جامعة يحيى فارس بالمدية

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة جامعية في:

الطرق الكمية المساعدة على اتخاذ القرار

دروس ومسائل

إعداد: أ. اسليماني محمد

هذه المطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ماستر، قسم علوم المالية والمحاسبة، تخصص مالية المؤسسة.

2022-2021

الفهرس

العنوان	رقم الصفحة
مقدمة	1
الفصل الأول: البرمجة الخطية	
تمهيـــــــــد	3
1- النمذجة الاقتصادية وصياغة المشكلة	3
1-1- النمذجة الاقتصادية	3
1-2- صياغة وتكوين النموذج الخطي	4
1-3- أشكال البرنامج الخطي	8
1-3-1- الشكل الكانوني أو الشكل العام	8
1-3-2- الشكل القياسي أو الشكل المعياري	9
2- حل مسائل البرمجة الخطية	10
2-1- حل مسائل البرمجة الخطية باستعمال الطريقة البيانية	11
2-2- حل مسائل البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس	14
2-3- استخدام المتغيرات الاصطناعية في حل مسائل البرمجة الخطية	19
3- الحالات الخاصة في حل مسائل البرمجة الخطية	25
3-1- حالة مجموعة خالية من الحلول	26
3-2- حالة وجود حل أمثل غير محدود (لانهائي)	27
3-3- حالة وجود حلول متعددة	28
3-4- حالة عدم الانتظام	30
4- مسألة الثنائية والتحليل الاقتصادي للنموذج الثنائي	32
4-1- مسألة الثنائية في البرمجة الخطية	32
4-2- التفسير الاقتصادي للنموذج الثنائي	37
5- تمارين	39

6- هوامش الفصل الأول	49
الفصل الثاني: مسألة النقل	
تمهيـــــــــد	51
1- مدخل إلى مسألة النقل	51
2- طرق إيجاد الحل القاعدي (الابتدائي) لمسألة النقل	54
2-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية	54
2-2- طريقة التكاليف الصغرى	59
2-3- طريقة الفروقات الكبرى	63
3- طرق إيجاد الحل الأمثل (النهائي) لمسألة النقل	68
3-1- طريقة التجريب	69
3-2- طريقة التحويل	75
4- الحالات الخاصة لمسألة النقل	83
4-1- حالة العرض أكبر من الطلب	83
4-2- حالة العرض أقل من الطلب	87
5- تمارين	89
6- هوامش الفصل الثاني	99
المراجع	**101**

مقدمة

مقـــدمـــــة

تحظى عملية اتخاذ القرارات الإدارية من خلال استخدام الطرق والأساليب الكمية في الوقت الحاضر باهتمام كثير من قبل الدارسين والممارسين والمهتمين بالإدارة، فالدارسون للعلوم الإدارية يجدون في هذا المجال أسلوبا حديثا ومتطورا في تحليل البيانات تحليلا كميا يساير حركة الإدارة في الاتجاه العلمي، أما الممارسون للأعمال الإدارية فان اهتمامهم بالأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية أصبح يتزايد باستمرار، وذلك لرغبتهم في الاستفادة من هذه العلوم المتطورة والمساعدة على اتخاذ القرار، نظرا لما تعطيه من إمكانيات وقدرات اكبر في مجال التحليل والانجاز حيث لا يمكن التغاضي والاستغناء عنها في وقت أصبحت فيه الحاجة ماسة إلى هذه الإمكانيات والقدرات، وعلى الرغم من أن هذه الأساليب الكمية المتطورة لا تصف في كثير من الأحيان العوامل السلوكية المتعددة على وجه الدقة إلا أنها تضع قواعد وإجراءات كثيرة يمكن أن تفيد في وضع الحلول المثلى خاصة في المشروعات الكبيرة والتي تتميز عملياتها الإدارية في وقتنا الحاضر بالتعقد والتشابك إلى الحد الذي يجعل من اتخاذ القرارات مشكلة تتطلب الكثير من البيانات النوعية والكمية بغية الوصول إلى الحلول المثلى.

لذلك فان هذه المطبوعة والتي هي عبارة عن محاضرات في الطرق الكمية المساعدة على اتخاذ القرار ستتناول بالدراسة من خلال فصلين مايلي:

الفصل الأول: حول البرمجة الخطية ويتناول النمذجة الاقتصادية وصياغة وتكوين البرنامج الخطي، استعمال الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية، استعمال طريقة السمبلكس في حل مسائل البرمجة الخطية، بعدها يتعرض إلى الحالات الخاصة في البرمجة لخطية ثم مسألة الثنائية والتحليل الاقتصادي لمتغيرات النموذج الثنائي ويليها بعض التمارين المتعلقة بما ورد في الفصل.

الفصل الثاني: يعالج مشكلة النقل، طرق إيجاد الحل القاعدي (الابتدائي)، طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الصغرى وطريقة الفروقات الكبرى، ثم طرق إيجاد الحل النهائي(الأمثل)، طريقة التجريب وطريقة التحويل، ثم يعالج الحالات الخاصة لمسألة النقل ويليها بعض التمارين الخاصة بما ورد في الفصل كذلك.

الفصل الأول

تمهيد:

تعتبر البرمجة الخطية تقنية رياضية تبحث عن حل لمشكلة معينة بحيث تساهم في إيجاد الحل الأمثل وذلك عن طريق تخصيص الموارد المحدودة المستعملة من أجل استخدامات مختلفة مع الأخذ بعين الاعتبار الالتزامات أو القيود التي قد تكون عدد ساعات العمل، الكمية الواجب إنتاجها أو توزيعها من منتج معين، كمية المواد الأولية المتوفرة وغيرها، ومن بين المشاكل التي تعالجها البرمجة الخطية هي تحديد تشكيل المنتجات، جدولة الإنتاج وتخطيط المخزون السلعي، تنظيم مسيرة خطوط تجميع السلع والمنتجات، إعداد جداول تشغيل الآلات، تحليل مشكلات المرور، مشكلات النقل، مشكلات القطاع الزراعي، مشكلات القطاع العسكري، تقييم الوظائف وغيرها.

1- النمذجة الاقتصادية وصياغة المشكلة

1-1- النمذجة الاقتصادية

تعد النمذجة الاقتصادية وبناء النموذج محور اهتمام الطرق والأساليب الكمية حيث توفر إطارا عاما شاملا لحل مشكلات اتخاذ القرار، وفي هذا الإطار يتم التركيز على نقطتين أساسيتين لنمذجة أي مشكلة وهما الهدف الذي يتم العمل على حله إلى جانب القيود المفروضة على هذه المشكلة، وكلاهما يجب أن يعبر عنهما ويمثلا بدلالة متغيرات القرار.

والنموذج هو تمثيل لمكونات المشكلة والعوامل المؤثرة والبيئة المحيطة وأسلوب الربط بين المتغيرات، ويعرض النموذج بعض الاستفسارات التي تحيط بالمشكلة وتستخدم النماذج من أجل التنبؤ والسيطرة على المشكلة.[1]

يستند التحليل المنطقي لجميع المشكلات التي تواجه متخذ القرار على النماذج ومفهومها وشكل بنائها، ولبناء النموذج يجب تحديد الهدف التي تسعى الإدارة إلى حلها، ويمكن إبراز ذلك بشكل تخطيطي أو بناء نموذج مادي على شكل هيكل مثلا أو خليط بين النوعين، فالمخطط البياني الذي يمثل عملية متكاملة لمنتج معين ما هو نموذج تخطيطي يمثل عمليات مختلفة مثل التخزين والنقل وغيرها، ونموذج سيارة أو آلة مصغرة الذي يوضع في داخل جهاز الكشف عن مدى تحمل السيارة وكفاءتها ما هو إلا نموذج مادي، كما أن معادلة

مستقيم مثلا أو أي نوع من المعادلات الخطية أو غير الخطية ما هي إلا نموذج رياضي يعبر عن ظاهرة أو مشكلة ما.

ويتم بناء وصياغة هذه النماذج لكي تعمل على نحو مثالي ولكنها لا تمثل الحقيقة كلها بل جزءا منها، وتصمم النماذج لمساعدة متخذ القرار على فهم الحقيقة والتنبؤ بالمشكلة في المستقبل، وتساعد النماذج كذلك متخذي القرار نظرا لسهولة استخدامها وكلفتها وقصر الوقت الذي تتطلبه دراستها واستخدامها، وتساعد كذلك في الكشف عن المتغيرات التي يمكن أن تؤثر في الظاهرة المدروسة. (2)

1-2- صياغة وتكوين النموذج الخطي

يتكون مصطلح البرمجة الخطية من كلمتين، البرمجة Programming وتعني استخدام أسلوب منطقي وعلمي في تحليل المشكلات وعلاجها، أما الخطية Linear فتعني وجود علاقة ثابتة بين متغيرات أساسية داخلة في تركيب النموذج، وتعتبر مرحلة صياغة وتكوين النموذج الخطي (أو صياغة المشكلة) من أهم وأصعب المراحل وفيها يتم تحويل مشكلة اقتصادية ما إلى نموذج رياضي يمكن حله باستعمال البرمجة الخطية.

هناك العديد من المواقف فيها الحاجة إلى تخصيص كميات من الموارد المحدودة على الاستخدامات البديلة لهذه الموارد، ويهتم أسلوب البرمجة الخطية بعملية توزيع هذه الموارد على تلك الاستخدامات بطريقة مثالية، أي وفقا لمعيار أفضلية معين، وتتنوع المواقف التي تنشا فيها الحاجة إلى استخدام البرمجة الخطية، فتستخدم في تخصيص أو توزيع وسائل الإنتاج على المنتجات، توزيع وقود الطائرات على الطلعات الجوية، تخطيط الاستثمارات، برمجة نقل المنتجات، جدولة الإنتاج، حل نماذج المباريات إلى جانب العديد من المشكلات التي تساهم البرمجة الخطية في إيجاد حلول لها. (3)

وللبرمجة الخطية سمات وشروط أساسية حتى يمكن وصفها ووضعها في شكل نموذج رياضي وهي:

- أن يكون هناك هدف يتم العمل على تحقيقه كإيجاد أقصى ربح ممكن أو تدنية التكاليف أو تقليلها، ويعبر عن هذا الهدف بدالة تسمى دالة الهدف أو الدالة الاقتصادية.
- أن تكون هناك موارد محدودة ولها استخدامات متعددة ويعبر عن كيفية وطريقة استخدامها بالقيود الفنية. (4)

فإذا افترضنا أن لدينا (n) متغير وعبرنا عن العلاقات بين المتغيرات والموارد المتوفرة أو شروط الإنتاج مثلا بمعادلات أو متباينات عددها (m) فان الشكل العام لهذه القيود الفنية يكون كالتالي:

$$a_{1j}.x_1 + a_{2j}.x_2 + a_{3j}.x_3 + \dots + a_{nj}.x_n \leq = \geq b_i$$

حيث تمثل b_i الكمية المتوفرة من المورد أو المادة الأولية، أما x_i فهي متغيرات النموذج والتي نسعى للبحث عن قيمها وتمثل الكميات المنتجة مثلا من سلع معينة.

وتمثل a_{1j} الكمية المستخدمة من المورد b_i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول، وتمثل a_{2j} الكمية المستخدمة من المورد b_i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني وهكذا.

وهناك قيود تسمى قيود عدم السالبية والتي تعني عدم السماح بوجود قيم سالبة في النموذج الخطي ويعبر عنها كالتالي: $x_i \geq 0$.

وأخيرا هناك الدالة الاقتصادية والتي تسمى أيضا دالة الهدف وتكون إما دالة تعظيم أو دالة تدنية ونعبر عنها كما يلي: $Z = c_1.x_1 + c_2.x_2 + c_3.x_3 + \dots + c_n.x_n$ (Max أو Min)

حيث تمثل Z قيمة الربح مثلا إذا كانت الدالة هي دالة تعظيم، أما في حالة تدنية فقد تكون Z عبارة عن تكلفة مثلا، وتمثل قيم cj سعر بيع الوحدة الواحدة أو هامش الربح إذا كانت الدالة الاقتصادية هي دالة تعظيم وتمثل في حالة التدنية تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة. (5)

ويكون البرنامج الخطي الكامل للبرمجة الخطية كما يلي:

$(max \&min)\ Z = \sum c_j x_j$ تمثل دالة الهدف

$\sum a_{ij} . x_j \quad \leq = \geq \quad bi$ تمثل القيود الفنية

$x_j \geq 0$ تمثل قيد عدم السلبية

مثال 01:

تنتج شركة للمواد الكيميائية نوعين من المنتجات تباع كمواد خام لشركات تصنيع صابون الحمام، مطهرات ومنتجات صابون أخرى، مستندة في ذلك على مستويات المخزون الحالية والطلب المحتمل القادم،

وقد حددت إدارة الشركة أن مجموع الإنتاج الكلي للمنتجين (الأول والثاني) يجب أن يكون على الأقل 350 لتر في الشهر، يجب أيضا أن تتحقق طلبية زبون وهي 125 لتر في الشهر من المنتج الأول، ويتطلب المنتج الأول ساعتين من وقت المعالجة لكل لتر كما يتطلب المنتج الثاني ساعة واحدة من وقت المعالجة لكل لتر، إن عدد ساعات العمل المتاحة في الشهر هي 600 ساعة من زمن المعالجة وتكلفة إنتاج كل لتر من المنتج الثاني هي 1 ون و3 ون لكل لتر من المنتج الثاني، والمطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الشركة الذي يسمح لها بتحقيق المتطلبات المحددة بأقل تكلفة.

الحل:

إذا افترضنا أن x_1 هي الكمية (اللترات) المنتجة من المنتج الأول، وأن x_2 هي الكمية (اللترات) المنتجة من المنتج الثاني، فإن القيد الفني الخاص بشروط تلبية طلبية الزبون هو: $x_1 \geq 125$ ، أما القيد الفني الخاص بالكمية الكلية الواجب إنتاجها فيكون كم يلي: $x_1+x_2 \geq 350$، أما القيد الفني الخاص بشروط استعمال قوة العمل فيكون كالتالي: $2x_1+x_2 \leq 600$، وبالنسبة لدالة الهدف فهي دالة تدنية تكاليف الإنتاج وتكون كالتالي: $Min\ Z = 2x_1+3x_2$.

ويكون البرنامج الخطي الكامل كمايلي:

$$\textbf{Min } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 125 \\ x_1 + x_2 \geq 350 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

مثال 02:

ينتج مصنع متخصص في صناعة المواد الغذائية نوعين من المنتجات بسكويت وشوكولاته حيث يحتاج الأول 4 ساعات في قسم التصنيع و2 ساعة في قسم التغليف، ويحتاج الثاني 5 ساعات في قسم التصنيع و3 ساعات في قسم التغليف، ويعمل في المصنع عمال بواقع 8 ساعات يوميا في قسم التصنيع، و3 ساعات يوميا بقسم التغليف، ويحقق النوع الأول ربحا بمقدار 10 ون للوحدة الواحدة ويحقق الثاني 30 ون للوحدة الواحدة،، والمطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذا المصنع الذي يسمح له بتحقيق أعظم ربح كلي ممكن.

الحل:

بافتراض أن x_1 هي الكمية المنتجة من المنتج الأول (بسكويت)، وأن x_2 هي الكمية المنتجة من المنتج الثاني (شوكولاته)، فإن البرنامج الخطي الكامل الخاص بنشاط هذا المصنع يكون كالتالي:

$$\textbf{Max } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

مثال 03:

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات A_1 و A_2 من أجل إنتاج هذين المنتجين تستعمل هذه الشركة نوعين من المواد B_1 و B_2، كيفية استهلاك هاتين المادتين من اجل إنتاج المنتجين والكميات المتاحة منها في اليوم معطاة في الجدول التالي:

	كميات المواد اللازمة لإنتاج واحد طن من المنتجات		الكميات المتاحة من المواد في اليوم
	A_1	A_2	
المادة B_1 طن	1	2	6
المادة B_2 طن	2	1	8

تبين من دراسة السوق أن مقدار الطلب اليومي على المنتج A_1 لا يمكن أن يتعدى مقدار الطلب اليومي على المنتج A_2 بأكثر من 1 طن وان مقدار الطلب على المنتج A_1 لا يمكن أن يتعدى 2 طن في اليوم، ثمن بيع 1 طن من المنتجين A_1 و A_2 هو على التوالي 3000 و 2000 ون، والمطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الشركة الذي يسمح لها بتعظيم مبيعاتها.

الحل:

بافتراض أن $\mathbf{x_1}$ هي الكمية المنتجة من A_1 ، وأن $\mathbf{x_2}$ هي الكمية المنتجة من A_2 ، فإن البرنامج الخطي الكامل الخاص بنشاط هذه الشركة يكون كالتالي:

$$\mathbf{Max\ Z = 3000x_1 + 2000x_2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2x_2 \leq 6} \\ \mathbf{2x_1 + x_2 \leq 8} \\ \mathbf{x_1 - x_2 \leq 1} \\ \mathbf{x_2 \leq 2} \\ \mathbf{x_j \geq 0} \end{cases}$$

1-3- أشكال البرنامج الخطي

1-3-1- الشكل الكانوني أو الشكل العام

الشكل الكانوني هو عبارة عن برنامج خطي يتكون من دالة الهدف حيث تكون إما دالة تعظيم أو دالة تدنية وتكون القيود الفنية عبارة عن متراجحات ومعادلات بمعنى أن النموذج يحتوي على المتباينات من شكل أكبر أو يساوي وأخرى أقل أو يساوي وكذلك معادلات على شكل تساوي أي أن النموذج مختلط مثل النماذج التالية:

$$\mathbf{Min\ Z = 10x_1 + 20x_2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 9000} \\ \mathbf{0.3x_1 + 0.1\ x_2 = 6000} \\ \mathbf{0.3x_1 + 0.6x_2 \geq 18000} \\ \mathbf{0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 14000} \\ \mathbf{x_j \geq 0} \end{cases}$$

$$\mathbf{Max\ Z = 5\ x_1 + 2\ x_2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2 \geq 1} \\ \mathbf{-2\ x_1 + x_2 \leq 2} \\ \mathbf{x_1 + x_2 = 4} \\ \mathbf{x_j \geq 0} \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = 15\,x_1 + 5\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

1-3-2- الشكل القياسي أو المعياري

أما الشكل القياسي أو المعياري فهو عبارة عن برنامج خطي يتكون من دالة الهدف حيث تكون إما دالة تعظيم أو دالة تدنية وتكون القيود الفنية عبارة عن معادلات من الشكل يساوي فقط كذلك فإن جميع الثوابت التي تقع على الطرف الأيمن من القيود الفنية تكون موجبة كما أن كل المتغيرات يجب أن تكون موجبة[6] مثل النماذج التالية:

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.1x_2 = 9000 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 = 6000 \\ 0.3x_1 + 0.6x_2 = 18000 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 = 14000 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 5\,x_1 + 2\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = 15\,x_1 + 5\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

يمكن لأي برنامج خطي في شكله الكانوني أو العام تحويله إلى برنامج خطي في شكله القياسي أو المعياري وذلك على النحو التالي:

- المتباينة أو المتراجحة التي تكون على شكل أقل أو تساوي مثل $9x_1 + 2x_2 \leq 86$ يمكن أن تحول إلى معادلة بإضافة متغير نسميه متغير الفرق ونرمز له بـ S_1 حيث أن قيمة هذا المتغير موجبة أي أكبر من الصفر، حيث تصبح معادلة من الشكل $9x_1 + 2x_2 + S_1 = 86$ فإذا كانت $9x_1 + 2x_2 = 86$ فإن متغير الفرق يساوي صفر وإذا كانت $9x_1 + 2x_2 < 86$ فإن متغير الفرق هو قيمة موجبة تساوي الفرق بين 86 و $9x_1 + 2x_2$.
- المتباينة أو المتراجحة التي تكون على شكل أكبر أو تساوي مثل $3x_1 + 8x_2 \geq 55$ يمكن أن تحول إلى معادلة بطرح متغير الفرق S_2 مثلا حيث أن قيمة هذا المتغير موجبة أي أكبر من الصفر، حيث تصبح معادلة من الشكل $3x_1 + 8x_2 - S_1 = 55$ فإذا كانت $3x_1 + 8x_2 = 55$ فإن متغير الفرق يساوي صفر وإذا كانت $3x_1 + 8x_2 > 55$ فإن متغير الفرق هو قيمة موجبة تساوي الفرق بين $3x_1 + 8x_2$ و 55 .[7]

2- حل مسائل البرمجة الخطية

بعد تكوين وصياغة البرنامج الخطي تأتي مرحلة حل هذا البرنامج، حيث يمكن حل مسائل البرمجة الخطية باستعمال الطريقة البيانية كما يمكن حلها باستعمال طريقة السمبلكس.

2-1- حل مسائل البرمجة الخطية باستعمال الطريقة البيانية

تعتبر أبسط الطرق لحل مشكلة البرمجة الخطية هي طريقة الرسم أو الطريقة البيانية والتي تستعمل في حل المسائل التي تحتوي على متغيرين فقط.

إن خطوات حل البرنامج الخطي باستعمال هذه الطريقة تتلخص في الخطوات التالية:

- رسم المستقيمات التي تمثل المعادلات أو المتباينات والتي تعبر عن القيود الفنية في معلم متعامد.
- تحديد المنطقة التي يتحقق فيها كل قيد فني على حدا، أي تحديد المجال الهندسي الذي يتحقق فيه القيد الفني.

- تحديد المنطقة المشتركة بين القيود الفنية أي المنطقة التي تتحقق فيها كل القيود الفنية بما فيها قيود عدم السالبية وعادة ما تكون هذه المنطقة محصورة بين عدة نقاط.
- من أجل تحديد أبعد نقطة تعظم دالة الهدف أو أدنى نقطة تجعل دالة الهدف عند قيمتها الدنيا يمكن استعمال طريقتين:

الأولى: نقوم بتعويض إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف ونختار القيمة الكبرى في حالة التعظيم، إما في حالة التدنية فنحتار أقل قيمة. [8]

الثانية: نقوم برسم شعاع ينطلق من المبدأ إلى النقطة التي إحداثياتها عبارة عن معاملات متغيري دالة الهدف.

-نقوم برسم مستقيم يعامد هذا الشعاع ويمر بالمبدأ (0.0) حيث يمثل هذا المستقيم دالة الهدف عندما تكون معدومة.

-نقوم بإزاحة هذا المستقيم بشكل عمودي على الشعاع، فإذا كان شرط الأمثلية لدالة الهدف هو تعظيم فان الحل الأمثل هو الذي يحقق القيود الفنية وفي نفس الوقت يعطي أعظم قيمة لـ **Z** أي ابعد نقطة عن المبدأ وتنتمي إلى منطقة الحلول الممكنة وتلامس المستقيم الذي يعامد الشعاع، أما في حالة دالة الهدف دالة تدنية فان الحل الأمثل هو الذي يحقق القيود الفنية وفي نفس الوقت يعطي اقل أو أدنى قيمة لـ **Z** أي أقرب نقطة من المبدأ وتنتمي إلى منطقة الحلول الممكنة وتلامس المستقيم الذي يعامد الشعاع.

-ثم بتعويض قيم (إحداثيات) تلك النقطة في دالة الهدف نجد قيمة **Z** وهي القيمة المثلى لدالة الهدف.

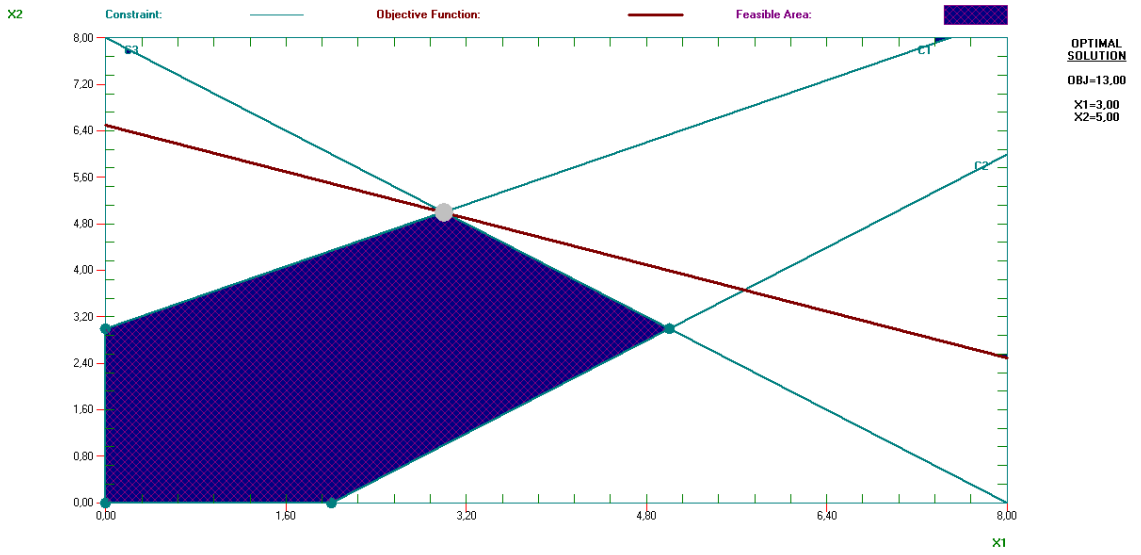
مثال01:

حل النموذج الخطي الابتدائي التالي باستعمال الطريقة البيانية.

$$\textbf{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل:



بالنسبة لهذا النموذج فان منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة، في داخل منطقة الحلول الممكنة النقطة التي تعطي أعظم قيمة لدالة الهدف هي ابعد نقطة تلامس المستقيم الذي يمثل دالة الهدف وهي النقطة التي إحداثياتها ($x_1 = 3$) و($x_2=5$) ، وبتعويض هذه القيم في دالة الهدف نحصل على أعظم قيمة لدالة الهدف في حدود القيود الفنية المعطاة وهي: $Z\ max = 3+2(5) = 13$.

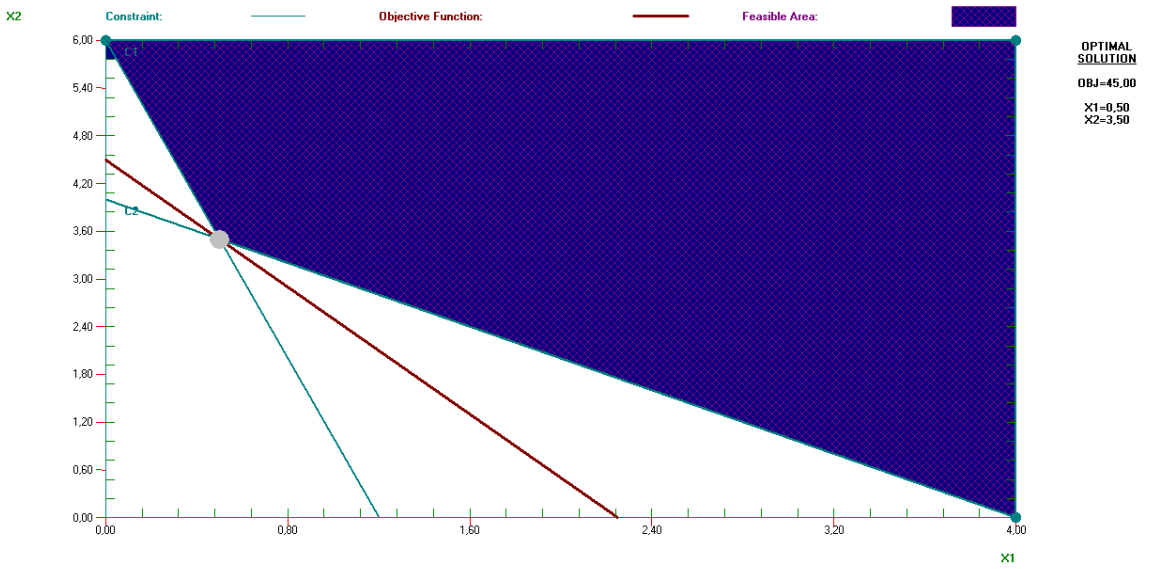
مثال02:

حل النموذج الخطي الابتدائي التالي باستعمال الطريقة البيانية.

$$\textbf{Min } Z = 20\,x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5\,x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 \geq 8 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل:



بالنسبة لهذا النموذج فان منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة المفتوحة، في منطقة الحلول الممكنة النقطة التي تعطي أدنى قيمة لدالة الهدف هي أقرب نقطة تلامس المستقيم الذي يمثل دالة الهدف وهي النقطة التي إحداثياتها ($x_1 = 0.5$) و($x_2=1.5$) ، وبتعويض هذه القيم في دالة الهدف نحصل على أدنى قيمة لدالة الهدف في حدود القيود الفنية المعطاة وهي: $Z\ min = 45$.

2-2- حل مسائل البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس:

تطرقنا فيما سبق إلى كيفية بناء وصياغة نماذج البرمجة الخطية بالإضافة إلى كيفية حل تلك النماذج باستخدام الطريقة البيانية ولكن في معظم الأحيان لا تتضمن مسائل البرمجة الخطية متغيرين فقط، فقد تكون ثلاثة أو أربعة أو أكثر، لذلك تظهر الحاجة إلى طريقة لحل مسائل البرمجة الخطية التي تتضمن أكثر من متغيرين، وتعتبر طريقة السمبلكس الطريقة المثلى و الكفؤة لحل هذا النوع من المسائل[9]، سنتطرق في البداية لحل مسائل البرمجة لخطية باستعمال طريقة السمبلكس للنماذج من الشكل:

$$(\max \&\min)\ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} \cdot x_j \leq bi \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

أي النماذج التي تكون قيودها الفنية في شكل أصغر أو تساوي، ومن أجل حل أي نموذج من الشكل السابق نتبع الخطوات التالية:

- نحول القيود الفنية من الشكل (≤) أقل أو يساوي إلى شكل معادلات وذلك بإضافة متغير يسمى متغير الفرق ونرمز له بـ (Si) إلى الطرف الأيسر، فتصبح المتراجحة أو المتباينة من الشكل: $\sum \mathbf{aij \cdot xj + Si = 0}$ ثم نضيف متغيرات الفرق إلى دالة الهدف ولكن بمعاملات صفر، فتصبح : $\sum \mathbf{cj\ xj + 0S_1 + + 0S_2 + 0S_3 + \ldots\ldots + 0S_n}$.
- ننقل هذه المعطيات إلى جدول نسميه جدول الحل الابتدائي والذي يكون على الشكل التالي:

	المتغيرات الأساسية	متغيرات الفرق	الحل
متغيرات دالة الهدف	$x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$	$S_1\ S_2\ S_3 \ldots\ldots\ldots\ldots S_n$	
معاملات دالة الهدف	-C1 –C2 –C3 ……-Cn	0 0 0 ……0	
متغيرات الحل الابتدائي Si	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n}$	1 0 0 ……0	b1
	$a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2n}$	0 1 0 ……0	b2
	……	……	…
	$a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \ldots\ldots\ldots a_{mn}$	0 0 0 ……1	bm

- نضرب معاملات دالة الهدف في (1−)، ثم نبدأ في حل النموذج بالبحث عن الحل الابتدائي ثم الحل النهائي.
- يعبر الحل الابتدائي عن حالة اللانشاط والتي تعني أن قيم xi تساوي صفر، وفي هذه الحالة كل متغيرات دالة الهدف تساوي صفر وبالتالي فان دالة الهدف تساوي صفر.
- متغيرات الفرق في جدول الحل الابتدائي تساوي قيم الطرف الأيمن وهي كمية الموارد المتاحة (bi)، وهذا يعني أن $S_1 = b_1$ ، $S_2 = b_2$ ،……، $S_m = b_m$.
- يكون الحل الابتدائي مقبولا إذا كانت دالة الهدف تساوي صفر، وتكون معاملات متغيرات الفرق في القيود الفنية تشكل مصفوفة الوحدة (مصفوفة أحادية).

تأتي الآن مرحلة البحث عن الحل الأمثل حيث إذا كان الحل الابتدائي مقبولا فنعتمد عليه أو ننطلق منه في البحث عن حل أمثل و نتبع في ذلك الخطوات التالية:

- نبدأ بإدخال المتغيرات الأساسية واحدا تلو الآخر إلى قاعدة الحل، حيث أن معيار الإدخال هو أقل قيمة سالبة في حالة دالة الهدف دالة تعظيم، أما في حالة دالة الهدف دالة تدنية فان المعيار هو أكبر قيمة موجبة. (10)
- عند إدخال أي متغير إلى قاعدة الحل يجب أن يخرج متغير من متغيرات الحل الابتدائي، ولمعرفة أي المتغيرات الابتدائية يخرج من قاعدة الحل نقوم بحساب النسبة (bi/aij) ونختار من بين القيم المتحصل عليها أقل نسبة لا سلبية. (11)
- من المعلوم أن معاملات متغيرات الحل الابتدائي تكون مصفوفة الوحدة فيما بينها، وبالتالي عند إخراج متغير من متغيرات الحل الابتدائي فلابد أن المتغير الذي يدخل يأخذ قيم المتغير الذي يخرج حيث يصبح يكون مصفوفة أحادية مع باقي المتغيرات في قاعدة الحل.
- نتوقف عن البحث عن حل امثل عندما تصبح كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفر في دالة الهدف دالة تعظيم، أو تصبح كلها سالبة أو صفر في حالة دالة الهدف دالة تدنية.

مثال01: حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

أولا نحول صيغة النموذج إلى الصيغة القياسية (أي نحول المتراجحات إلى معادلات) وذلك بإضافة متغيرات الفرق إلى القيود الفنية، فيصبح البرنامج الخطي كما يلي:

$$\textbf{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + S_1 = 18 \\ x_1 + S_2 = 4 \\ 2x_2 + S_3 = 12 \\ x_j \geq 0 \ , \ S_i \geq 0 \end{cases}$$

نضع الآن هذه الصيغة في جدول يسمى جدول الحل الابتدائي ويكون على النحو التالي:

Z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	sol
Z	-3	-5	0	0	0	0
$\mathbf{S_1}$	3	2	1	0	0	18
$\mathbf{S_2}$	1	0	0	1	0	4
$\mathbf{S_3}$	0	2	0	0	1	12

-المتغير الذي يدخل هو $\mathbf{x_2}$ لأن معامله أقل قيمة سالبة (5-) أما المتغير الذي يخرج من قاعدة الحل فهو المتغير الذي يقابل اقل نسبة لا سلبية أي من بين القيم التالية (18/2)، (4/0)، (12/2)، من بين هذه القيم الثلاثة أقل نسبة هي 6 والتي تقابل المتغير $\mathbf{S_3}$ فيخرج من النموذج ويأخذ مكانه $\mathbf{x_2}$.

-من أجل القيام بعملية التحويل يجب أن تصبح معاملات المتغير $\mathbf{x_2}$ نفسها معاملات المتغير $\mathbf{S_3}$، فنبدأ أولا بالسطر المحوري، وهو سطر المتغير S_3 نقوم بقسمته على 2 .

-بالنسبة للسطر الأول يجب تحويل (5-) إلى صفر وذلك بجمع هذه القيمة مع معكوسها وهو (5)، وذلك بضرب قيم السطر المحوري الجديد كلها في (5) وجمعها مع قيم السطر الرابع (سطر x_2) في جدول المحاولة الأولى، ونفس الشيء بالنسبة لباقي الأسطر أي بنفس الطريقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	sol
Z	-3	0	0	0	5/2	30
$\mathbf{S_1}$	3	0	1	0	-1	6
$\mathbf{S_2}$	1	0	0	1	0	4
$\mathbf{x_2}$	0	1	0	0	1/2	6

بعد المحاولة الأولى نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 0 إلى 30 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ندخل الآن المتغير x_1 لان معامله في دالة الهدف أقل قيمة سالبة (3-)، ونخرج المتغير S_1 لأنه يقابل أقل نسبة لا سلبية وهي (6/3) ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	sol
Z	0	0	1	0	3/2	36
x_1	1	0	1/3	0	-1/3	2
S_2	0	0	-1/3	1	1/3	2
x_2	0	1	0	0	1/2	6

في جدول السمبلكس هذا نجد أننا وصلنا إلى حل أمثل وذلك لأن جميع معاملات المتغيرات في معادلة (صف) دالة الهدف هي غير سالبة لان دالة الهدف من نوع Max وعليه فان الحل الأمثل هو:

$$\text{Max } z = 36 \ , \ x1 = 2 \ , \ x2 = 6$$

مثال02:

حل البرنامج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Max } Z = 3000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

نحول صيغة النموذج إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة متغيرات الفرق إلى القيود الفنية، فيصبح البرنامج الخطي كما يلي:

$$\textbf{Max } Z = 3000x_1 + 2000x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + S_2 = 8 \\ x_1 - x_2 + S_3 = 1 \\ x_2 + S_4 = 2 \\ x_j \geq 0 \ , \ S_i \geq 0 \end{cases}$$

نضع الآن هذه الصيغة في جدول يسمى جدول الحل الابتدائي ويكون على النحو التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	sol
Z	-3000	-2000	0	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	0	6
S_2	2	1	0	1	0	0	8
S_3	1	-1	0	0	1	0	1
S_4	0	1	0	0	0	1	2

-المتغير الذي يدخل هو x_1 لأن معامله أقل قيمة سالبة (3000-) أما المتغير الذي يخرج من قاعدة الحل فهو المتغير الذي يقابل أقل نسبة لا سلبية أي من بين القيم التالية (6/1)، (8/2)، (1/1)، مع الإشارة إلى أن النسبة (2/0) لا تأخذ بعين الاعتبار، ومن بين هذه القيم الثلاثة أقل نسبة هي 1 والتي تقابل المتغير S_3 فيخرج من النموذج ويأخذ مكانه x_1.

-من أجل القيام بعملية التحويل يجب أن تصبح معاملات المتغير x_1 نفسها معاملات المتغير S_3، فنبدأ أولا بالسطر المحوري، وهو سطر المتغير S_3 نقوم بقسمته على 1 .

-بالنسبة للسطر الأول يجب تحويل (3000-) إلى صفر وذلك بجمع هذه القيمة مع معكوسها وهو (3000)، وذلك بضرب قيم السطر المحوري الجديد كلها في (3000) وجمعها مع قيم السطر الرابع (سطر x_1) في جدول المحاولة الأولى، ونفس الشيء بالنسبة لباقي الأسطر أي بنفس الطريقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	sol
Z	0	-5000	0	0	3000	0	3000
S_1	0	3	1	0	-1	0	5
S_2	0	3	0	1	-2	0	6
x_1	1	-1	0	0	1	0	1
S_4	0	1	0	0	0	1	2

بعد المحاولة الأولى نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 0 إلى 3000 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ندخل الآن المتغير x_2 لأن معامله في دالة الهدف أقل قيمة

سالبة (5000-)، ونخرج المتغير S_1 لأنه يقابل أقل نسبة لا سلبية وهي (5/3) ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	sol
Z	0	0	5000/3	0	4000/3	0	34000/3
x_2	0	1	1/3	0	-1/3	0	5/3
S_2	0	0	-1	1	-1	0	1
x_1	1	0	1/3	0	2/3	0	8/3
S_4	0	0	-1/3	0	1/3	1	1/3

هذا الجدول يعتبر جدول حل نهائي حيث نجد أننا وصلنا إلى حل أمثل وذلك لأن جميع معاملات المتغيرات في معادلة (صف) دالة الهدف هي غير سالبة وعليه فإن الحل الأمثل هو:

$$\text{Max } z = 34000/3 \ , \ x_1 = 8/3 \ , \ x_2 = 5/3$$

2-3- استخدام المتغيرات الاصطناعية في حل مسائل البرمجة الخطية

بعدما تطرقنا في الحالة السابقة إلى حل النماذج من الشكل الذي تكون قيوده الفنية اقل من أو تساوي سنتطرق الآن لحل مسائل البرمجة لخطية باستعمال طريقة السمبلكس للنماذج من الشكل:

$$\textbf{(max \&min) } Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} \cdot x_j \quad \leq = \geq \quad bi \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

ومن أجل حل أي نموذج من الشكل السابق نتبع الخطوات التالية:[12]

- هذه النماذج تكون قيودها الفنية من الشكل أكبر أو تساوي أو في شكل تساوي، ولتحويلها إلى معادلات نقوم بطرح متغيرات الفرق من الطرف الأيسر في حالة متراجحة من الشكل أكبر أو تساوي ونضيف متغير الفرق بمعامل صفر في حالة قيد فني على شكل تساوي.
- بالإضافة إلى ذلك نضيف متغيرات اصطناعية إلى القيود الفنية حيث هي متغيرات وهمية تساعدنا فقط في تشكيل مصفوفة الوحدة من اجل حل البرنامج الخطي باستعمال طريقة السمبلكس، وعند إضافة هذه المتغيرات إلى القيود الفنية نضيفها أيضا إلى دالة الهدف في حالة دالة الهدف

دالة تدنية Min بمعاملات كبيرة نرمز لها بـ M أما في حالة دالة الهدف دالة تعظيم فنطرحها من دالة الهدف بمعاملات كبيرة M أيضا.

- في هذه الحالة تصبح متغيرات الحل الابتدائي هي المتغيرات الاصطناعية وتكون معاملاتها في القيود الفنية تكون مصفوفة أحادية (مصفوفة الوحدة).
- حتى يكون الحل الابتدائي مقبول يجب أن تكون معاملات عناصره تكون مصفوفة وحدة، وكذلك يجب أن تكون دالة الهدف تساوي صفر.
- لكن عند البحث عن قيمة دالة الهدف في جدول الحل الابتدائي سنجدها لا تساوي صفر بل تساوي عددا مضاعفا لـ (M)، وهذا ناتج عن وجود معاملات للمتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف.
- في هذه الحالة يجب جعل دالة الهدف تساوي صفر وذلك بضرب معاملات الأسطر التي تحتوي على متغيرات اصطناعية في (+M) ونجمعها مع قيم سطر دالة الهدف وذلك في حالة ما إذا كانت دالة الهدف (Min)، أما إذا كانت دالة الهدف من الشكل (Max) فنقوم بضرب معاملات الأسطر التي تحتوي على متغيرات اصطناعية في (M-) ونجمعها مع قيم سطر دالة الهدف فتصبح دالة الهدف تساوي صفر.
- بعد جعل الحل الابتدائي مقبولا نقوم بالبحث عن الحل الأمثل وذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة، أي إدخال المتغير الذي يكون معامله في دالة الهدف اقل قيمة سالبة في حالة دالة الهدف دالة تعظيم، أو ندخل المتغير الذي يكون معامله في دالة الهدف أكبر قيمة موجة ثم نقوم بإخراج المتغير الذي يقابله أقل نسبة لا سلبية (bi/aij) ونختار من بين القيم المتحصل عليها اقل نسبة لا سلبية، ونكمل الحل حتى نتحصل على جدول الحل الأمثل كما فعلنا في السابق.

مثال01: حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Max } Z = 35000x_1 + 20000x_2$$

$$\begin{cases} 3000\,x_1 + 1250\,x_2 \leq 100000 \\ x_1 \geq 5 \\ 2\,x_2 \leq 25 \\ 2\,x_2 \geq 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

أولا نحول صيغة النموذج إلى الصيغة القياسية (أي نحول المتراجحات إلى معادلات) وذلك بإضافة متغيرات الفرق والمتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية والى دالة الهدف، فيصبح البرنامج الخطي كما يلي:

$$\mathbf{Max\ Z = 35000x_1 + 20000x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 - MR_2 - MR_4}$$

$$\begin{cases} \mathbf{3000\ x_1 + 1250\ x_2 + S_1 = 100000} \\ \mathbf{x_1 - S_2 + R_2 = 5} \\ \mathbf{2\ x_2 + S_3 = 25} \\ \mathbf{2\ x_2 - S_4 + R_4 = 10} \\ \mathbf{x_j \geq 0} \end{cases}$$

نضع الآن هذه الصيغة في جدول يسمى جدول الحل الابتدائي ويكون على النحو التالي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_4	S_1	R_2	S_3	R_4	sol
Z	-35000 -m	-20000 -m	+m	+m	0	0	0	0	0
S_1	3000	1250	0	0	1	0	0	0	100000
R_2	1	0	-1	0	0	1	0	0	5
S_3	1	0	0	0	0	0	1	0	25
R_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	10

-المتغير الذي يدخل هو x_1 لأن معامله أقل قيمة سالبة (-35000-m) أما المتغير الذي يخرج من قاعدة الحل فهو المتغير الذي يقابل أقل نسبة لا سلبية أي (5/1)، من بين هذه القيم الثلاثة أقل نسبة هي 5 والتي تقابل المتغير R_2 فيخرج من النموذج ويأخذ مكانه x_1 .

-من أجل القيام بعملية التحويل يجب أن تصبح معاملات المتغير x_1 نفسها معاملات المتغير R_2 ، فنبدأ أولا بالسطر المحوري، وهو سطر المتغير R_2 نقوم بقسمته على 1 .

-بالنسبة للسطر الأول يجب تحويل (-35000-m) إلى صفر وذلك بجمع هذه القيمة مع معكوسها وهو (+35000+m)، وذلك بضرب قيم السطر المحوري الجديد كلها في (+35000+m) وجمعها مع قيم السطر الرابع (سطر x_1) في جدول المحاولة الأولى، ونفس الشيء بالنسبة لباقي الأسطر أي بنفس الطريقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_4	S_1	R_2	S_3	R_4	sol
Z	0	-20000 -m	-35000	+m	0	35000+m	0	0	175000+5m
S_1	0	1250	3000	0	1	-3000	0	0	85000
x_1	1	0	-1	0	0	1	0	0	5
S_3	1	0	1	0	0	-1	1	0	20
R_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	10

بعد المحاولة الأولى نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 0 إلى 175000 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_4	S_1	R_2	S_3	R_4	sol
Z	0	0	-35000	-20000	0	35000+m	0	20000+m	375000+15m
S_1	0	0	3000	1250	1	-3000	0	-1250	72500
x_1	1	0	-1	0	0	1	0	0	5
S_3	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	10

بعد المحاولة الثانية نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 175000 إلى 375000 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_4	S_1	R_2	S_3	R_4	sol
Z	0	0	0	-20000	0	+m	35000	20000+m	1075000+15m
S_1	0	0	0	1250	1	0	-3000	-1250	12500
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	25
S_2	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	10

بعد المحاولة الثالثة نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 375000 إلى 1075000 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_4	S_1	R_2	S_3	R_4	sol
Z	0	0	0	0	16	+m	-13000	+m	1275000+15m
S_4	0	0	0	1	1/1250	0	-2.4	-1	10
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	25
S_2	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
x_2	0	1	0	0	1/1250	0	-2.4	0	20

بعد المحاولة الرابعة نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 1275000 إلى 1535000 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_4	S_1	R_2	S_3	R_4	sol
Z	0	0	13000	0	16	-13000 +m	0	+m	1535000+15m
S_4	0	0	2.4	1	1/1250	-2.4	0	-1	58
x_1	1	0	-1	0	0	1	0	0	5
S_3	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
x_2	0	1	2.4	0	1/1250	-2.4	0	0	68

في جدول السمبلكس هذا نجد أننا وصلنا إلى حل أمثل وذلك لأن جميع معاملات المتغيرات في معادلة (صف) دالة الهدف هي غير سالبة لان دالة الهدف من نوع Max وعليه فإن الحل الأمثل هو:

$$\text{Max } z = 1535000 \ , \ x_1 = 5 \ , \ x_2 = 68$$

مثال02: حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Min } Z = 925x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{cases} 0.04\,x_1 + 0.05\,x_2 \geq 0.4 \\ 0.03\,x_1 + 0.03\,x_2 \geq 0.6 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

أولا نحول صيغة النموذج إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة متغيرات الفرق والمتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية والى دالة الهدف، فيصبح البرنامج الخطي كما يلي:

$$\text{Min } Z = 925x_1 + 2000x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - S_1 + R_1 = 40 \\ 3x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 60 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

نضع الآن هذه الصيغة في جدول يسمى جدول الحل الابتدائي ويكون على النحو التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_2	R_4	sol
Z	-925 +7m	-2000 +8m	-m	-m	0	0	0
R_1	4	5	-1	0	1	0	40
R_2	3	3	0	-1	0	1	60

-المتغير الذي يدخل هو x_1 لأن معامله أقل قيمة سالبة (-2000+8m) أما المتغير الذي يخرج من قاعدة الحل فهو المتغير الذي يقابل أقل نسبة لا سلبية (8)، والتي تقابل المتغير R_1 فيخرج ويأخذ مكانه x_2.

-من أجل القيام بعملية التحويل يجب أن تصبح معاملات المتغير x_2 نفسها معاملات المتغير R_1 ، فنبدأ أولا بالسطر المحوري، وهو سطر المتغير R_1 نقوم بقسمته على 5 .

-بالنسبة للسطر الأول يجب تحويل (-2000+8m) إلى صفر وذلك بجمع هذه القيمة مع معكوسها وهو (+2000-8m)، وذلك بضرب قيم السطر المحوري الجديد كلها في (+2000-8m) وجمعها مع قيم سطر Z في جدول المحاولة الأولى، ونفس الشيء بالنسبة لباقي الأسطر أي بنفس الطريقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_2	R_4	sol
Z	675 +0.6m	0	-400 +0.6m	-m	400 - 1.6m	0	16000 -64m
x_2	0.8	1	-0.2	0	0.2	0	8
R_2	0.6	0	0.6	-1	-0.6	1	36

بعد المحاولة الأولى نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت من 0 إلى 16000 نكمل الآن تحسين الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_2	R_4	sol
Z	0	-843.7 -0.75m	-231.2 +0.75m	-m	231.2 - 1.75m	0	9250
x_1	1	1.25	-0.25	0	0.25	0	10
R_2	0	-0.75	0.75	-1	-0.75	1	30

بعد المحاولة الثانية نكمل الحل بناء على معاملات متغيرات دالة الهدف في الجدول الجديد، ونجري العمليات اللازمة بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_2	R_4	sol
Z	0	-1075	0	-307.5	-m	307.5 –m	18500 -40m
x_1	1	1	0	-0.33	0	0.33	20
S_1	0	-1	1	-1.33	-1	1.33	40

في جدول السمبلكس هذا نجد أننا وصلنا إلى حل أمثل وذلك لأن جميع معاملات المتغيرات في معادلة (صف) دالة الهدف هي سالبة أو صفر لأن دالة الهدف من نوع Min وعليه فإن الحل الأمثل هو:

$$\text{Min } z = 18500 \ , \ x_1 = 20 \ , \ x_2 = 0$$

3- الحالات الخاصة في حل مسائل البرمجة الخطية

عندما نكون بصدد حل مسائل البرمجة الخطية قد نصادف بض الحالات الخاصة كما يلي:

3-1- حالة مجموعة خالية من الحلول

تظهر هذه الحالة عندما تكون مجموعة من القيود الفنية ولكنها لا يمكن أن تشكل منطقة حلول ممكنة، وبعبارة أخرى أنه لا يمكن تحديد منطقة الحلول الممكنة التي تحقق جميع القيود الفنية، أما في حالة حل مسالة البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس فإن هذه الحالة يمكن معرفتها واكتشافها عندما نصل إلى جدول الحل الأمثل لكن نجد من ضمن متغيرات الحل النهائي يوجد متغير اصطناعي لم يخرج من قاعدة الحل وفي مثل هذه الحالة نقول أن النموذج غير قابل للحل[13] ، ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي:

مثال:

حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الابتدائي:

Z	x_1	x_2	S_2	S_3	S_1	R_2	R_3	sol
Z	-5 -m	-3 -m	+m	+m	0	0	0	0
S_1	1	1	0	0	1	0	0	5
R_2	1	0	-1	0	0	1	0	3
R_3	0	1	0	-1	0	0	1	3

جدول المحاولة الأولى:

Z	x_1	x_2	S_2	S_3	S_1	R_2	R_3	sol
Z	0	-3-m	-5	+m	0	5+m	0	15+3m
S_1	0	1	1	0	1	-1	0	2
x_1	1	0	-1	0	0	1	0	3
R_3	0	1	0	-1	0	0	1	3

جدول المحاولة الثانية:

Z	x_1	x_2	S_2	S_3	S_1	R_2	R_3	sol
Z	0	0	-2+m	+m	3+m	2	0	21+5m
x_2	0	1	1	0	1	-1	0	2
x_1	1	0	-1	0	0	1	0	3
R_4	0	0	-1	-1	-1	1	1	1

نلاحظ أن هذا الجدول هو الجدول الذي يمثل حلا امثلا نظرا لأن معاملات دالة الهدف كلها إما موجبة أو صفر، لكن نلاحظ أنه من بين عناصر الحل الأمثل يوجد متغير اصطناعي وهذا يدل على أن هذا النموذج غير قابل للحل، وعليه فإن: $Z = \emptyset$.

3-2- حالة وجود حل أمثل غير محدود (لانهائي)

تظهر هذه الحالة بيانيا عندما تكون مجموعة من القيود الفنية تشكل منطقة حلول ممكنة، ولكن هذه المنطقة مفتوحة أي غير محصورة وبالتالي كلما زدنا أو ضاعفنا في قيم المتغيرات فان قيمة دالة الهدف سوف تزيد، أما في حالة حل مسالة البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس فإن هذه الحالة يمكن معرفتها واكتشافها عندما نكون بصدد إخراج متغير من قاعدة الحل في إحدى جداول السمبلكس لكننا لا نستطيع تحديد هذا المتغير نظرا لان كل معاملات متغيرات الحل تكون إما كلها سالبة أو صفر وبالتالي فان هذه الحالة هي حالة وجود حل امثل لانهائي أي غير محدود، ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي:

مثال:

حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Min } Z = -6x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الابتدائي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	sol
Z	6-2m	-3	-1+m	-m	-m	0	0	0
R_1	-1	-1	1	-1	0	1	0	1
R_2	-1	1	0	0	-1	0	1	2

جدول المحاولة الأولى:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	sol
Z	5-m	-4+m	0	-1	-m	1-m	0	1-m
x_3	-1	-1	1	-1	0	1	0	1
R_2	-1	1	0	0	-1	0	1	2

جدول المحاولة الثانية:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	sol
Z	1	0	0	-1	-4	1-m	4+m	9+m
x_3	-2	0	1	-1	-1	1	1	3
x_2	-1	1	0	0	-1	0	1	2

جدول المحاولة الثالثة:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	sol
Z	5+m	-4-m	0	-1	+m	1-m	0	1-m
x_3	-1	-1	1	-1	0	1	0	1
R_2	-1	1	0	0	-1	0	1	2

نلاحظ في هذا الجدول أن المتغير الذي يدخل إلى قاعدة الحل هو المتغير x_1 لكننا لا نستطيع تحديد المتغير الذي يخرج من قاعدة الحل لان معاملات المتغيرات x_3 و R_2 كلها سالبة (-1) و(-1)، وهذا مؤشر على أن لهذا النموذج حل أمثل لكنه غير محدود أي $Z = \infty$.

3-3- حالة وجود حلول متعددة

تظهر هذه الحالة حينما تكون دالة الهدف موازية لقيد من قيود النموذج الخطي والذي يكون على شكل مساواة، ويمكن معرفة هذه الحالة في جداول السمبلكس عندما نكون في جدول الحل النهائي ويكون من ضمن المتغيرات موجودة في دالة الهدف متغير معامله صفر في دالة الهدف صفر وهو غير موجود ضمن متغيرات الحل لنهائي، عند هذه الحالة يمكن إدخال هذا المتغير وإكمال الحل فنتحصل على حل امثل آخر له نفس القيمة لدالة الهدف لكن قيم المتغيرات مختلفة وتدعى هذه الحالة حالة وجود حلول مثلى بديلة. [14]

مثال: حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\text{Max } Z = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الابتدائي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	sol
Z	-1	1	0	0	0	0
S_1	-2	3	1	0	0	9
S_2	1	-1	0	1	0	2
S_3	1	1	0	0	1	8

جدول المحاولة الأولى:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	sol
Z	0	0	0	1	0	2
S_1	0	1	1	2	0	13
x_1	1	-1	0	1	0	2
S_2	0	2	0	-1	1	6

يعتبر هذا الجدول حل نهائي حيث أن قيم المتغيرات كما يلي:

$$x_1 = 2 \ , x_2 = 0 \ , \ Zmax = 2$$

لكن نلاحظ أن المتغير x_2 معامله في دالة الهدف يساوي صفر وهو غير موجود في قاعدة الحل وهذا مؤشر على أن هذه حالة خاصة وهي حالة وجود حل بديل أخر يعطينا نفس القيمة لدالة الهدف، يمكن الحصول على هذا الحل بإدخال المتغير x_2 ونكمل الحل فنخرج المتغير S_2 فنتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	sol
Z	0	0	0	1	0	2
S_1	0	0	1	5/2	-1/2	10
x_1	1	0	0	1/2	1/2	5
x_2	0	1	0	-1/2	1/2	3

يعتبر هذا الجدول أيضا جدول حل نهائي حيث أن قيم المتغيرات كما يلي:

$$x_1 = 3 \ , x_2 = 5 \ , \ Zmax = 2$$

3-4- حالة عدم الانتظام

تظهر هذه الحالة عندما يكون من ضمن القيود الفنية قيد فني زائد عن الحاجة أي قيد فني غير ضروري، أما في حالة حل مسالة البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس فان هذه الحالة يمكن معرفتها واكتشافها عندما نكون بصدد إخراج المتغير من قاعدة الحل بناءا على أقل نسبة لا سلبية (bi/aij) ونجد أن هناك أكثر من قيمة لهذه النسبة متساوية يعني توجد قيمتين صغيرتين متساويتين أو أكثر، وفي هذه الحالة يجب علينا تجريب كلا المتغيرين فنخرج مرة احد المتغيرين ونكمل الحل ثم نعود إلى الجدول الذي صادفنا فيه تلك الحالة ونخرج المتغير الآخر، ونكمل الحل، في النهاية نختار أحسن الحلين من بين الحلول التي نتوصل إليها، فنختار أقل قيمة إذا كانت دالة الهدف Min أما إذا كانت دالة الهدف Max فنختار أكبر قيمة، ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي:

مثال: حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 24x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 6x_4 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الابتدائي:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	sol
Z	-8	-12	-20	-24	0	0	0
S_1	2	6	4	8	1	0	30
x_4	2	2	10	6	0	1	10

جدول المحاولة الأولى:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	sol
Z	0	-4	20	0	0	4	40
S_1	-2/3	10/3	-28/3	0	1	-4/3	50/3
x_4	1/3	1/3	5/3	1	0	1/6	5/3

في هذه المحاولة نلاحظ انه بإمكاننا إخراج المتغير S_1 أو $\mathbf{x_4}$ وذلك لأن القيم اللاسلبية الصغيرة المقابلة لهما متساوية (5) و(5)، فهذا يعطينا الاختيار بين إخراج أحد المتغيرين، وهذا مؤشر على وجود حالة خاصة وهي حالة عدم الانتظام.

في هذه الحالة نقوم باختيار احد المتغيرين وليكن مثلا S_1 نخرجه من قاعدة الحل وندخل المتغير $\mathbf{x_2}$ ونكمل الحل حتى نصل إلى الحل النهائي، ثم نعود إلى جدول المحاولة الأولى ونخرج المتغير الآخر $\mathbf{x_4}$ ثم نواصل الحل حتى نتحصل على الحل الأمثل النهائي، في النهاية يصبح لدينا حلين نختار من بين هذين الحلين أحسنهما، فنختار أقل قيمة في حالة دالة الهدف Min، ونختار اكبر قيمة في حالة دالة الهدف Max.

وفي حالتنا هذه نختار أولا المتغير S_1 ونكمل الحل.

جدول المحاولة الثانية:

Z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	sol
Z	-4/5	0	24/5	0	6/5	12/5	50
$\mathbf{x_2}$	-1/5	1	-14/5	0	3/10	-2/5	5
$\mathbf{x_4}$	2/5	0	11/15	1	-1/10	3/10	8/5

جدول المحاولة الثالثة:

Z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	sol
Z	0	0	188/30	2	1	3	60
$\mathbf{x_2}$	0	1	-73/30	1/2	1/4	-1/4	7/3
$\mathbf{x_1}$	1	0	55/30	5/2	-5/20	15/20	40

يعتبر هذا الجدول أيضا جدول حل نهائي حيث أن قيم المتغيرات كما يلي:

$$x_1 = 40 \ , \ x_2 = 7/3 \ , \ x_3 = 0, \ x_4 = 0 \ \ , \ \ Zmax = 60$$

نعود الآن إلى جدول المحاولة الأولى ونخرج المتغير $\mathbf{x_4}$ ونكمل الحل .

جدول المحاولة الثانية:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	sol
Z	4	0	40	12	0	6	60
S_1	-4	0	-26	-10	1	-3	0
x_2	1	1	5	3	0	1/2	5

يعتبر هذا الجدول أيضا جدول حل نهائي حيث أن قيم المتغيرات كما يلي:

$$x_1 = 0 \ , x_2 = 5 \ , x_3 = 0, x_4 = 0 \ \ , \ Zmax = 60$$

هذا يعطينا حلا أمثلا مساويا للحل الأمثل السابق، ولكن يجب علينا تجريب كلا المتغيرين ففي بعض الحالات لا يكون الحل النهائي للجدولين متساويا وبالتالي في هذه الحالة سوف نختار أحسن الحلين كما ذكرنا في السابق.

4- مسألة الثنائية والتحليل الاقتصادي للنموذج الثنائي

4-1- مسألة الثنائية في البرمجة الخطية

لكل مسالة برمجة خطية هناك مسالة مقابلة لها نسميها المسالة الثنائية أو المقابلة أو النموذج المرافق Dual Problem فإذا قمنا بحل مسالة البرمجة الخطية وكانت دالة الهدف Max فإننا سنتوصل إلى الحل الأمثل ذاته في النموذج المرافق لكن دالة الهدف للمسالة الثنائي تكون Min والعكس صحيح.

ولقد برهنت العلاقات بين المسالتين على أنها مفيدة جدا في مجالات مختلفة وتعتمد المسالة الثنائية عند صياغتها على نوع قيود مسالة البرمجة الخطية ($\leq = \geq$)، نوع إشارة المتغيرات (+، -)، نوع دالة الهدف (Max,Min). [15]

إن المسالة الثنائية يتم الحصول عليها من المسالة الأولية (الابتدائية) وفقا للقواعد التالية:

- كل قيد فني في المسالة الأولية (الابتدائية) يقابله متغير ثنائي وبالتالي سوف يتكون لدينا عدد من المتغيرات الثنائية تناظر وتساوي نفس العدد من القيود الفنية في النموذج الابتدائي.
- كل متغير في المسألة الأولية (الابتدائية) يقابله قيد فني في النموذج الثنائي (المرافق) وبالتالي سوف يتكون لدينا عدد من القيود الفنية في النموذج الثنائي بنفس عدد المتغيرات في النموذج الابتدائي.

- معاملات المتغيرات الثنائية في القيد الفني الأول هي عبارة عن معاملات المتغير الأول في كل القيود الفنية في البرنامج الابتدائي، وكذلك معاملات المتغيرات الثنائية في القيد الفني الثاني هي عبارة عن معاملات المتغير الثاني في كل القيود الفنية في البرنامج الابتدائي وهكذا.
- تكون معاملات المتغيرات في دالة هدف المسألة الأولية (النموذج الابتدائي أو الأصلي) هي قيم الطرف الأيمن للقيود الفنية في المسالة الثنائية (النموذج المرافق).
- تكون قيم الطرف الأيمن في القيود الفنية في المسالة الأصلية (النموذج الابتدائي) عبارة عن معاملات المتغيرات في دالة الهدف في النموذج الثنائي.
- إذا كانت دالة الهدف في المسالة الأولية (النموذج الابتدائي) من نوع Max فان دالة الهدف في النموذج الثنائي أو المرافق تكون من نوع Min والعكس صحيح.
- القيود الفنية التي تكون في الشكل الابتدائي اقل أو يساوي ($\leq$) في حالة نموذج ابتدائي دالة هدفه من نوع Max تعكس في الشكل الثنائي الذي يصبح من نوع Min وتصبح اكبر أو تساوي ($\geq$) والعكس صحيح.
- قبل عملية تحويل النموذج الخطي الابتدائي إلى ثنائي يجب التحقق في البداية من أن جميع القيود الفنية على شكل أقل أو تساوي وذلك إذا كانت دالة الهدف للبرنامج الخطي الابتدائي من الشكل Max، والعكس صحيح.
- كذلك يجب التحقق في البداية من أن جميع القيود الفنية على شكل أكبر أو تساوي وذلك إذا كانت دالة الهدف للبرنامج الخطي الابتدائي من الشكل Min، والعكس صحيح.
- عندما نحصل على الحل المثل في النموذج الابتدائي الأصلي يلزم أن تكون قيمة Z هي نفسها قيمة Z في النموذج المرافق أو الثنائي إلا في الحالات الخاصة حيث سنأتي على ذكرها لاحقا.
- عندما يكون لدينا قيد فني على شكل مساواة في النموذج الابتدائي فانه يقابله متغير في النموذج الثنائي ولكنه غير مقيد بإشارة معينة، وهذا يعني أن هذا المتغير قد يأخذ قيمة موجبة كما قد يأخذ قيمة سالبة.
- المتغير الغير مقيد بإشارة (المتغير الحر) الذي قد يأخذ قيمة موجبة أو يأخذ قيمة سالبة في النموذج الابتدائي يعني انه يقابله قيد فني على شكل مساواة في النموذج المرافق أو الثنائي.
- المسألة الثنائية لمسألة ثنائية هي عبارة عن المسالة الأصلية (ابتدائية).

- عادة يرمز لمتغيرات النموذج الابتدائي بـ $\mathbf{x_i}$ أما متغيرات النموذج الثنائي فيرمز لها بـ $\mathbf{y_i}$.
- إذا كان لدينا برنامج خطي يحتوي على قيد فني من الشكل ($5x_1+3x_2=12$) مثلا فإن ذلك القيد الفني نحوله إلى شكل لا مساواة فيصبح :

$$\begin{cases} 5x1+3x2 \leq 12 \\ 5x1+3x2 \geq 12 \end{cases}$$

ويمكن كتابته كما يلي:

$$\begin{cases} 5x1+3x2 \leq 12 \\ -5x1-3x2 \leq -12 \end{cases}$$

ثم نشكل برنامجه الثنائي، ولكن من اجل تشكيل البرنامج الثنائي سوف نفترض المتغيرات الثنائية التالية (y_i , y_i) ، حيث y_i المقابل للقيد الفني على شكل مساواة غير مقيد بإشارة معينة، بمعنى يمكن أن يأخذ قيمة موجبة ، وقد يأخذ قيمة سالبة.

- إذا كان لدينا برنامج خطي يحتوي على متغير حر ($x3$) مثلا فهذا يعني أن القيد الفني الثالث في النموذج الثنائي يكون على شكل مساواة.

مما سبق يمكن أن نستنتج ما يلي:

- معاملات متغيرات الحل الابتدائي الأصلي في جدول الحل الأمثل النهائي (Si,Ri) تعبر أو تساوي قيمة متغيرات النموذج الثنائي في الحل النهائي الأمثل.
- معاملات متغيرات الحل للنموذج الثنائي في جدول الحل الأمثل النهائي تعبر أو تساوي قيمة متغيرات النموذج الابتدائي الأصلي في الحل النهائي الأمثل.
- إذا كان لإحدى المسالتين (الأصلية أو الثنائية) حل، فإن للمسالة الأخرى حل أيضا وتكون القيم المثلى لدالة الهدف متساوية لكليهما.
- إذا كان لإحدى المسالتين (الأصلية أو الثنائية) حل غير ممكن (Z تساوي مجموعة خالية)، فان للمسالة الأخرى حل أمثل لكنه غير محدود (مالا نهاية من الحلول).
- إذا كان لإحدى المسألتين (الأصلية أو الثنائية) حلول مثلى متعددة، فإن المسألة الأخرى عبارة عن حالة عدم الانتظام.

- تساعدنا المسألة الثنائية في البرمجة الخطية في الحصول على نتائج وتحليلات ذات طبيعة اقتصادية وسنتطرق إليها في العنصر القادم.

مثال 01: كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي، حل البرنامج الخطي باستعمال طريقة السمبلكس ثم استنتج قيم متغيرات النموذج الثنائي من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

$$\textbf{Min } Z = 6x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل: أولا من أجل تكوين النموذج الثنائي نقوم بتحويل جميع القيود الفنية إلى شكل أكبر من أو تساوي لأن دالة الهدف من شكل Min، وبالتالي سوف نقوم بضرب طرفي القيد الفني الثالث في (-1) فيصبح النموذج كما يلي:

$$\textbf{Min } Z = 6x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -3 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

الآن يمكننا تحويل النموذج إلى ثنائي اعتمادا على القواعد السابقة فيصبح كما يلي:

$$\textbf{Max } Z = 2y_1 + 6y_2 - 3y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 5 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 6 \\ yi \geq 0 \end{cases}$$

بعد حل النموذج الابتدائي باستعمال طريقة السمبلكس سوف نتحصل على الحل الأمثل النهائي التالي:

Z	x_1	x_2	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	sol
Z	0	-8	-3	0	-3	-m	3-m	0	18-8m
x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2	0	3
S_1	0	-3/2	-1/2	1	-1/2	-1	1/2	0	1
S_3	0	1/2	5/2	0	-1/2	0	1/2	1	6

يعتبر هذا الجدول جدول حل نهائي حيث أن قيم المتغيرات كما يلي:

$$x_1 = 3 \ , x_2 = 0 \ , x_3 = 0 \ \ , \ \ Zmin = 18$$

ومن جدول الحل النهائي السابق يمكن أن نستنتج قيم متغيرات النموذج الثنائي وهي مضللة ومبينة في الجدول وهي كالتالي:

$$y_1 = 0 \ , y_2 = 3 \ , y_3 = 0 \ \ , \ \ Zmax = 18$$

مثال 02:

- كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي:

$$\textbf{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ x_3 \text{ حر} , x_1 \text{ حر}, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

نقوم بتحويل القيد الفني الأول إلى شكل أكبر من أو تساوي لأن دالة الهدف من شكل Min، وبالتالي سوف نقوم بضرب طرفي القيد الفني في (1-) فيصبح النموذج كما يلي:

$$\textbf{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ x_3 \text{ حر} , x_1 \text{ حر}, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

الآن يمكننا تحويل النموذج إلى ثنائي اعتمادا على القواعد السابقة فيصبح كما يلي:

$$\text{Max } Z = -2y_1 + 5y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 2 \\ -4y_1 - 2y_2 - 5y_3 \leq -3 \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 = -2 \\ y_1 - 4y_2 \leq 1 \\ y_2 \text{ حر}, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

4-2- التفسير الاقتصادي للنموذج الثنائي

متغيرات النموذج الثنائي yi تمثل درجة تأثير الموارد على قيمة دالة الهدف، حيث أن المتغيرات الثنائية تمكننا من معرفة التأثير النسبي للموارد المستعملة على القيمة المثلى لدالة الهدف، أي بكم ستتغير قيمة دالة الهدف نتيجة للتغير بمقدار وحدة واحدة في الموارد المتاحة والتي نرمز لها بـ bi [17]، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي.

لدينا البرنامج الخطي التالي الذي يعبر عن نشاط مؤسسة ما وهو كما يلي:

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 \leq 2000 \quad b1 = 2000 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 2000 \quad b2 = 2000 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي يكون كالتالي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	sol
Z	21.5/25	0	0	0.18	0.24	840
x_2	8/25	1	0	4/25	-3/25	80
x_3	3/10	0	1	-1/10	1/5	200

حيث أن قيم المتغيرات كما يلي: $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $x_3 = 200$, $Z_{max} = 840$

الآن بافتراض إن b1 أصبح 2100 وحدة مثلا بدل 2000 إذن $\Delta b1 = 100$ ، فما هو مقدار التأثير على قيمة دالة الهدف Z .

يمكن حل البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 \leq 2100 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 2000 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي يكون كما يلي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	sol
Z	43/50	0	0	0.18	0.24	858
x_2	8/25	1	0	4/25	-3/25	96
x_3	3/8	0	1	1/10	8/40	190

حيث أن قيم المتغيرات كما يلي: $x_1 = 0$, $x_2 = 96$, $x_3 = 190$, $Zmax = 858$

كان يمكن إيجاد قيمة الزيادة في دالة الهدف بمجرد ضرب مقدار الزيادة في b1 أي $\Delta b1$ في y1 المتغير الأول للنموذج الثنائي فتصبح :

$$Zmax = 840 + (\Delta b1 . y1)$$

$$Zmax = 840 + (100 . 0.18)$$

$$Zmax = 858$$

إن العلاقة بين درجة تغير كمية الموارد ودالة الهدف ليست دائما صحيحة بل هي محدودة، بمعنى هناك مجال تتغير فيه قيم bi بحيث تبقى العلاقة صحيحة، لكن خارج هذا المجال فإن قيم متغيرات النموذج الثنائي لا تبقى مستقرة (أي تتغير) وبالتالي فإن هذه العلاقة لا تصبح صحيحة عندما تخرج قيم bi عن ذلك المجال[18]، لكن ليس هذا موطن البحث في هذه المسألة ويمكن البحث فيها في مصادر أخرى.

5- تمارين

التمرين 01:

تقوم إحدى شركات الصناعات الغذائية بإنتاج نوعين من قارورات المشروبات الغازية، النوع الأول ذوق برتقال والنوع الثاني ذوق تفاح بهامش ربح قدره 45 و 50 وحدة نقدية على التوالي، وببرنامج عمل يقدر بـ 100 ألف وحدة بالنسبة للنوع الأول و 130 ألف وحدة بالنسبة للنوع الثاني كحد أدنى من الإنتاج، إن النوعين من المشروبات الغازية تعبأ في صناديق يحتوى كل صندوق منها على 6 وحدات.

يتطلب كل نوع من المنتجين زمنا معينا في عملية الإنتاج التي تمر بثلاث مراحل، المعالجة والتعبئة والتغليف، فيحتاج كل صندوق من النوع الأول إلى 0.3 ساعات عمل في مرحلة المعالجة، 0.4 ساعات في مرحلة التعبئة و 0.15 ساعة في مرحلة التغليف، ويحتاج كل صندوق من النوع الثاني إلى 0.45 ساعات عمل في مرحلة المعالجة، 0.9 ساعات في مرحلة التعبئة و 0.25 ساعة في مرحلة التغليف، والمطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الشركة الذي يسمح لها بتعظيم هامش الربح.

التمرين 02:

تقوم شركة معينة بإنتاج ثلاث أنواع من منتجات التأثيث المنزلي A_1 ، A_2 و A_3، من أجل إنتاج هذه المنتجات الثلاث تستعمل المؤسسة نوعين من المواد الخشب والزجاج، أسعار بيع المنتجات الثلاثة هي 90 ون للوحدة بالنسبة لـ A_1، 14.5 ون للوحدة بالنسبة لـ A_2 و11 ون للوحدة بالنسبة لـ A_3، كيفية استهلاك هذين المادتين من اجل إنتاج المنتجات الثلاث والكميات المتاحة منها في اليوم معطاة في الجدول التالي:

	كميات المستهلكة لإنتاج وحدة واحدة			الكميات المتاحة من المواد
	A_1	A_2	A_3	
الخشب	0.25	0.05	0.025	150
الزجاج	2	0.5	0.4	1600
تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة (ون)	80	12	10	

كون البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الشركة الذي يسمح لها بتعظيم أرباحها.

التمرين 03:

تقوم وكالة إعلان بالترويج لمنظف جديد لصالح الشركة المنتجة له، و تهدف هذه الشركة إلى الحصول على أعلى نسبة عرض إعلامي للمنتج الجديد في حدود الميزانية الإعلامية المتاحة لها وهي 100000 دولار، ومن أجل الحصول على أقصى مردود ترويجي تحتاج الوكالة أن تقرر كم من هذه الميزانية يجب أن تنفق على كل من جهازي الترويج و هما، لقطات تلفزيونية خلال ساعات المساء وتكلف اللقطة 3000 دولار، و إعلان كبير في صحيفة المدينة ويكلف 1250 دولار.

إن النسبة المتوقعة من العرض قياسا على المعدلات الصناعية تبلغ 35000 مشاهد لكل إعلان تجاري في جهاز التلفزيون و 20000 قارئ لكل إعلان ينشر في الصحيفة، إن مدير الوكالة يعرف بخبرته انه من المهم استخدام أداتي الترويج معاً للتوصل إلى أكبر شريحة من المستهلكين، قرر المدير أن المطلوب هو 5 لقطات تلفزيونية على الأقل وبحد أقصى لا يزيد على 25 لقطة يجب طلبها، وبالنسبة لإعلانات الصحف لا يقل عن 10 إعلانات يجب التعاقد عليها، المطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة، ثم حل هذا البرنامج الخطي باستعمال طريقة السمبلكس.

التمرين04:

حل البرنامج الابتدائي التالي باستعمال الطريقة البيانية، ثم حله باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\textbf{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 05:

حل البرنامج الابتدائي التالي باستعمال الطريقة البيانية، ثم كون الشكل الثنائي للبرنامج الأصلي وحله.

$$\textbf{Min } Z = 15\,x_1 + 5\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 06:

حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس simplex .

$$\textbf{Min } Z = 4x_1 + x_2 + 4\,x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4\,x_3 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 07: حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس simplex ، ثم كون الشكل الثنائي واستنتج قيم متغيرات النموذج الثنائي من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

ما هو مقدار التأثير على دالة الهدف في حالة ما إذا ارتفعت قيمة المورد الأول من 3 إلى 4، استنتج ذلك أي قيمة دالة الهدف الجديدة بدون إعادة الحل بطريقة السمبلكس.

$$\textbf{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 - 3\,x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 08:

كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي:

$$\text{Min } Z = 4x_1 - x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_3 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 09:

كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي وحله باستعمال طريقة السمبلكس ثم استنتج قيم متغيرات النموذج الابتدائي من جدول الحل الأمثل للنموذج المرافق (الثنائي).

$$\text{Max } Z = 15000x_1 + 10000x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 10:

أودعت إحدى شركات نقل المسافرين طلبية لدى شركة متخصصة في الصناعات الميكانيكية الثقيلة للحصول على أربعة أنواع من الحافلات، الجدول التالي يبين أنواع الحافلات وعدد الركاب الذي تستطيع نقله كل حافلة وثمن شراء الحافلة الواحدة.

أنواع الحافلات	T254	T440	U251	UN22
عدد المقاعد في الحافلة	30	50	60	70
ثمن الحافلة (دولار)	4000	5400	7200	15000

إمكانيات التسليم للشركة المصنعة لا تتعدى 25 حافلة من النوع T254 و 30 حافلة من النوع T440 و 45 حافلة من النوع U251، أما النوع الرابع من الحافلات UN22 فلأن الطلب عليه قليل

ولدى الشركة مخزون كبير منه فان قدرة الشركة على توفير هذا النوع غير محدودة، الإمكانيات المالية لشركة النقل المخصصة لشراء هذه الحافلات لا تتعدى 841000 دولار، المطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بعملية الشراء التي تقوم بها شركة النقل والتي تسمح لها بتعظيم قدرات النقل لديها، ثم حل البرنامج الخطي باستعمال طريقة السمبلكس.

التمرين 11:

تقوم شركة تعدين باستغلال ثلاثة مناجم في إحدى المدن، حيث تقوم بفصل المعدن المستخرج من كل منجم إلى نوعين (معدن خام عالي الجودة ومعدن خام قليل الجودة) ، تكلفة تشغيل المنجم الأول Farfos هي 20 ألف دولار في اليوم، وتكلفة تشغيل المنجم الثاني Inof هي 22 ألف دولار في اليوم، أما المنجم الثالث Inasil فهي 18 ألف دولار في اليوم، الطاقة الإنتاجية للمناجم الثلاثة في اليوم مبينة في الجدول التالي:

المنجم	معدن خام عالي الجودة طن/يوم	معدن خام قليل الجودة طن/يوم
Farfos	4	4
Inof	6	4
Inasil	1	6

وقد التزمت الشركة بتسليم ما لا يقل عن 54 طن من المعدن الخام العالي الجودة و 65 طن من المعدن الخام القليل الجودة في نهاية كل أسبوع، كما أن للشركة تعاقدات مع العمال تضمن لها تواجد العمال بطول اليوم أو جزء من اليوم أثناء فتح المنجم، المطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الشركة الذي يسمح لها بتحديد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع للوفاء بالتزامات الشركة بأقل تكلفة ممكنة؟

التمرين 12:

من بين قيم المتغيرين $\mathbf{x_1}$ و $\mathbf{x_2}$ التي تلبي القيود الفنية التالية، أوجد باستعمال الطريقة البيانية قيمة $\mathbf{Z}$ التي يكون عندها الفرق بين المتغير الثاني والأول $\mathbf{x_2 - x_1}$ أعظميا.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

- حدد منطقة الحلول الممكنة في حالة ما إذا أصبح القيد الفني الرابع على شكل مساواة.
- وما هي قيمة Z في هذه الحالة.

التمرين 13:

كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي:

$$\text{Min } Z = 4x_1 - x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_3 \geq 2 \\ x_3 \text{ حر}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 14:

تقوم إحدى الورشات المتخصصة في إنتاج الأثاثات المعدنية بإنتاج نوعين من المناضد، (مناضد مربعة ذات ستة مقاعد ومناضد مستديرة ذات أربعة مقاعد)، وتستعمل في هذه الورشة ثلاث آلات، آلة للتقطيع، آلة للتجميع والآلة الثالثة للطلاء، مع العلم أن كل منضدة من كلا النوعين تمر في عملية الإنتاج بالآلات الثلاثة، إن الشروط الفنية لاستعمال الآلات الثلاثة وطاقة كل منها مبينة كما يلي:

- **آلة التقطيع**: تستطيع آلة التقطيع أن تقوم إما بتجهيز القطع اللازمة لإنتاج 200 منضدة من النوع الأول فقط، أو أن تقوم بتجهيز القطع اللازمة لإنتاج 300 منضدة من النوع الثاني فقط، أو أي تركيبة (خلطة) منهما في اليوم.
- أما **آلة التجميع**: فتستطيع أن تقوم إما بتجميع 250 منضدة من النوع الأول فقط، أو أن تقوم بتجميع 310 منضدة من النوع الثاني فقط، أو أي تركيبة (خلطة) منهما في اليوم.

- في حين أن **آلة الطلاء**: فتستطيع أن تقوم إما بطلاء 450 منضدة من النوع الأول فقط، أو أن تقوم بطلاء 400 منضدة من النوع الثاني فقط، أو أي تركيبة (خلطة) منهما في اليوم، المطلوب تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الورشة الذي يسمح لها بتعظيم كمية الإنتاج من النوعين.

التمرين 15:

لدينا البرنامج الخطي الابتدائي التالي:

$$Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 9000 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 \geq 6000 \\ 0.3x_1 + 0.6x_2 \geq 18000 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 14000 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

-أوجد باستعمال الطريقة البيانية القيمة الدنيا لدالة الهدف.

-نفترض أن القيد الفني الرابع أصبح على شكل مساواة (=) أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف في هذه الحالة.

التمرين 16:

تقوم شركة متخصصة في صناعة مواد التجميل بإنتاج نوعين من العطور، النوع الأول عطور للرجال والنوع الثاني عطور للنساء، إن منتجات الشركة تباع في السوق الداخلية وتباع أيضا في السوق الخارجية، يبلغ سعر البيع للوحدة الواحدة في السوق الداخلية من كل نوع 780 ون، 1120 ون على التوالي، كما تبلغ تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل منهما 48 ون، 62 ون على التوالي كذلك.

تلقت الشركة عرضا خارجيا لتوريد ما لا يقل عن 108000 وحدة من النوع الأول، و 220000 وحدة من النوع الثاني على الأكثر في الشهر.

بطبيعة الحال تختلف أسعار البيع بالنسبة للمنتجات التي يتم تصديرها إلى الخارج، حيث تبيع الشركة النوع الأول في السوق الخارجية بـ 880 ون للوحدة و تبيع النوع الثاني في السوق الخارجية أيضا بـ 1180 ون للوحدة.

أما بالنسبة للسوق الداخلية فلا يمكن أن تبيع الشركة أكثر من 375000 وحدة من النوع الأول، كما لا يمكن أيضا أن تبيع أكثر من 290000 وحدة من النوع الثاني في الشهر.

إن الطاقة الإنتاجية للشركة لا يمكن لها أن تتعدى إنتاج 4.8 مليون وحدة في الشهر بالنسبة للنوعين معا.

المطلوب: كون البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه الشركة الذي يسمح لها بتعظيم أرباحها.

التمرين 17:

حل البرنامج الخطي الابتدائي التالي باستعمال طريقة السمبلكس ثم استنتج قيم متغيرات البرنامج الثنائي:

$$\textbf{Max } Z = 3000\,x_1 + 2000\,x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 \le 6 \\ 2\,x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \le 2 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

التمرين 18:

كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي:

$$\textbf{Min } Z = 2x_1 - 3\,x_2 - 2\,x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 4\,x_2 + x_3 - x_4 \le 2 \\ x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_4 = 5 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1, x_3 \text{ غير مقيدين بإشارة }, x_4 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

التمرين 19:

يرغب مصنع متخصص في إنتاج الغذاء في صنع خلطة غذائية تتكون من ثلاثة مكونات، المكون الأول ينتج 4 وحدات كربوهيدرات و3 وحدات بروتين ويكلف 25 ون للكلغ، المكون الثاني ينتج 6 وحدات كربوهيدرات و وحدتين بروتين ويكلف 32 ون للكلغ، المكون الثالث ينتج 9 وحدات كربوهيدرات و5 وحدات بروتين ويكلف 55 ون للكلغ، الخلطة يجب أن تحتوي على الأقل على 60 وحدة كربوهيدرات و45 وحدة من البروتين، المطلوب تكوين البرنامج الخطي الذي يسمح لصاحب المصنع بتلبية شروط الخلطة بأقل تكلفة كلية ممكنة، ثم حل هذا البرنامج الخطي باستعمال طريقة السمبلكس.

التمرين 20: كون الشكل الثنائي للبرنامج الخطي الابتدائي التالي:

$$\textbf{Min } Z = x_1 + 11\,x_2 - 5\,x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + 7\,x_2 + 7\,x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 + 7\,x_3 \geq 1 \\ -2\,x_1 - x_2 + 7\,x_3 = -9 \\ x_1 - 8\,x_2 - 4\,x_3 \leq 2 \\ x_2 \text{ حر}\,,\ x_1 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 21:

دار نشر تعتزم طباعة مخطوط يتكون من 600 صفحة، وليس لدار النشر متسع من الوقت، ويتوفر لديها محرري نسخ (كاتبين)، المحرر (الكاتب) الأول لديه من الوقت 10 أيام فقط أما المحرر الثاني فيتوفر على 12 يوم، لدى المحرر الأول القدرة على معالجة وكتابة 100 صفحة من المخطوطة يوميا أما المحرر الثاني فلديه القدرة على معالجة وكتابة 150 صفحة يوميا، لدى دار النشر مؤشر لقياس كفاءة كل محرر أو كاتب حيث يقيس هذا المؤشر الكفاءة الإجمالية لمحرري النسخ على مقياس من 1 (حيث يعتبر الأسوأ) إلى 10 (الذي يعتبر أفضل أو جيد)، إن تقدير كفاءة المحرر الأول هو 8 من 10، أما تقدير كفاءة المحرر الثاني فهو 6 من 10، بالإضافة إلى أن المحرر الأول يطلب أجرة تقدر ب 3 ون على كل صفحة مخطوطة، أما المحرر الثاني فيطلب 2 ون على كل صفحة، لدى دار النشر ميزانية مخصصة لتحرير ونسخ المخطوطة مقدارها 4500 ون.

المطلوب:كون البرنامج الخطي الذي يلبي شروط نسخ وتحرير هذه المخطوطة بأعلى كفاءة ممكنة ثم حله.

التمرين 22:

مؤسسة متخصصة تقوم بتركيب نوعين من الكمبيوتر، عملية التجميع تتطلب ثلاث مراحل، الجدول التالي يبين الزمن اللازم لعملية التجميع بالنسبة لكل نوع في كل مرحلة.

المرحلة	النوع الأول A	النوع الثاني B
	الزمن اللازم لتجميع وحدة واحدة (دقيقة)	الزمن اللازم لتجميع وحدة واحدة (دقيقة)
الأولى	6	4.5
الثانية	5	3.5
الثالثة	4.5	5.5

الطاقة المتاحة في كل مرحلة قدرت بـ 8 ساعة، 8 ساعة و10 ساعة في اليوم على التوالي، علما أن المؤسسة ملزمة بتسويق ما لا يقل عن 50 وحدة من النوع A وما لا يقل عن 30 وحدة من النوع B.

المطلوب : تكوين البرنامج الخطي الخاص بنشاط هذه المؤسسة الذي يسمح لها بتدنية الطاقة العاطلة (عدد الساعات غير المستغلة) إلى أدنى حد ممكن.

6- هوامش الفصل الأول.

(1)- عبد الستار أحمد محمد الالوسي، **أساليب بحوث العمليات، الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم للنشر والتوزيع، الإمارات العربية المتحدة، الطبعة الأولى، 2003، ص 8.

(2)- إبراهيم نائب، إنعام باقية، **نظرية القرارات، نماذج وأساليب كمية محوسبة**، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة الثانية، الأردن، 2015، ص29.

(3)- محمد عبد العزيز أبو رمان، **البرمجة الخطية النظرية والتطبيق**، دون دار نشر، الطبعة الأولى، مصر، 1980، ص 20.

(4)- مفيدة يحياوي، **التقنيات الكمية في إدارة الأعمال، محاضرات وتمارين**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2014، ص 66.

(5)- شفيق العتوم، **بحوث العمليات**، دار المناهج للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2005، ص 78.

(6)- ضيف أحمد، **محاضرات في نظرية اتخاذ القرار**، مطبوعة بيداغوجية، جامعة زيان عاشور بالجلفة، الجزائر، 2011/2010، ص 53 .

(7)- ادوارد ت. دولينج، **الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، سلسلة شوم، مصر، 2003، ص 214.

(8)- حمودي حاج صحراوي، **رياضيات المؤسسة كمدخل إلى التقنيات الكمية**، دار النشر جيطلي، الطبعة الأولى، الجزائر، 2014، ص 20.

(9)– David Anderson and other, **An introduction to management science**, **Quantitative approaches to decision making**, west publishing co., Minnesota, USA, 1985, p354.

(10)- حمودي حاج صحراوي، **رياضيات المؤسسة كمدخل إلى التقنيات الكمية**، مرجع سابق ص33.

(11)– Harvy M Wagner, **Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions**, Prentice hall international editions, USA, 1997, p129.

(12)- علي مكيد ، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015، ص121.

(13)- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر، 2009، ص115.

(14)- باري راندر وآخرون، **نمذجة القرارات وبحوث العمليات**، دار المريخ للنشر، الرياض، 2007، ص112.

(15)- رند عمران مصطفى الأسطل، **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية**، الطبعة السادسة، فلسطين، 2016، ص224، 225.

(16)و(18)- علي مكيد ، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، مرجع سبق ذكره، ص134، 138.

(17)- عبد الستار أحمد محمد الالوسي، **أساليب بحوث العمليات، الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، مرجع سبق ذكره، ص159.

الفصل الثاني

تمهيد:

يلعب النقل دورا هاما في الاقتصاد بشكل عام وفي اتخاذ القرارات المتعلقة بمنشات الأعمال بشكل خاص حيث أن توفر النقل يعتبر من الأمور الجوهرية في نمو وضمان بقاء واستمرار حركة الاقتصاد ومنشآت الأعمال، ويعتبر النقل كذلك أحد العناصر المهمة والرئيسية في إيصال البضائع والسلع من المنتجين إلى المستهلكين، وفي تحويل المنتجات المصنعة من ورشة إلى أخرى أو من مرحلة إنتاجية إلى أخرى، ولقد بدأت مشكلة النقل تأخذ أهميتها من خلال ما تحتله تكاليف النقل من أهمية نسبية مقارنة بمجموع تكاليف التصنيع والإنتاج وغيرها، من هذا المنطلق تسعى المؤسسات المختلفة إلى استخدام الطرق والأساليب الحديثة من أجل تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى مستوى ممكن.

1- مدخل إلى مسألة النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى مجالات التطبيق الهامة في الطرق والأساليب الكمية حيث كباقي أساليب وتقنيات بحوث العمليات تتضمن مواقف تخصيص الموارد، فمشكلة النقل تتعلق بقرار تخصيص أو تعيين طريقة مثلى للانتقال المادي لكميات من السلع توجد في نقاط معينة يطلق عليها نقاط التوريد أو الإمداد (العرض)، إلى مواقع أخرى يطلق عليها نقاط الاستهلاك أو (الطلب) وذلك بشرط أن تصل التكلفة الكلية للنقل إلى أدنى ما يمكن، فتكاليف النقل لها أهمية بالنسبة للإدارة أو المؤسسة حيث أن أي توفير فيها يعود على المؤسسة بأرباح طائلة، ولمسالة النقل طرق خاصة في الحل وهي عبارة عن عملية تتابعية تبدأ هذه الطريقة بحل أساسي ممكن يطلق عليه الحل القاعدي أو الحل الابتدائي، ثم يتم الانتقال إلى البحث عن حل آخر أفضل يطلق عليه الحل الأمثل أو النهائي، والحل يعتبر نهائيا وأمثلا عندما لا يكون هناك أي إمكانية لتخفيض تكلفة النقل. [1]

لقد تم تطوير نماذج النقل كأحد الأساليب الكمية لأول مرة عام 1941 من قبل هيتشكوك حيث قدم دراسة بعنوان " توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية ، وبعد الحرب العالمية الثانية تشجع رجال الأعمال الذين كانوا يبحثون عن حلول لمشاكلهم على إدخال هذا العلم في إدارة مشاريعهم[2]، وكانت محاولة كوبر سنة 1953 لوضع نموذج مشكلة التوزيع في صورة مبسطة أولى المحاولات المثمرة في هذا المجال حيث توصل إلى ما يسمى الحجر المتنقل (Stepping stone) ، ثم قام فارجيسون بتهذيب طريقة الحجر المتنقل (Stepping stone) سنة 1955 لتصبح ما يسمى بطريقة التوزيع المعدلة أو طريقة كلفة الظل، وفي أواخر نفس السنة ظهرت طريقة فوجل التقريبية (vogel's approximation) والتي تعتبر طريقة مساعدة لحل مشاكل النقل والتوزيع، ويرجع السبب في تسمية هذه المشكلة بمسالة النقل إلى تعدد مراكز الإنتاج أو التصنيع وتعدد المناطق التي تصل إليها المنتجات، ويزداد تعقد هذه المشكلة مع تعدد مراكز الاستلام والإنتاج، فبزيادة هذه المراكز

تزداد البدائل المتاحة مما يعني صعوبة تقييمها للوصول إلى أدنى التكاليف وهو الهدف المطلوب الوصول إليه في مثل هذه المشكلات [3].

ولمسألة النقل سمات وشروط أساسية حتى يمكن وصفها ووضعها في شكل نموذج رياضي وهي:

- وجود طاقات محدودة ومعروفة ومقاسه كميا للمصانع والمخازن التي تنقل منها السلع أو المواد، وكذلك فإن المستعملين أو تجار الجملة أو المصبات كجهات طالبة يجب أن تكون احتياجاتها محددة ومقاسه في شكل كمي.
- وجود مسارات متعددة لنقل أو شحن المنتجات أو السلع أو المواد من مناطق الإنتاج أو العرض إلى مناطق الاستهلاك أو الاستعمال أو الطلب، حتى يتمكن الاختيار والمفاضلة بين هذه المسارات البديلة.
- ثبات تكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلع أو المواد المنقولة من مواقع الشحن إلى مناطق الوصول إلى جانب تجانس المنتجات وتماثلها وعدم اختلافها في مناطق التوزيع. [4]

ويتضمن نموذج النقل الخاص بحل مسألة النقل المراحل التالية:

- إعداد مصفوفة النقل ومن ثم تصميم حل مبدئي أساسي ممكن يلبي احتياجات النهايات المختلفة في حدود الطاقات المتاحة للمصادر، ويمكن تحديد هذا الحل بعدة طرق من أهمها طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة أدنى تكلفة وطريقة فوجل التقريبية.
- اختبار مثالية الحل وذلك بتحديد تكلفة الفرصة الضائعة لكل خلية من الخلايا الفارغة أي المتغيرات غير الأساسية في الحل الذي يتم اختباره للتعرف على ما إذا كان يمكن تخفيض تكلفة النقل الكلية بشغل خلية أو أكثر خلاف تلك الخلايا التي تم شغلها في الحل الابتدائي أو القاعدي وتتحقق مثالية الحل إذا كانت تكاليف الفرصة الضائعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة أو مساوية للصفر.
- تصميم حلول أخرى وذلك باستخدام الخلايا الفارغة التي تحقق أكبر تخفيض في تكلفة النقل الكلية أي إدخال متغيرات غير أساسية في الحل لتصبح متغيرات أساسية ثم يتم تكرار الخطوتين السابقتين حتى نصل إلى الحل الأمثل.

الآن إذا افترضنا أن لدينا (n) من المخازن أو المصانع أو المصادر، حيث نرمز لكل مخزن بـ B ويحتوي كل مخزن على كمية من السلع أو المنتجات، وأن لدينا كذلك عدد (m) من المستعملين أو المستهلكين أو طالبي هذه السلعة حيث نرمز لكل مستعمل بـ A ويطلب كل مستعمل كمية من هذه السلع أو المنتجات، ومنطقيا فإن نقل السلع من المخازن إلى المستعملين يتطلب تكلفة حيث نرمز لها بـ C.[5]

إن المشكلة الواجب حلها هي إيجاد وتحديد شبكة الطرق المثلى التي تجعل التكاليف عند أدنى حد أو مستوى ممكن، أو بعبارة أخرى نقل جميع المنتجات من المخازن أو المصانع إلى جميع المستهلكين أو المستعملين بأقل تكلفة كلية ممكنة، حيث يمكن تلخيص هذه المشكلة في الجدول التالي:[6]

		المخازن أو المصانع B							الكميات المتوفرة في المخازن أو المصانع
		B_1	B_2	B_3	.	.	.	B_n	
المستهلكين أو المستعملين A	A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	.	.	.	C_{1n}	a_1
	A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	.	.	.	C_{2n}	a_2
	A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	.	.	.	C_{3n}	a_3
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	A_m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	.	.	.	C_{mn}	a_m
الكميات المتوفرة في المخازن أو المصانع		b_1	b_2	b_3	.	.	.	b_n	

حيث تمثل $\mathbf{b_n}$ الكمية المتوفرة من السلعة أو المنتج أو المادة الأولية في الخازن أو المصانع أو نعبر عنها بالكمية المعروضة.

وتمثل $\mathbf{a_m}$ الكمية المطلوبة من المنتج أو المادة الأولية من قبل المستعملين أو نعبر عنها بالكمية المطلوبة.

وتمثل $\mathbf{C_{mn}}$ تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع أو المخزن إلى المستهلك، أو بتعبير آخر تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر إلى المستعمل.

وأخيرا هناك الكميات الواجب نقلها من كل مخزن أو مصنع إلى كل مستهلك أو مستعمل أو طالب للسلعة عبر طرق النقل المتاحة حيث نرمز لهذه الكميات بـ $\mathbf{x_{ij}}$.

2- طرق إيجاد الحل القاعدي (الابتدائي) لمسألة النقل

تتطلب مسألة النقل طرقا خاصة لحلها فهي وإن كانت تعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية إلا أن لها طرقا أسهل وأسرع لإيجاد الحل النهائي الأمثل ويمكن تلخيص هذه الطرق في قسمين أو على مرحلتين، طرق لإيجاد الحل الابتدائي أو الحل القاعدي وسنتناول منها ثلاثة طرق ولإيجاد الحل النهائي الأمثل سنتناول ثلاثة طرق كذلك حيث سنتطرق لها فيما بعد، ونشير هنا إلى أننا سوف نتعرض أولا للنموذج المغلق والذي يعني حالة تساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة ثم نتناول فيما بعد النموذج المفتوح ضمن الحالات الخاصة والذي يعني عدم تساوي العرض مع الطلب.

2-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية

تعتبر أبسط الطرق وأقدمها حيث تسعى هذه الطريقة لإيجاد حل أولي ممكن لمسألة النقل حتى يتمكن متخذ القرار من استخدام هذا الحل الأولي و تطويره لإيجاد الحل الأمثل إن أمكن، وتقوم هذه الطريقة على تحديد الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي ومن ثم مقارنة الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة ثم اختيار القيمة الأقل لوضعها في الخلية ثم طرح هذه القيمة من الكمية المعروضة والكمية المطلوبة.

خطوات طريقة الركن الشمالي الغربي:

- ملأ الخلية التي تقع في الركن أو الزاوية الشمالية الغربية للجدول بأكبر كمية Xij ممكنة.
- نعود لتقييم عمود العرض و سطر الطلب كالتالي:

$$\text{New } \mathbf{a}_m = \mathbf{a}_m - Xij$$

$$\text{New } \mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n - Xij$$

- إذا كانت $\mathbf{a}_m$ أكبر من $\mathbf{b}_n$ نحذف العمود أما إذا كانت أقل فنحذف السطر من التقييم.
- إذا كانت $\mathbf{a}_m$ مساوية لـ $\mathbf{b}_n$ تعتبر حالة خاصة سنتكلم عليها فيما بعد.
- ثم نعيد تطبيق القواعد السابقة بعد التعديل بداية من الخلية أو الخانة في الزاوية الشمالية الغربية.
- يكون الحل مقبولا إذا كان عدد الأسطر زائد عدد الأعمدة ناقص واحد مساويا لعدد طرق النقل المستعملة($m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة)

- ثم بعد تصبح كامل الخلايا أو الخانات أو طرق النقل إما مملوءة في الجدول أو مشطوبة (مظللة) نقوم بحساب تكلفة النقل الأولية وذلك بضرب الكميات في التكاليف ثم جمعها.[7]

مثال:

شركة لصناعة الملابس تملك ثلاث مصانع وكانت الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول 120 وحدة والمصنع الثاني 180 وحدة أما المصنع الثالث فكانت 160 وحدة، وإن الطلب المتوقع على هذه المنتجات في مناطق التوزيع وهي أربعة حيث كانت الكمية المطلوبة في المنطقة الأولى 90 وحدة وفي المنطقة الثانية 110 وحدة وفي المنطقة الثالثة 60 وحدة وفي المنطقة الرابعة 200 وحدة، والجدول التالي يبين تكاليف النقل للوحدة الواحدة من المصانع إلى مناطق التوزيع كما يلي:

		المصانع			الكميات
		الأول	الثاني	الثالث	المطلوبة
مناطق التوزيع	الأولى	7	10	8	90
	الثانية	5	6	9	110
	الثالثة	4	11	7	60
	الرابعة	6	9	8	200
الكميات المتاحة في المصانع		120	180	160	

المطلوب: إيجاد الحل الابتدائي أو القاعدي لكيفية توزيع الكميات من المصانع إلى مناطق التوزيع باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الحل:

التوزيع يبدأ من اليسار الأعلى (الزاوية الشمالية الغربية) أي ابتداء من الخانة المقابلة للسطر الأول والعمود الأول بحيث لا نعطي مستعملا أو منطقة توزيع أكثر من حاجتها، ولا نحمل مصنعا أكثر من طاقته، أي نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة.

فنملئ أولا الخلية x_{11} بأقل كمية مقابلة لها من بين الكميتين 90 و120، أي 90 وحدة وهي الكمية الأقل، الآن نكون قد لبينا حاجة المنطقة الأولى التي تحتاج 90 وحدة من المصنع الأول الذي يحتوي

على كمية مقدارها 120 وحدة وبالتالي فان المصنع الأول يبقي لديه كمية متاحة مقدارها 30 وحدة، ونقوم بشطب أو تظليل الخانات المتبقية في السطر على اعتبار أنها خانات لا يمكن ملؤها (أي طرق نقل غير ممكن استعمالها) كما يلي:

90			~~90~~	0
			110	
			60	
			200	
~~120~~ 30	180	160		

الآن نتوجه إلى الزاوية الشمالية الغربية والتي تقابل السطر الثاني والعمود الأول حيث تقابل الكميتين 110 و 30 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 30 وحدة وهي الكمية المتبقية في المصنع الأول الذي سبق وان امددنا المنطقة الأولى منه بـ 90 وحدة وبالتالي سوف يستنفد كل الكمية المتاحة أو التي كانت موجودة فيه فلن يتبقى في المصنع الأول شيء، أما بالنسبة للمنطقة الثانية والتي تحتاج 110 وحدة بقي تحتاج بعد أن أمددناها بـ 30 وحدة من المصنع الأول بـ 30 وحدة بقيت تحتاج 80 وحدة ونشطب العمود الأول كما يلي:

90			~~90~~	0
30			~~110~~	80
			60	
			200	
~~120~~ ~~30~~ 0	180	160		

وبنفس الطريقة نتوجه إلى الزاوية الشمالية الغربية والتي تقابل السطر الثاني والعمود الثاني حيث تقابل الكميتين 80 و 180 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 80 وحدة وبالتالي سوف نلبي كل الكمية المطلوبة للمنطقة الثانية، أما بالنسبة للمصنع الثاني والذي يتوفر على كمية قدرها 180 وحدة فستبقى فيه الكمية 100 وحدة ونشطب السطر الثاني كما يلي:

90			~~90~~	0
30	80		~~110~~	~~80~~ 0
			60	
			200	
~~120~~	~~180~~	160		
~~30~~	100			
0				

الآن نتوجه إلى الزاوية الشمالية الغربية والتي تقابل السطر الثالث والعمود الثاني حيث تقابل الكميتين 60 و 100 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 60 وحدة وبالتالي سوف نلبي كل الكمية المطلوبة للمنطقة الثالثة، أما بالنسبة للمصنع الثاني والذي بقي يتوفر على كمية قدرها 100 وحدة فستبقى فيه الكمية 40 وحدة ونشطب السطر الثاني كما يلي:

90			~~90~~	0
30	80		~~110~~	~~80~~ 0
	60		~~60~~	0
			200	
~~120~~	~~180~~	160		
~~30~~	~~100~~			
0	40			

الآن نتوجه إلى الزاوية الشمالية الغربية والتي تقابل السطر الرابع والعمود الثاني حيث تقابل الكميتين 200 و 40 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 40 وحدة وهي الكمية المتبقية في المصنع الثاني الذي سبق وان امددنا المنطقة الثانية والثالثة منه بـ 80 و60 وحدة على التوالي وبالتالي سوف يستنفد كل الكمية المتاحة أو التي كانت موجودة فيه فلن يتبقى في المصنع الثاني شيء، أما بالنسبة للمنطقة الرابعة والتي تحتاج 200 وحدة بقيت تحتاج 160 وحدة كما يلي:

90			~~90~~	0
30	80		~~110~~	~~80~~ 0
	60		~~60~~	0
	40		~~200~~	160
~~120~~	~~180~~	160		
~~30~~	~~100~~			
0	~~40~~			
	0			

آخر خطوة وهي ملئ الزاوية الشمالية الغربية أي الخانة المتبقية بالكمية المقابلة للسطر الرابع والعمود الثالث وهي 160 وحدة ونكون قد لبينا كامل الاحتياجات الخاصة بالمناطق الأربعة، وفي نفس الوقت تكون كل الكميات المتاحة في المخازن قد استنفدت بالكامل وفي النهاية نتحصل على الحل الابتدائي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية كما يلي:

90			~~90~~	0
30	80		~~110~~	~~80~~ 0
	60		~~60~~	0
	40	160	~~200~~	~~160~~ 0
~~120~~	~~180~~	~~160~~		
~~30~~	~~100~~	0		
0	~~40~~			
	0			

لقد توصلنا حتى الآن إلى جدول الحل الابتدائي وذلك بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، بقي علينا التحقق من إن هذا الحل مقبول أم لا، وقد كنا ذكرنا فيما سبق أن شرط قبول الحل الابتدائي أو القاعدي هو:

($m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة) أي ($3+4-1=6$)، ومادام الشرط محقق فان الحل الابتدائي مقبول، نقوم الآن بحساب التكلفة الكلية للنقل للحل الابتدائي وذلك بضرب الكميات المنقولة عبر طرق النقل المستعملة في تكاليف النقل الأحادية ثم نجمعها كما يلي:

التكلفة الكلية للنقل = (90.7) +(30.5) +(80.6) +(60.11) +(40.9) +(160.8)

التكلفة الكلية للنقل = (630) +(150) +(480) +(660) +(360) +(1280)

التكلفة الكلية للنقل = **3560** ون

2-2- طريقة التكاليف الصغرى

تقوم هذه الطريقة على مبدأ أن التكاليف هي العنصر المهم في المسألة وبالتالي تهدف إلى إيجاد حل أولي ممكن عبر تخفيض تكلفة النقل وذلك على أمل أن يساهم هذا المبدأ في تقليل عدد الجداول اللازمة للوصول للحل الأمثل أي تخفيض عدد المحاولات، إن خطوات الحل حسب هذه الطريقة كما يلي:

- نقوم بتحديد الخلية CELLij أو الخانة ذات التكلفة الأقل في الجدول، أي أقل تكلفة وحدوية في كامل الجدول، أما في حالة ما إذا كانت هناك قيمتين أو أكثر متساويتين فيمكننا الاختيار عشوائيا، وإما ننظر في إمكانية ملئ الخانتين فنبدأ بالخانة التي يمكن ملؤها بالكمية الكبيرة.
- نقوم بملء الخلية CELLij المختارة بأكبر كمية Xij ممكنة.
- نقوم بتقييم العمود و السطر كالتالي:

$$\text{New } \mathbf{a}_m = \mathbf{a}_m - Xij$$

$$\text{New } \mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n - Xij$$

- إذا كانت $\mathbf{a}_m$ أكبر من $\mathbf{b}_n$ نحذف العمود أما إذا كانت أقل فنحذف السطر من التقييم.
- إذا كانت $\mathbf{a}_m$ مساوية لـ $\mathbf{b}_n$ تعتبر حالة خاصة سنتكلم عليها فيما بعد.
- ثم نعيد تطبيق القواعد السابقة بعد التعديل بداية من الخلية أو الخانة ذات التكلفة الأقل ثم الأقل وهكذا إلى أن يمتلئ كامل الجدول بالكميات المنقولة عبر طرق النقل.
- يكون الحل مقبولا إذا كان عدد الأسطر زائد عدد الأعمدة ناقص واحد مساويا لعدد طرق النقل المستعملة($m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة).
- ثم بعدما تصبح كامل الخلايا أو الخانات أو طرق النقل إما مملوءة في الجدول أو مشطوبة (مظللة) نقوم بحساب تكلفة النقل الأولية وذلك بضرب الكميات في التكاليف ثم جمعها.[8]

مثال: أوجد الحل القاعدي أو الابتدائي لمسالة النقل التالية باستعمال طريقة التكاليف الصغرى.

		مصانع			
		الأول	الثاني	الثالث	
مستعملين	الأول	8	6	10	45
	الثاني	6	7	11	35
	الثالث	9	5	8	55
	الرابع	4	3	9	65
		90	60	50	

الحل:

التوزيع يبدأ من الخانة ذات الأقل تكلفة وهي الخانة ذات التكلفة 3 ون أي ابتداء من الخلية المقابلة للسطر الرابع والعمود الثاني، فنملئ أولا الخلية x_{42} بأقل كمية مقابلة لها من بين الكميتين 62 و60، أي 60 وحدة وهي الكمية الأقل، الآن يكون المصنع الأول الذي يحتوي على كمية مقدارها 60 وحدة قد استنفد كامل الكمية المتاحة لديه، وبالتالي فان المصنع الثاني لا يبقي لديه كمية متوفرة، ونقوم بشطب أو تظليل الخانات المتبقية في العمود الثاني على اعتبار أنها خانات لا يمكن ملؤها (أي طرق نقل غير ممكن استعمالها) أما المستعمل الرابع فنكون قد لبينا 60 وحدة ويبقى يحتاج 5 وحدات كما يلي:

			45
			35
			55
	60		~~65~~ 5
90	~~60~~	50	
	0		

الآن نتوجه إلى طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل والتي تقابل السطر الرابع والعمود الأول حيث التكلفة الوحدوية هي 4 ون وتقابل الكميتين 5 و 90 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 5 وحدة وهي الكمية المتبقية للمستعمل الرابع أما الكمية المتبقية في المصنع الأول هي 85 وحدة وسوف نشطب السطر الرابع كما يلي:

			45
			35
			55
5	60		~~65~~ ~~5~~ 0
~~90~~ 85	~~60~~ 0	50	

الآن نتوجه إلى طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل والتي تقابل السطر الثاني والعمود الأول حيث التكلفة الوحدوية هي 6 ون وتقابل الكميتين 35 و 85 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 35 وحدة وهي الكمية المطلوبة من قبل للمستعمل الثاني أما الكمية المتبقية في المصنع الأول فتصبح 50 وحدة وسوف نشطب السطر الثاني كما يلي:

			45
35			~~35~~ 0
			55
5	60		~~65~~ ~~5~~ 0
~~90~~ ~~85~~ 50	~~60~~ 0	50	

الآن نتوجه إلى طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل، وفي هذه الحالة توجد خانتين تحتوي كل واحد على تكلفة وحدوية 8 ون، في هذه الحالة إما نختار عشوائيا أو نختار الخانة التي يمكن ملؤها بأكبر كمية ممكنة وهي الخانة التي تقابل السطر الثالث والعمود الثالث حيث التكلفة الوحدوية هي 8 ون كما ذكرنا وتقابل الكميتين 55 و 50 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 50 وحدة وهي الكمية المطلوبة من قبل المستعمل الثالث أما الكمية المتبقية في المصنع الثالث فتصبح 0 وحدة وسوف نشطب العمود الثالث كما يلي:

			45
35			~~35~~ 0
		50	~~55~~ 5
5	60		~~65~~ ~~5~~ 0
~~90~~	~~60~~	~~50~~	
~~85~~	0	0	
50			

الآن نتوجه إلى طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل وهي الخانة التي تقابل السطر الأول والعمود الثالث حيث التكلفة الوحدوية هي 8 ون وتقابل الكميتين 45 و 50 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 45 وحدة وهي الكمية المطلوبة من قبل المستعمل الأول أما الكمية المتبقية في المصنع الأول فتصبح 5 وحدة ويصبح الجدول كما يلي:

45			~~45~~
35			~~35~~ 0
		50	~~55~~ 5
5	60		~~65~~ ~~5~~ 0
~~90~~	~~60~~	~~50~~	
~~85~~	0	0	
~~50~~			
5			

الآن نتوجه إلى الخانة ذات التكلفة الأقل وهي الخانة الأخيرة في الجدول والتي تقابل السطر الثالث والعمود الأول حيث التكلفة الوحدوية هي 9 ون وتقابل الكميتين 5 و 5 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 5 وحدة فيصبح الجدول كما يلي:

45			~~45~~		
35			~~35~~	0	
5		50	~~55~~	~~5~~	0
5	60		~~65~~	~~5~~	0
~~90~~	~~60~~	~~50~~			
~~85~~	0	0			
~~50~~					
~~5~~					
0					

لقد توصلنا في هذه الخطوة إلى جدول الحل الابتدائي وذلك بطريقة التكاليف الصغرى أو التكلفة الأقل، بقي علينا التحقق من أن هذا الحل مقبول أم لا، وقد كنا ذكرنا فيما سبق أن شرط قبول الحل الابتدائي أو القاعدي هو:

(m+n-1 = عدد طرق النقل المستعملة) أي (3+4-1= 6)، ومادام الشرط محقق فان الحل الابتدائي مقبول، نقوم الآن بحساب التكلفة الكلية للنقل للحل الابتدائي وذلك بضرب الكميات المنقولة عبر طرق النقل المستعملة في تكاليف النقل الأحادية ثم نجمعها كما يلي:

التكلفة الكلية للنقل = (45.8) +(35.6) +(50.6) +(5.9) +(5.4) +(60.3)

التكلفة الكلية للنقل = (360) +(210) +(400) +(45) +(20) +(180)

التكلفة الكلية للنقل = **1215** ون

2-3- طريقة الفروقات الكبرى

تقوم هذه الطريقة على أساس الأخذ في الاعتبار تكلفة الندم لكل سطر و لكل عمود حتى لا نتكبد تكاليف ناتجة عن سؤ أو خطأ في الاختيار ، إن خطوات طريقة فوجل أو الفروقات الكبرى كما يلي:

- في كل صف نقوم بحساب تكلفة الندم على أساس الفرق في التكلفة بين الخليتين صاحبتي التكلفة الأقل في السطر، وفي كل عمود نقوم بحساب تكلفة الندم على أساس الفرق في التكلفة بين الخليتين صاحبتي التكلفة الأقل في العمود.
- نقوم باختيار أعلى تكلفة ندم أي أكبر الفروقات من كل الصفوف و الأعمدة، (عند التعادل اختر عشوائياً ، ثم نقوم بتقييم عمود العرض و سطر الطلب كالتالي:

$$\text{New } \mathbf{a}_m = \mathbf{a}_m - Xij$$

$$\text{New } \mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n - Xij$$

- إذا كانت $\mathbf{a}_m$ أكبر من $\mathbf{b}_n$ نحذف العمود أما إذا كانت أقل فنحذف السطر من التقييم.
- إذا كانت $\mathbf{a}_m$ مساوية لـ $\mathbf{b}_n$ تعتبر حالة خاصة سنتكلم عليها فيما بعد.
- ثم نعيد تطبيق القواعد (الخطوات) السابقة بعد التعديل بداء من الخلية أو الخانة ذات تكلفة الندم الجديدة أو الفرق الأكبر وهكذا.
- يكون الحل مقبولا إذا كان عدد الأسطر زائد عدد الأعمدة ناقص واحد مساويا لعدد طرق النقل المستعملة($m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة).
- ثم بعدما تصبح كامل الخلايا أو الخانات أو طرق النقل إما مملوءة في الجدول أو مشطوبة (مظللة) نقوم بحساب تكلفة النقل الأولية وذلك بضرب الكميات في التكاليف ثم جمعها.[9]

مثال: يتم إنتاج أحد المنتجات في أربعة مصانع وتشحن إلى ثلاثة متاجر للجملة، الجدول التالي يوضح تكاليف النقل لكل وحدة وطاقة كل مصنع والكميات المطلوبة من المتاجر كما يلي:

المصنع	متجر الجملة				طاقة المصنع
	f_4	f_3	f_2	f_1	
n_1	5	6	7	14	20
n_2	13	15	1	3	60
n_3	10	8	9	2	30
طلب متجر الجملة	30	25	45	10	

أوجد الحل الابتدائي لهذه المسألة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى.

الحل:

في البداية نقوم بحساب الفروقات في كل سطر وفي كل عمود على أساس أقل تكلفتين وحدويتين ونكتبها على الجانب الآخر من الجدول ثم نبدأ بالسطر أو العمود الذي يقابل اكبر فرق من بين الفروقات المحسوبة وسواء كانت في السطر أو العمود ثم نبدأ بالتوزيع من الخانة ذات الأقل تكلفة في العمود أو السطر الذي يقابل أكبر فرق وهو 8 أي العمود الثاني حيث يقابل الخانة ذات التكلفة 1 ون أي ابتداء من الخلية المقابلة للسطر الثاني والعمود الثاني، فنملئ أولا الخلية بأقل كمية مقابلة لها من بين الكميتين 60 و45، أي 45 وحدة وهي الكمية الأقل، الآن يكون المصنع الثاني الذي يحتوي على كمية مقدارها 45 وحدة قد استنفد كامل الكمية المتاحة لديه، وبالتالي فان المصنع الثاني لا يبقي لديه كمية متوفرة، ونقوم بشطب أو تظليل الخانات المتبقية في العمود الثاني على اعتبار أنها خانات لا يمكن ملؤها (أي طرق نقل غير ممكن استعمالها) أما المتجر الثاني فنكون قد لبينا 45 وحدة ويبقى يحتاج 15 وحدة كما يلي:

	1	8	2	5		
1					20	
2		45			~~60~~	15
6					30	
	10	~~45~~ 0	25	30		

الآن نتوجه إلى السطر الثالث حيث الفرق الأكبر هو 6 ونبحث عن طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل وهي الخانة التي تقابل السطر الثالث والعمود الأول حيث التكلفة الوحدوية هي 2 ون وتقابل الكميتين 30 و 10 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 10 وحدة وهي الكمية المتوفرة في المصنع الأول أما الكمية المطلوبة والمتبقية للمتجر الثالث صبح 20 وحدة ونشطب العمود الأول ويصبح الجدول كما يلي:

	1	8	2	5		
1					20	
2		45			~~60~~	15
6	10				30	20
	~~10~~	~~45~~	25	30		
	0	0				

الآن نتوجه إلى العمود الرابع حيث الفرق الأكبر هو 5 ونبحث عن طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل في ذلك العمود وهي الخانة التي تقابل السطر الأول والعمود الرابع حيث التكلفة الوحدوية هي 5 ون وتقابل الكميتين 20 و 30 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 20 وحدة وهي الكمية المطلوبة من قبل المتجر الأول أما الكمية المتبقية في المصنع الرابع فتصبح 10 وحدة ونشطب السطر الأول ويصبح الجدول كما يلي:

	1	8	2	5		
1				20	~~20~~	0
2		45			~~60~~	15
6	10				30	20
	~~10~~	~~45~~	25	~~30~~		
	0	0		10		

الآن نبحث عن أكبر فرق فنجد أن هناك قيمتين متساويتين وهي 2 و2 فنختار منهما عشوائيا وإما نختار الفرق الذي نجد في السطر أو العمود المقابل له اقل تكلفة وحدوية، سوف نختار الفرق المقابل للعمود الثالث ونبحث في ذلك العمود عن اقل تكلفة وحدوية وهي 8 ون وهي الخانة التي تقابل السطر الثالث والعمود الثالث حيث التكلفة الوحدوية هي 8 ون كما ذكرنا وتقابل الكميتين 20 و 25 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 20 وحدة وهي الكمية المتبقية المطلوبة من قبل المتجر الثالث أما الكمية المتبقية في المصنع الثالث فتصبح 5 وحدة ونشطب السطر الثالث ويصبح الجدول كما يلي:

	1	8	2	5			
1				20	~~20~~	0	
2		45			~~60~~	15	
6	10		20		30	~~20~~	0
	~~10~~	~~45~~	~~25~~	~~30~~			
	0	0	5	10			

الآن نتوجه إلى السطر الثاني حيث الفرق الأكبر هو 2 ونبحث عن طريق النقل أو الخانة ذات التكلفة الأقل في ذلك السطر وهي الخانة التي تقابل السطر الثاني والعمود الرابع حيث أقل تكلفة وحدوية في ذلك السطر من بين الخانات غير المستعملة هي 13 ون وتقابل الكميتين 15 و 10 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 10 وحدة وهي الكمية المتبقية في المصنع الرابع أما الكمية المتبقية والمطلوبة من قبل المتجر الثاني تصبح 5 وحدة ويصبح الجدول كما يلي:

	1	8	2	5			
1				20	~~20~~	0	
2		45		10	~~60~~	~~15~~	5
6	10		20		30	~~20~~	0
	~~10~~	~~45~~	~~25~~	~~30~~			
	0	0	5	~~10~~			
				0			

الآن نتوجه إلى الخانة ذات التكلفة الأقل وهي الخانة الأخيرة في الجدول والتي تقابل السطر الثالث والعمود الأول حيث التكلفة الوحدوية هي 9 ون وتقابل الكميتين 5 و 5 وحدة نملؤها بأقل الكميتين وهي 5 وحدة فيصبح لدينا الجدول الذي يمثل الحل الابتدائي كما يلي:

	1	8	2	5				
1				20	~~20~~	0		
2		45	5	10	~~60~~	~~15~~	~~5~~	0
6	10		20		30	~~20~~	0	
	~~10~~	~~45~~	~~25~~	~~30~~				
	0	0	~~5~~	~~10~~				
			0	0				

لقد توصلنا في هذه الخطوة إلى جدول الحل الابتدائي وذلك بطريقة الفروقات الكبرى، بقي علينا التحقق من أن هذا الحل مقبول أم لا، مع العلم أن شرط قبول الحل الابتدائي أو القاعدي هو:

(m+n-1 = عدد طرق النقل المستعملة) أي (3+4-1= 6)، ومادام الشرط محقق فان الحل الابتدائي مقبول، نقوم الآن بحساب التكلفة الكلية للنقل للحل الابتدائي وذلك بضرب الكميات المنقولة عبر طرق النقل المستعملة في تكاليف النقل الأحادية ثم نجمعها كما يلي:

التكلفة الكلية للنقل = (20.5) +(45.1) +(5.15) +(10.13) +(10.2) +(20.8)

التكلفة الكلية للنقل = (100) +(45) +(75) +(130) +(20) +(160)

التكلفة الكلية للنقل = **530** ون

3- طرق إيجاد الحل الأمثل (النهائي) لمسألة النقل

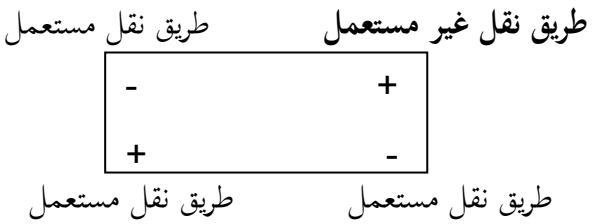
بعد التوصل إلى الحل الابتدائي أو القاعدي بموجب إحدى الطرق التي تناولناها في السابق وحساب تكلفة النقل الكلية حسب ذلك الحل تكون الخطوة التالية هي اختبار أمثلية الحل الذي تحصلنا عليه وذلك من أجل الحصول على الحل الأمثل أو الانتقال إلى الحل النهائي حيث تكون فيه التكاليف عند أدنى مستوى لها، من أجل ذلك سوف نتناول ثلاث طرق: طريقة التجريب، وطريقة التحويل.

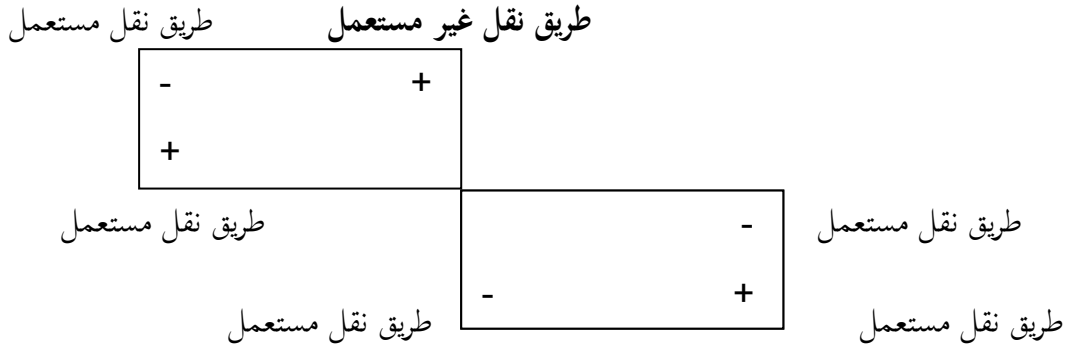
3-1- طريقة التجريب

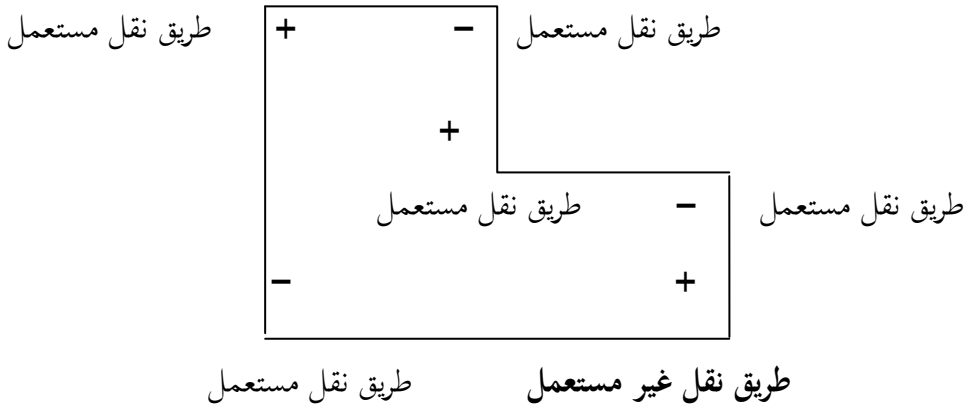
إن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة يعتمد على اختبار أمثلية الحل الابتدائي المتحصل عليه وعلى الفرصة الضائعة، وحسب هذه الطريقة يتم اختبار الخلايا أو الخانات الفارغة بالانتقال من طريق نقل غير مستعمل إلى طريق نقل مستعمل بأقصر طريق ممكن، ثم إلى طريق نقل مستعمل آخر بحيث ننتهي إلى الطريق غير المستعمل الأول التي انطلقنا منها دون أن تدخل في الحساب مرة أخرى أو ثانية.[10]

فإذا انتهينا من الخلايا الفارغة يكون تعديل الخلايا أو طرق النقل المستعملة بالزيادة أو النقصان بحسب المسار في الاختبار ويراعى عند اختبار الخلايا الفارغة أو طرق النقل غير المستعملة ما يلي:

- الاختبار يتم اعتبارا من طريق النقل غير المستعمل الأولى في السطر الأول ثم طريق النقل غير المستعمل الثاني في السطر الأول وهكذا ثم نمر إلى السطر الثاني ونختبر طرق النقل غير المستعملة ثم السطر الثالث وهكذا إلى غاية نهاية كامل الجدول.
- تحديد المسار بالانتقال من طريق النقل غير المستعمل (طريق النقل الذي نريد اختباره) إلى طريق نقل مستعمل إلى آخر مستعمل وهكذا إلى أن يتم الوصول إلى الطريق الأول غير المستعمل، أو بتعبير آخر رسم حلق عبارة عن خط منكسر مغلق يبدأ من طريق النقل غير المستعمل مرورا بطرق نقل مستعملة حيث يأخذ هذا المسار أشكالا متعددة شريطة أن يكون عدد رؤوس هذا المسار زوجيا.
- اتجاه الحلقة أو المسار يكون دائما إما أفقيا أو عموديا ولا يكون مائلا ويمكن أن يمر فوق طريق نقل مستعمل لكن لا يمكن اعتبار هذا الطريق داخلا في الحلقة أو المسار.
- نبدأ في وضع الإشارات + - في الخانات أو الرؤوس وذلك بالتناوب بداء من طريق النقل غير المستعمل المراد اختباره، حيث لا يمكن أن تكون الإشارات ++ أو - - لأن عدد الرؤوس زوجيا، كما أن تقاطع خطوط الحلقة لا تعطى له إشارة بحيث لا تعتبر رأس.
- تأخذ الحلقة أو المسار العديد من الأشكال نبين البعض منها كما يلي:[11]







وأشكال أخرى متعددة لا يمكن حصرها.

- نقوم بحساب قيمة طريق النقل المختبر والذي قد تأخذ قيمته عدد موجب أو عدد سالب أو صفر، فإذا كانت القيمة سالبة فهذا يعني أن هذا الطريق سيساهم في تخفيض تكاليف النقل أما إذا كانت موجبة فهذا يعني أنها ستزيد في تكاليف النقل وإذا كانت صفر فان هذه الطريق لا تزيد ولا تخفض من تكاليف النقل، نتوقف عن اختبار طرق النقل غير المستعملة عندما تصبح قيم جميع طرق النقل غير المستعملة موجبة أو صفر.

- من بين الخانات التي تحتوي على إشارات سالبة نختار الخانة التي تحتوي على اقل قيمة سالبة أي التي تخفض أكثر من غيرها فندخلها ضمن طرق النقل المستعملة، وذلك باختيار اقل قيمة فنطرحها من الخانة التي تكون فيها الإشارة سالبة ونضيفها إلى الخانة التي تكون فيها الإشارة موجبة ويصبح لدينا جدول جديد.
- نعيد كامل الخطوات السابقة في الجدول الجديد حتى تصبح قيم جميع الخانات موجبة بحيث لا تخفض في تكاليف النقل ثم نقوم بحساب التكلفة الجديدة وهكذا.[12]

مثال:

أوجد أدني تكلفة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التجريب.

14	**12**	**15**	**14**	**70**
15	**13**	**18**	**13**	**65**
13	**17**	**11**	**15**	**85**
90	**60**	**30**	**40**	

أولا نقوم بالبحث عن الحل الابتدائي وذلك بإتباع الخطوات التي تطرقنا إليها فيما سبق والخاصة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية فنتحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

70				**70**
20	**45**			**65**
	15	**30**	**40**	**85**
90	**60**	**30**	**40**	

$m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة = 6 وبالتالي الحل الابتدائي مقبول.

التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل الابتدائي = 3050.

الآن باستعمال طريقة التجريب (Stepping stone) نقوم بمحاول تحسين هذا الحل أو بتعبير آخر البحث عن إمكانية تخفيض التكلفة الكلية للنقل وذلك من خلال تجريب أو اختبار طرق النقل غير المستعملة.

المحاولة الأولى لتحسين الحل

التكاليف الوحدوية

14	12	15	14
15	13	18	13
13	17	11	15

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70			
A_2	-20	+45		
A_3	+	**-15**	30	40

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_4 : +14-15+17-13+15-14 = +4

A_1B_3 : +15-11+17-13+15-14 = +9

A_1B_2 : +12-13+15-14 = 0

A_2B_4 : +13-15+17-13 = +2

A_2B_3 : +18-11+17-13 = +11

A_3B_1 : +13-17+13-15 = -6

يمكن ملاحظة أن طرق النقل أو الخلايا غير المستعملة كلها لو استعملناها سوف يزيد ذلك في التكلفة الإجمالية للنقل إلا الطريق **A_3B_1** فانه سوف يخفض في التكلفة بـ 6 ون لكل وحدة منقولة وبالتالي سوف ندخل هذا الطريق ضمن شبكة النقل وذلك باستعمال الحلقة كما ذكرنا فيما سبق ثم نختار من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 15، أي سوف نضيف 15 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **2960** = (6*15)-3050.

المحاولة الثانية لتحسين الحل

التكاليف الوحدوية

14	12	15	14
15	13	18	13
13	17	11	15

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70			
A_2	**-5**	60		+
A_3	15		30	-40

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_4 : +14-15+13-14 = -2

A_1B_3 : +15-11+13-14 = +3

A_1B_2 : +12-13+15-14 = 0

A_2B_4 : +13-15+13-15 = -4

A_2B_3 : +18-11+13-15 = +5

A_3B_2 : +17-13+15-13 = +6

يمكن ملاحظة أن طرق النقل أو الخلايا غير المستعملة كلها لو استعملناها سوف يزيد ذلك في التكلفة الإجمالية للنقل إلا الطريق **A_2B_4** فانه سوف يخفض في التكلفة بـ 4 ون لكل وحدة منقولة وبالتالي سوف ندخل هذا الطريق ضمن شبكة النقل وذلك باستعمال الحلقة كما ذكرنا فيما سبق ثم نختار من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 5، أي سوف نضيف 5 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **2940** = (5*4)-2960.

المحاولة الثالثة لتحسين الحل

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70-	+		
A_2		60-		+5
A_3	20+		30	-35

التكاليف الوحدوية

14	12	15	14
15	13	18	13
13	17	11	15

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_4 : +14-15+13-14 = -2

A_1B_3 : +15-11+13-14 = +3

A_1B_2 : +12-13+13-15+13-14 = -4

A_2B_3 : +18-11+15-13 = +9

A_2B_1 : +15-13+15-13 = +4

A_3B_2 : +17-15+13-13 = +2

نلاحظ أن طريق النقل $\mathbf{A_1B_2}$ لو استعملناه فانه سوف يخفض في التكلفة بـ 4 ون لكل وحدة منقولة وبالتالي سوف ندخل هذا الطريق ضمن شبكة النقل وذلك باستعمال الحلقة ثم نختار من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 35، أي سوف نضيف 35 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **2800** = (4*35)-2940.

المحاولة الرابعة لتحسين الحل

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	35	35		
A_2		25		40
A_3	55		30	

التكاليف الوحدوية

14	12	15	14
15	13	18	13
13	17	11	15

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_4 : +14-13+13-12 = +2

A_1B_3 : +15-11+13-14 = +3

A_2B_3 : +18-11+13-14+12-13 = +4

A_2B_1 : +15-13+12-14 = 0

A_3B_4 : +15-13+13-12+14-13 = +4

A_3B_2 : +17-12+14-13 = +6

يمكن ملاحظة أن جميع طرق النقل أو الخلايا غير المستعملة كلها لو استعملناها سوف يزيد ذلك في التكلفة الإجمالية للنقل لان كل القيم موجبة أو صفر وبالتالي فان أرخص تكلفة نقل كلية ممكنة هي المتحصل عليها في المحاولة السابقة وهي **2800**.

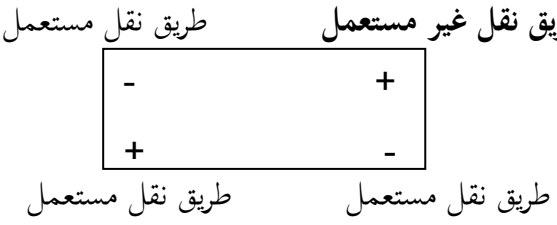
3-2- طريقة التحويل

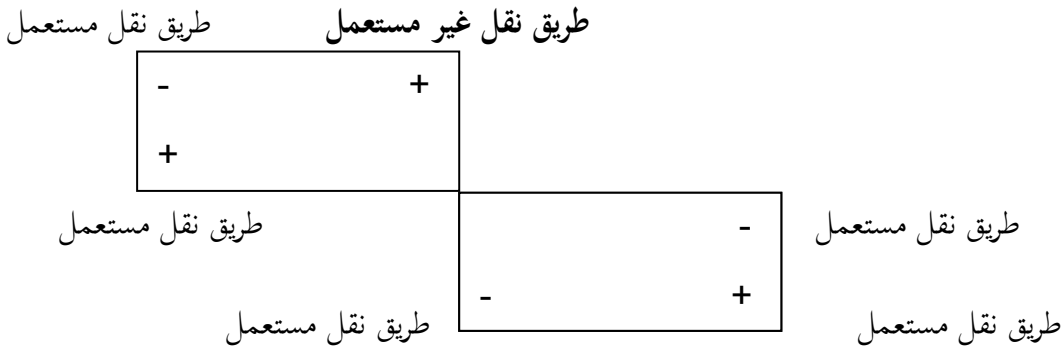
إن البحث عن الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة يعتمد أيضا على اختبار أمثلية الحل الابتدائي المتحصل عليه وعلى الفرصة الضائعة ولكن بطريقة أخرى، إن خطوات الحل حسب هذه الطريقة وذلك بعد الحصول على الحل الابتدائي بإحدى الطرق السالفة الذكر تكون كما يلي:

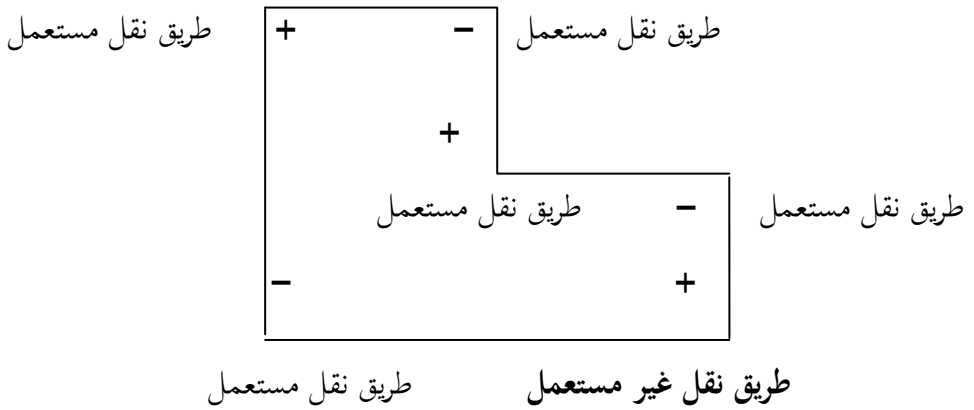
- نقوم برسم أربعة جداول متماثلة، وبالإضافة إلى ذلك نضيف إلى الجدول الأول والثاني عمود وسطر حيث أن العمود E_i والسطر F_j .
- نقوم بشطب أو تضليل طرق النقل غير المستعملة أو الخانات غير المملوءة في الجدول الأول.
- نقوم بشطب أو تضليل طرق النقل المستعملة أو الخانات المملوءة في الجدول الثاني والثالث والرابع، بمعنى آخر نقوم بعكس ما قمنا به في الجدول الأول.
- في الخانات غير المشطوبة أو غير المضللة في الجدول الأول والثالث نقوم بملء قيم التكاليف الوحدوية المعطاة في الجدول الابتدائي.
- نبحث عن قيم العمود E_i والسطر F_j باستعمال العلاقة $C_{ij} = E_i + F_j$ ولكن لا يمكن ذلك إلا بفتح الحساب باقتراح رقم في إحدى الخانات، عادة ما نستعمل أو نبدأ الحساب بالرقم صفر وذلك من أجل تسهيل العمليات الحسابية، مع العلم أن قيم C_{ij} هي التكاليف الوحدوية المعطاة في السابق في الجدول الابتدائي.
- بعد استكمال العمليات الحسابية وإيجاد كل قيم العمود E_i والسطر F_j في الجدول الأول ننقل تلك القيم مباشرة إلى الجدول رقم ثلاثة.
- نبحث عن قيم C_{ij} في الجدول الثاني باستعمال نفس العلاقة السابقة $C_{ij} = E_i + F_j$.
- من أجل الحصول على قيم الجدول الرابع والأخير نقوم بطرح قيم الجدول الثالث من قيم الجدول الثاني، أي قيم الجدول الثاني ناقص قيم الجدول الثالث.
- قيم الجدول الرابع ما هي إلا اختبار للخانات غير المستعملة، فإذا كانت القيمة موجبة فهذا يعني ذلك الطريق سوف يزيد في تكلفة النقل لو أدخلناه إلى شبكة النقل، وإذا كانت القيمة سالبة فهذا يعني أن ذلك الطريق سوف يخفض من تكلفة النقل لو أدخلناه إلى شبكة النقل، أما إذا

كانت القيمة تساوي صفر فإن ذلك الطريق أو الخانة لا تؤثر على تكلفة النقل وبالتالي لو أدخلناه إلى شبكة النقل فإنه لا يزيد ولا يخفض من تكلفة النقل.[13]

- إذا كانت في الجدول قيم سالبة نختار أقل قيمة من بينها وندخلها في شبكة النقل، أي نجعلها ضمن شبكة النقل المستعملة فذلك سوف يخفض لنا في تكلفة النقل الإجمالية.
- نقوم برسم حلقة هي عبارة عن خط منكسر مغلق ينطلق من الخانة المراد إدخالها ضمن شبكة النقل ويعود إليها حيث تكون الرؤوس عبارة عن خانات مملوءة طرق نقل مستعملة.
- تأخذ الحلقة أو المسار العديد من الأشكال من بينها:







- من بين الخانات التي تحتوي على إشارات سالبة نختار الخانة التي تحتوي على اقل قيمة سالبة أي التي تخفض أكثر من غيرها فندخلها ضمن طرق النقل المستعملة، وذلك باختيار اقل قيمة فنطرحها من الخانة التي تكون فيها الإشارة سالبة ونضيفها إلى الخانة التي تكون فيها الإشارة موجبة ويصبح لدينا جدول جديد.
- نعيد كامل الخطوات السابقة في الجدول الجديد حتى تصبح قيم جميع الخانات موجبة بحيث لا تخفض في تكاليف النقل، ثم نقوم بحساب التكلفة الجديدة وهكذا.[14]

مثال01:

أوجد أدني تكلفة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل.

4	**5**	**6**	**7**	**50**
4	**9**	**3**	**2**	**150**
6	**5**	**2**	**3**	**60**
8	**1**	**2**	**4**	**40**
35	**45**	**165**	**55**	

أولا نقوم بالبحث عن الحل الابتدائي وذلك بإتباع الخطوات التي تطرقنا إليها فيما سبق والخاصة بطريقة التكاليف الصغرى فنتحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

35	**5**	**10**		**50**
		95	**55**	**150**
		60		**60**
	40			**40**
50	**40**	**160**	**80**	

$m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة = 7 وبالتالي الحل الابتدائي مقبول.

التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل الابتدائي = 780.

الآن باستعمال طريقة التحويل (الجداول) نقوم بمحاول تحسين هذا الحل أو البحث عن إمكانية تخفيض التكلفة الكلية للنقل وذلك اختبار طرق النقل غير المستعملة كما يلي.

المحاولة الأولى لتحسين الحل

	الجدول رقم 2				E_i			الجدول رقم 1				E_i
	-	-	-	5	4			4	5	6	-	4
	1	2	-	-	1			-	-	3	2	1
	0	1	-	1	0			-	-	2	-	0
	1	-	3	2	1			-	2	-	-	1
F_j	0	1	2	1			F_j	0	1	2	1	
	الجدول رقم 4							الجدول رقم 3				
	-	-	-	6				-	-	-	7	
	3	7	-	-				4	9	-	-	
	6	4	-	2				6	5	-	3	
	7	-	**-1**	2				8	-	2	4	

يمكن ملاحظة أن الجدول الرابع يحتوي على قيمة سالبة وهي 1- وهذا يعني أن هذا الطريق يخفض واحد وحدة نقدية لكل وحدة منقولة لو أدخلناه إلى شبكة النقل، نقوم برسم حلقة ونتبع الخطوات السالفة الذكر فنتحصل على مايلي:

	35	5+	-10					35	15			
			95	55						95	55	
			60							60		
		40-	+						30	10		

من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 10، أي سوف نضيف 10 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **770** = (1*10)-780.

المحاولة الثانية لتحسين الحل

	الجدول رقم 2				E_i			الجدول رقم 1				E_i
	-	-	6	5	4			4	5	-	-	4
	1	2	-	-	1			-	-	3	2	1
	0	1	-	1	0			-	-	2	-	0
	0	-	-	1	0			-	1	2	-	0
F_j	0	1	2	1			F_j	0	1	2	1	
	الجدول رقم 4							الجدول رقم 3				
	-	-	0	2				-	-	6	7	
	3	7	-	-				4	9	-	-	
	6	4	-	2				6	5	-	3	
	8	-	-	3				8	-	-	4	

يمكن ملاحظة أن الجدول الرابع لا يحتوي على قيمة سالبة وهذا يعني أنه لا توجد إمكانية لتخفيض تكلفة النقل وبالتالي فان أدنى تكلفة نقل كلية ممكنة هي **770**.

مثال02:

أوجد أدني تكلفة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

8	**6**	**10**	**45**
6	**7**	**11**	**35**
9	**5**	**8**	**55**
4	**3**	**9**	**65**
90	**60**	**50**	

أولا نقوم بالبحث عن الحل الابتدائي وذلك بإتباع الخطوات التي تطرقنا إليها فيما سبق والخاصة بطريقة الفروقات الكبرى فنتحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

45			**45**
35			**35**
5		**50**	**55**
5	**60**		**65**
90	**60**	**50**	

$m+n-1$ = عدد طرق النقل المستعملة = 6 وبالتالي الحل الابتدائي مقبول.

التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل الابتدائي = 1215.

الآن باستعمال طريقة التحويل (الجداول) نقوم بمحاول تحسين هذا الحل أو البحث عن إمكانية تخفيض التكلفة الكلية للنقل وذلك اختبار طرق النقل غير المستعملة كما يلي.

المحاولة الأولى لتحسين الحل

	الجدول رقم 2			E_i			الجدول رقم 1			E_i
	-	7	7	8			8	-	-	8
	-	5	5	6			6	-	-	6
	-	8	-	9			9	-	8	9
	-	-	3	4			4	3	-	4
F_j	0	-1	-1			F_j	0	-1	-1	
	الجدول رقم 4						الجدول رقم 3			
	-	-1	3				-	6	10	
	-	2	6				-	7	11	
	-	**-3**	-				-	5	-	
	-	-	6				-	-	9	

يمكن ملاحظة أن الجدول الرابع يحتوي على قيمة سالبة وهي 3- وهذا يعني أن هذا الطريق يخفض ثلاثة وحدة نقدية لكل وحدة منقولة لو أدخلناه إلى شبكة النقل، نقوم برسم حلقة ونتبع الخطوات السالفة الذكر فنتحصل على مايلي:

	45						45			
	35				→		35			
	5-	+	50					5	50	
	+5	60-					10	55		

من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 5، أي سوف نضيف 5 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **1200** = (5*3)-1215.

المحاولة الثانية لتحسين الحل

	الجدول رقم 2			E_i			الجدول رقم 1			E_i
	-	7	10	8			8	-	-	8
	-	5	8	6			6	-	-	6
	6	-	-	6			-	5	8	6
	-	-	6	4			4	3	-	4
F_j	0	-1	2			F_j	0	-1	2	
	الجدول رقم 4						الجدول رقم 3			
	-	**-1**	0				-	6	10	
	-	2	3				-	7	11	
	3	-	-				9	-	-	
	-	-	3				-	-	9	

يمكن ملاحظة أن الجدول الرابع يحتوي على قيمة سالبة وهي 1- وهذا يعني أن هذا الطريق يخفض واحد وحدة نقدية لكل وحدة منقولة لو أدخلناه إلى شبكة النقل، نقوم برسم حلقة ونتبع الخطوات السالفة الذكر فنتحصل على مايلي:

	-45	+						45		
	35				→		35			
		5	50					5	50	
	+10	-55					55	10		

من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 45، أي سوف نضيف 45 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **1155** = (45*1)-1200.

المحاولة الثالثة لتحسين الحل

	الجدول رقم 2			E_i			الجدول رقم 1			E_i
	7	-	9	7			-	6	-	7
	-	5	8	6			6	-	-	6
	6	-	-	6			-	5	8	6
	-	-	6	4			4	3	-	4
F_j	0	-1	2			F_j	0	-1	2	
	الجدول رقم 4						الجدول رقم 3			
	1	-	1				8	-	10	
	-	2	3				-	7	11	
	3	-	-				9	-	-	
	-	-	3				-	-	9	

يمكن ملاحظة أن الجدول الرابع لا يحتوي على قيمة سالبة وهذا يعني أنه لا توجد إمكانية لتخفيض تكلفة النقل وبالتالي فان أدنى تكلفة نقل كلية ممكنة هي **1155**.

4- الحالات الخاصة لمسألة النقل

لقد تطرقنا فيما سبق في مسالة النقل للحالة التي يكون فيها العرض مساويا للطلب، أي مجموع ما هو متوفر في أماكن التموين أو التخزين يساوي مجموع ما الاستهلاك أو مجموع ما يطلبه المستهلكون، لكنه في الواقع فان مجموع العرض والطلب ليس بالضرورة أن يكون متساويا ففي العديد من الحالات يكون العرض اكبر من الطلب ا وان يون العرض اقل من الطلب.

4-1- حالة العرض أكبر من الطلب

هذه الحالة هي عبارة عن أن مجموع ما هو متوفر أو معروض من السلعة أكبر من مجموع ما هو مطلوب من قبل المستهلكين وفي هذه الحالة يتم إضافة مستهلك خيالي أو مستعمل وهمي بحيث تكون الكمية التي يطلبها هي بمقدار الفرق بين العرض والطلب أي أن هذا المستعمل الوهمي سوف يمتص الفائض المتوفر في العرض إضافة إلى ذلك فان التكاليف الوحدوية لطرق النقل الخاصة بالمستعمل الوهمي الذي أضفناه تكون كلها صفرا. (15)

مثال: أوجد أدني تكلفة نقل باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التجريب للمسألة التالية.

	العرض				
الطلب	19	18	19	17	35
	13	15	15	21	30
	30	25	20	15	

الحل: قبل بداية الحل يمكن ملاحظة أن الكمية المعروضة وهي 90 وحدة أكبر من الكمية المطلوبة وهي 65 وحدة وهنا يتعين علينا إضافة مستعمل وهمي بكمية مطلوبة مقدارها 25 وحدة حيث يصبح العرض يساوي الطلب أي 90 وحدة وبتكاليف وحدوية تساوي صفر ويكون الجدول كالتالي:

19	**18**	**19**	**17**	**35**
13	**15**	**15**	**21**	**30**
0	**0**	**0**	**0**	**25**
30	**25**	**20**	**15**	

وعند حل المسالة باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية نتحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

30	**5**			**35**
	20	**10**		**30**
		10	**15**	**25**
30	**25**	**20**	**15**	

m+n-1= عدد طرق النقل المستعملة = 6 وبالتالي الحل الابتدائي مقبول.

التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل الابتدائي = 1110.

الآن باستعمال طريقة التجريب (Stepping stone) نقوم بمحاول تحسين هذا الحل أو بتعبير آخر البحث عن إمكانية تخفيض التكلفة الكلية للنقل وذلك من خلال تجريب أو اختبار طرق النقل غير المستعملة.

المحاولة الأولى لتحسين الحل

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	30-	5+		
A_2	+	20-	10	
A_3			10	15

التكاليف الوحدوية

19	18	19	17
13	15	15	21
0	0	0	0

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_4 : +17-18+15-15+0-0 = -1

A_1B_3 : +19-18+15-15 = +1

A_2B_4 : +21-15+0-0 = +6

A_2B_1 : +13-19+18-15 = -3

A_3B_2 : +0-15+15-0 = 0

A_3B_1 : +0-13+15-0 = +2

يمكن ملاحظة أن طريق النقل $\mathbf{A_2B_1}$ سوف يخفض في التكلفة بـ 3 ون لكل وحدة منقولة وبالتالي سوف ندخل هذا الطريق ضمن شبكة النقل وذلك باستعمال الحلقة ثم نختار من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 20، أي سوف نضيف 20 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **1050** = (20*3)-1110.

المحاولة الثانية لتحسين الحل

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	25		
A_2	20		10	
A_3			10	15

التكاليف الوحدوية

19	18	19	17
13	15	15	21
0	0	0	0

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_4 : +17-0+0-15+13-19 = -4

A_1B_3 : +19-15+13-19 = -2

A_2B_4 : +21-0+0-15 = +6

A_2B_2 : +15-18+19-13 = +3

A_3B_2 : +0-0+15-13+19-18 = +3

A_3B_1 : +0-0+15-13 = +2

يمكن ملاحظة أن طريق النقل $\mathbf{A_1B_4}$ سوف يخفض في التكلفة بـ 4 ون لكل وحدة منقولة وبالتالي سوف ندخل هذا الطريق ضمن شبكة النقل، وكما ذكرنا فيما سبق نختار من بين القيم في الخانات التي فيها إشارة سالبة أقل قيمة وهي 10، أي سوف نضيف 10 في الخانات التي فيها إشارة موجبة ونطرحها من الخانات التي فيها إشارة سالبة فنتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي: التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **1010** = (10*4)-1050.

المحاولة الثالثة لتحسين الحل

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1		25		10
A_2	30		0	
A_3			20	5

التكاليف الوحدوية

19	18	19	17
13	15	15	21
0	0	0	0

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_3 : +19-0+0-17 = +2

A_1B_1 : +19-13+15-0+0-17 = +4

A_2B_4 : +21-0+0-15 = +6

A_2B_2 : +15-0+0-0+17-18 = +3

A_3B_2 : +0-0+17-18 = -1

A_3B_1 : +0-13+15-0 = +2

يمكن ملاحظة أن طريق النقل **A_3B_2** سوف يخفض في التكلفة بـ 1 ون لكل وحدة منقولة وبالتالي سوف ندخل هذا الطريق ضمن شبكة النقل ونتحصل على جدول جديد ونقوم بحساب التكلفة الجديدة كما يلي:

التكلفة الكلية للنقل أصبحت = **1005** = (5*1)-1010.

المحاولة الرابعة لتحسين الحل

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1		20		15
A_2	30		0	
A_3		5	20	

التكاليف الوحدوية

19	18	19	17
13	15	15	21
0	0	0	0

نقوم باختبار أو تجريب طرق النقل غير المستعملة:

A_1B_3 : +19-18+0-0 = +1

A_1B_1 : +19-13+15-0+0-18 = +3

A_2B_4 : +21-15+18-0+0-15 = +9

A_2B_2 : +15-15+0-0 = 0

A_3B_4 : +0-17+18-0 = +1

A_3B_1 : +0-0+15-13 = +2

يمكن ملاحظة أن جميع طرق النقل أو الخلايا غير المستعملة كلها لو استعملناها سوف يزيد ذلك في التكلفة الإجمالية للنقل لأن كل القيم موجبة أو صفر وبالتالي فان أرخص تكلفة نقل كلية ممكنة هي المتحصل عليها في المحاولة السابقة وهي **1005**.

4-2- حالة العرض أقل من الطلب

هذه الحالة هي عكس الحالة لسابقة أي هي عبارة عن أن مجموع ما هو متوفر أو معروض من السلعة أقل من مجموع ما هو مطلوب من قبل المستهلكين وفي هذه الحالة يتم إضافة ممون خيالي أو مخزن وهمي بحيث تكون الكمية المتوفرة عند هذا الممون الوهمي هي بمقدار الفرق بين العرض والطلب أي أن هذا المخزن الوهمي سوف يوفر النقص في العرض، إضافة إلى ذلك فان التكاليف الوحدوية لطرق النقل الخاصة الممون أو المخزن الوهمي الذي أضفناه تكون كلها صفرا. (16)

مثال:

أوجد أدنى تكلفة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

	العرض			
الطلب	3	2	4	300
	5	8	2	150
	6	1	7	250
	200	200	200	

الحل:

قبل بداية الحل يمكن ملاحظة أن الكمية المعروضة وهي 600 وحدة أقل من الكمية المطلوبة وهي 700 وحدة وهنا يتعين علينا إضافة ممون وهمي بكمية معروضة مقدارها 100 وحدة حيث يصبح العرض يساوي الطلب أي 700 وحدة وبتكاليف وحدوية تساوي صفر ويكون الجدول كالتالي:

3	**2**	**4**	**0**	**300**
5	**8**	**2**	**0**	**150**
6	**1**	**7**	**0**	**250**
200	**200**	**200**	**100**	

وعند حل المسالة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى نتحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

200		**0**	**100**	**300**
		150		**150**
	200	**50**		**250**
200	**200**	**200**	**100**	

m+n-1= عدد طرق النقل المستعملة = 6 وبالتالي الحل الابتدائي مقبول.

التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل الابتدائي = 1450، الآن باستعمال طريقة التحويل (الجداول) نقوم بمحاول تحسين هذا الحل أو البحث عن إمكانية تخفيض التكلفة الكلية للنقل وذلك باختبار طرق النقل غير المستعملة وبعد إجراء العمليات الحسابية اللازمة نتحصل على الحل الأمثل التالي.

200		**50**	**50**	**300**
		150		**150**
	200		**50**	**250**
200	**200**	**200**	**100**	

حيث لا توجد إمكانية لتخفيض تكلفة النقل أكثر وبالتالي فإن أدنى تكلفة نقل كلية ممكنة هي **1300**.

5- تمارين

التمرين 01:

تواجه شركة متخصصة في إنتاج المولدات الكهربائية مشكلة نقل منتج معين من منتجاتها، وذلك من ثلاثة مصانع إلى أربعة مراكز توزيع، وكانت السعة الإنتاجية المخططة والطلب المتوقع خلال الأشهر الثلاثة القادمة لهذا المنتج وكذلك تكلفة نقل الوحدة الواحدة كالتالي:

المصانع	مراكز التوزيع				كمية الإنتاج خلال 3 أشهر (بالوحدات)
	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	
الأول	**3**	**2**	**7**	**6**	**5000**
الثاني	**7**	**5**	**2**	**3**	**6000**
الثالث	**2**	**5**	**4**	**5**	**2500**
الطلب المتوقع خلال 3 أشهر (بالوحدات)	**6000**	**4000**	**2000**	**1500**	

ترغب إدارة الشركة في تحديد كمية الإنتاج التي يجب شحنها من كل مصنع إلى كل مركز توزيع بحيث يتم ذلك بأقل تكلفة كلية ممكنة. (استعمل طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل).

التمرين 02:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل.

1	**16**	**4**	**3**	**50**
6	**10**	**1**	**2**	**100**
8	**8**	**9**	**7**	**150**
12	**6**	**11**	**7**	**200**
16	**15**	**13**	**15**	**250**
100	**400**	**100**	**50**	

التمرين 03:

لدى مصنع الآجر أربعة مخازن في مدن مختلفة، ويتلقى المصنع طلبات من أربعة شركات مختلفة للبناء والأشغال العمومية، البيانات الخاصة بالكميات المطلوبة والكميات الموجودة في المخازن مبينة في الجدول التالي:

الشركة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	
الكمية المطلوبة بالطن أسبوعيا	**18**	**22**	**28**	**32**	
المخزن	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
الكمية الموجودة في المخزن بالطن أسبوعيا	**16**	**18**	**26**	**16**	**24**

إن تكاليف النقل تختلف حسب موقع المخزن ومكان الشركة وهي مبينة حسب الجدول التالي (بالوحدة ن):

		المخزن				
		الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
الشركة	الأولى	**10**	**30**	**6**	**12**	**20**
	الثانية	**46**	**16**	**26**	**54**	**24**
	الثالثة	**60**	**2**	**10**	**48**	**50**
	الرابعة	**16**	**52**	**14**	**56**	**18**

يرغب مدير المصنع في معرفة أفضل طريقة لتوزيع الطلبات بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (استعمل طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل فقط).

التمرين04:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التجريب.

30	**2**	**5**	**6**	**15**	**16**
5	**29**	**9**	**5**	**7**	**15**
16	**24**	**14**	**6**	**26**	**14**
13	**28**	**4**	**25**	**8**	**15**
6	**6**	**13**	**20**	**15**	

التمرين 05: أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

5	**6**	**7**	**20**
6	**4**	**5**	**5**
3	**7**	**3**	**10**
5	**3**	**1**	**10**
9	**5**	**8**	**5**
15	**15**	**20**	

التمرين 06:

لدى مصنع للاسمنت أربعة مخازن في مدن مختلفة، ويعمل المصنع بطاقة إنتاجية مقدارها 100 طن في الأسبوع، ويتلقى المصنع طلبات من أربعة شركات مختلفة للبناء والأشغال العمومية، البيانات الخاصة بالكميات المطلوبة والكميات الموجودة في المخازن مبينة في الجدول التالي:

الشركة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
الكمية المطلوبة بالطن أسبوعيا	**18**	**34**	**24**	**32**
المخزن	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
الكمية الموجودة في المخزن بالطن أسبوعيا	**18**	**22**	**28**	**32**

إن تكاليف النقل بطبيعة الحال تختلف حسب موقع المخزن ومكان الشركة وهي موضحة حسب الجدول التالي (بالوحدة النقدية):

		المخزن			
		الأول	الثاني	الثالث	الرابع
الشركة	الأولى	**2**	**10**	**48**	**50**
	الثانية	**30**	**6**	**12**	**20**
	الثالثة	**16**	**26**	**54**	**24**
	الرابعة	**52**	**14**	**56**	**18**

يرغب مدير المصنع في معرفة أفضل طريقة لتوزيع الطلبات بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (استعمل طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التحويل فقط).

التمرين 07:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التجريب.

30	**2**	**5**	**6**	**15**	**16**
5	**29**	**9**	**5**	**7**	**15**
16	**24**	**14**	**6**	**26**	**14**
13	**28**	**4**	**25**	**8**	**15**
6	**6**	**13**	**20**	**15**	

التمرين 08:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

26	**21**	**30**	**15**	**700**
34	**28**	**15**	**10**	**400**
21	**32**	**28**	**20**	**600**
7	**19**	**16**	**14**	**400**
16	**10**	**7**	**26**	**550**
9	**22**	**19**	**32**	**600**
800	**650**	**950**	**850**	

التمرين 09:

أوجد الحل الأمثل لمسالة النقل التالية باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التجريب.

14	**10**	**2**	**5**	**10**	**50**
11	**5**	**4**	**11**	**3**	**20**
9	**8**	**12**	**1**	**18**	**30**
1	**4**	**9**	**17**	**18**	**40**
15	**30**	**65**	**20**	**10**	

التمرين 10: يتم إنتاج أحد المنتجات في ثلاثة مصانع وتشحن إلى ثلاثة متاجر للجملة، الجدول التالي يوضح تكاليف النقل لكل وحدة وطاقة كل مصنع والكميات المطلوبة من المتاجر كما يلي:

المصنع	متجر الجملة			طاقة المصنع
	L_3	L_2	L_1	
P_1	**20**	**16**	**24**	**300**
P_2	**10**	**10**	**8**	**500**
P_3	**12**	**18**	**10**	**100**
طلب متجر الجملة	**200**	**400**	**300**	

أوجد أقل تكلفة نقل كلية ممكنة لهذه المسألة باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التجريب.

التمرين 11:

تقوم إحدى الشركات بتوزيع الغاز الطبيعي للمشتركين (الزبائن) في خمسة مدن، وتشتري هذه الشركة الغاز الطبيعي من أربع شركات، وكان الطلب المتوقع خلال الشتاء القادم 90000 م^3، بالنسبة للمدينة 1: 150000 م^3، بالنسبة للمدينة 2: 250000 م^3، بالنسبة للمدينة 3: 70000 م^3، بالنسبة للمدينة 4: 130000 م^3، بالنسبة للمدينة 5: 300000 م^3، وكانت عقود التوريد بهذه الكميات مع الشركات الموردة كالتالي: من الشركة الأولى: 180000 م^3، من الشركة الأولى: 3000000 م^3، من الشركة الأولى: 220000 م^3، من الشركة الأولى: 200000 م^3، ويبين الجدول التالي تكاليف التوزيع من الشركات إلى المدن (بألف وحدة نقدية) كما يلي:

الشركة	المدن				
	1	2	3	4	5
الأولى	**20**	**9**	**11**	**18**	**10**
الثانية	**16**	**17**	**19**	**17**	**12**
الثالثة	**18**	**19**	**16**	**25**	**20**
الرابعة	**10**	**22**	**17**	**16**	**15**

أوجد أقل تكلفة نقل باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

التمرين 12:

تقوم إحدى الشركات بصناعة الحواسب الشخصية المحمولة، فإذا كانت مراكز التصنيع ثلاثة مدن وتشحن إلى متاجر الجملة في خمسة مدن، حيث يوضح الجدول التالي عدد وحدات الحواسب الشخصية المتاحة في كل مصنع وعدد وحدات الحواسب المطلوبة لكل متجر للجملة وتكاليف الشحن (بالوحدة النقدية لكل وحدة).

المصنع	متجر الجملة					الوحدات المتاحة
	1	2	3	4	5	
1	**100**	**200**	**50**	**90**	**100**	**9000**
2	**20**	**100**	**80**	**300**	**60**	**4000**
3	**10**	**200**	**70**	**100**	**40**	**8000**
الوحدات المطلوبة	**3000**	**5000**	**4000**	**6000**	**3000**	

أوجد الكميات التي يجب شحنها من كل مصنع إلى كل متجر للجملة من أجل تدنية تكاليف الشحن لأدنى حد ممكن باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل.

التمرين 13:

أوجد الحل الأمثل لمسالة النقل التالية باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

14	**10**	**2**	**6**	**5**	**10**	**50**
11	**5**	**4**	**2**	**11**	**3**	**20**
9	**8**	**12**	**11**	**1**	**18**	**30**
5	**4**	**8**	**9**	**2**	**14**	**50**
1	**4**	**9**	**8**	**17**	**18**	**40**
15	**30**	**65**	**60**	**20**	**10**	

التمرين 14:

تنتج إحدى الشركات المتخصصة في صناعة الملابس نوع من المعاطف في ثلاثة مصانع، يتم توزيع هذه المعاطف إلى ثلاث محلات كبرى في مدن مختلفة، تكلفة النقل بالوحدة النقدية للوحدة الواحدة من المصانع إلى المحلات مبينة كما يلي:

المصنع	المحلات		
	1	2	3
1	**1.45**	**1.6**	**1.4**
2	**1.1**	**2.25**	**0.6**
3	**1.2**	**1.2**	**1.8**

طاقة المصانع وطلبات التوزيع معطاة كما يلي:

طاقة المصنع	(بالوحدة)
المصنع 1	**400**
المصنع 2	**600**
المصنع 3	**300**

طلبات التوزيع	(بالوحدة)
المحل 1	**400**
المحل 2	**400**
المحل 3	**400**

أوجد خطة التوزيع التي تجعل تكاليف النقل عند أدنى حد ممكن باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل.

التمرين 15:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التجريب.

26	**21**	**17**	**15**	**800**
34	**28**	**15**	**10**	**300**
21	**32**	**28**	**20**	**500**
15	**10**	**7**	**26**	**550**
9	**22**	**19**	**32**	**500**
800	**650**	**950**	**800**	

التمرين 16:

أوجد أدنى تكلفة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل.

4	**2**	**4**	**45**
3	**2**	**1**	**35**
5	**3**	**3**	**55**
3	**7**	**5**	**65**
90	**60**	**40**	

التمرين 17:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التحويل.

4	**5**	**6**	**7**	**50**
4	**9**	**3**	**2**	**150**
6	**5**	**2**	**3**	**60**
8	**1**	**2**	**4**	**40**
50	**40**	**160**	**80**	

التمرين 18:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التجريب.

60	**52**	**80**	**44**	**800**
72	**40**	**56**	**60**	**300**
78	**78**	**60**	**36**	**500**
40	**36**	**76**	**52**	**500**
800	**650**	**950**	**800**	

التمرين 19: شركة متخصصة في إنتاج وصناعة محركات العتاد الفلاحي، لدى هذه الشركة ثلاثة مصانع توجد في ثلاثة مدن مختلفة، الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع بآلاف الوحدات كالتالي:

المصنع الأول	المصنع الثاني	المصنع الثالث
100	**100**	**150**

تعاقدت هذه الشركة على توريد هذه المحركات إلى أربعة عملاء، حيث أن طلبات هؤلاء العملاء (الزبائن) على هذه المحركات بآلاف الوحدات كالتالي:

العميل الأول	**50**
العميل الثاني	**70**
العميل الثالث	**60**
العميل الرابع	**80**

وبسبب الاختلاف في المسافات بين مواقع المصانع وأماكن تواجد العملاء (الزبائن) فإن تكاليف النقل تختلف وهي موضحة في الجدول التالي (بالوحدة النقدية):

المصنع	العملاء			
	1	2	3	4
1	**70**	**110**	**80**	**130**
2	**200**	**170**	**120**	**100**
3	**80**	**180**	**130**	**160**

أوجد خطة التوزيع التي تجعل تكاليف النقل عند أدنى حد ممكن باستعمال طريقة التكاليف الصغرى وطريقة التحويل.

التمرين 20: أوجد أدنى تكلفة نقل كلية ممكنة باستعمال طريقة الفروقات الكبرى وطريقة التجريب.

14	**12**	**14**	**45**
15	**13**	**13**	**55**
13	**17**	**15**	**65**
90	**60**	**40**	

التمرين 21: لدى شركة متخصصة في البناء والإنشاءات الكبرى أربعة مقالع للحصى حيث تتوفر فيها كميات معينة من الحصى وترغب الشركة بنقل الكميات المتوفرة إلى مشاريعها الموزعة على أنحاء القطر وعددها ستة مشاريع، إن تكلفة نقل الوحدة الواحدة (متر مكعب) بالوحدة النقدية من كل مقلع إلى كل مشروع مبينة في الجدول التالي، وكذلك الكميات المتوفرة في المقالع والكميات اللازمة لكل مشروع.

المقالع	المشاريع						الكميات
	1	2	3	4	5	6	المتاحة
1	**9**	**12**	**9**	**6**	**9**	**10**	**55000**
2	**7**	**3**	**7**	**7**	**5**	**5**	**60000**
3	**6**	**5**	**9**	**11**	**3**	**11**	**75000**
4	**6**	**8**	**11**	**2**	**2**	**10**	**45000**
الكميات المطلوبة	**40000**	**40000**	**60000**	**20000**	**40000**	**20000**	

أوجد خطة التوزيع التي تجعل التكاليف عند أدنى حد ممكن باستعمال طريقة الفروقات الكبرى والتحويل.

التمرين 22: تقوم ثلاثة مصانع بإنتاج الحبيبات البلاستيكية، ويتم نقل هذه المواد إلى أربعة معامل أخرى حيث يتم تشكيلها في منتجات مختلفة، الجدول التالي يبين تكاليف النقل والطاقة الإنتاجية لكل معمل على النحو التالي:

المصانع	المعامل				الكميات
	1	2	3	4	المتاحة
1	**3**	**5**	**4**	**4**	**160**
2	**4**	**4**	**5**	**5**	**150**
3	**4**	**3**	**4**	**3**	**190**
الكميات المطلوبة	**70**	**100**	**150**	**180**	

أوجد خطة التوزيع التي تجعل تكاليف النقل عند أدنى حد ممكن باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة التحويل.

6- هوامش الفصل الثاني.

(1)- محمد صالح الحناوي، محمد توفيق ماضي، **بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتاج**، الدار الجامعية، مصر، 2006، ص125.

(2)- كمال أبوزيد، زينات محرم، **دراسات في استخدام بحوث العمليات في المحاسبة**، المكتب الجامعي الحديث، مصر، 2006، ص32.

(3)- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر، 2009، ص199.

(4)- جمال عبد العزيز صابر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، كلية التجارة، جامعة القاهرة، مصر، 2009، ص 05.

(5)- ريتشارد برونسون، **بحوث العمليات**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، الطبعة الثالثة، مصر، 2011، ص 103.

(6)- ريتشارد برونسون، **بحوث العمليات**، مرجع سابق، ص 104 .

(7)– David Anderson and other, **An introduction to management science**, **Quantitative approaches to decision making**, west publishing co., Minnesota, USA, 1985, p569.

(8)- محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2006، ص 125.

(9)- جمال عبد العزيز صابر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، مرجع سابق، ص 15.16.17 .

(10) – Hamdy A Taha, **Operations Research an introduction**, Macmillan Publishing co., New York, USA, 1997, p132.

(11)- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، مرجع سابق، ص 216 .

(12)- سليمان محمد مرجان، **بحوث العمليات**، الجامعة المفتوحة، الطبعة الأولى، طرابلس، ليبيا، 2002، ص145.147.

(13)- علي مكيد، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015، ص183.

(14)- علي مكيد، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، مرجع سابق، ص185.

(15)- صبحي المحمد وآخرون، **بحوث العمليات**، منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، سوريا، 2008، ص215.

(16)- رند عمران مصطفى الأسطل، **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية**، الطبعة السادسة، فلسطين، 2016، ص314.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

❖ **الكتب باللغة العربية**

1- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب والنشر، الطبعة الثانية، مصر، 2009.

2- أحمد محمد الهزاع الصمادي، **أساسيات بحوث العمليات**، دار قنديل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن، 2008.

3- ادوارد ت. دولينج، **الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، سلسلة ملخصات شوم، مصر، 2003.

4- باري راندر وآخرون، **نمذجة القرارات وبحوث العمليات**، دار المريخ للنشر، الطبعة الأولى، الرياض، 2007.

5- بوقرة رابح ، **بحوث العمليات الجزء الأول مع دراسة حالة**، دون دار نشر ، الجزائر ، 2010.

6- جمال عبد العزيز صابر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، دون دار نشر، مصر، 2009.

7- حمودي حاج صحراوي، **رياضيات المؤسسة كمدخل إلى التقنيات الكمية**، دار النشر جيطلي، الطبعة الأولى، الجزائر، 2014.

8- رند عمران مصطفى الأسطل، **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية**، الطبعة السادسة، فلسطين، 2016.

9- ريتشارد برونسون، **بحوث العمليات**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، الطبعة الثالثة، مصر، 2011.

10- سالم الصفدي، **بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات**، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن، 1999.

11- سليمان محمد مرجان، **بحوث العمليات**، الجامعة المفتوحة، الطبعة الأولى، طرابلس، ليبيا، 2002.

12- صبحي المحمد وآخرون، **بحوث العمليات**، منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، سوريا، 2008.

13- ضيف أحمد، **محاضرات في نظرية اتخاذ القرار**، مطبوعة بيداغوجية، جامعة زيان عاشور بالجلفة، الجزائر، 2011/2010.

14- عبد الحميد البلداوي، عبد الله الحميدي، **الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال**، دار وائل للنشر، الأردن، 2008.

15- عبد الستار أحمد الالوسي، **أساليب بحوث العمليات، الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم للنشر، دبي، 2003.

16- علي مكيد ، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الأولى، الجزائر، 2015.

17- محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2006.

18- محمد عبد العزيز أبو رمان، **البرمجة الخطية النظرية والتطبيق**، دون دار نشر، الطبعة الأولى، مصر، 1980.

19- محمود الفياض، عيسى قدادة، **بحوث العمليات**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الطبعة الرابعة، الأردن ، 2007.

20- مفيدة يحياوي، **التقنيات الكمية في إدارة الأعمال، محاضرات وتمارين**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2014.

❖ **الكتب باللغة الانجليزية**

1- David Anderson, Dennis Sweeney, Thomas Williams, **An introduction to management science**, **Quantitative approaches to decision making**, west publishing co., Minnesota, USA, 1985.

2- Hamdy A Taha, **Operations Research an introduction**, Macmillan Publishing co., New York, USA, 1997.

3- Harvy M Wagner, **Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions**, Prentice hall international editions, USA, 1997.