Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option: Recherche Opérationnelle

Par

ZERKANI Yousra

Thème

Etude de l'indice de criticité du nombre de la 2-domination dans certains graphes

Composition du Jury:

Mr. R Lemdani	MCA	Université de Médéa	Président
Mr. M Zemir	MAA	Université de Médéa	promoteur
Mr. A Bouchou	MCA	Université de Médéa	Examinateur
Mr. A Sahraoui	MAA	Université de Médéa	Examinateur

Date de soutenance: *13/07/2021*

Résumé

Soit $G = (V; E)$ un graphe simple d'ordre n et de taille m où$V(G)$ est l'ensemble des sommets et $E(G)$ l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble de sommets S de V est dit ensemble 2-domination de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent a au moins deux sommet dans S , et on désigne par $\gamma_2(G)$ la taille minimum d'un 2-domination minimal de G.

Pour un graphe G, nous définissons l'indice de criticité d'un sommet v $\in V$ comme $ci^v_{\gamma_2}(v) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G - v)$. et l'indice de criticité de la suppression d'un sommet dans un graphe G est défini comme $ci^v_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{n} ci^v_{\gamma_2}(v)\right)/n(G)$. de même, nous définissons , et l'indice de criticité de la suppression d'une arête e $\in E(G)$ comme $ci^-_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G - e)$. L'indice de criticité de la suppression d'une arrête dans un graphe G est défini comme $ci^-_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{m} ci^-_{\gamma_2}(e)\right)/m(G)$.Nous définissons aussi l'indice de criticité de l'ajout d'une arête e $\in E(\overline{G})$ comme $ci^+_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G + e)$, et l'indice de criticité de l'ajout d'une arête dans un graphe G défini comme $ci^+_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^+_{\gamma_2}(e)\right)/m(\overline{G})$.

Dans ce mémoire, nous déterminons l'indice de criticité de la suppression d'un sommet, et ensuite nous déterminons l'indice de criticité de la suppression et l'ajout d'une arête de la 2-domination pour les chaînes et les cycles.

Abstract

Let G = (V;E) be a simple graph of order n, and of sise m with vertex set V (G) and edge set E(G). A subset S of $V(G)$ is a dominating set if every vertex of $V(G) - S$ is adjacent to at least two vertices of S. The domination number $\gamma_2(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set of G. Also, we define the criticality index of γ_2-domination of a vertex $v \in V$ as $ci^{-v}_{\gamma_2}(v) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G - v)$, and the vertex criticality index of γ_2-domination of a graph G as $ci^{-v}_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{n} ci^{-v}_{\gamma_2}(v)\right)/n(G)$. For a graphe G, we define the criticality index of an edge e $\in$ E(G) as $ci^{-}_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G - e)$,and the removal criticality index of a graph G as $ci^{-}_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{m} ci^{-}_{\gamma_2}(e)\right)/m(G)$. Similariy we define the criticality index of an edge e $\in$ E($\overline{G}$) as $ci^{+}_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G + e)$, and the adding criticality index of a graph G as $ci^{+}_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^{+}_{\gamma_2}(e)\right)/m(\overline{G})$.

In this memory, we determine the removal vertex, and the removal and adding vertex and index of 2-domination of cycles and paths.

Remerciements

A la fin de ce modeste travail, je remercie allah le tout puissant de m'avoir accorder le courage, la volonté et la patience pour l'accomplir.

Je tiens d'abord à exprimer ma profond gratitude à l'endroit de mon directeur de recherche Mr Zemir Mohamed, pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa présence, ses conseils et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire .

Mes sincères remerciement s'adresse également à tous les membres de jury qui nous font le grand honneur d'évaluer ce travail et donner leur temps pour lire, et pour leur remarque.

Ensuite, je tiens à remercie du fond du coeure ma famille , spécialement mes très chers parents, ma source de générosité et de patience tout au long de ma carrière scolaire, mes remerciement vont également à mes sœurs et frères pour leur soutiens et leur encouragement, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de prés ou de loin à ma formation.

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **ii**

Remerciements **iii**

Introduction **1**

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES GRAPHES **3**

1.1 Les graphes 3

1.1.1 Définitions et notations 3

1.1.2 Les graphes particuliers 6

1.1.3 Quelques opérations de graphes 10

1.1.4 Notion de criticité et de stabilité 11

2 La k-domination dans les graphes **12**

2.0.1 La domination 12

2.0.2 Quelques résultats sur la domination 13

2.0.3 Généralisation sur la k-domination 16

2.0.4 Quelques bornes sur γ_k 16

2.0.5 Graphes γ_k critiques 18

3 L'indice de criticité du nombre de 2-domination dans certains graphes **20**

3.1 Définitions et notations 20

3.1.1 2-domination 20
3.1.2 L'indice de criticité 20
3.2 L'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination . . . 22
3.2.1 L'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination d'un cycle C_n 22
3.2.2 L'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination d'une chaîne P_n 23
3.3 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination 25
3.3.1 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination d'un cycle C_n 25
3.3.2 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination d'une chaîne P_n 26
3.4 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination 27
3.4.1 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination d'un cycle C_n 27
3.4.2 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination d'une chaîne 29

Conclusion **34**

Bibliographie **35**

Liste des Figures

1.1.1 G_A est sous-graphe de G et G_B est sous-graphe induit de G. 5
1.1.2 H est un graphe partiel de G. 6
1.1.3 (a) Un graphe G et (b) son complémentaire $\overline{G}$. 6
1.1.4 (1) Un graphe complet (K_4) et (2) un graphe discret ($\overline{K_4}$). 7
1.1.5 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. 7
1.1.6 (2)La chaine P_5 et (1)Le cycle C_8. 8
1.1.7 Un arbre T. 8
1.1.8 G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe. 9
1.1.9 Le graphe biparti complet $K_{3,4}$. 9
1.1.10(1) Une étoile $K_{1,q}$ et (2) une étoile subdivisée $K^*_{1,q}$. 10

2.0.1 Le graphe $K_{1,3}$. 13
2.0.2 Le graphe G. 14
2.0.3 Le graphe G avec $\gamma(G) = 2$. 15
2.0.4 Un graphe K_5 et son complémentaire $\overline{K_5}$. 16

3.4.1 Un graphe $G = C_n + xy$. 28

Introduction

La Théorie des graphes est une branche des mathématique discrètes, en forte croissance grâce à son rôle essentiel dans les sciences appliquées, incluant l'ingénierie et en particulier l'informatique, mais aussi la biologie, la génétique ou encore les sciences sociales. Généralement un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou noeuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement con- fondus. Le graphe est dit orienté si, pour chaque arête, on distingue une extrémité initiale et une extrémité terminale.

La notion de graphe a été introduite par l'anglais J.J.Sylvester en 1822, et ce n'est qu'en 1936 que parait le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D. König. La théorie des graphes est apparue d'abord comme une curiosité mathématique avec le problème des ponts de Königsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du XX ème siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski de Caylay et plus récemment, de Berge, d'Erdös et de Harary.

Un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes est la domination qui a été étudiée intensivement ces trois dernières décennies. Elle a commencé semble-t-il au $16^{ème}$ siècle en Inde [19] comme un problème de jeux d'échec. Le principe consiste à couvrir (dominer) l'ensemble des cases d'un échiquier par un nombre minimum de reines, c'est

à dire que chaque place est occupée soit par une reine, soit en un seul mouvement de celle-ci.

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson ont introduit la généralisation de la domination et de l'indépendance dans les graphes. Les papiers [10, 11] parus dans les actes de la conférence contiennent les définitions de ces nouveaux paramètres, quelques propriétés et deux conjectures.

Après une introduction générale, ce mémoire comporte trois chapitres développés dans l'ordre suivant:

Dans le premier chapitre, nous rappelons d'abord les définitions de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

Pour le deuxième chapitre, nous rappelons la définition de k-domination et certains résultats sur le nombre de k-domination γ_k, quelques propriétés, quelques bornes sur γ_k,et des valeurs exactes de γ_k pour certaines classes de graphe.

Dans le troisième chapitre, nous déterminons l'indice de criticité de la suppression d'un sommet, et ensuite nous avons déterminé l'indice de criticité de la suppression et l'ajout d'une arête de la 2-domination pour les chaînes et les cycles.

Et enfin, nous donnons une conclusion sur le travail accompli et quelques perspectives.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES GRAPHES

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.

1.1 Les graphes

1.1.1 Définitions et notations

Nous étudions des graphes $G = (V, E)$, où V est un ensemble des sommets, et E est un ensemble de paires des sommets appelées arêtes. L'ordre de G est le nombre de ses sommets noté $n = |V|$. La taille de G le nombre de ses arêtes noté $m =\mid E \mid$. Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet. Notons $uv \in E$ l'arête joignant les sommets u et $v \in V$. u et v sont appelés les extrémités de l'arête. Nous disons que deux sommets u et v sont adjacents, s'il existe une arête les reliant, c'est à dire si $uv \in E$.

Voisinage

Nous appelons voisinage ouvert d'un sommet u, noté $N_G(u)$ l'ensemble des sommets adjacent à u dans G. Le plus souvent, quand le contexte étant explicite, nous noterons simplement $N(u)$. Le voisinage fermé d'un sommet u désigne l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Nous parlons aussi d'un voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, noté $N(S)$, pour désigner l'union des voisinages ouverts des sommets de S. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de S est l'union des voisinages fermés des sommets de S, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$. Le voisinage privé d'un sommet $u \in S$ par rapport à S, noté $pn_G(u, S)$ (ou $pn(u, S)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets dans $N(S)$ ayant uniquement u pour voisin dans S, i.e. $pn(u, S) = N(S) - N(S \setminus \{u\})$. Si $v \in pn(u, S)$, alors on dit que v est un voisin privé de u par rapport à S.

Degré

Nous appelons degré d'un sommet v dans G, noté $d_G(v)$, le nombre des arêtes de G incidents à v. Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets ($\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$). De même, le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets ($\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$).

Concept de minimalité et maximalité, minimum maximum

Soient $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété. Un sous-ensemble A de V est dit minimal par rapport à la propriété P si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette propriété. Aussi, A est dit maximal par rapport à la propriété P, si aucun sous ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété P.

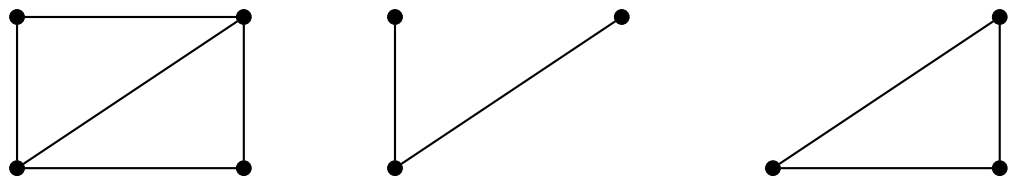
Nous dirons qu'un sous-ensemble B de V est minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété: D'une manier similaire, nous disons que B est maximum ou de taille maximale par rapport à P, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

Sommets particuliers

Nous appelons sommet isolé un sommet de degré 0. Un sommet de degré 1 est appelé sommet pendant (ou feuille). L'unique sommet qui est adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support.

Sous-graphe et sous-graphe induit

Le graphe H est dit sous-graphe d'un graphe G lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un sous-graphe H de G est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe induit de G il suffit de considérer un sous-ensemble A de G. En outre, ce sous-graphe induit sera désigné par $G[A]$. On dira aussi que $A \subseteq V(G)$ induit le sous-graphe correspondant. (voir Figure 1.1.1). Soit v un sommet de V. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V - \{v\}]$.



$G = (V, E)$ $G_A = (V_A, E_A)$ $G_B = (V_B, E_B)$

Figure 1.1.1 : G_A est sous-graphe de G et G_B est sous-graphe induit de G.

Graphe partiel

Nous appelons graphe partiel de $G = (V, E)$ tout graphe $H = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G(voir Figure 1.1.2).

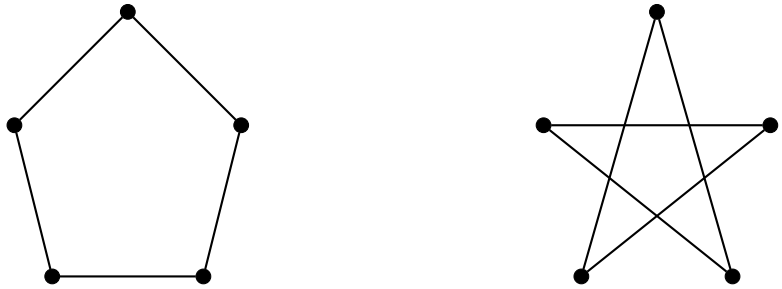


$G = (V, E)$ $H = (V, E')$

Figure 1.1.2 : H est un graphe partiel de G.

Le complémentaire

Soit G un graphe quelconque. Le graphe complémentaire d'un graphe G, noté $\overline{G}$, est le graphe avec le même ensemble des sommets $V(G)$, mais les arêtes si $uv \in E(G)$ si et seulement si $uv \notin E(\overline{G})$, c'est à dire que $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$ (voir la Figure 1.1.3).



(a) (b)

Figure 1.1.3 : (a) Un graphe G et (b) son complémentaire $\overline{G}$.

1.1.2 Les graphes particuliers

Graphe complet

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n - 1$ (voir Figure 1.1.4).

Graphe discret

On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est discret ou null s'il ne contient aucune arête, c'est-à-dire que $E = \phi$ et noté $\overline{K_n}$ (voir Figure 1.1.4).



(1) (2)

Figure 1.1.4 : (1) Un graphe complet (K_4) et (2) un graphe discret ($\overline{K_4}$).

Graphe k-régulier

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k-régulier si tous ses sommets sont de degré k, c'est-à-dire, $d_G(x) = k$ pour tout $x \in V$ (voir Figure 1.1.5).

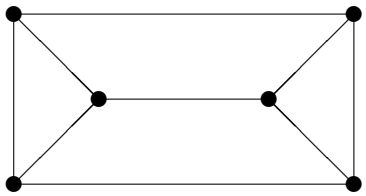


Figure 1.1.5 : Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

Une chaîne

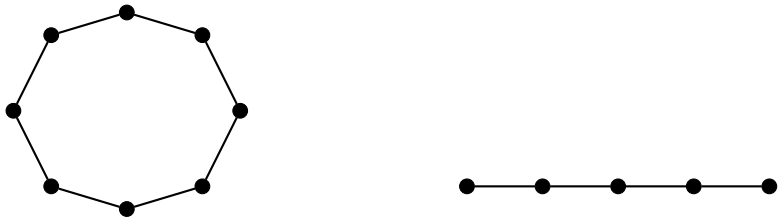
Une chaîne d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée des sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k)$ où k est un entier positif, les v_i sont les sommets de G et les e_i sont les arêtes de G. L'entier $k-1$ est la longueur de la chaîne. Une chaîne **élémentaire** est un chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet (tous ses sommets sont distincts):

Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets noteé par Pn, est une chaîne elémentaire sans cordes:

(voir Figure 1.1.6).

Cycle

Un cycle C d'un graphe G est une chaîne tell que les extrémités sont confondues. Un cycle simple est une chaîne simple que se referme. Un graphe contenant un seul cycle est appelé un uni cycle. La longueur d'un cycle est le nombre de ses arêtes. Un cycle est dit **pair** ou **impair** selon sa longueur. Le graphe C_n designe un cycle sans corde à n sommets et le cycle C_n est le seul graphe 2-régulier (le degré de tous les sommet est égale à deux) (voir Figure 1.1.6).



(1) (2)

Figure 1.1.6 : (2)La chaine P_5 et (1)Le cycle C_8.

Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycle, il contient exactement $(n-1)$ arête et noté T. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé forêt. (voir Figure 1.1.7)

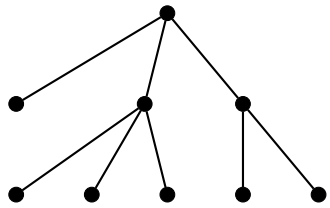


Figure 1.1.7 : Un arbre T.

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si pour toute paire des sommets x, y de V, il existe une chaîne reliant x à y. Dans la Figure 1.1.8 , le graphe G est connexe puisque il

contient une seule composante connexe et le graphe H est non connexe car il contient deux composantes connexes.

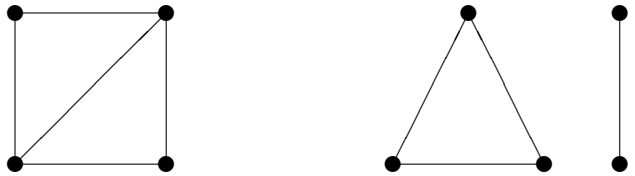


Figure 1.1.8 : G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe.

Graphe biparti:

Un graphe biparti est un graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, alors $\mid E \mid = \mid X \mid \cdot \mid Y \mid$, noté $K_{p,q}$ avec $p = \mid X \mid$ et $q = \mid Y \mid$ (voir Figure 1.1.9).

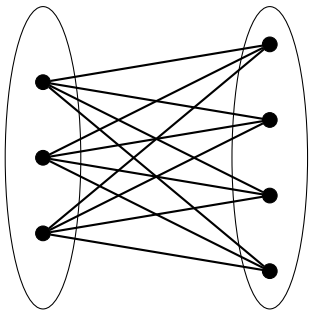
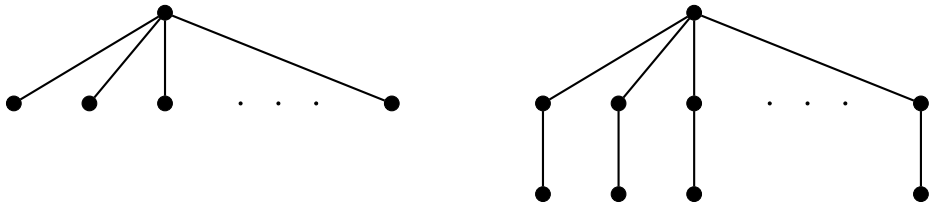


Figure 1.1.9 : Le graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Étoile

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|X| = 1$ et $|Y| = q$. Elle est est notée par $K_{1,q}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile. Une étoile subdivisée est une étoile dont chaque arête est subdivisée une fois (voir Figure 1.1.10). Nous noterons par $K^*_{1,q}$ l'étoile subdivisée obtenue à partir de l'étoile$K_{1,q}$.



(1) (2)

Figure 1.1.10 : (1) Une étoile $K_{1,q}$ et (2) une étoile subdivisée $K^*_{1,q}$.

La couronne

La couronne de $G = (V, E)$ notée $Cr(G)$ c'est le graphe obtenue en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2\,|V|$.

1.1.3 Quelques opérations de graphes

Les définitions sont données ci-après dans un graphe $G = (V; E)$.

L'ajout d'une arête

Soit xy $\in E(\overline{G})$. L'ajout d'une l'arête xy au graphe G produit le graphe noté G + e résultant de l'ajout d'une arête entre x et y dans le graphe G.

La suppression d'une arête

Soit e $\in$ E(G): La suppression d'une l'arête e du graphe G produit le graphe noté $G - e$, obtenu suite à l'effacement de e (ses extrémités restent).

La suppression d'un sommet

Soit $v \in V(G)$: La supperession de sommet v du graphe G produit le graphe noté $G - v$, obtenu suite à la suppression de v et de toutes les arêtes de G incidentes à v.

1.1.4 Notion de criticité et de stabilité

Définitions d'un graphe critique et stable par rapport à un paramètre μ quelconque.

- Un graphe ce G est dit critique si μ change pour toute arête ajoutée.
- Un graphe ce G est dit stable si μ reste inchangé pour toute arête ajoutée.
- Un graphe ce G est dit critique si μ change pour toute arête supprimée.
- Un graphe ce G est dit stable si μ reste inchangé pour toute arête supprimée.

Chapitre 2

La k-domination dans les graphes

Dans ce chapitre , nous citons quelques résultats existants sur le nombre de k-domination γ_k, quelques propriétés, quelques bornes sur γ_k, et des valeurs exactes de γ_k pour certaines classes de graphes. Ensuite nous donnons un bref aperçu sur les graphes critiques .

2.0.1 La domination

Définition 2.0.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit S un sous-ensemble de V. Nous disons que S est un ensemble dominant de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le nombre de domination, noté par $\gamma(G)$, est le cardinal d'un ensemble dominant minimum de G.*

Remarque 2.0.1 *Si S est un ensemble dominant d'un graphe simple $G = (V, E)$, alors:*

1. Un sous-ensemble de S n'est pas nécessairement un ensemble dominant de G, tandis que tout ensemble contenant S est un ensemble dominant de G.

2. S contient tous les sommets isolés de G.

3. Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

   - $\gamma(G) = 1$ si et seulement si G possède un sommet v de degré $n - 1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G.

- $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$, dans ce cas $V(G)$ est l'unique ensemble dominant de G.

2.0.2 Quelques résultats sur la domination

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination. Walikar Acharya et Sampathkumar [17] ont présenté deux bornes inférieures pour le nombre de domination γ.

Théorème 2.0.1 *[17]*

Pour tout graphe simple G avec n sommets et m arêtes et de degré maximum $\Delta(G)$ nous avons

$$\gamma(G) \geq n - m \qquad et \qquad \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}.$$

Exemple 2.0.1 *Le nombre de domination de $K_{1,3}$ tel que $\gamma(K_{1,3}) = n - m = \frac{n}{\Delta(K_{1,3})+1} = 1$.*

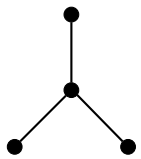


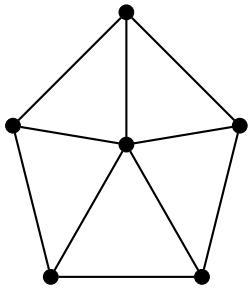
Figure 2.0.1 : Le graphe $K_{1,3}$.

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$.

Théorème 2.0.2 *[1] Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

Exemple 2.0.2 *Une exemple d'un graphe vérifient l'égalité* $(G) = n - \Delta(G) = 1$.



G

Figure 2.0.2 : Le graphe G.

Domke, Dunbar et Markus [6] ont caractérisé la classe des arbres T atteignant la borne du Théorème précédent.

Nous donnons une autre définition, pour un entier p, un arbre obtenue à partir d'une étoile $K_{1,t}$, $t \geq 1$ en subdivisant p arêtes.Si $p < t$, alors $S_p(K_{1,t})$ est une araignée blessé .

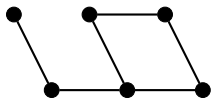
Théorème 2.0.3 *[6] Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta(T)$, alors $\gamma(T) = n - \Delta(T)$ si et seulement si T est une araignée blessée.*

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$. En 1962, Ore [13] a prouvé que le nombre de domination d'un graphe sans sommet isolé est au plus la moitie de son ordre.

Théorème 2.0.4 *[13] Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés, alors on a:*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Exemple 2.0.3 *Un exemple d'un graphe vérifiant l'égalité*



G

Figure 2.0.3 : Le graphe G avec $\gamma(G) = 2$.

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ a été donnée indépendamment par Payan et Xuang [14] et Fink, Jacobson, Kirch et Roberts [8].

Théorème 2.0.5 *[8, 14] Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Jaeger et Payan [12] ont établi sur $\gamma(G)$ les résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants.

Théorème 2.0.6 *[12] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1.$$

$$2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n.$$

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) = n+1$, est donnée par Cockayne, Hedetniemi [4].

Théorème 2.0.7 *[4] Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1,$$

si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{G} = \overline{K_n}$.

Exemple 2.0.4 *Le nombre de domination tel que $\gamma(K_5) + \gamma(\overline{K_5}) = n + 1 = 6$.*



K_5 $\qquad\qquad$ $\overline{K_5}$

Figure 2.0.4 : Un graphe K_5 et son complémentaire $\overline{K_5}$.

2.0.3 Généralisation sur la k-domination

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson ont introduit la généralisation de la domination dans les graphes. Les papiers [5, 10] parus dans les actes de la conférence contiennent les définitions de ces nouveaux paramètres, quelques propriétés et deux conjectures.

Définition 2.0.2 *Soient G un graphe et k un entier positif. Un sous ensemble S de V est un k-dominant de G si tout sommet de $V - S$ a au moins k voisins dans S.*

2.0.4 Quelques bornes sur γ_k

Dans leur papier introduisant la k-domination et la k-indépendance, Fink et Jacobson [10] ont donné des bornes sur $\gamma_k(G)$. Les résultats suivants donnent des minorants pour $\gamma_k(G)$.

Théorème 2.0.8 *[10] Pour tout graphe G avec n sommets, m arêtes et pour tout entier positif $k \leq \Delta$, nous avons*

$$\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k} \qquad et \qquad \gamma_k(G) \geq \frac{kn}{\Delta + k}.$$

Théorème 2.0.9 *[10] Si G est un graphe d'ordre n, de taille $m \neq 0$ et k un entier positif, alors $\gamma_k(G) = n - \frac{m}{k}$ si et seulement si G est un graphe biparti k-semi-régulier.*

Cockayne ,Gamble et Shepherded [5] ont donné une borne supérieure en fonction du degré minimum δ .

Théorème 2.0.10 *[5] Si G est un graphe d'ordre n, de degré minimum δ et k un entier avec $k \leq \delta$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{k+1}$$

.

Favaron, Hansberg et Volkmann [7] ont caractérisé les graphes extrêmaux atteignant l'égalité dans le Théorème précédent.

Théorème 2.0.11 *[7] Soit G un graphe connexe d'ordre n, de degré minimum δ et k un entier positif avec $k \leq \delta$. Alors $\gamma_k(G) = \frac{kn}{k+1}$ si et seulement si $k \geq 2$ et G est la K_k-couronne $J \circ K_k$, ou $k = 1$ et G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Théorème 2.0.12 *[15] Soient r, k des entiers positifs et G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq \frac{r+1}{r}k - 1$. Alors, on a $\gamma_k(G) = \frac{kn}{k+1}$.*

La borne du Théorème précédent peut être présentée d'une manière équivalente, mais avec une forme plus explicite.

Corollaire 2.0.1 *[2] Si G est un graphe d'ordre n, de degré minimum δ et k un entier positif avec $k \leq \delta$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\lceil k/(\delta + 1 - k)\rceil n}{\lceil k/(\delta + 1 - K)\rceil + 1}$$

Théorème 2.0.13 *[3, 15]*

Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$,alors

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} (2k-\delta)n/(2k-\delta+1) & si\ \ (\delta+1)/2 \leq k \leq \delta - 1 \\ \dfrac{n}{2} & si\ \ k \leq (\delta+1)/2 \end{cases}.$$

.

En s'inspirant des idées de Stracke et Volkmann, Chen et Zhou [19] ont amélioré légèrement la borne du théorème précédent.

Théorème 2.0.14 *[3] Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} kn/(k+1) & si\ k = \delta; \\ (2k-\delta-1)n/(2k-\delta) & si\ (\delta+3)/2 \leq k \leq \delta-1 \\ 2n/3 & si\ k = (\delta+2)/2 \\ n/2 & si\ k = (\delta+1)/2 \end{cases} .$$

.

Le théorème suivant améliore la borne de Chen et Zhou pour $(\delta+3)/2 \leq k \leq \delta-1$

Théorème 2.0.15 *[2] Si G est un graphe d'ordre n, de degré minimum δ et k est un entier positif avec $k \leq \delta$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\delta n}{2\delta + 1 - k}$$

2.0.5 Graphes γ_k critiques

Soit $G = (V; E)$ un graphe.

Pour $v \in V$, on note par $G - v$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V - v$. Le graphe $G - v$ est obtenu, à partir de G, en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v.

Pour $e(G)$, on note par $G - e$ le graphe partiel $G' = (V, E - e)$. Le graphe $G - e$ est obtenu, à partir de G, en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés).

Pour $e(G)$, on note par $G + e$ le graphe $G'' = (V, E + e)$. Le graphe $G + e$ est obtenu, à partir de G, en ajoutant l'arête e.

Le concept des graphes critiques a été introduit par Walikar et Acharya [18], 1979, et Sumner et Blitch [18], 1983, et depuis a été largement étudié. Si on supprime une arête de G,$\gamma(g)$ peut s'augmenter ou reste inchangé.

Définition 2.0.3 *Soit G un graphe*

- *Si le nombre de domination augmente en supprimant une arête de G, alors le graphe sera dit graphe γ^--arête critique.*

- *Si le nombre de domination diminue en ajoutant une arête à G, alors le graphe sera dit graphe γ^+-arête critique.*
- *Si le nombre de domination reste inchangé en ajoutant une arête à G, alors le graphe sera dit graphe γ^+-arête stable.*
- *Si le nombre de domination reste inchangé en supprimant un sommet de de G, alors le graphe sera dit graphe γ^--sommet stable.*
- *Si le nombre de domination diminue ou augmente en supprimant un sommet de G, alors le graphe sera dit graphe γ^--sommet critique.*

Proposition 2.0.1 *Pour un graphe G,*

1. $\gamma(G) \leq \gamma(G-e) \leq \gamma(G)+1$ *pour tout arête* $e \in E(G)$
2. $\gamma(G)-1 \leq \gamma(G+e) \leq \gamma(G)$ *pour tout arête* $e \in E(\overline{G})$
3. $\gamma(G)-1 \leq \gamma(G-v) \leq \gamma(G)+\Delta(G)-1$ *pour tout arête* $v \in V$

Chapitre 3

L'indice de criticité du nombre de 2-domination dans certains graphes

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'indice de criticité du nombre de 2-domination dans certains graphes. Dans la première partie de ce chapitre, nous avons déterminé déterminé l'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination pour les chaîne et les cycles. Et dans la deuxième partie, nous avons aussi déterminé l'indice de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête de la 2-domination pour les chaînes et les cycles.

3.1 Définitions et notations

3.1.1 2-domination

Définition 3.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit S un sous-ensemble de V. On dit que S est un ensemble 2-dominant de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins deux sommet dans S. la cardinalité minimum d'un 2-dominant minimal d'un graphe G noter par γ_2 est appeler le nombre de 2-domination .*

3.1.2 L'indice de criticité

Définition 3.1.2 *Pour un graphe G, nous définissons l'indice de criticité d'un sommet $v \in V(G)$ comme $ci^v_{\gamma_2}(v) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G - v)$. Et l'indice de criricité dans un graphe G est*

défini par

$$ci^{v}_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{n} ci^{-}_{\gamma_2}(v)\right)/n(G)$$

.

Définition 3.1.3 *Pour un graphe G, nous définissons l'indice de criticité d'une arête $e \in E(G)$ comme $ci^{-}_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G-e)$. Et l'indice de criticité dans un graphe G est défini par*

$$ci^{-}_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{m} ci^{-}_{\gamma_2}(e)\right)/m(G)$$

.

Définition 3.1.4 *Pour un graphe G, nous définissons l'indice de criticité d'une arête $e \in E(\overline{G})$ comme $ci^{+}_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(G) - \gamma_2(G+e)$. Et l'indice de criticité dans un graphe G est définie par*

$$ci^{+}_{\gamma_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^{+}_{\gamma_2}(e)\right)/m(\overline{G})$$

Proposition 3.1.1 *Pour un graphe G,*

1. $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(G-v) \leq \gamma_2(G)+1$ *pour tout arête v de G*
2. $\gamma_2(G)-1 \leq \gamma_2(G+e) \leq \gamma_2(G)$ *pour tout arête $e \in E(\overline{G})$*
3. $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(G-e) \leq \gamma_2(G)+1$ *pour tout arête $e \in E(G)$*

Remarque 3.1.1 *Nous rapplons quelques résultats*

1. Pour les cycles C_n, nous avons

$$\gamma_2(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

.

2. Pour les chaîne P_n ,nous avons

$$\gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

.

Remarque 3.1.2 *Tout ensemble S 2-dominant pour les cycles C_n avec $n \geq 3$, contient au plus une chaine P_2.*

3.2 L'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination

Dans cette section, nous étudions l'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination pour les cycles et les chaînes.

3.2.1 L'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination d'un cycle C_n

Observation 3.2.1 *Si C_n est un cycle d'ordre n, alors pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\gamma_2(C_n - v_i) = \gamma_2(P_{n-1})$.*

A partir de cette observation, nous déduisons ce résultat.

Corollaire 3.2.1 *Pour tout cycle C_n et $n \geqslant 3$, alors*

$$\gamma_2(C_n - v_i) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & si\ n \equiv 0\,(mod 2) \\ \dfrac{n}{2} & si\ n \equiv 1\,(mod 2). \end{cases} .$$

.

Théorème 3.2.1 *Pour tout cycle C_n , $ci^v_{\gamma_2}(C_n) = 0$.*

Preuve. D'après le Corollaire 3.2.1, on trouve $ci^-_{\gamma_2}(v_i) = \gamma_2(C_n) - \gamma_2(C_n - v_i) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 0$ donc $ci^v_{\gamma_2}(c_n) = 0$. ■

3.2.2 L'indice de criticité de la suppression d'un sommet de la 2-domination d'une chaîne P_n

Nous déterminons la valeur de l'indice de criticité pour une chaîne P_n. Soit P_n une chaîne de sommets $v_1, v_2, ..., v_n$. La suppression du sommet v_i de la chaîne P_n produit les deux chaînes P_{i-1} et P_{n-i}.

Observation 3.2.2 *Si P_n est une chaîne d'ordre n, alors pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$*

$$\gamma_2(P_n - v_i) = \begin{cases} \gamma_2(P_{i-1}) + \gamma_2(P_{n-i}) & si\ i \neq 1 ou\ n \\ \gamma_2(P_{n-1}) & si\ i = 1 ou\ n\,. \end{cases}.$$

A partir de cette observation, nous déduisons cet résultat.

Corollaire 3.2.2 *Pour tout chaîne P_n*

$$\gamma_2(P_n - v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-i+1}{2} \right\rceil & si\ i \neq 1 ou\ n \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & si\ i = 1 ou\ n\,. \end{cases}.$$

Théorème 3.2.2 *Pour tout chaîne P_n non trivial*

$$ci^v_{\gamma_2}(P_n) = \begin{cases} \frac{2}{n} & si\ n \equiv 0\,(mod\,2) \\ \frac{-(n-3)}{2n} & si\ n \equiv 1\,(mod\,2), \end{cases}$$

Preuve.

Nous distinguons quatre cas selon la parité de i et n

Cas 1 Si $n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, $i \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, alors

$$\gamma_2(P_n - v_i) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{pour } i \neq n \\ \frac{n}{2} & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

donc

$$ci_{\gamma_2}^{-v}(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \\ 1 & \text{si } i = n \ , \end{cases}$$

Cas 2 Si $n \equiv 0 \pmod 2$, $i \equiv 1 \pmod 2$, alors

$$\gamma_2(P_n - v_i) = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & \text{pour } i \neq 1 \\ \\ \dfrac{n}{2} & \text{pour } i = 1, \end{cases}$$

donc

$$ci_{\gamma_2}^{v}(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \\ 1 & \text{si } i = 1 \, . \end{cases}$$

Cas 3 Si $n \equiv 1 \pmod 2$, $i \equiv 0 \pmod 2$,alors

$$\gamma_2(P_n - v_i) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{pour } i \neq 1 \\ \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{pour } i = 1. \end{cases}$$

donc $ci_{\gamma_2}^{v}(v_i) = 0$

Cas 4 Si $n \equiv 1 \pmod 2$, $i \equiv 1 \pmod 2$,alors

$$\gamma_2(P_n - v_i) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} + 1 & \text{pour } i \neq 1 \ \ et \ n \\ \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{pour } i = 1 \ \ ou \ n. \end{cases}$$

donc

$$ci_{\gamma_2}^{v}(v_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \neq 1 \\ \\ 0 & \text{si } i = 1 \, . \end{cases}$$

Maintenant, nous établissons les partitions pour $ci^v_{\gamma_2}(v_i)$,$1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$ci^v_{\gamma_2}(v_i) = \begin{cases} 1,\ 0,\quad 0,\ 0,\quad 0,\ \ldots,\ 0,\ \ 1, & \text{si } n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2) \\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 0, & \text{si } n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2). \end{cases}$$

Cela implique que si $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)$ alors $ci^v_{\gamma_2}(P_n) = \frac{2}{n}$, si $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$ alors $ci^v_{\gamma_2}(P_n) = \frac{-(n-3)}{2n}$.

■

3.3 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination

Dans cette section, nous étudions l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination pour les cycles et les chaînes.

3.3.1 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination d'un cycle C_n

Observation 3.3.1 *Si C_n est un cycle d'ordre n, alors pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\gamma_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \gamma_2(P_n)$.*

A partir de cette observation, nous déduisons cet résultat.

Corollaire 3.3.1 *Pour tout cycle C_n et $n \geqslant 3$,on a*

$$\gamma_2(C_n - e) = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & si\ n \equiv 0\,(mod 2) \\ \dfrac{n+1}{2} & si\ n \equiv 1\,(mod 2). \end{cases} .$$

.

Théorème 3.3.1 *Pour tout cycle C_n .*

$$ci^-_{\gamma_2}(C_n) = \begin{cases} -1 & si\ n \equiv 0\,(mod\,2) \\ \\ 0 & si\ n \equiv 1\,(mod\,2). \end{cases} .$$

.

Preuve. D'après le Corollaire 3.2.1 On distingue les deux cas suivants

1. Si $n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, nous avons
   $ci^-_{\gamma_2}(v_iv_{i+1}) = \gamma_2(C_n) - \gamma_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = -1$
2. Si $n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$, nous avons
   $ci^-_{\gamma_2}(v_iv_{i+1}) = \gamma_2(C_n) - \gamma_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = 0$

alors

$$ci^-_{\gamma_2}(C_n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2) \\ \\ 0 & \text{si } n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2). \end{cases} . \blacksquare$$

3.3.2 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-domination d'une chaîne P_n

Nous déterminons la valeur exacte de l'indice de criticité pour une chaîne P_n. Soit P_n une chaîne de sommets $v_1, v_2, ..., v_n$. La suppression d'une arête v_iv_{i+1} de la chaîne P_n produit les deux chaînes P_i et P_{n-i} .

Observation 3.3.2 *Soit P_n est une chaîne d'ordre n, alors pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$*

$$\gamma_2(P_n - v_iv_{i+1}) = \gamma_2(P_i) + \gamma_2(P_{n-i}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-i+1}{2} \right\rceil$$

A partir de cette observation, nous déduisons cet résultat.

Corollaire 3.3.2 *Pour chaque chaîne P_n non triviale et $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a*

$$\gamma_2(P_n - v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil & si\ i \equiv 0\,(mod\,2) \\ \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil & si\ i \equiv 1\,(mod\,2). \end{cases} .$$

Théorème 3.3.2 *Pour tout chaîne P_n non triviale d'ordre n , on a*

$$ci^-_{\gamma_2}(P_n) = \begin{cases} \dfrac{-(n/2)+1}{n-1} & si\ n \equiv 0\,(mod\,2) \\ -1 & si\ n \equiv 1\,(mod\,2). \end{cases}.$$

Preuve. D'après le Corollaire 3.2.2 nous distinguons les deux cas suivants

1. Si , $i \equiv 0 \pmod 2$, alors

   $ci_{\gamma_2}(v_iv_{i+1}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 1 = -1$

2. Si $i \equiv 1 \pmod 2$, alors

   $$ci^-_{\gamma_2}(v_iv_{i+1}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2). \end{cases}$$

   Maintenant, on établie les partitions pour $ci^-_{\gamma_2}(v_iv_{i+1})$,$1 \leqslant i \leqslant n-1$

   $$ci^-_{\gamma_2}(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 0,\ -1,\ \ 0,\ -1,\ ...,0 & \text{pour } n \equiv 0 \pmod 2) \\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ ...,-1,\ -1 & \text{pour } n \equiv 1 \pmod 2). \end{cases}$$

Cela implique que si $n \equiv 0 \pmod 2$ alors $ci^-_{\gamma_2}(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil /(n-1)$, si $n \equiv 1 \pmod 2$ alors $ci^-_{\gamma_2}(P_n) = -1$. ■

3.4 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination

Dans cette section, nous déterminons l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination pour les cycles et les chaînes .

3.4.1 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination d'un cycle C_n

Nous donnons une valeur exacte de l'indice de la 2-domination de $G = C_n + xy$ (G est obtenu par l'ajout d'une arête à un cycle C_n).Alors G est formé par deux chaîne P_p et P_q

(avec $n = p + q + 2$), donc $V(C_n) = V(P_p) \cup V(P_q) \cup \{x, y\}$ tels que $V(P_p) = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ et $V(P_q) = \{v_1, v_2, ..., v_q\}$.

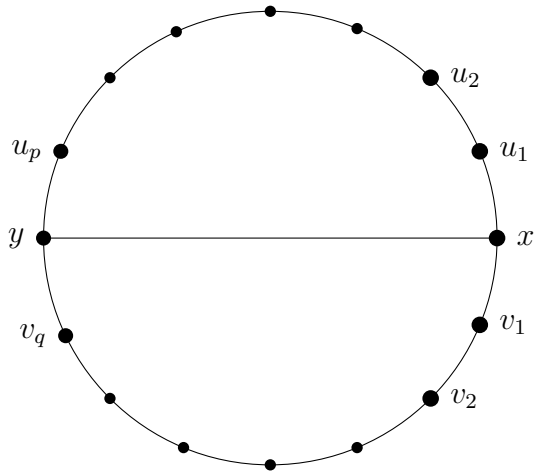


Figure 3.4.1 : Un graphe $G = C_n + xy$.

Observation 3.4.1 *Soit la chaîne P_t définie par une suite des sommets $x_1, x_2, ..., x_t$,avec $t \geq 3$ et soit S un γ_2-ensemble de P_t, alors on peut voir facilement que :*

- *Si $t \equiv 0(mod2)$,alors $S = \{x_1, x_3, ..., x_{4i+1}x_{4i+3}..., x_{t-1}, x_t\}$*
- *Si $t \equiv 1(mod2)$,alors $S = \{x_1, x_3, ..., x_{4i+1}x_{4i+3}..., x_t\}$*

Théorème 3.4.1 *Pour tout cycle C_n , $ci^+_{\gamma_2}(C_n) = 0$.*

Preuve.

Soit $G = C_n + xy$ avec $n = p+q+2 \geq 4$ .On sait que $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(C_n)$ d'après l'Observation 3.4.1 et pour montrer que $\gamma_2(G) = \gamma_2(C_n)$, il suffit de montrer que $\gamma_2(G) \geq \gamma_2(C_n)$.On distingue quatre cas

Cas 1 p,q$\equiv 0(mod2)$

Soit S_1 un γ_2-ensemble de $P_p = v_1, v_2, ..., v_q$, S_2 un γ_2-ensemble de $P_q = u_1, u_2, ..., u_p$ et S unγ_2-ensemble de G . D'âpres l'Observation 3.4.1 on a $\{v_{q-1}, v_q\} \in S_1$, $\{u_{p-1}, u_p\} \in S_2$, $(S_1 - \{u_q\}) \cup (S_2 - \{u_q\}) \cup \{y\}$ est un ensemble 2-domination pour G et $S \leq (S_1 - \{u_q\}) \cup$

$(S_2 - \{u_q\}) \cup \{y\}$ donc$|S| \leq |S_1| + |S_2| + 1$

$$\begin{aligned}\gamma_2(G) &\leq \gamma_2(P_q) + \gamma_2(P_p) - 1 \\ &= \frac{p+2}{2} + \frac{q+2}{2} - 1 \\ &= \frac{n+2}{2} - 1 \\ &= \cdot\frac{n}{2} = \gamma_2(C_n)\end{aligned}$$

alors $\gamma_2(C_n + e) = \gamma_2(C_n)$

On fait le même raisonnement pour les cas suivants

Cas 2 $p, q \equiv 1(mod2)$, alors

$$\begin{aligned}\gamma_2(G) &\leq \gamma_2(P_q) + \gamma_2(P_p) \\ &= \frac{p+1}{2} + \frac{q+1}{2} \\ &= \cdot\frac{n}{2} = \gamma_2(C_n)\end{aligned}$$

alors $\gamma_2(C_n + e) = \gamma_2(C_n)$

Cas 3 $p \equiv 1(mod2)$ et $p \equiv 0(mod2)$, alors

$$\begin{aligned}\gamma_2(G) &\leq \gamma_2(P_q) + \gamma_2(P_p) \\ &= \frac{p+2}{2} + \frac{q+1}{2} \\ &= \cdot\frac{n+1}{2} = \gamma_2(C_n)\end{aligned}$$

alors $\gamma_2(C_n + e) = \gamma_2(C_n)$

Dans ce cas on a trouve $\gamma_2(C_n + e) = \gamma_2(C_n)$, cela implique que $ci^+_{\gamma 2}(C_n) = 0$.

■

3.4.2 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-domination d'une chaîne

Dans cette section, on donné les valeurs exactes de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête. Soit La chaîne $P_n + e$ est formé par deux chaînes P_p et P_q et un cycle C_t (avec $n = p + q + t$).

Nous décrivons d'abord deux procédures pour déterminer l'indice de criticité d'une chaîne.

Procédure A

Soit une chaîne $P_n = w_1, ..., w_n$, $n \geq 3$, Soit H_1 un unicycle obtenu à partir de P_n en joignant deux sommets non adjacents w_i et w_j avec un arête , où $i < j$.Supposons que H_1 a un cycle de longueur supérieure à 5 . Alors H_1 a une sous-chaîne $P = v_1, u_1, u_2, v_2 = w_j$ du cycle , et on forme le graphe H_2 de H_1 en supprimant les sommets u_1 et u_2 et en joignant les sommets v_1 et v_2. Nous répétons ce procédure jusqu'à on obtient un graphe H_k ayant un cycle d'ordre 3 ou 4.

Lemme 3.4.1 $\gamma_2(H_i) = \gamma_2(H_{i+1}) + 1$

Preuve.

On suppose S' un γ_2-ensemble pour le graphe H_{i+1} en attachant la chaine $P_2 = u_1u_2$ entre les deux sommets v_1, v_2 , sans perte de généralité , si $\{v_1, v_2\} \in S'$ alors $u_1 \in S'$, est donc S est un ensemble 2-dominant de H_i avec $S \subset S' \cup \{u_1\}$, d'où $|S| = \gamma_2(H_i) \leq |S' \cup \{u_1\}| = \gamma_2(H_{i+1}) + 1$. Et si $v_1 \in S'$ ou $v_2 \in S'$, alors soit $u_1 \in S'$ ou $u_2 \in S'$, dans ce cas S est un ensemble 2-dominant de H_i avec $S \leq S' \cup \{u_1\}$ ou $S \leq S' \cup \{u_2\}$, d'où $|S| = \gamma_2(H_i) \leq |S' \cup \{u_1\}| = \gamma_2(H_{i+1}) + 1$.

Maintenant, on suppose que S est un γ_2-ensemble du graphe H_i avec une sous chaine $P = v_1, u_1, u_2, v_2 = w_j$, on supprime la chaine $P_2 = u_1u_2$ et sans perte de généralité , si $u_1, u_2 \in S$ alors $v_1, v_2 \notin S$, donc $(S - \{u_1, u_2\}) \cup \{v_i\}$,$i = \{1, 2\}$, donc S' est un ensemble 2-dominant de H_{i+1} avec $S' \leq (S - \{u_1, u_2\}) \cup \{v_i\}$,$i = \{1, 2\}$, d'où $|S'| = \gamma_2(H_{i+1}) \leq |(S - \{u_1, u_2\}) \cup \{v_i\}| = \gamma_2(H_i) - 1$. Si $u_1 \in S, u_2 \notin S$,alors $v_2 \in S$ et si $v_1 \in S$ et d'après la Remarque 3.2.1 ,donc $S - \{u_1\}$ et un 2-dominant de H_{i+1} avec $S' \leq S - \{u_1\}$, d'où $|S'| \leq |S| - 1$, et on obtient $\gamma_2(H_{i+1}) \leq \gamma_2(H_i) - 1$. Et si $v_1 \notin S$ donc $S - \{u_1\}$ et un 2-dominant de H_{i+1} avec $S' \leq S - \{u_1\}$, d'où $|S'| \leq |S| - 1$, et on aura aussi $\gamma_2(H_{i+1}) \leq \gamma_2(H_i) - 1$. Et par le même raisonnement, on trouve $\gamma_2(H_{i+1}) \leq \gamma_2(H_i) - 1$ si $u_2 \in S, u_1 \notin S$. Enfin dans tout les cas l'égalité est atteint $\gamma_2(H_i) = \gamma_2(H_{i+1}) + 1$.

■

Procédure B Une 3-chaine pendante dans graphe est une chaine v, u_1, u_2, u_3 tell que $d_G(v) \geq 2, d_G(u_1) = d_G(u_2) = 2, d_G(u_3) = 1$. .Considérons le graphe R_i avec une 3-chaine

pendante v, u_1, u_2, u_3 . soit R_{i+1} le graphe obtenu à partir de R_i en suppriment les sommets u_2 et u_3 .Nous répétons ce procédure jusqu'à ce que nous obtenions un graphe R_i sans 3-chaine pendante .

Lemme 3.4.2 $\gamma_2(R_i) = \gamma_2(R_{i+1}) + 1$

Preuve.

Soit S' un γ_2-ensemble du graphe R_{i+1}, en attachant la chaine $P_2 = u_2u_3$ à un sommet pendant u par une arête $e = u_2u$ de R_{i+1} , alors sans perte de généralité $u \in S'$ et $u_3 \in S'$, donc S est un ensemble 2-dominant de R_i avec $S \subset S' \cup \{u_3\}$, donc $|S| = \gamma_2(R_i) \leq |S' \cup \{u_3\}| = |S'| + 1$, et d'où $\gamma_2(R_i) \leq \gamma_2(R_{i+1}) + 1$.

Maintenant, on suppose que S est un γ_2-ensemble du graphe R_i avec une 3-chaine pendante v, u_1, u_2, u_3 .Alors forcement $u_3 \in S$ et après la suppression de l'arête u_2u_3 on peut facilement vérifier que si $u_2 \notin S$ alors $S - \{u_3\}$ est un ensemble 2-dominant R_{i+1} , d'où $|S'| = \gamma_2(R_{i+1}) \leq |S - \{u\}| = |S| - 1 = \gamma_2(R_i) - 1$. Et si $u_2 \in S$ alors $(S - \{u_1, u_2\}) \cup \{u_1\}$ est un ensemble 2-dominante R_{i+1} d'ou, $|S'| = \gamma_2(R_{i+1}) \leq (S - \{u_1, u_2\}) \cup \{u_1\} = |S| - 1 = \gamma_2(R_i) - 1$. Donc $\gamma_2(R_i) = \gamma_2(R_{i+1}) + 1$

■

Théorème 3.4.2 *Pour une chaîne P_n avec $n \geq 3$,*

$$ci^+_{\gamma_2}(P_n) = \begin{cases} n - 2/(n-1) & si\ n \equiv 0\,(mod 2) \\ 0 & si\ n \equiv 1\,(mod 2). \end{cases} .$$

Preuve.

Soit $M(n_1, c, n_2)$, ou $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2\}$ et $c \in \{3, 4\}$. Le graphe obtenu à partir d'un cycle C de longueur c en relient un sommet d'extrémité d'une chaîne P_{n_1} à un certain sommet x de C et en relier un sommet d'extrémité du chaîne P_{n_2} à un sommet y de C adjacent à x. Le graphe $M(n_1, c, n_2)$ s'appellera un graphe de base.

On applique les procédures A et B sur $P_n + e$, où $e \in E(\overline{P_n})$, à la fin le résultat possible dans un graphe, nous obtenons un graphe de base $M(n_1, c, n_2)$ de l'ordre $n_1 + c + n_2$. Soient k_1, k_2 et k le nombre de groupes de deux sommets supprimés de $P_n + e$ pour obtenir les

chaînes P_{n_1}, P_{n_2} et les cycles C, respectivement, les graphes de base $M = M(n_1, c, n_2)$. Ainsi,

$$2(k_1 + k + k2) = n - n(M)$$

et donc

$$k1 + k + k2 = (n - n(M))/2 \tag{3.4.1}$$

Le nombre de graphes $P_n + e$ correspondant au graphe de base M équivaut au nombre de solutions de l'équation (3.4.1),

$\mathbb{C}^2_{((n-n(M))/2)+2} = (n - n(M) + 4)(n - n(M) + 2)/4$

Par l'Observation 3,4.2 et 3.4.3, nous avons $ci^+_{\gamma_2}(e) = \gamma_2(P_n) - \gamma_2(P_n + e) = \gamma_2(P_{n1+c+n2}) - \gamma_2(M)$ pour $e \in E(\overline{P_n})$.

Soit $\mathcal{M}_i$, pour $i = 0, 1$, soit l'ensemble de tous les graphes des base $M = M(n_1, c, n_2)$ pour lequel $ci^+_{\gamma_2}(e) = i$ et $M = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$. Alors

$$\begin{aligned} ci^+_{\gamma_2}(G) &= \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^+_{\gamma_2}(e) \right) / m(\overline{G}) \\ &= \left(\sum_{M \in \mathcal{M}} (\text{Nombre de graphes}(P_n + e)\text{correspondant à M}) \right) / m(\overline{p_n}) \\ &= \left(\sum_{M \in \mathcal{M}} (n - n(M) + 4)(n - n(M) + 2)/4 \right) / m(\overline{p_n}) \end{aligned}$$

Notez que $m(P_n) = (n - 1)(n - 2)/2$, alors

$$ci^+_{\gamma_2}(e) = \left(\sum_{M \in \mathcal{M}} (n - n(M) + 4)(n - n(M) + 2) \right) / 2(n - 1)(n - 2) \tag{3.4.2}$$

Ensuite, en appliquant les Procédures A et B. Alors on distingue les deux cas suivants:

Cas 1 $n \equiv 0(\text{mod}2)$ .Donc $n(M) \equiv 0(\text{mod}2)$. Notez que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 4$, 6 ou 8 pour chaque $M \in \mathcal{M}$, alors

$$\mathcal{M} = \{M(0,4,0), M(1,3,0), M(0,3,1), M(1,3,2), M(2,3,1), M(1,4,1), M(2,4,0), M(0,2,4), M(2,4,2)\}$$

On vérifie que $\mathcal{M}_1 = \{(0,4,0), M(0,4,2), \}$

et $\mathcal{M}_0 = \{M(1,3,0), M(0,3,1), M(1,4,1), M(1,3,2), M(2,3,1), M(2,4,2)\}$.

Donc par l'équation (3.4.2), nous avons $ci^+_{\gamma_2}(P_n) = 3n - 8/2(n-1)$

Cas 2 $n \equiv 1(\text{mod}2)$ .Donc $n(M) \equiv 1(\text{mod}2)$. Notez que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 3$ ou 5 pour chaque $M \in \mathcal{M}$, alors

$$\mathcal{M} = \{M(0,3,0), M(0,3,2), M(2,3,0), M(0,4,1), M(1,4,0), M(1,3,1), M(1,4,2), M(2,4,1), M(2,3,2)\}$$

On facilement vérifie que $M \in \mathcal{M}_0$. Donc , par l'équation (2) ,on trouve $ci^+_{\gamma_2}(P_n) = 0$.

■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous somme intéressés à étudier l'indice de criticité du nombre de 2-domination pour certains graphes. Nous avons déterminés les valeurs exactes de l'indice de criticité de la suppression d'un sommet, la suppression et l'ajout d'une arête de la 2-domination pour les cycles et les chaînes.

En conclusion, il serait intéressant de traiter les questions suivantes qui peuvent être considérées comme une suite de notre travail:

- Etude de l'indice de criticité du nombre de 2-domination pour d'autre classes de graphes.
- Caractérisation de quelques classes de graphes pour les quelles: $\begin{cases} \gamma_2(G+e) = \gamma_2(G) \\ \gamma_2(G-e) = \gamma_2(G). \end{cases}$.
- Détermination des valeurs exactes, ou des bornes relatives au paramètre γ_2 pour certains graphes .

Bibliographie

[1] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*, 2ème ed. Dunod, Paris, 1973.

[2] Y. Caro and Y. Roditty, A note on the k-domination number of a graph, Internat. J .Math . et Math . Sci. 13 (1990) 205-206.

[3] B. Chen and S. Zhou, Upper bounds for f-domination number of graphs, Discrete Math. 185 (1998) 239-243.

[4] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Networks 7 (1977) 247-261. works 7 (1977) 247-261.

[5] E. J. Cockayne, B. Gamble and B. Shepherd. An upper bound for the k-domination number of a graph. J . Graph Theory 9 (1985) 533-534.

[6] G. S. Domke, J. E. Dunbar and L. R. Markus, *Gallai-type theorems and domination parameters*. Discrete Math 167/168 (1997) 237-248.

[7] O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, On k-dominationt and minimum degree in graphs, J. Graph Theory 57 (2008) 33-40.

[8] J.F. Fink, M. S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts, *On graphs having domination number half their order*, Period. Math. Hungar 16 (1985) 287-293.

[9] J. F. Fink and M. S. Jacobson, *n-domination in graphs*, in : Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. John Wiley and Sons, New York (1985) 283-300.

[10] J. F. Fink and M. S. Jacobson, *n-domination, n-dependence and forbid- den subgraphs*,in : Graph Theory with Applications to Algorithms and Com- puter. John Wiley and Sons, New York (1985) 301-311.

[11] C.F. de Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs, Petrograde .

[12] F. Jaeger, C. Payan, *Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 274 (1972) 728-730.

[13] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962)

[14] C. Payan and N.H. Xuong, *Domination-balanced graphs*, J. Graph Theory 6 (1982) 23-32.

[15] Stracke, C., Volkmann, L.: A new domination conception. J. Graph Theory 17, 315-323 (1993).

[16] D.P. Sumner and P. Blitch, Domination Critical Graphs, J. Combin. Theory Ser. B, 34 (1983) 65-76.

[17] H.B. Walikar, B.D. Acharya and E. Sampathkumar. Recent develop- ments in the theory of domination in graphs. In MRI lecture Notes in Math., Mahta Research Instit., Allahabad, Volume1, 1979.

[18] H.B. Walikar and B.D. Acharya, Domination Critical Graphs, Nat. Acad. Sci. Lett., 2 (1979) 7072.98.

[19] H.B. Walikar and B.D. Acharya, Domination Critical Graphs, Nat. Acad. Sci. Lett., 2 (1979) 70-72.98.

(1862).