerkin.**

Puisque l'espace V est séparable, alors il existe une suite (e_i) de vecteurs linéairement indépendants dans V, telle que

$$V_n := \text{span}\{e_1,\dots,e_n\},$$

et $V=\overline{\bigcup_n V_n}$. On cherche une solution $u_n\in V_n$, qui est de la forme

$$u_n=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

et qui résout le système suivant :

$$\langle A(u_n)-f,e_k\rangle = 0, \quad k\in\{1,\dots,n\}. \tag{3.51}$$

Tout d'abord, on montre que le système (3.51) admet une solution. En effet ce système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$g(c^n) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

où $c := (c_1^n, \ldots, c_n^n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction définie par

$$g_k(c) := \langle A(u_n) - f, e_k \rangle.$$

(a). **Les fontions g_k sont continues.**

Soit (x^i) une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers x. En posant

$$\mathbf{y}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(l)} \mathbf{e}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k,$$

alors $y_i \to y$ dans V. Puisque $A(y_i)$ est borné dans V' et V' étant réflexif, il s'ensuit que $A(y_i) \rightharpoonup \psi$. Ainsi

$$\langle A(\mathbf{y}_i), \mathbf{y_i} - \mathbf{y} \rangle \to 0,$$

et par la pseudomonotonicité de A, on obtient

$$\langle A(y), y - v \rangle \leq \liminf_{i \to \infty} \langle A(y_i), y_i - v \rangle = \langle \psi, y - v \rangle,$$

c'est-à-dire,

$$\langle A(y) - \psi, y - v \rangle \leq 0. \quad \forall v \in V$$

En prenant $v = y - w$, avec $w \in V$, il vient

$$\langle A(y) - \psi, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in V$$

Par conséquent,

$$\langle A(y) - \psi, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V.$$

ce qui prouve bien que $A(y) = \psi$. Ainsi,

$$g_k(x^{(i)}) = \langle A(y_i - f, e_k \rangle \to \langle A(y) - f, e_k \rangle = g_k(x).$$

d'où la fonction g_k est continue.

(b). Le système (3.51) admet une solution $\mathbf{u}_n \in V_n$, telle que $\|\mathbf{u}_n\|_V \leq R_1$, où $R_1 > 0$ est une constante indépendante de $n \in \mathbb{N}$.
Cela découle des mêmes arguments que dans l'étape 1 de la preuve du Théorème de Minty-Browder 4.6, en utilisant la continuité de g et la coercivité de l'opérateur A. On obtient alors une suite de solutions $\{u_n\}_n \subset V$ du système (3.51) telle que $u_n \in V_n$ et $\|u_n\| \leq R_1$ (cela implique également que $\|A(u_n)\|_{V'} \leq M$, pour une certaine constante $M > 0$, puisque A est borné). Ainsi, on a

$$\langle A(u_n) - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_n. \tag{3.52}$$

2. **Étape 2 :** Puisque la suite $\{u_n\}_n$ est bornée, alors il existe une sous-suite $(u_{n_j})_j$ telle que

$$u_{n_j} \to u \quad \text{faiblement dans } V.$$

Par conséquent,

$$\langle A(u_{n_j}), u_{n_j}\rangle = \langle f, u_{n_j}\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

Prenons $v \in V$ et $\varepsilon > 0$. Par la densité de $\bigcup_n V_n$ dans V, il existe $w^\varepsilon \in \bigcup_n V_n$ tel que $\|v - w^\varepsilon\| < \varepsilon$. Nous avons aussi $w^\varepsilon \in \bigcup_n V_n \iff \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $w^\varepsilon \in V_{n_\varepsilon}$. Prenons j suffisamment grand de sorte que $n_j > n_\varepsilon$, ce qui implique que $w^\varepsilon \in V_{n_\varepsilon} \subset V_{n_j}$, ce qui implique, en utilisant (3.52), que

$$\langle A(u_{n_j}) - f, w^\varepsilon\rangle = 0.$$

Par conséquent,

$$\langle A(u_{n_j}) - f, v\rangle = \langle A(u_{n_j}) - f, v - w^\varepsilon\rangle \le (M + \|f\|_{V'})\varepsilon.$$

Prenat $v = u_{n_j} - u$, il s'ensuit que

$$\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle \le (M + \|f\|_{V'})\varepsilon.$$

En faisant ε tendre vers 0, il vient

$$\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle \le 0,$$

puis la pseudomonotonicité de A donne

$$\langle A(u), u - v\rangle \le \liminf_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - v\rangle \quad \forall v \in V_{n_j}.$$

Si on prend $v \in \bigcup_n V_n$, alors pour j suffisamment grand, on a $v \in V_{n_j}$, et donc

$$\langle A(u), u - v\rangle \le \liminf_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - v\rangle = \langle f, u - v\rangle \quad \forall v \in \bigcup_n V_n. \tag{3.53}$$

Maintenant, on veut montrer que (3.53) reste vraie pour tout $v \in V$. Prenant $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, alors $\exists w^\varepsilon \in \bigcup_n V_n$ tel que $\|v - w^\varepsilon\| < \varepsilon$. Par conséquent,

$$\langle A(u) - f, u - v\rangle = \langle A(u) - f, u - w^\varepsilon\rangle + \langle A(u) - f, w^\varepsilon - v\rangle \le (\|A(u)\|_{V'} + \|f\|_{V'})\varepsilon.$$

Faisant ε tendre vers 0, il s'ensuit que

$$\langle A(u) - f, u - v\rangle \le 0 \quad \forall v \in V.$$

En prenant $v = u - w$, avec $w \in V$, il s'ensuit que

$$\langle A(u) - f, w\rangle \le 0 \quad \forall w \in V,$$

ce qui implique que $A(u) = f$.

3.3 Opérateurs du calcul des variations

DÉFINITION 3.2

Soit V un espace de Banach réflexif séparable. Un opérateur $A: V \to V'$ est dite du type "calcul des variations" s'il est borné et si on peut le représenter par

$$A(v) = \mathscr{A}(v,v), \quad \forall v \in V, \tag{3.54}$$

où $\mathscr{A}: V \times V \to V'$ est un opérateur satisfait les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \forall u \in V,\ v \mapsto \mathscr{A}(u,v) \text{ est un opérateur borné et hemi-continu de } V \\ \text{dans } V', \text{ et } \langle \mathscr{A}(u,u) - \mathscr{A}(u,v), u-v \rangle \geq 0. \end{cases} \tag{3.55}$$

$$\begin{cases} \forall v \in V,\ u \mapsto \mathscr{A}(u,v) \text{ est un opérateur borné et hemi-continu de } V \\ \text{dans } V'. \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\begin{cases} \text{si } u_n \to u \text{ faiblement dans } V \text{ et } \langle \mathscr{A}(u_n,u_n) - \mathscr{A}(u_n,u), u_n - u \rangle \to 0 \\ \text{alors, } \forall v \in V,\ \mathscr{A}(u_n,v) \to \mathscr{A}(u,v) \text{ faiblement dans } V'. \end{cases} \tag{3.57}$$

$$\begin{cases} \text{si } u_n \to u \text{ faiblement dans } V \text{ et } \mathscr{A}(u_n,v) \to \psi \text{ faiblement dans } V' \\ \text{alors } \langle \mathscr{A}(u_n,v), u_n \rangle \to \langle \psi, u \rangle. \end{cases} \tag{3.58}$$

PROPOSITION 3.4. Si A est un opérateur du calcul des variations, alors A est pseudo-monotone.

Preuve.

Soit (u_n) une suite d'éléments de V telle que :

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans V}. \\ \limsup_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0. \end{cases} \tag{3.59}$$

1) Montrons d'abord qu'on peut extraire une sous-suite notée encore (u_n) telle que

$$X_n = \langle A(u_n,u_n) - A(u_n,u), u_n - u \rangle \to 0. \tag{3.60}$$

En effet, on peut extraire une sous-suite notée encore (u_n) telle que

$$A(u_n,u) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans } V' \quad (\text{car } A(u_n,u) \text{ est bornée dans } V')$$

et alors d'après la propriété (3.2), on aura $\langle A(u_n,u), u_n \rangle \rightharpoonup \langle \chi, u \rangle$ et donc $\langle A(u_n,u), u_n - u \rangle \to 0$.

Cela, joint à l'hypothèse (3.59), montre que $\limsup X_n \leq 0$ et comme d'après (H2) $X_n \geq 0$, on a (3)
2)on peut alors utiliser(H4), donc

$$\langle A(u_n, v), u_n - u\rangle \to 0, \quad \forall v \in V. \tag{3.61}$$

Comme $X_n \geq 0$, on a par combinaison avec (3.61),

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq \langle A(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0$$

ce qui, joint à (3.59), donne

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \to 0. \tag{3.62}$$

3) Utilisons maintenant le fait que

$$\langle A(u_n) - A(u_n, w), u_n - w\rangle \geq 0, \quad \forall w \in V,$$

avec $w = (1-\theta)u + \theta v$, $\theta \in [0,1[$, il vient

$$\begin{aligned}\theta \langle A(u_n), u - v\rangle \geq &-\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(u_n, w), u_n - u\rangle \\ &+ \theta \langle A(u_n, w), u_n - v\rangle\end{aligned}$$

et en utilisant (3.61), (3.62) et (3) on en déduit

$$\theta \liminf\langle A(u_n), u - v\rangle \geq \theta \liminf\langle A(u_n, w), u - v\rangle = \theta \langle A(u, w), u - v\rangle$$

et donc divisant par θ et utilisant (3.62),

$$\liminf\langle A(u_n), u - v\rangle \geq \langle A(u, (1-\theta)u + \theta v), u - v\rangle$$

et en faisant $\theta \to 0$, on en déduit que A est pseudomonotone

3.4 Applications du théorème de Brezis

3.4.1 Équation elliptique quasi-linéaire

Dans cette section, on établit un résultat d'existence des solutions faible pour un problème elliptique quasi-linéaire en utilisant la théorie des opérateurs pseudomonotones. On considère le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + g(u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.63}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ régulier, $1 < p < N$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les conditions suivantes :

$$|g(s)| \leq c\left(1 + |s|^{p-1}\right), \tag{3.64}$$

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} g(s)s \geq 0. \tag{3.65}$$

On suppose en outre que

$$f \in L^{p'}(\Omega). \tag{3.66}$$

THÉORÈME 4.1: Sous les hypothèses (3.64)–(3.66), le problème (3.63) admet au-moins une solutions faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve.

On pose $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ et on définit les opérateurs suivants :

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \tag{3.67}$$

et

$$\langle Bu, \varphi \rangle = \int_\Omega g(u)\varphi \, dx. \tag{3.68}$$

1. **Opérateur A est borné, monotone, et hémicontinu.**

   (a). **A est borné.** Il suffit de reprendre la démonstration de l'application 2, avec $F(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$.

   (b). **A est strictement monotone.** Voir l'exemple 2.15.

   (c). **A est hémicontinu.** Il suffit de démontrer que A est continue de V fort dans V' fort. Soit (u_n) une suite de V telle que

   $$u_n \to u \quad \text{fortement dans } V. \tag{3.69}$$

   On définit la fonction $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par

   $$F(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

   De (3.69), il découle, pour une sous-suite près, que

   $$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.70}$$

   et

   $$|\nabla u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{p.p } x \in \Omega, \tag{3.71}$$

   avec h une fonction positive appartenant à $L^p(\Omega)$.
   En utilisant (3.70), (3.71), et la continuité de F, on en déduit que

   $$F(\nabla u_n(x)) \to F(\nabla u(x)) \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.72}$$

   et

   $$|F(\nabla u_n(x))| \leq h(x)^{p-1} = \bar{h}(x) \in L^{p'}(\Omega). \tag{3.73}$$

Alors par le théorème de convergence dominée,

$$F(\nabla u_n) \to F(\nabla u) \quad \text{fortement dans } L^{p'}(\Omega)^N. \tag{3.74}$$

Soit $\varphi \in V$. En utilisant la définition de l'opérateur A, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\langle Au_n - Au, \varphi\rangle\right| &= \left|\int_\Omega [F(\nabla u_n) - F(\nabla u)]\nabla\varphi\, dx\right| \\ &\leq \|F(\nabla u_n) - F(\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\varphi\|_V.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Au_n - Au\|_{V'} \leq \|F(\nabla u_n) - F(\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{3.75}$$

De (3.74) et (3.75), on en déduit que

$$Au_n \to Au \quad \text{fortement dans } V'.$$

2. **Opérateur B est fortement (totalement) continu.** Il suffit de reprendre la démonstration de l'exemple 2.5.
3. **opérateur $A+B$ est coercif.** Soit $u \in V$. En utilisant l'hypothèse (3.65), on obtient

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u\, dx + \int_\Omega g(u)u\, dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = \lim_{\|u\|\to\infty} \|\nabla u\|^{p-1} = +\infty. \tag{3.76}$$

3.4.2 Équation elliptique fortement non-linéaire

On étudie l'existence des solutions faibles pour un elliptique fortement non-linéaire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + a_0(x,u,\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.77}$$

où Ω est un ouvert borné de R^n, $1 < p < N$, et $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction vectorielle de Carathéodory satisfaisant pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$, avec $\xi \neq \xi'$,

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta\left[j(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right], \tag{3.78}$$

$$a(x,s,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p, \tag{3.79}$$

$$\left[a(x,s,\xi) - a(x,s,\xi')\right]\cdot\left[\xi - \xi'\right] > 0, \tag{3.80}$$

où $\alpha, \beta > 0$ et j est une fonction positive appartenant à $L^{p'}(\Omega)$. On suppose en outre que $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$|a_0(x,s,\xi)| \leq C\left[k(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right], \tag{3.81}$$

$$a_0(x,s,\xi)s \geq \alpha_0 |s|^p, \tag{3.82}$$

où C, $\alpha_0 > 0$ et k est une fonction positive appartenant à $L^{p'}(\Omega)$.

THÉORÈME 4.2: Si les hypothèses (3.79)–(3.82) sont vraies et $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors le problème (3.77) admet au-moins une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve.

On définit les opérateurs $A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \to V' = W^{-1,p'}(\Omega)$ par :

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi \, dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)\varphi \, dx, \tag{3.83}$$

pour tout $\varphi \in V$.

1. **Opérateur A est pseudomonotone.** Il suffit de démontrer que A est un opérateur de calcul des variations. Pour cela on définit l'opérateur $\mathscr{A} : V \times V \to V'$ par :

$$\langle \mathscr{A}(u,v), \varphi \rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla v)\cdot\nabla\varphi \, dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)\varphi \, dx,$$

pour tout $\varphi \in V$. Il est facile de voir que $A(u) = \mathscr{A}(u,u)$ pour tout $u \in V$. On va montrer que $\mathscr{A}$ est un opérateur de calcul des variations.

(a). **Vérification de l'hypothèse** (3.55)**.**

$\forall u \in V$, $S_1 : v \mapsto S_1(v) = \mathscr{A}(u,v)$ est un opérateur borné, hémicontinu de V dans V', et $\langle \mathscr{A}(u,u) - \mathscr{A}(u,v), u - v \rangle \geq 0$.

I. S_1 **est borné.** Soit $u \in V$ fixé. Pour tout v, $\varphi \in V$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\langle S_1(v), \varphi \rangle\right| &\leq \int_\Omega |A(x,u,\nabla v)||\nabla\varphi| \, dx + \int_\Omega |g(x,u,\nabla u)||\varphi| \, dx \\
&\leq \beta \int_\Omega \left(j(x) + |u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}\right)|\nabla\varphi| \, dx \\
&+ C \int_\Omega \left(k(x) + |u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}\right)|\varphi| \, dx \\
&\leq \beta \left[\|j\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right]\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&+ C \left[\|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right]\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C' \left[\|j\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right]\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|S_1(v)\|_{V'} \leq C'\Big[\|j\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Big].$$

Donc l'opérateur S_1 envoie les bornés de V dans les bornés de V', ce qui signifie que S_1 est borné.

II. S_1 **est hemicontinu.** Il suffit de démonter que S_1 est demicontinu. Soient $u \in V$ fixé et $(v_n)_n$ une suite de V qui converge fortement vers $v \in V$. On veut montrer que $S_1(v_n)$ converge faiblement vers $S_1(v)$ dans V' ; c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in V; \quad \langle \mathscr{A}(u, v_n), \varphi \rangle \to \langle \mathscr{A}(u, v), \varphi \rangle.$$

En fait ça revient exactement à démontrer que

$$a(x, u, \nabla v_n) \to a(x, u, \nabla v) \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Mais cette convergence est vraie car, par le théorème Lebesgue dominée, on a

$$A(x, u, \nabla v_n) \to A(x, u, \nabla v) \quad \text{fortement dans } L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

III. En utilisant l'hypothèse (3.80), il s'ensuit que

$$\langle \mathscr{A}(u, u) - \mathscr{A}(u, v), u - v \rangle = \int_\Omega [A(x, u, \nabla u) - A(x, u, \nabla v)] \cdot \nabla(u - v)\, dx \geq 0$$

(b). **Vérification de l'hypothèse** (3.56)**.**

$\forall v \in V$, $S_2 : u \mapsto S_2(v) = \mathscr{A}(u, v)$ est un opérateur borné et hemicontinu de V dans V'.

I. S_2 **est borné.** La démonstration est exactement la même que celle du S_1.

II. S_2 **est hemicontinu.** Il suffit de démonter que S_2 est demicontinu. Soient $v \in V$ fixé et $(u_n)_n$ une suite de V qui converge fortement vers $u \in V$. On veut montrer que $S_2(u_n)$ converge faiblement vers $S_2(u)$ dans V' ; c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in V; \quad \langle \mathscr{A}(u_n, v), \varphi \rangle \to \langle \mathscr{A}(u, v), \varphi \rangle.$$

En fait ça revient exactement à démontrer que

$$a(x, u_n, \nabla v) \to a(x, u, \nabla v) \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N),$$

et

$$g(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u) \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega).$$

Ceci est vraie car, par le théorème Lebesgue dominée, il découle que

$$a(x,u_n,\nabla v)\to A(x,u,\nabla v)\quad \text{fortement dans } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N),$$

et

$$g(x,u_n,\nabla u_n)\to g(x,u,\nabla u)\quad \text{fortement dans } L^{p'}(\Omega).$$

(c). **Vérification de l'hypothèse** (3.57)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite de V telle que :

$$u_n\to u\quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.84}$$

et

$$\langle \mathscr{A}(u_n,u_n)-\mathscr{A}(u_n,u),u_n-u\rangle\to 0. \tag{3.85}$$

On veut démontrer que

$$\forall v\in V,\ \mathscr{A}(u_n,v)\to\mathscr{A}(u,v)\quad \text{faiblement dans } V', \tag{3.86}$$

cela revient à démontrer que :

$$\forall v\in V,\ a(x,u_n,\nabla v)\to a(x,u_n,\nabla v)\quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N), \tag{3.87}$$

et

$$g(x,u_n,\nabla u_n)\to g(x,u,\nabla u)\quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega). \tag{3.88}$$

Tout d'abord, la convergence (3.85) peut s'écrire :

$$\int_\Omega [A(x,u_n,\nabla u_n)-A(x,u_n,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n-u)\,dx\to 0. \tag{3.89}$$

Soit $v\in V$ fixé. De (3.84), on en déduit qu'il existe une sous suite de (u_n) telle que

$$u_{n'}(x)\to u(x)\quad \text{p.p } x\in\Omega, \tag{3.90}$$

comme la fonction a est continue par rapport à s, alors

$$a(x,u_{n'}(x),\nabla v(x)\to a(x,u(x),\nabla v(x))\quad \text{p.p } x\in\Omega, \tag{3.91}$$

En tenant compte de (3.84) et (3.89), on peut appliquer [30, Lemme 2.2, page 184], pour conclure qu'il existe une sous suite de (u_n) telle que :

$$\nabla u_{n'}(x)\to\nabla u(x)\quad \text{p.p } x\in\Omega. \tag{3.92}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que la fonction g est continue par rapport à s et ξ, il s'ensuit que :

$$g(x,u_{n'}(x),\nabla u_{n'}(x)) \to g(x,u(x),\nabla u(x)) \quad \text{p.p } x\in\Omega, \tag{3.93}$$

comme les suites $a(x,u_{n'},\nabla v)$ et $g(x,u_{n'},\nabla u_{n'})$ sont bornées dans $L^{p'}(\Omega)$, il en résulte d'après [30, Lemme 1.3, page 12], que

$$a(x,u_{n'},\nabla v) \to a(x,u,\nabla v) \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega), \tag{3.94}$$

et

$$g(x,u_{n'},\nabla u_{n'}) \to g(x,u,\nabla u) \quad \text{faiblement dans } L^{p'}(\Omega), \tag{3.95}$$

et comme la limite est indépendante de toute sous suite extraite, on en déduit les résultats (3.87) et (3.88).

(d). **Vérification de l'hypothèse** (3.58)**.** Soit (u_n) une suite de V telle que

$$u_n \to u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{3.96}$$

et

$$\langle \mathscr{A}(u_n,v),\varphi\rangle = \int_\Omega a(x,u_n,\nabla v)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)\varphi\,dx \to \langle\psi,\varphi\rangle, \tag{3.97}$$

pour tout $\varphi\in V$. On veut démontrer que

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla v)\cdot\nabla u_n\,dx + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)u_n\,dx \to \langle\psi,u\rangle. \tag{3.98}$$

En utilisant (3.96), il est facile de démontrer que

$$a(x,u_n,\nabla v) \to a(x,u_n,\nabla v) \quad \text{fortement dans } L^{p'}(\Omega), \tag{3.99}$$

et par conséquent

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla v)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx \to 0. \tag{3.100}$$

De (3.96), on en déduit que la suite $g(x,u_n,\nabla u_n)$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$, et en conséquence, on a :

$$\left|\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)(u_n-u)\,dx\right| \le c\|u_n-u\|_{L^p(\Omega)},$$

et comme l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte, on a :

$$\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)(u_n-u)\,dx \to 0. \tag{3.101}$$

En utilisant (3.97), (3.100) et (3.101), on peut passer à la limite dans

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla v)\cdot\nabla u_n\,dx+\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)u_n\,dx=\langle\mathscr{A}(u_n,v),u\rangle$$
$$+\int_\Omega a(x,u_n,\nabla v)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx$$
$$+\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)(u_n-u)\,dx,$$

pour obtenir (3.98).

2. **Opérateur A est coercif.** En utilisant (3.79) et (3.82), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\langle A(u),u\rangle&=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx+\int_\Omega g(x,u,\nabla u)\,u\,dx\\&\geq\alpha\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\alpha_0\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\\&\geq\alpha\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}}\geq\alpha\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

D'où $\dfrac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{w_0^{1,p}(\Omega)}}\longrightarrow+\infty$ si $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow+\infty$,

ce qui prouve bien que A est coercif.

Puisque l'opérateur A est pseudomonotone et coercif et $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors par le théorème 2.1, le problème (3.77) admet au moins une solution faible $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, and J. J. Fournier, *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.

[2] B. J. Alexander, *Monotone and pseudomonotone operators with applications to variational problems* (Thesis 2015), Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa.

[3] V. I. Bogachev, and M. A. S. Ruas, *Measure theory*. Vol. 1. Berlin : springer, 2007.

[4] H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York : Springer, 2011.

[5] H. Brézis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*. Annales de l'institut Fourier. Vol. 18. No. 1. 1968.

[6] F. E. Browder, *Variational boundary value problems for quasilinear elliptic equations of arbitrary order*. Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963) p. 31-37.

[7] F. E. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 862-874.

[8] F. Browder, *The solvability of non-linear functional equations*. (1963) : 557-566.

[9] F. E. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*. II, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 530-550.

[10] F. E. Browder, *Nonlinear elliptic functional equations in nonreflexive Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 89-95.

[11] F. E. Browder, *Problèmes non-linéaires*, University of Montreal Press, 1966.

[12] F. E. Browder, *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces*. Proceedings of the National Academy of Sciences 56.2 (1966) : 419-425.

[13] K. C. Chang, *Methods in nonlinear analysis*. Vol. 10. Berlin : Springer, 2005.

[14] Clason, Christian. Introduction to functional analysis. Springer Nature, 2020.

[15] P. G. Ciarlet, *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.

[16] L. C. Evans, and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Chapman and Hall/CRC, 2015.

[17] L. Gasinski, and N. S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[18] D. Gilbarg, and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.

[19] M. Golomb, Michael, *Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen*. Mathematische Zeitschrift 39.1 (1935) : 45-75.

[20] P. Hartman and G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*, Acta Math. 115 (1966), 271-330.

[21] J. Jost, *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2013.

[22] R. I. Kachurovskii, *Monotone operators and convex functionals*. Uspekhi Matematicheskikh Nauk 15.4 (1960) : 213-215.

[23] O. Kavian : Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, vol. 13, 1993.

[24] J.Kinnunen, *Sobolev Spaces*.Déparetement of mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[25] M. T. Lacroix-Sonrier, *Distributions, espaces de Sobolev : applications*. Ellipses, 1998.

[26] P. D. Lax , and A. N. Milgram, *Ix. parabolic equations*. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations.(AM-33) 33 (2016) : 167.

[27] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[28] J. Leray, and J. L. Lions. *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Séminaire Jean Leray 1 (1964) : 1-19.

[29] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[30] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. 1969.

[31] S. Migorski, A. Ochal, and M. Sofonea, *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems*. Vol. 26. Springer Science and Business Media, 2012.

[32] G. J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*. (1962) : 341-346.

[33] G. J. Minty, *On a "monotonicity" method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1038-1041.

[34] N.S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*.Springer Monographs in Mathematics.

[35] H.K. Pathak, *An introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*. Springer, 2018.

[36] P. A. Raviart, and J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Vol. 6. Elsevier Masson, 1983.

[37] T. Roubicek, *Nonlinear partial differential equations with applications*. Vol. 153. Springer Science and Business Media, 2013.

[38] H. Royden, and P. M. Fitzpatrick, *Real analysis*. China Machine Press, 2010.

[39] W. Rudin, *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[40] M. Ruzicka, and H. Eberlein; *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin 10 (2004) : 3-540.

[41] S. Salsa, *Partial differential equations in action : from modelling to theory*. Vol. 99. Springer, 2016.

[42] R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*. Vol. 49. American Mathematical Soc., 2013.

[43] M. M. Vainberg, New theorems for non-linear operators and equations, Uch. zap. Moskov. obi. ped. inst. (1959), 131-145.

[44] M. M. Vainberg, *On some new principles in the theory of nonlinear equations*. Uspekhi Mat. Nauk , 15 :1(91) (1960), 243–244.

[45] E. H. Zarantonello, *Solving functional equations by contractive averaging*. Tech. Rep. no. 160, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison, 1960.

[46] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science and Business Media, 2013.