République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farés de Médéa

Faculté des Sciences



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

En Physique

Par :

Adili Mouloud

et

Hachemi Halim

Thème :

# Modèle Gross-Neveu non commutatif

Soutenu publiquement le : 19 /06 /2018. Devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Président | : D. HOUATIS | Grade : MAA | Université de Médéa |
| Examinateur | : K. BOUCHACHIA | Grade : MAA | Université de Médéa |
| Examinateur | : O. CHERROUD | Grade : MAA | Université de Médéa |
| Encadreur | : S. KOUADIK | Grade : Pr | Université de Médéa |

année universitaire : 2017/2018

**ملخص:**

الغرض من هذه الرسالة هو دراسة نموذج Gross-neveu في شكليات الهندسة الغير التبادلية. أولا، أعطينا الإطار الرياضي لنظرية المجال غير المتفاعل، ثم قدمنا النظرية $\Phi^4$ في فضاء مويال، حيث تم حل مشكلة خليط الاشعة تحت الحمراء و الاشعة فوق البنفسجية. في وقت لاحق، قمنا بمراجعة بعض النظريات التي تم دراستها في الفضاء الغير التبديلي ($\mathrm{LSZ}$،$\Phi^4$ vulcanisé ). وفي النهاية تم حساب وظائف الارتباط نقطتين و اربع نقاط.

**Résumé:**

Le but de ce mémoire est l'étude du modèle Gross-neveu dans le formalisme de la géométrie non commutative. En premier lieu on a donné le cadre mathématique de la théorie des champs non commutative, puis, on a présenté la théorie $\Phi^4$ sur l'espace de Moyal, où le problème du mélange des divergences infrarouge et ultraviolette (mélange UV/IR) est résolu. Par la suite, on a passé en revue quelques théories qui sont étudiées dans l'espace non commutatif ($\Phi^4$ vulcanisé, LSZ). Les fonctions de corrélation à deux et quatre points ont été calculées.

**Abstract:**

The purpose of this thesis is to study the Gross-neveu model in the formalism of non-commutative geometry. Firstly, we have given the mathematical framework of noncommutative field theory, and we have discovered the Gauge theory, secondly, the Moyal space theory, some theories, and the modal Gross-neveu were studied in non-commutative space ( $\Phi^4$ vulcanized, LSZ ), We studied the model Gross-neveu in non-commutative space, To find a solution to the problem of mixing which makes the theory non renormalisables.

# Remerciements

D'abord et avant tout, nous remercions Allah quel que soit le cas. Nous tenons à remercier notre superviseur, Pr. M. S. KOUADIK, enseignant à l'université de Médéa, pour son soutien et son effort continu jusqu'à la dernière minute de notre travail dans cette thèse.

Nous tenons à remercier tout particulièrement M. K. BOUCHACHIA enseignant à l'université de Médéa qui nous a fait profiter de son expérience dans le domaine de la physique théorique.

Nous remercions également tous les camarades de classe de la physique théorique, pour les meilleurs moments passés au cours des dernières années.

On tient également à présenter nos plus vives sympathies à tous nos professeurs qui nous enseignent durant les deux années de master et notre gratitude au membres du jury. Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la realisation de ce travail et l'elaboration de ce memoire

# Dédicace "1"

*Je dédie ce travail à*

*A mes parents.*

*A mes chers frères.*

*A toute ma famille.*

*A tous mes amies.*

*A mes collègues de la 2ème année master de physique théorique.*

ADILI

# Dédicace "2"

*Je dédie ce travail à*

*A toute ma famille.*

*A mon ami M'HAMED EZZINE Mohammed etudiant à*

*l'université de Médéa.*

*A mon ami BOUFERRACHE Mahmoud etudiant à l'université de Médéa.*

*A mon ami BOUALIL Shams eldin etudiant à l'université de Médéa.*

HACHEMI

# Table des matières

**Introduction** **1**

**1 Théorie des champs non commutative :** **5**

1.1 Historiques : . . . . . 5

1.2 Quantification de Weyl-Moyal : . . . . . 7

1.2.1 Algèbre de Moyal : . . . . . 7

1.2.2 Opérateurs de Weyl : . . . . . 11

1.2.3 Le Produit étoile : . . . . . 15

1.3 La théorie de Gauge : . . . . . 17

1.3.1 Cas commutatif : . . . . . 17

1.3.2 Cas non commutatif : . . . . . 24

1.4 Conclusion : . . . . . 24

**2 Théorie $\Phi^4$ non commutatif :** **25**

2.1 Introduction : . . . . . 25

2.2 Définition du modèle $\Phi^4$ non commutatif : . . . . . 26

2.3 Vertex de $\Phi^4$ non commutative : . . . . . 28

2.4 Mélange ultraviolet et infrarouge : . . . . . 28

2.5 Modèle $\Phi^4$ vulcanisé : . . . . . 32

2.5.1 Symétrie de Langmann-Szabo : . . . . . 33
2.6 Théorie de LSZ : . . . . . 34
2.7 Conclusion : . . . . . 35

**3 Modèle Gross-neveu étude perturbative : 36**
3.1 Introduction : . . . . . 36
3.2 Modèle et notations : . . . . . 37
3.2.1 Propagateur : . . . . . 38
3.2.2 Interaction : . . . . . 39
3.3 Fonction de Green : . . . . . 40
3.3.1 Fonction de corrélation à deux points : . . . . . 41
3.3.2 Fonction de corrélation à quatre points : . . . . . 42
3.4 Conclusion : . . . . . 45

**Conclusion 46**

**Annexes 48**

**A La quantification de Weyl 49**

**B contribution quantiuqe non planaire 51**

**C Symetrie de langmann-Szabo 55**

**D Fonction de corrélation 57**

# Introduction :

La description du monde par la physique théorique repose sur deux théories extrêmement bien vérifiées expérimentalement à des énergies accessibles, en l'occurrence la relativité générale d'Einstein et le modèle standard. La première décrit l'interaction entre l'espace-temps (classique) et la matière. Celle-ci est la généralisation de la relativité restreinte qui unifie l'espace et le temps. Par contre, le modèle standard unifie les interactions électrofaibles et l'interaction forte rendant compte de la physique à l'échelle des constituants élémentaires de la matière. Du point de vue de la physique théorique, la nature est ainsi séparée en deux domaines distincts qui obéissent respectivement aux lois des deux théories précédentes.

Le modèle standard est décrit à l'aide de la théorie des champs quantique ou l'espace représente un paramètre, contrairement à la relativité générale, où la géométrie de l'espace-temps étant en influence mutuelle constante avec la distribution de la matière. Cependant aux très hautes énergies la relativité d'Einstein cesse d'être vérifiée et ce, suite à des fluctuations de l'espace-temps. Ce qui incite à examiner la modification de celui-ci à très haute énergie (donc à très courte échelle).

Dirac (1902-1984) a élaboré une théorie en basant sur l'application de ces deux théories. La notion des particules ponctuelles fut définitivement remplacée par celle de champ, objet étendu à tout l'espace-temps, les caractères quantiques et relativistes purent alors décrites

par un même formalisme : ce fut la naissance de la théorie quantique des champs. Celle-ci a prédit l'existence de l'antimatière. A chaque particule, il existe une antiparticule de même masse et charge opposée.

Malgré ses succès, le modèle standard souffre de plusieurs problèmes. Un des problèmes, consiste en l'explication de la hiérarchie (différence de masse des champs de jauge associé à des interactions différentes), il contient 19 paramètres libres qui ne sont pas déterminés par la théorie ( les trois constantes de couplages, la masse de Higgs, une masse de boson électrofaible...), il présente un important problème théorique lié à la présence d'un champs scalaire fondamentale, le champs de Higgs. En effet, les masses des particules scalaires fondamentales font apparaitre des divergences quadratiques, de plus l'interaction gravitationnelle n'est pas prise en compte dans ce modèle et elle est décrite séparément par la théorie de la relativité générale.

La théorie des champs non commutatifs possède des propriétés spécifiques qui les distinguent des théories ordinaires. Il a été montré pour les modèles scalaires non commutatives, non seulement qu'il présente une divergence $UV$ (ultra-violet), mais encore un autre type de divergence $IR$ (infrarouge) qui a été appelé le mixage $UV/IR$. Le changement dans la structure des divergences peuvent briser la renormalisation des théories. On note également que le mixage $UV/IR$ en théorie de Jauge $U(N)$ est lié uniquement à la phase $U(1)$ supplémentaire, tandis que la partie de l'action efficace est invariante par le groupe $SU(N)$ à basse énergie. Ce point a été étudié en détail par $G$. Travaglini il a traité la variation des couplages efficace $g_1$ , $g_N$ (pour le groupe $U(1)$ et $SU(N)$ respectivement) en fonction de moment d'échelle $k$ l'analyse de cette variation montre la présence de la super symétrie, une théorie de Jauge $SU(N)$ ordinaire peut toujours être intégrée dans une théorie $U(N)$ non commutative à des énergie supérieures à l'échelles de masse non

commutative $MNC$, à des énergies inferieures à cette échelle , le degré de liberté de groupe $U(1)$ se découple à cause de mixage $UV/IR$, et la théorie de Gauge non commutative est réduite en théorie commutative équivalente. C'est la relation entre la super symétrie et le non commutativité.

Le mixage $UV/IR$ est une source de phénomènes exceptionnels dans la théorie des champs, et conduit à de nouveaux scénarios de la brisure super symétrique dynamique. En outre la possibilité de construire une représentation de rang générique des groupes non commutatifs ouvre une nouvelle voie de recherche.

Les théories des champs non commutatives $TCNC$ utilisent les mêmes outils que la mécanique quantique (les opérateurs sur un espace de Hilbert) et contiennent toute la géométrie classique. Elles pourraient donc être le cadre approprié à une description unifiée des quatre forces fondamentales. Elles reposent essentiellement sur la géométrie non commutative qui est un vaste domaine des mathématiques, Ce dernier est la généralisation de l'ensemble des concepts apparaissant en géométrie classique notamment les concepts d'espace topologique localement compact, de variété riemannienne orientée compacte à spin et les calculs différentiels et intégraux de la géométrie différentielle. Plus spécifiquement, la géométrie non commutative apparait comme un cadre mathématique particulièrement adapté à la formulation des concepts quantiques et des processus de quantification.

De plus les travaux d'Alain connes ont suscité l'intérêt à la géométrie non commutative en physique et ont donné suite à un nombre important de travaux sur les théories des champs non commutatives. Toutefois, lors de la construction de ces les théories, les physiciens ont été confrontés à de nombreux problèmes, parmi eux figure le fameux mélange Ultraviolet/Infrarouge ou mixing $UV/IR$ qui rend les théories ordinaires non renormalisables dans le cas non commutatif. Ce problème reste toujours insoluble malgré

les nombreuses tentatives.

Vue la complexité de la construction d'une théorie des champs non commutatives, la majorité des travaux de recherche dans ce domaine ont été consacré à l'étude des théories scalaires sur des espaces non commutatives de type de Moyal. Cette approche la, est considéré comme la plus simple, mais malgré cela la renormalisabilité n'a été rétablie que dans le cas de la théorie $\Phi^4$ sur l'espace euclidien et n'a pas encore était généralisée ni sur l'espace de Minkowski ni en théorie de jauge.

Dans le premièr chapitre, nous étudions certains aspects de la théorie des champs non commutatifs, en première lieu nous donnons la définition de la quantification de Weyl-Moyal, par la suite nous exposons la théorie de Gauge non commutatif, et enfin nous étudions la théorie de l'interaction forte, et dans le deuxième chapitre, nous étudions la définition de la théorie $\Phi^4$ non commutatives sur l'espace de Moyal, par la suite nous exposons le vertex de $\Phi^4$ non commutatives et le mélange ultraviolet et infrarouge, et enfin nous étudions modèle $\Phi^4$ vulcanisé et théorie de $LSZ$ et dans le dernier chapitre nous étudions la définition de modèle de Gross-Neveu non commutatives sur l'espace de Moyal et quelque notation, par la suite nous étudions les fonctions de corrélation à deux points et à quatre points.

# Chapitre 1

# Théorie des champs non commutative :

Dans ce chapitre, nous étudions certains aspects de la théorie des champs non commutatifs. En première lieu nous donnons la définition de la quantification de Weyl-Moyal, par la suite nous exposons la théorie de jauge non commutative, et enfin nous étudions la théorie de l'interaction forte.

## 1.1 Historiques :

Les théories en espace non commutatif sont, paradoxalement, relativement anciennes (l'idée remonte aux travaux de Synder 1947 [1] dans le cadre de la théorie des champs quantique). Les études initiales ont été motivées d'une part par l'étude des particules dans de forts champs magnétiques et d'autre part par l'espoir que le comportement à petit échelle $UV$ de telles théories serait amélioré, étant donné qu'elles comportaient des divergences ultraviolettes.

Après ces travaux initiaux, l'idée de combiner la non commutativité des coordonnées

avec la physique a été longtemps négligées à cause principalement des difficultés mathématiques (notamment liées à l'invariance de Lorentz) et du développement spectaculaire des théories des champs commutatives et suite au succès de la renormalisation.

Nous avons aujourd'hui plusieurs raisons de nous intéresser aux théories des champs non commutatives $TCNC$. Nous les rencontrons non seulement dans la physique des hautes énergies mais aussi comme une description naturelle de la physique des particules non relativiste dans un champ magnétique fort.

Les théories des champs sur un espace non commutative seraient une étape intermédiaire entre l'échelle de la chromodynamique $QCD$ et celle de la gravité quantique.

Les théories de jauge non commutatives sur le plan de Moyal ont attiré l'intérêt à partir de travaux de Martin et Senchez-Ruiz [2] mais en 1999. Des études dans ce sens ont été menées sur le tore non commutatif.

Les auteurs ont ainsi vérifié la renormalisabilité à une boucle de ces théories. Entre les années de 1995 et 2000 les progrès rapides dans les $TCNC$ amenèrent l'espoir de faire des calculs plus surs et plus poussés que dans la théorie des cordes. Les $TCNC$ avaient été prouvées normalisable à une et deux boucles.

Enfin, Minwalla, Van Raamsdonk et Seiberg [3] ont décelé un problème de taille : Il existe des graphes non – planaire qui sont convergentes dans l'$UV$ (ultra- violet) grace à certain facteur oscillantes mais qui, à cause de leur comportement $IR$ (infrarouge), insérés dans d'autre graphes plus grands engendrent des divergences. Ces divergences ne sont pas renormalisables et portent le nom de mélange $UV/IR$ (ultraviolet/infrarouge).

## 1.2 Quantification de Weyl-Moyal :

Dans le cadre de la quantification canonique, Weyl a présenté une prescription élégante pour associer un opérateur quantique à une fonction classique des variables de l'espace de phase [4]. Cette technique fournit une manière systématique de décrire les espaces non commutatifs en général et d'étudier les théories des champs. Dans cette section nous présenterons ce formalisme qui jouera un rôle central dans la majeure partie de notre analyse. Explique pourquoi l'on se concentre entièrement sur les commutateurs [5] tel que :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

Où $\theta_{\mu\nu}$est une matrice antisymétrique constante.

### 1.2.1 Algèbre de Moyal :

L'algèbre de Moyal $A_\Theta$ est l'espace vectoriel des fonctions lisses à décroissances rapides $\mathbf{S}(\mathbb{R}^D)$ muni du produit étoile non commutatif défini par : $\forall f, g \in \mathbf{S}_D \stackrel{def}{=} \mathbf{S}(\mathbb{R}^D)$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} d^D y f(x + \frac{1}{2}\Theta.k) g(x + y) e^{\imath k \cdot y} \tag{1.2}$$

$$= \frac{1}{\pi^D |det\Theta|} \int_{\mathbb{R}^D} d^D y d^D z f(x + y) g(x + z) e^{-2\imath y \Theta^{-1} z} \tag{1.3}$$

Où $\Theta$ est une matrice antisymétrique de dimension $D$ non dégénérée (ce qui implique $D = 2N$). Cette algèbre joue le rôle des « fonctions sur l'espace de Moyal $\mathbb{R}^D_\theta$ ».

La mécanique quantique ordinaire est formulée sur les espaces commutatifs satisfaisant

les relations de commutation suivantes [6] :

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1.4}$$

$$[X_i, X_j] = 0 \tag{1.5}$$

$$[p_i, p_j] = 0 \tag{1.6}$$

Ces relations sont toujours vraies même si les distances sont très courtes, (soit à très haute énergie). La généralisation naturelle des relations ci-dessus, consiste à prendre celle des cordonnées non commutative.

Afin de décrire un espace non commutatif en remplaçant les coordonnées locales $X_i$ par des opérateurs hermétiques $\hat{X}_i$, les relations de commutation ci-dessus devraient être changées comme :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1.7}$$

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\theta_{ij} \tag{1.8}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{X}_0 \tag{1.9}$$

Où

$\theta_{ij}$ une constante de dimension $[l]^2$.

Nous remarquons que l'invariance de Lorentz est brisée explicitement. Cependant nous assumons que ce dispositif apparaisse seulement à des distances très courtes ; c'est-à-dire pour $\theta \to 0$, nous retrouvons la symétrie de Lorenz. Ce qui fait que la limite des théories des champs non commutatives quand $\theta \to 0$ sont les théories commutatives, si nous adoptons la généralisation de l'équation (1.8) à l'espace-temps :

$$\left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right] = i\theta_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

Nous appellerons un espace avec les relations de commutation (1.10), espace non commutatif. Pour construire la théorie des champs non commutative, il est plus commode d'employer les champs évalués par des fonctions et pas par opérateurs, et nous redéfinissons la loi de multiplication de l'espace fonctionnel (champ). Cette nouvelle multiplication est induite de la relation (1.10) à travers ce qu'on appelle la correspondance Weyl -Moyal [7] (voir A).

$$A_\mu\left(\hat{X}\right) \leftrightarrow A_\mu(x) \tag{1.11}$$

$$A_\mu\left(\hat{X}\right) = \int e^{i\alpha\hat{X}} A'_\mu(\alpha)\, d\alpha \tag{1.12}$$

$$A'_\mu(\alpha) = \int e^{i\alpha x} A_\mu(x)\, dx \tag{1.13}$$

Où $\alpha$ et $x$ sont des variables réelles , alors :

$$A_\mu\left(\hat{X}\right)A_\nu\left(\hat{X}\right)=\int\int_{\alpha\beta}e^{i\alpha\hat{X}}A_\mu\left(\alpha\right)A_\nu\left(\beta\right)d\alpha d\beta \tag{1.14}$$

$$=\int\int_{\alpha\beta}e^{i(\alpha+\beta)\hat{X}-\frac{1}{2}\alpha_{\mu\beta_\nu}[\hat{X}_\mu,\hat{X}_\nu]}\acute{A}_\mu\left(\alpha\right)\acute{A}_\mu\left(\beta\right)d\alpha d\beta \tag{1.15}$$

Donc :

$$A_\mu\left(\hat{X}\right)A_\nu\left(\hat{X}\right)\leftrightarrow(A_\mu*A_\nu)(x) \tag{1.16}$$

$$(A_\mu\left(\hat{X}\right)*A_\nu\left(\hat{X}\right))(x)=[e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{\varsigma\mu}\partial_{\eta\nu}}\acute{A}_\mu(\alpha+\varsigma)\acute{A}_\nu(\beta+\eta)_{\varsigma=\eta=0} \tag{1.17}$$

Ceci suggère de modifier la multiplication habituelle de l'espace commutatif par le produit étoile(1.16).

Il est facile de vérifier que le commutateur de Moyal (remplaçons le produit dans (1.10) par le produit étoile) des cordonnées est donné par la relation de commutation suivante :

$$[x_\mu,x_\nu]=i\theta_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

Le passage de l'espace commutative à l'espace non commutative, en l'occurrence l'espace de Moyal, se fait par le remplacement du produit ordinaire des fonctions, des champs par un produit de Moyal.

$$*=e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu} \tag{1.19}$$

Où les fleches indiquent dans quelle direction agissant les dèrivès.

Le produit de Moyal est défini d'après la relation :

$$x^{\mu} * x^{\nu} - x^{\nu} * x^{\mu} = [x^{\mu}, x^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu} \tag{1.20}$$

Et $\theta^{\mu\nu}$sont les composantes de la matrice pour le cas de l'espace Eucliien.

$$[\theta]^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Avec $\theta^{\mu\nu}$ est une matrice anti-symétrique.

### 1.2.2 Opérateurs de Weyl :

Considérons l'algèbre commutative des fonctions sur l'espace euclidien de dimension $D$, avec le produit défini par la multiplication habituelle des fonctions. Nous supposerons que tous les champs définis sur l'espace vivent dans un espace approprié de Schwartz des fonctions. Celles-ci diminuent assez rapidement à l'infini, c-à-d. des fonctions dont les dérivés à l'ordre arbitraire disparaissent à l'infini en position et espace des moments.

La condition de Schwartz implique aussi que pour n'importe quelle fonction nous pourrions la décrire par sa transformée de Fourier suivante :

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} f(x) \tag{1.22}$$

Avec : $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$ si $f(x)$ à une valeur réelle.

Nous définissons un espace non commutatif en remplaçant les coordonnées locale $x^\mu$de $\mathbb{R}^D$par des opérateurs hermitiens obéissant aux relations de commutation (1.1).Les coordonnées $\hat{x}^\mu$ produisent alors une algèbre d'opérateurs non commutatifs.

Compte tenu de la fonction et de son coefficient de Fourier qui correspond à l'équation (1.22) on introduit l'opérateur de Weyl par l'expression :

$$\tilde{w}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tag{1.23}$$

L'opérateur de Weyl $\tilde{w}[f]$ est hermétique si $f(x)$a une valeur réelle. On appelle $f(x)$ le symbole de Weyl del'opérateur $\tilde{w}[f]$ .

On peut écrire l'équation (1.23) en termes d'un plan $\hat{\triangle}(x)$ explicite entre les opérateurs et les champs à l'aide de l'équation (1.22) pour obtenir :

$$\tilde{w}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\triangle}(x) \tag{1.24}$$

Où

$$\hat{\triangle}(x) = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{1.25}$$

Nous pouvons présenter les dérivés des opérateurs par une dérivation linéaire anti-

hermitien $\hat{\partial}_i$ qui est défini par les relations de commutation :

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta^\nu_\mu, [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0 \tag{1.26}$$

Il devient alors assez simple de montrer que :

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\triangle}(x)] = -\partial_\mu \hat{\triangle}(x) \tag{1.27}$$

Dont l'intégration par partie dans l'équation (1.24) conduit à :

$$[\hat{\partial}_\mu, \tilde{w}[f]] = \int d^D x \partial_\mu f(x) \hat{\triangle}(x) = \tilde{w}[\partial_\mu f] \tag{1.28}$$

Selon l'équation (1.27), il s'ensuit également que les générateurs de translation peuvent être représentés par les opérateurs unitaires.

$$e^{\nu^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\triangle}(x) e^{-\nu^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\triangle}(x + \nu) \tag{1.29}$$

La propriété (1.29) implique que toute trace $Tr$ cyclique définie sur l'algèbre des opérateurs de Weyl a la particularité de $Tr(\hat{\triangle}(x))$, celle-ci est indépendante de $x \in \mathbb{R}^D$.

Il s'ensuite à partir de l'équation (1.24), que la trace $Tr$ est donné uniquement par

une intégration sur l'espace-temps.

$$Tr\tilde{w}[f] = \int d^D x f(x) \tag{1.30}$$

Où la trace a été normalisée de sorte que $Tr(\hat{\triangle}(x)) = 1$ .

Ceci implique que la trace joue un rôle d'intégration sur les coordonnées qui commutent.

En utilisant la formule de Braker-Campbell -Hausdorff :

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} \tag{1.31}$$

On obtient :

$$\hat{\triangle}(x)\hat{\triangle}(y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu}$$

$$\hat{\triangle}(x)\hat{\triangle}(y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_\mu z^\mu} \hat{\triangle}(z) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} \tag{1.32}$$

Puisque $\theta$ est supposée être une matrice inversible, l'intégration de Gausse sur $k$ et $k\prime$ peuvent être effectuée. Le résultat s'écrit :

$$\hat{\triangle}(x)\hat{\triangle}(y) = \frac{1}{\pi^D \mid \det\theta \mid} \int d^D z \hat{\triangle}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{\mu\nu}(x-z)^\mu (y-z)^\nu} \tag{1.33}$$

En particulier, en utilisant la trace de normalisation et antisymétrique de $\theta^{-1}$ , il s'ensuit à partir de l'équation (1.33) que les opérateurs $\hat{\triangle}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^D$ forment un système orthonormé.

$$Tr((\hat{\triangle}(x)\hat{\triangle}(y)) = \delta^D(x-y) \tag{1.34}$$

Cette situation, combinée avec (1.24), implique que la transformation est inversible, son inverse est donné par :

$$f(x) = Tr(\tilde{w}[f]\hat{\triangle}(x)) \tag{1.35}$$

La fonction $f(x)$ obtenue de cette manière à partir d'un opérateur quantique est généralement appelée une fonction de distribution de Wigner [8].

### 1.2.3 Le Produit étoile :

Maintenant on considère le produit de deux opérateurs de Weyl $\hat{w}[f]$ et $\hat{w}[g]$ correspondant aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$. En utilisant (1.22), (1.23), (1.31) on déduit que :

$$\hat{w}[f]\hat{w}[g] = \hat{w}[f * g] \tag{1.36}$$

Où nous avons introduit le produit étoile de Groenewold-Moyal, tel que :

$$f(x) * g(x) = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{ik_\mu x^\mu}$$

$$= f(x)\exp(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_{\mu}\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_{\nu}})g(x)$$

$$= f(x)g(x) + \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{i}{2})^{n}\frac{1}{n!}\theta^{\mu_1\nu_1}...\theta^{\mu_n\nu_n}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}f(x)\partial_{\nu_1}...\partial_{\nu_n}g(x) \tag{1.37}$$

Le produit étoile de l'équation (1.37) est associatif mais non commutatif. Il donne une réalisation de l'algèbre non commutative en termes de fonctions sur l'espace-temps ordinaire.

Un prolongement utile de la formule (1.37) est :

$$f_1(x_1) * ..... * f_n(x_n) = \prod_{a<b}\exp(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_a^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_b^{\nu}})f_1(x_1).....f_n(x_n) \tag{1.38}$$

A partir de la relation entre l'intégrale de l'espace-temps et la trace de l'opérateur, l'intégrale du produit de Moyal, est invariant par permutation cyclique des fonctions $f_i$

.

$$\int d^D x f_1(x_1) * ..... * f_n(x_n) = Tr(\hat{w}[f_1].....\hat{w}[f_n]) \tag{1.39}$$

Notons également que, dans le cas de deux champs

$$\int d^D x f(x) * g(x) = \int d^D x f(x)g(x) \tag{1.40}$$

Qui suit pour les fonctions de Schwartz sur l'intégrale par parties sur $\mathbb{R}^D$.

## 1.3 La théorie de Gauge :

### 1.3.1 Cas commutatif :

Comme il est bien connu, la symétrie a toujours joué un rôle essentiel dans le développement de la physique. A partir de symétrie de l'espace-temps à la relativité restreinte, jusqu'à l'invariance de jauge (théorie de jauge). Les symétries ont d'ailleurs tracé l'itinéraire à la plupart des théories physiques en ce dernier siècle.

La théorie de jauge [9] est un type de théorie des champs dans lequel le Lagrangien est invariant (symétrie) sous un groupe continu de transformations locales. Elle est importante comme théories des champs car elle a réussi à expliquer la dynamique des particules élémentaires. induisant l'électrodynamique quantique ($QED$) qui est une théorie abélienne de mesure avec le groupe de symétrie $U(1)$ et le champ de jauge, le quadripotentiel électromagnétique, décrivant le photon comme le boson de jauge. Aussi, elle permet l'établissement des théories décrivant les diverses forces de la nature du Modèle Standard [10]. Ce dernier est une théorie de jauge non-abélienne avec le groupe de symétrie $U(1)_y \otimes SU(2)_L \otimes SU(3)_C$, où le groupe $U(1)_y \otimes SU(2)_L$ est le groupe de jauge de la théorie $EF$ (électrofaible) [11] et le groupe $SU(3)_C$ est celui de la théorie de $QCD$ (interaction forte) [12]. il contient en totalité douze bosons de jauge : le photon $\gamma$, trois bosons faibles $Z^0 W^{\pm}$ et huit gluons $g$ (voir le tableau1.2) qui jouent l'intermédiaire dans les interactions entre les particules élémentaires (voir le tableau1.1). La densité lagrangienne s'écrit :

$$L_{SM} = L_{EW} + L_{QCD} + L_{HIGGS} \tag{1.41}$$

| Générations des fermions | Leptons | Quarks |
|---|---|---|
| I | $e^-$ | $u^r, u^b, u^g$ |
| II | $\nu_e$ | $d^r, d^b, d^g$ |
| III | $\mu^-$ | $c^r, c^b, c^g$ |
| IV | $\nu_\mu$ | $s^r, s^b, s^g$ |
| VI | $\tau$ | $t^r, t^b, t^g$ |
| VII | $\nu_\tau$ | $t^r, t^b, t^g, b^r, b^b, b^g$ |

Tableau1.1 – Les familles des fermions du Modèle Standard.

Avec les couleur $r$ (red), $g$(green), $b$(bleu), sont les nombre quantique et les Leptons et Quarks sont les saveur.

| Interaction | Boson de Jauge |
|---|---|
| Électromagnétique | $\gamma$ |
| Faible | $W^{\pm}, Z^0$ |
| Fort | $g_1, ....., g_8$ |

Tableau1.2 – Les bosons de jauge du modèle standard.

**QCD comme théorie de jauge de l'interaction forte :**

La chromodynamique ($QCD$) quantique est une théorie décrivant l'interaction forte faisant intervenir les quarks et les gluons. Elle décrit aussi bien le confinement des quarks dans des hadrons que des collisions d'hadron à la haute énergie. La théorie est basée sur le groupe de $SU(3)_c$ des matrices unitaires de déterminant égale à un. Dans le Lagrangien de $QCD$, les quarks portent la charge de couleur [13], $r, g, b$, anti-quarks porter anti-charge , $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ et la force est médiée par des gluons sans masse. Le Lagrangien est invariant sous des rotations dans l'espace chromatique.

Juste comme dans $QED$, le calcul perturbatif de n'importe quel processus exige l'utili-

sation des règles de Feynman décrivant les interactions des quarks et des gluons. Celles-ci peuvent être dérivés de la densité lagrangienne indiquée ci-dessous :

$$L_{QCD} = L_{classical} + L_{gauge-fixing} + L_{ghost} \tag{1.42}$$

Où

$$L_{classical} = L_{Yang-Mills} + L_{Dirac} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_{n_f}\bar{q}^i_\alpha(i\gamma^\mu D_\mu - m)^{ij}_{\alpha\beta}q^j_\beta \tag{1.43}$$

Alors :

$$q^i_\alpha = \begin{pmatrix} q^r_\alpha \\ q^b_\alpha \\ q^g_\alpha \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

Où la somme se fait sur $n_f$ , l'indice des saveurs des quarks ($n_f = 6$ dans $SM$), et $\alpha, \beta$ sont les indices spinoriels et $\mu$ vectoriels de Lorentz. $\gamma^\mu$ sont les matrices de Dirac [9].

$F^a_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}t^a$ est le tenseur d'intensité de champ dérivé du champ de gluon $A^a_\mu$ :

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g_s}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g_s[A_\mu, A_\nu] \tag{1.45}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g_s f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{1.46}$$

Où $f^{abc}$ sont les constantes de structure du groupe de couleur $SU(3)$ (qui est complètement antisymétrique c'est-à-dire $f^{abc} = -f^{cab} = f^{bca}$ ) qui distingue $QCD$ de $QED$.

Y compris l'auto-interaction de 8 champs de gluons, décrits par les champs $A^a_\mu$ où l'indice capital $a$, de la représentation adjointe parcourant les huit degrés de liberté. Ceci signifie qu'à la différence du photon dans $QED$, le porteur de la force de couleur lui-même est coloré, une propriété qui donne lieu à la liberté asymptotique [14]. Les champs de Quark $q^i(i = 1, 2, 3)$ sont en triplet représentation des couleurs, avec des couleurs $(r), (g)$ et $(b)$. Dans eq(1.42) la dérivée covariante est sous la forme :

$$(D_\alpha)_{ij} = \partial\delta_{ij} + ig_s(t^c A^c)_{ij} \tag{1.47}$$

Où $t^a$ sont des matrices dans la représentation adjointe du $SU(3)$ respectivement.

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$$

Dans la représentation fondamentale, les matrices $t^a = \frac{1}{2}\lambda^a = if^{abc}$ où $\lambda^a$ est les matrices de Gell-Mann et $f^{abc}$ est la constante de structure.

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$,\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \sqrt[2]{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

D'une manière générale, les propriétés des matrices pour les groupes $SU(N)$ sont :

La trace donne :

$$Tr[t_r^a t_r^b] = C(r)\delta^{ab} \tag{1.49}$$

Ou $C(r)$ s'appelle Casimir.

Il est invariant et a comme expression :

$$t^a t^a = t^2 \tag{1.50}$$

Pour le groupe $SU(N)$ donc :

$$d(r)C_2(r) = d(G)C(G) \tag{1.51}$$

Avec :

$C_2(r)$ est constante

$d(G) = N^2 - 1$ pour $SU(N)$

Il y a $8^3$ constantes de structure pour $SU(3)$, mais la majeure partie d'eux est zéro obtenustous avec :

$$f^{123} = 1, f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt[2]{3}}{2}, f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}$$

*Remarque* : Un terme comme $m^2 A_\alpha A_\alpha$ n'est pas invariant de jauge [10]. Les gluons sont donc de masse nulle.

**Les régles de Feynman :**

Nous ne pouvons pas formuler une théorie perturbative de jauge avec le lagrangien de l'équation (1.41) sans le terme de fixation de jauge [10] [15] parce qu'il est impossible de définir le propagateur pour le champ de gluons sans faire un choix de jauge.

$$L_{gauge-fixing} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\alpha A^A_\alpha)^2 \Rightarrow i\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2}[-g^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}] \tag{1.52}$$

Fixer la classe des jauges covariantes avec le paramètre de la jauge $\xi$ . Dans une théorie non Abélienne telle que $QCD$ le terme de fixation de jauge doit être complété par lagrangien [15], de Fadeev-popov décrivant les fantômes. Il est donnée par :

$$L_{ghost} = \partial_\alpha \eta^{A+}(D^\alpha_{AB}\eta^B) \tag{1.53}$$

Ici $\eta^A$ est le champ scalaire complexe qui obéit à des statistiques de Fermi.

Equations (1.42).(1.52) et (1.53) suffisante pour dériver les règles de Feynman de la théorie dans une jauge covariante. Les règles de Feynman sont définies à partir de :

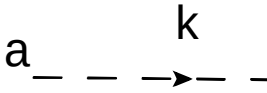
$$S = \int iLd^4x \tag{1.54}$$

$$S = S_0 + S_I \text{ où } S_0 = \int iL_0(x)d^4x,\ S_I = iL_I(x)d^4x \tag{1.55}$$

Avec $S$ est l'action.

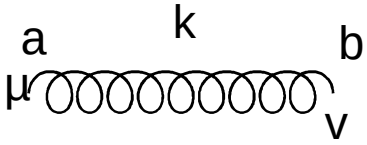
Où $L_0$ contenir toutes les termes bilinéaires dans les champs et $L_I$ contient tout le reste.

La recette pratique pour déterminer les règles de Feynman est que le propagateur inverse est dérivé de $S_0$, tandis que les règles de Feynman pour les parties de l'interaction de la théorie qui sont traitées pendant que des perturbations sont dérivées de $S_I$ comme il donné dans la Figure 1.

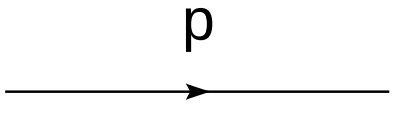



propagateur :

$\frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon}$

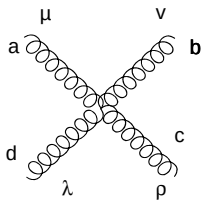



$= \frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon}(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2})$

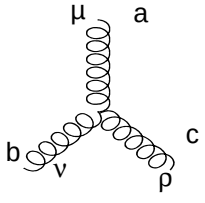



$= \frac{i}{\gamma^\mu p^\mu - m + i\varepsilon}$

vertex :




$$= -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]$$




$$= -igf[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$




Figure 1.1 – Les règles de Feynman pour $QCD$ dans une jauge covariante : les gluons (lignes bouclés), les fermions (lignes continues) et les fantômes (lignes en pointillés).

### 1.3.2 Cas non commutatif :

les théories de jauge non commutatives construites d'une manière naive consiste en remplaçant le produit ordinaire par le produit star. On obtient :

$$L_{classical} = L_{Yang-Mills} + L_{Dirac} = -\frac{1}{4} F^a_{*\mu\nu} * F^{a\mu\nu}_* + \sum_{n_f} \bar{q}^i_\alpha * (i\gamma^\mu D_\mu - m)^{ij}_{\alpha\beta} * q^j_\beta \quad (1.56)$$

$$F_{*\mu\nu} = \frac{i}{g_s}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g_s[A_\mu, A_\nu]_* \quad (1.57)$$

## 1.4 Conclusion :

Pour résoudre le problème de mélange $UV/IR$ sur la théories des champs commutatifs, en remplaçe l'espace commutatif par l'espace non commutatif.

Le passage de l'espace commutative à l'espace non commutative, en l'occurrence l'espace de Moyal, se fait par le remplaçement du produit ordinaire des fonctions, des champs par un produit de Moyal.

# Chapitre 2

# Théorie $\Phi^4$ non commutatif :

Dans ce chapitre, nous étudions la définition de la théorie $\Phi^4$ non commutatives sur l'espace de Moyal, par la suite nous exposons le vertex de $\Phi^4$ non commutatives et le mélange ultraviolet et infrarouge, et enfin nous étudions modèle $\Phi^4$ vulcanisé et théorie de $LSZ$.

## 2.1 Introduction :

Dans ce section nous allons présenter la théorie $\Phi^4$ non commutatif. Celle-ci est la plus simple théorie du point de vue des difficultés qui surgissent lors du traitement et le calcul. Par la suite nous allons nous placer sur l'espace de Moyal.

Le vertex de ce modèle possède une symétrie non triviale : son expression dans l'espace de l'impulsion et des positions est identique ! On appelle cette symétrie la dualité de Langmann-Szabo. La percée de Grasse et Wulkenaar consiste dans l'addition d'un nouveau terme quadratique dans l'action pour rendre covariante sous cette transformation aussi la partie libre du modèle.

Un procédé pour obtenir une théorie rénormalisables consiste à ajouter un terme

correctement choisi à l'action de modèle $\Phi^4$ afin de surmonter le problème de mélange d'$UV/IR$. De cette manière, on change clairement le modèle initial, et on obtient une théorie quantique des champs cohérente. Pour fournir une solution pour le problème de mélange d'$UV/IR$ tout en maintenant l'invariance de la translation, il suffit d'ajouter à l'action de ce modèle $\Phi^4$ des termes non locale.

## 2.2 Définition du modèle $\Phi^4$ non commutatif :

Le modéle $\Phi^4$ commutatif défini par :

$$S = \int d^4x [\frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi(x))(\partial_\mu \Phi(x)) + \frac{1}{2} m_0^2 \Phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\Phi(x)\Phi(x)\Phi(x)\Phi(x)] \tag{2.1}$$

Le lagrangien d'une théorie des champs sur l'espace de Moyal est obtenu en remplaçant le produit point par produit étoile. Le modèle de $\Phi^4$ non commutatif est donne par :

$$S = \int d^4x [\frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi) * (\partial_\mu \Phi) + \frac{1}{2} m_0^2 \Phi * \Phi + \frac{\lambda}{4!}\Phi * \Phi * \Phi * \Phi](x) \tag{2.2}$$

Il peut être aisément démontré que la partie de l'interaction prend la forme qui suit :

Pour tout $j \in [1, 2n+1]$,soit $f_i \in A_\Theta$ ($A_\Theta$ est un algèbre de Moyal), on a :

$$\int dx (f_1 * ..... * f_{2n})(x) = \frac{1}{\pi^D \det \Theta} \int \prod_{j=1}^{2n} dx_j (x_j) f_j(x_j) \delta(\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} x_i) e^{-i\varphi_{2n}} \tag{2.3}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \varphi_p = \sum_{i<j=1}^{p} (-1)^{i+j+1} x_i \wedge x_j$$

Donc, on a :

$$\int dx \Phi^4(x) = \int \prod_{i=1}^{4} dx_i \Phi(x_i) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x) e^{i\varphi} \tag{2.4}$$

$$\varphi = \sum_{i<j=1}^{4} (-1)^{i+j+1} x_i \wedge y_j$$

La caractéristique la plus importante du produit de Moyal est sa non- localité. la non commutativité rend le vertex du modèle $\Phi^4$ seulement invariant sous la permutation cyclique des champs.

Grace à la fonction delta dans l'équation (2.4), l'oscillation peut etre écrite de différentes façons :

$$\begin{aligned}
\delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) e^{i\varphi} &= \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) e^{ix_1 \wedge x_2 + ix_3 \wedge x_4} && \text{(2.5a)} \\
&= \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) e^{ix_4 \wedge x_1 + ix_2 \wedge x_3} && \text{(2.5b)} \\
&= \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \exp i(x_1 - x_2) \wedge (x_2 - x_3) && \text{(2.5c)}
\end{aligned}$$

L'interaction est réelle et positive :

$$\int \prod_{i=1}^{4} dx_i \Phi(x_i) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x) e^{i\varphi} = \int dk ( \int dx dy \Phi(x) \Phi(y) \times$$

$$\times e^{ik(x-y)+ix\wedge y})^2 \in R_+ \tag{2.6}$$

Elle est également invariante par translation comme l'indique l'équation (2.5c). La propriété du produit star de Moyal (1.22) implique que le propagateur est non modifié par rapport au cas commutatif, il est donné par : $\Delta(p) = \frac{1}{p^2+m_0^2}$.

## 2.3 Vertex de $\Phi^4$ non commutative :

Considérons la théorie du champ scalaire réel $\Phi^4$ définie par la densité lagrangienne.

$$L_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\Phi * \Phi * \Phi * \Phi \tag{2.7}$$

Ce terme est vu comme perturbation qu'on ajouterait au lagrangien scalaire libre. Le vertex est alors

$$-i\lambda(\cos(p_1 \wedge p_2)\cos(p_3 \wedge p_4) + \cos(p_1 \wedge p_3)\cos(p_2 \wedge p_4) + \cos(p_1 \wedge p_4)\cos(p_2 \wedge p_3)) \tag{2.8}$$

## 2.4 Mélange ultraviolet et infrarouge :

Les premiers effets exotiques remarqués dans l'étude perturbative de la théorie des champs non commutatifs [3] est le mélange des divergences $UV$ (ultraviolets) et $IR$ (infrarouge). il est une source de phénomènes exceptionnels dans la $TCNC$ et est typique en Théorie des cordes, car cette théorie est non locale. il n'apparait pas en théorie des champs locale [16].

Il a été étudié en détails par plusieurs groupes. Tout d'abord, Chepelev et Roiban [17]

ont démontré un comptage de puissance pour plusieurs modèles scalaires. Ils précisent les graphes divergents et ont pu classer les divergences de la théorie par les données topologiques de ses graphes. Ensuite V.Gayral [18] a montré la présence de mélange $UV/IR$ sur toutes les déformations isospectrales (il s'agit de généralisations des espaces de Moyal aux cas des espaces courbés et du tore non commutatif). Pour définir le problème, nous considérons la masse renormalisé dans la théorie $\Phi^4$ non commutative à quatre dimension.

Pour cela, nous évaluerons une particule irréductible de la fonction d'une boucle [5]. Le propagateur est l'inverse de :

$$\Gamma^0(p) = p^2 + m_0^2 \tag{2.9}$$

Dans la théorie non commutative, la correction perturbative à l'ordre d'une boucle reçoit la contribution de deux diagrammes de la Figure 2.2, planaire et non planaire.

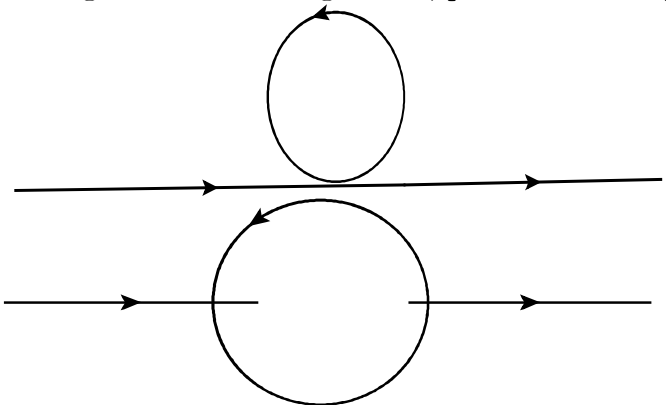


Figure 2.2 : correction planaire et non planaire à une boucle de $\Phi^4$.

Le facteur de symétrie pour le diagramme planaire est le double de celui du graphe non planaire. Ils conduisent respectivement aux intégrales de Feynman suivante :

$$\Gamma^1_{pl}(p) = \frac{1}{3(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{k^2 + m_0^2} \tag{2.10}$$

$$\Gamma^1_{npl}(p) = \frac{1}{6(2\pi)^D}\int \frac{d^D k}{k^2+m_0^2} e^{ik\wedge p} \tag{2.11}$$

Donc la contribution du graphe planaire est égale à celui de la théorie commutative, qui donne lieu à des singularités $UV$ ordinaires. Par contre le graphe non planaire exhibe le phénomène de mélange $UV/IR$.

En utilisant la formule de Schwinger et après l'intégrale de Gauss (voir B), on obtient :

$$\Gamma^1_{pl}(p) = \frac{1}{3(2\pi)^{D/2}}\int_0^\infty \frac{d^D\alpha}{\alpha^{D/2}} e^{-\alpha m_0^2 - \frac{1}{\alpha\Lambda^2}} \tag{2.12}$$

$$\Gamma^1_{npl}(p) = \frac{1}{6(4\pi)^D}\int_0^\infty \frac{d^D\alpha}{\alpha^{D/2}} e^{-\alpha m_0^2 - \frac{p\circ p}{4\alpha} - \frac{1}{\alpha\Lambda^2}} \tag{2.13}$$

Avec :

$$p\circ q \equiv -p_\mu\theta_{\mu\nu}q_\nu$$

Où la divergence ultraviolette de l'espace d'impulsion est devenue une divergence à $\alpha$ petit dans la symétrisassions de Schwinger, que nous avons régularisé par la coupure $\Lambda\to\infty$.

En utilisant les fonctions Bessel modifiées dans le cas $D=4$, on arrive, comme détaillé en B :

$$\Gamma^1_{pl}(p) = \frac{1}{48\pi^2}(\Lambda^2 - m_0^2\log(\frac{\Lambda^2}{m_0^2})) + O(1) \tag{2.14}$$

$$\Gamma^1_{npl}(p) = \frac{1}{96\pi^2}(\Lambda_{eff}^2 - m_0^2\log(\frac{\Lambda_{eff}^2}{m_0^2})) + O(1) \tag{2.15}$$

Où

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + P \circ P} \tag{2.16}$$

La contribution planaire (2.14) est propotionnelle à la correction de masse à l'ordre d'une boucle de la théorie $\Phi^4$ commutative, qui est quadratiquement divergente ultraviolette.

En remarque que dans la limite $\Lambda \to \infty$, pour ($p \neq 0$ et $\theta \neq 0$) la contribution du diagramme non planaire à l'ordre d'une boucle (2.15) reste finie, elle est régularisée par la non commutativité de l'espace-temps, c'est à dire que pour $\Lambda \to \infty$, on obtient :

$$\Lambda_{eff}^2 \to \frac{1}{P \circ P}$$

Cependant, la divergence ultraviolette est rétablie dans les deux limites commutative, la limite $\theta \to 0$ ou la limite infrarouge $p \to 0$.

Quand à la limite de moment ($p \to 0$), nous avons $\Lambda_{eff} \approx \Lambda$ (2.16), et nous retrouvons la renormalisation de la masse de la théorie $\Phi^4$ à quatre dimensions comme suit :

$$m_{0ren}^2 = m_0^2 + \frac{1}{32}\frac{g^2\Lambda^2}{\pi^2} - \frac{1}{32}\frac{g^2 m_0^2}{\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{m_0^2} + O(g^4) \tag{2.17}$$

Cette expression est divergente quand $\Lambda \to \infty$.

D'autre part, dans la limite ultraviolette $\Lambda \to \infty$, nous avons $\Lambda_{eff}^2 \simeq \frac{1}{P \circ P}$, et le propagateur corrigé prend une forme non locale qui ne peut être attribué à aucune masse renormalisé.

De cette analyse, on conclut que la limite $\Lambda \to \infty$ et la limite de faible impulsion $p \to 0$ ne commutent pas. C'est la caractéristique typique de ce qu'on appelle le mélange ultraviolet ($\Lambda \to \infty$) et infrarouge $p \to 0$.

Ce mélange $UV/IR$ est une caractéristique générale des théories des champs non commutatives.

## 2.5 Modèle $\Phi^4$ vulcanisé :

Nous prenons la modification par Grosse et Wulkenhaar. Celle-ci consiste à ajouter un terme harmonique $\Omega^2\tilde{x}_\mu^2$ au lagrangien (2.2).

$$S[\Phi] = \int d^4x[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial^\mu\Phi * \partial_\nu\Phi) + \frac{1}{2}\Omega^2\tilde{x}_\mu^2\Phi * \Phi + \frac{1}{2}m_0^2\Phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\Phi * \Phi * \Phi * \Phi](x) \quad (2.18)$$

Où $\tilde{x}_\mu = 2(\Theta^{-1})_{\mu\nu}x_\nu$ et $\Omega$ est un paramétré positif sans dimension.

Ce terme supplémentaire fournit une coupure infrarouge et permet découple les différentes échelle du probléme.Ainsi, le modèle $\Phi^4$ ne présente alors plus de mélange $UV/IR$.

On appelle alors "vulcanisation" la procédure consistant à rajouter un terme au lagrangien d'une théorie non commutative pour la rendre renormalisables.

Les théories vulcanisées vérifient donc la symétrie de Langmann et Szabo, c'est une symétrie qui rend les coordonnées et les impulsions symétriques[19].cette théorie a rendu la théorie renormalisables. Cependant, il serait tout à fait naturel de se poser la question de savoir si toutes les théories non commutatives renormalisables doivent vérifier cette dualité, et dans tel cas on adopterait cette symétrie comme un principe physique.

### 2.5.1 Symétrie de Langmann-Szabo :

Le terme d'interaction de l'équation (2.18) s'écrit comme suit :

$$S_{int}\left[\phi\right]=\int d^{4}x\frac{\lambda}{4!}\left(\phi*\phi*\phi*\phi\right)\left(x\right) \tag{2.19}$$

On peut l'expression  sous la forme :

$$S_{int}\left[\phi\right]=\prod_{i=1}^{4}d^{4}x_{i}\phi\left(x_{i}\right)V\left(x_{1},x_{2},x_{3},x_{4}\right) \tag{2.20}$$

Avec :

$$V\left(x_{1},x_{2},x_{3},x_{4}\right)=\frac{\lambda}{4!}\frac{1}{\pi^{4}\det\theta}\delta\left(x_{1}-x_{2}+x_{3}-x_{4}\right)\cos(2(\theta^{-1})_{\mu\nu}(x_{1}^{\mu}x_{2}^{\nu}+x_{3}^{\mu}x_{4}^{\nu}) \tag{2.21}$$

En utilisant la transformation de Fourier,le terme d'interaction s'exprime comme suit :

$$S_{int}\left[\phi\right]=\prod_{i=1}^{4}\int\frac{d^{4}p_{i}}{\left(2\pi\right)^{4}}\hat{\Phi}\left(p_{i}\right)\hat{V}\left(p_{1},p_{2},p_{3},p_{4}\right) \tag{2.22}$$

Où

$$\hat{V}\left(p_{1},p_{2},p_{3},p_{4}\right)=\frac{\lambda}{4!}\left(2\pi\right)^{4}\delta\left(p_{1}-p_{2}+p_{3}-p_{4}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}(p_{1,\mu}p_{2,\nu}+p_{3,\mu}p_{4,\upsilon})\right) \tag{2.23}$$

On remarque que bien que ce terme vérifie la symétrie :

$$\hat{\Phi}\left(p\right)\longleftrightarrow\pi^{2}\sqrt{\left|\det\theta\right|}\hat{\Phi}\left(x\right),p_{\mu}\longleftrightarrow\tilde{x}_{\mu} \tag{2.24}$$

Par ailleurs, la partie libre du modèle (**??**) n'est pas covariante sous cette dualité. La vulcanisation ajoute un terme au lagrangien qui rétablit cette symétrie (voir C).

En effet, on a :

$$\int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi * \partial^\mu\phi \rightleftarrows \int d^4x \tilde{x}_\mu^2 \Phi(x)\,\Phi(x) \tag{2.25}$$

Le modèle (2.18) est ainsi covariant sous la dualité de Langmann-Szabo :

$$S[\Phi; m_0, \lambda, \Omega] \longmapsto \Omega^2 S\left[\Phi; \frac{m_0}{\Omega}, \frac{\lambda}{\Omega^2}, \frac{1}{\Omega}\right] \tag{2.26}$$

Par symétrie, le paramètre $\Omega$ peut-être restreint à l'intervalle $[0, 1]$ .Dans le cas particulier $\Omega = 1$, l'action $S[\Phi; m_0, \lambda, \Omega]$, est invariante par la dualité (2.23).

La théorie $\Phi^4$ vulcanisée selon l'action (**??**) constitue donc un premier modèle assez simple à étudier dans l'espace $x$.

Une approche alternative par rapport à la vulcanisation a été avancée par l'équipe de Gurau et Rivasseau [20] pour modifier le propagateur, en remplaçant le terme de l'oscillateur avec terme de type $\Phi(-p)\frac{1}{p^2}\Phi(p)$. Ces auteurs ont pu prouver la renormalisabilité de ce "modèle $\frac{1}{p^2}$" à tous les ordres par la méthode de l'analyse multi-échelle.

## 2.6 Théorie de LSZ :

Le modèle de $LSZ$ non commutatif est une théorie scalaire complexe bosoniques dans un champ magnétique uniforme plus un terme harmonique à la Grosse-Wulkenhaar.

L'interaction quartique est du type Moyal. L'action est donnée par :

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}\bar{\phi}(-D^\mu D\mu + \tilde{\Omega}^2 x^2 + \mu_0^2)\phi + \lambda\bar{\phi} * \phi * \bar{\phi} * \phi \tag{2.27}$$

Où $D\mu = \partial_\mu - \iota B_{\mu\nu} x^\nu$est la dérivée covariante.

En espace $x$, l'interaction est la même que pour la théorie $\Phi^4$. Le fait d'utiliser des champs complexes sélectionne seulement les graphes orientables, le modèle est similaire à celui de Gross-Neveu qui est traité dans le chapitre 3.

## 2.7 Conclusion :

Le modèle $\Phi^4$ sur l'espace de Moyal, si la premier modèle qui résoudre une solution pour le problème de mélange d'$UV/IR$.

# Chapitre 3

# Modèle Gross-neveu étude perturbative :

Dans ce chapitre, nous étudions la définition de modèle de Gross-Neveu non commutatives sur l'espace de Moyal et quelque notation, par la suite nous étudions les fonctions de corrélation à deux points et à quatre points.

## 3.1 Introduction :

En plus de la théorie $\Phi^4$, du modèle $LSZ$ modifié [21] et de théories supersymétriques, nous connaissons aujourd'hui plusieurs théories des champs non commutatives renormalisables. le modèle de Gross-Neveu non commutatif est une théorie des champs juste renormalisables comme $\Phi^4$. Le modèle Gross-neveu est une théorie de champ bidimensionnel sans masse de fermions avec une interaction à quatre fermions. Il a une constante de couplage sans dimension. Sa version commutative est renormalisables. Le fait qu'il puisse être interprété comme une théorie des champs fermionique non locale dans un champ magnétique constant est une de ses caractéristiques les plus intéressantes. Ainsi,

en plus de renforcer la procédure de vulcanisation pour obtenir des théories non commutatives renormalisables, le modèle de Gross-Neveu pourrait s'avérer utile pour étudier l'effet Hall quantique. C'est aussi un bon premier candidat pour une étude constructive [22] des théories non commutatives, les modèles fermioniques étant généralement plus simples à construire que les théories bosoniques. Enfin sa version commutative étant asymptotiquement libre et présentant une génération spontanée de masse [23] [24] [25], une étude de la « physique » de ce modèle serait intéressante.

Le modèle présente du mélange $UV/IR$ même après la vulcanisation. Celui-ci apparaît comme un couplage entre les échelles du graphe : certains graphes convergents de la fonction à quatre points deviennent (logarithmiquement) divergents quand ils sont insérés dans un graphe à deux points. Ces sous-graphes à quatre points ne sont pas renormalisables par un contre terme « local ». Cependant ces composantes critiques sont régularisées par la renormalisation de la fonction à deux points correspondante. Ainsi malgré ce mélange, le modèle est renormalisables. Mais le modèle massif nécessite l'introduction d'un contre terme de la forme $\delta m\bar{\psi}i\gamma^0\gamma^1\psi$. Le modèle à masse nulle est renormalisables sans ce contre terme.

## 3.2 Modèle et notations :

Le modèle de Gross-Neveu non commutatif ($GN^2_\Theta$) est une théorie des champs fermionique en interaction à quatre fermion sur le plan de Moyal $\mathbb{R}^2_\Theta$ . La matrice antisymétrique $\Theta$ est donnée par :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

L'action du modèle est :

$$S\left[\bar{\psi},\psi\right]=\int dx\bar{\psi}(-i\partial\!\!\!/+\Omega\tilde{x\!\!\!/}+m+i\delta m\theta\gamma\Theta^{-1}\gamma)\psi+V_o\left(\bar{\psi},\psi\right)+V_{no}\left(\bar{\psi},\psi\right))\left(x\right) \quad (3.2)$$

Où $\tilde{x}=2\Theta^{-1}x$ et $V=V_o+V_{no}$est la partie interaction donnée ci-après. Le terme en $\delta m$ sera traité perturbativement comme un contre terme. Nous utilisons la métrique euclidienne et la notation de Feynman $a\!\!\!/=\gamma^\mu a_\mu$.

Les matrices $\gamma^0$ et $\gamma^1$constituent une représentation bidimensionnelle de l'algèbre de Clifford $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=-2\gamma^{\mu\nu}$. Remarquons que les $\gamma^\mu$ sont alors anti-hermitiens $\gamma^{\mu\dagger}=-\gamma^\mu$.

### 3.2.1 Propagateur :

Le propagateur de l'action du modèle Gross-Neveu donne par :

$$c(x,y)=\int d\mu_c(\bar{\psi},\psi)\psi(x)\bar{\psi}(y)=(-i\partial\!\!\!/+\Omega\tilde{x\!\!\!/}+m)^{-1}(x,y) \quad (3.3)$$

$$=\int dtC(t,x,y)$$

$$C(t,x,y)=-\frac{\Omega}{\theta\pi}\frac{e^{-tm^2}}{\sinh(2\tilde{\Omega}t)}e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2}\coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2+i\Omega x\wedge y}$$

$$\times\{i\tilde{\Omega}\coth(2\tilde{\Omega}t)(x\!\!\!/-y\!\!\!/)+\Omega(\tilde{x\!\!\!/}-\tilde{y\!\!\!/})+m\}e^{-i2\Omega t\gamma\Theta^{-1}\gamma} \quad (3.4)$$

Avec $\tilde{\Omega}=\frac{2\Omega}{\theta}$ et $x\wedge y=2x\Theta^{-1}y$.

Nous avons aussi $e^{-i2\Omega t\gamma\Theta^{-1}\gamma}=\coth(2\tilde{\Omega}t)1_2-i\frac{\theta}{2}\sinh(2\tilde{\Omega}t)\gamma\Theta^{-1}\gamma$.

Si nous voulons étudier un modèle à $N$ couleurs, nous pouvons considérer ce propagateur diagonal dans les indices de couleur.

### 3.2.2 Interaction :

Concernant la partie interaction $V$ , rappelons tout d'abord que $\forall f_1, f_2, f_3, f_4 \in A_\Theta$

$$\int dx(f_1 * f_2 * f_3 * f_4)(x) = \frac{1}{\pi^2 \det \Theta} \int \prod_{j=1}^{4} dx_j f_j(x_j) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) e^{-i\varphi} \tag{3.5}$$

$$\varphi = \sum_{i<j=1}^{4} (-1)^{i+j+1} x_i \wedge x_j \tag{3.6}$$

Ce produit est non local et seulement invariant par permutations cycliques. Ainsi, au contraire du modèle de Gross-Neveu commutatif pour lequel il n'existe qu'une seule interaction (locale) possible, le modèle $GN^2_\Theta$ a, au moins, six interactions différentes :les interactions orientables :

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{\lambda_1}{4} \sum_{a,b} \int (\bar{\psi}_a * \psi_a * \bar{\psi}_b * \psi_b)(x) && \text{(3.7a)} \\ &+ \frac{\lambda_2}{4} \sum_{a,b} \int (\bar{\psi}_a * \psi_a * \bar{\psi}_b * \psi_b)(x) && \text{(3.7b)} \\ &+ \frac{\lambda_3}{4} \sum_{a,b} \int (\bar{\psi}_a * \psi_b * \bar{\psi}_a * \psi_b)(x) && \text{(3.7c)} \end{aligned}$$

Où les $\psi$ alternent avec les $\bar{\psi}$ et les interactions non orientables :

$$V_{no} = \frac{\lambda_4}{4}\sum_{a,b}\int(\bar{\psi}_a * \bar{\psi}_b * \psi_a * \psi_b)(x) \tag{3.8a}$$

$$+\frac{\lambda_5}{4}\sum_{a,b}\int(\bar{\psi}_a * \bar{\psi}_b * \psi_b * \psi_a)(x) \tag{3.8b}$$

$$+\frac{\lambda_6}{4}\sum_{a,b}\int(\bar{\psi}_a * \bar{\psi}_a * \psi_b * \psi_b)(x) \tag{3.8c}$$

Toutes ces interactions ont le même noyau en espace $x$ par l'équation (3.5). Les indices $a, b$ sont les indices de spin et prennent des valeurs dans $\{0, 1\}$. Ils peuvent aussi contenir des indices de couleur entre 1 et N. Pour des raisons uniquement techniques, nous nous restreindrons aux interactions orientables. En effet, à chaque vertex, les signes + et − (de la fonction delta) alternent. Il en est de même pour les champs $\psi$ et $\bar{\psi}$. Or un $\psi$ ne peut contracter qu'à un $\bar{\psi}$. Ainsi il est toujours possible de choisir une orientation telle que le graphe soit orientable. Ce n'est évidemment pas le cas pour les interactions non orientables. En fait, tous les graphes construits avec les interactions orientables sont orientables mais tous les graphes orientables ne sont pas faits d'interactions orientables. En effet, les interactions non orientables produisent non seulement tous les graphes non orientables mais aussi des graphes orientables.

## 3.3 Fonction de Green :

Dans ce qui suit, nous allons nous restreindre au cas où l'intéraction est de la forme :

$$\frac{-ig}{4}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}) \tag{3.9}$$

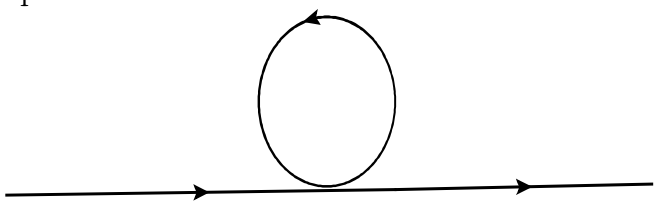
à partir de cette expression in déduit le progateur libre sur l'espace de Minkowski et

le vertex, qui sont comme suit :

$$\Delta(k) = \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{3.10}$$

### 3.3.1 Fonction de corrélation à deux points :

Nous considérons le graphe planaire à deux points, les deux point externe sont notés $x_1$ et $x_2$. Sa correspond le graphe suivant



L'action définie par :

$$S_{\sigma\lambda} = \int d^4x [\frac{-ig}{4} s_{\sigma\alpha}(x_1 - x)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}) s_{\delta\gamma}(x - x) s_{\beta\lambda}(x - x_2)] \tag{3.11}$$

$$S_{\sigma\lambda} = \int d^4x [\frac{-ig}{4} s_{\sigma\beta}(x_1 - x) s_{\delta\delta}(x - x) s_{\beta\lambda}(x - x_2) +$$

$$+ \frac{ig}{4} s_{\sigma\alpha}(x_1 - x) s_{\alpha\beta}(x - x) s_{\beta\lambda}(x - x_2) \ ] \tag{3.12}$$

Après les calcul on trouve :

$$S_{\sigma\lambda} = \frac{-ig}{4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i(P_1^2 + m^2 + 2m\not{p}_1)_{\sigma\lambda}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_1(x_1 - x_2)} +$$

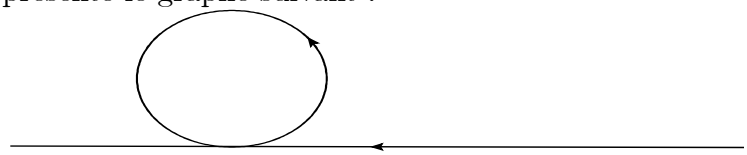
$$+\frac{ig}{4}\int\frac{d^4P_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\beta\lambda}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{3.13}$$

Avec chaque terme présente un graphe.

Pour le premier terme présent le graphe suivant :

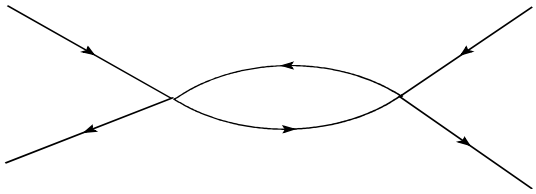


Pour le deuxième terme présente le graphe suivant :



### 3.3.2 Fonction de corrélation à quatre points :

Soit un graphe planaire à quatre points externe sont notés $x_1, x_2, x_3$ et $x_4$. Sa correspond le graphe



L'action définie par :

$$S_{\sigma\rho\rho'\sigma'}=\int d^4z[(\frac{-ig}{4})^2 s_{\sigma\delta}(x_1-z_1)s_{\alpha\rho}(z_1-x_2)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta})s_{\gamma\delta'}(z_1-z_2)\times$$

$$\times s_{\alpha'\beta}(z_2-z_1)(\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma'\delta'}-\delta_{\alpha'\delta'}\delta_{\gamma'\beta'})s_{\rho'\beta'}(x_3-z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2-x_4)] \tag{3.14}$$

On a une sommation sur les huitres d'indices :

$$S_{\sigma\rho\rho'\sigma'} = \int d^4z \frac{-g^2}{16}[s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)\times$$

$$\times s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma'\delta'} - s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)\times$$

$$\times s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha'\delta'}\delta_{\gamma'\beta'} - s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)\times$$

$$\times s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma'\delta'} + s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)\times$$

$$\times s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\alpha'\delta'}\delta_{\gamma'\beta'}] \tag{3.15}$$

Après substitution des expressions des propagateurs, on trouve :

$$S_{\sigma\rho\rho'\sigma'} = \frac{-g^2}{16}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1 + m)_{\sigma\gamma}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{i(\not{k} + m)_{\gamma\gamma'}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3 + m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3 + m)_{\rho'\alpha'}}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha'\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\beta\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3}-\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\delta\alpha'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha'\alpha}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\alpha\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\gamma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}\times$$

$$e^{-i(x_3-x_4)p_3}-\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\alpha\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

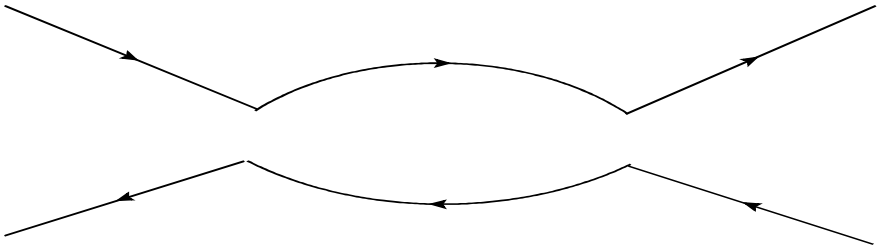
$$\times\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma'\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\beta\beta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3}+\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\delta\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\delta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\delta'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

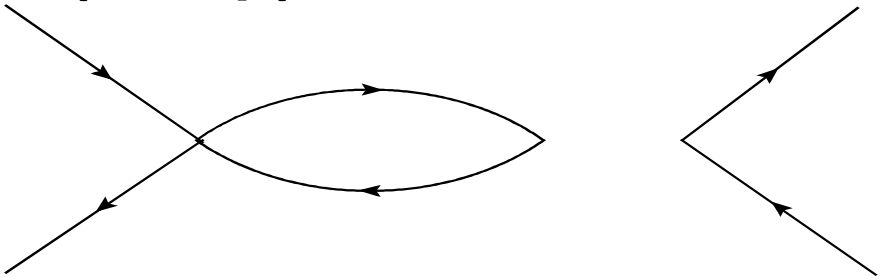
$$\times\frac{i(\not{p}_4+m)_{\beta'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} \tag{3.16}$$

Avec chaque terme présente un graphe.

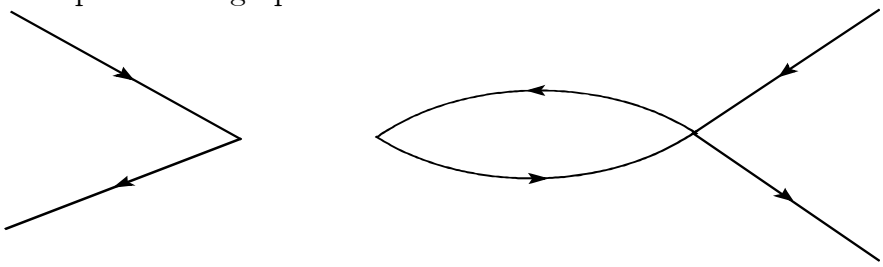
Pour le premier terme présent le graphe suivant :



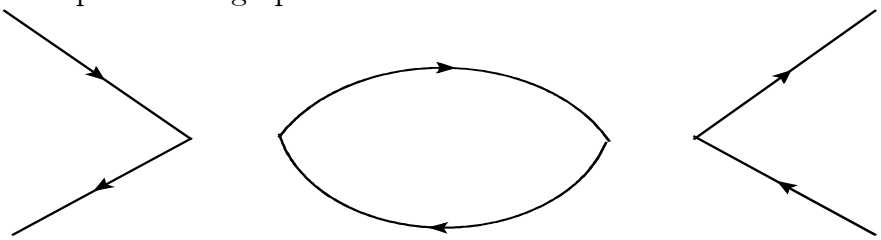
Pour le deuxiéme terme présente le graphe suivant :



Pour le troisiéme terme présente le graphe suivant :



Pour le quatrième terme présente le graphe suivant :



## 3.4 Conclusion :

Ici nous nous sommes restreint qu'à une seule interaction parmi les six interactions du modèle de Gross-Neveu et où le propagateur ne contient pas de champ magnétique. Nous avons donné les expressions des contributions aux deux et quatre points des fonctions de corrélation.

# Conclusion gènèral :

Ce mémoire a pour cadre de faire une étude des théories de champs non commutatives. Plus précisément, nous avons étudié la renormalisabilité de plusieurs modèles définis sur un espace de Moyal. Jusqu'à récemment, les théories non commutatives étaient définies à partir de leurs homologues commutatifs en remplaçant le produit point par le produit de Moyal. Mais cette méthode ne fonctionne pas à cause d'un nouveau type de divergences, le mélange $UV/IR$ qui rend ces modèles non renormalisables.

Ce problème a été résolu dans le cas de champs scalaire dont l'interaction est de type $\Phi^4$ où un potentiel quadratique en coordonnées de l'espace a été introduit. Ce dernier agit comme un régulateur sur le flot de la constante de couplage, et rend le modèle renormalisables. Nous avons aussi traité d'autres modèles où le problème de mixage a été examiné, tel le modèle de Gross-Neveu. Celui-ci, à cause de non localité du produit de Moyal, il existe six interactions différentes dont trois sont orientables.Il été montré qu'elles sont stables sous l'action du groupe de renormalisation. Le propagateur, est équivalent à une dérivée covariante en champ magnétique uniforme. Les interactions orientables ne conduisent qu'aux graphes orientables. En effet, le mélange $UV/IR$ est uniquement dû aux graphes non orientables. Les graphes qui présentent du mélange sont dangereux non pas parce qu'ils sont finis à moments non exceptionnels et infinis dans une boucle mais surtout parce qu'ils ne sont pas renormalisables.

Ici nous nous sommes restreint qu'à une seule interaction parmi les six interactions du modèle de Gross-Neveu et où le propagateur ne contient pas de champ magnétique. Nous avons donné les expressions des contributions aux deux et quatre points des fonctions de corrélation.

Il est à indiquer que pour les modèles décrivant les théories de Jauge non commutatifs, le problème de mixage subsiste toujours en dépit de plusieurs tentatives. Par conséquent, ceci retse un chalenge à réaliser.

# Annexes

# Annexe A

# La quantification de Weyl

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrive la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique. C'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables de l'espace de phase (variables canoniques). Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie sur un espace (vectoriel) euclidien à $D$ dimensions. Nous déterminons la transformée $\tilde{f}(k)$ de $f(x)$ par la relation :

$$\tilde{f}(k) = \int e^{-ikx} f(x) d^D x \tag{A.1}$$

Nous définissons un espace-temps non commutatif en remplaçant les coordonnées locales $x_i$ de $\mathbb{R}^D$ par des opérateurs hermétiques $\hat{x}_i$ qui vérifient la relation de commutation :

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \tag{A.2}$$

La quantification de Weyl consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur $\mathbb{R}^D$ et l'algèbre des opérateurs.

On définit le symbole de Weyl par :

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} e^{-ik\hat{x}} \tilde{f}(k) \tag{A.3}$$

Où $\tilde{f}(k)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$.

# Annexe B

# contribution quantiuqe non planaire

L'expression $\Gamma^{(1)}_{npl}$ contribution du graphe non planaire est définie par :

$$\Gamma^{(1)}_{npl} = \frac{1}{6\,(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{k^2 + m_0^2} e^{ik\times p} \tag{B.1}$$

Où

$$k \circ p = k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu$$

Pour évaluer l'intégral de Feynman (B.1), nous introduisons la paramétrage de Schwinger.

$$\frac{1}{k^2 + m_0^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha\left(k^2 + m_0^2\right)} \tag{B.2}$$

On obtient :

$$\Gamma^{(1)}_{npl} = \frac{1}{6\,(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha \int d^D k e^{-\alpha k^2 - \alpha m_0^2 + i k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu} \tag{B.3}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\Gamma_{npl}^{(1)} = \frac{1}{6\,(2\pi)^D}\int_0^\infty d\alpha \int d^D k e^{-(k-\frac{i\theta^{\mu\nu}p_\nu}{2\alpha})^2+(\frac{\theta^{\mu\nu}p_\nu}{2\alpha})^2} - \alpha m_0^2 \tag{B.4}$$

En utilisant l'intégrale de Gausse :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^D \alpha e^{-a\alpha^2} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{D/2} \tag{B.5}$$

On trouve :

$$\Gamma_{npl}^{(1)} = \frac{1}{6\,(4\pi)^{D/2}}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{\frac{D}{2}}} e^{-\alpha m_0^2 - \frac{p\circ p}{4\alpha}} \tag{B.6}$$

Pour régulariser cette l'integrale,on multiplie par $e^{-\frac{1}{\alpha\Lambda^2}}$ :

$$\Gamma_{npl}^{(1)} = \frac{1}{6\,(4\pi)^{D/2}}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{\frac{D}{2}}} e^{-\alpha m_0^2 - \frac{p\circ p}{4\alpha} - \frac{1}{\alpha\Lambda^2}} \tag{B.7}$$

Où $\Lambda$ est une coupure ultraviolette (cutt-off).

On utilise la fonction de bessel modifiée :

$$I_\nu\,(u,\upsilon) = \int_0^\infty d\alpha \frac{1}{\alpha^{1-\upsilon}} \exp[-\alpha u - \frac{\upsilon}{\alpha}] = 2\left(\frac{\upsilon}{u}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu\left(2\sqrt{u\upsilon}\right) \tag{B.8}$$

Avec :

$$K_\gamma = K_{-\gamma}$$

Examples :

$$I_1 = \int_0^\infty d\alpha \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha u - \frac{\upsilon}{\alpha}} = 2K_0\left(2\sqrt{u\upsilon}\right) = -2(\gamma + \log(\sqrt{u\upsilon}) + O\left(u\upsilon \log\sqrt{\frac{1}{u\upsilon}}\right) \tag{B.9}$$

$$I_2 = \int_0^\infty d\alpha \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha u - \frac{\upsilon}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{u}{\upsilon}} k_1(2\sqrt{u\upsilon})$$

$$= \frac{1}{\upsilon} - 2u\log(\frac{1}{\upsilon u}) + u(2\gamma - 1) + O(u^2\upsilon \log(\sqrt{\frac{1}{u\upsilon}})) \tag{B.10}$$

Se servant de (B.9) et en posant $u = m_0$ et $\upsilon = \frac{1}{4}(p \circ p + \frac{4}{\Lambda^2})$,on montre que :

$$\Gamma^{(1)}_{npl} = \frac{m_0^{\frac{D-2}{2}}}{6\,(4\pi)^{D/2}} (p \circ p + \frac{4}{\Lambda^2})^{\frac{2-D}{4}} K_{\frac{2-D}{2}}\,(m_0\sqrt{p \circ p + \frac{4}{\Lambda^2}}) \tag{B.11}$$

En utilisant (B.10), on obtient la constribution du graphe non planaire dans le cas $D = 4$ :

$$\Gamma^{(1)}_{npl} = \frac{1}{96\pi^2}(\Lambda^2_{eff} - m_0^2 \log(\frac{\Lambda^2_{eff}}{m_0^2})) + m_0^2(2\gamma - 1) + O(\frac{m_0^4}{\Lambda^2_{eff}} \log(\frac{\Lambda_{eff}}{m_0})) \tag{B.12}$$

Où la coupure effective ultraviolette est donne par :

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + p \circ p} \tag{B.13}$$

# Annexe C

# Symetrie de langmann-Szabo

On montre que la partie cinétique $\partial_\mu \partial^\mu$ du lagrangien du modéle $\Phi^4$est vérifié la symétrie de langmann-Szabo. On a, d'une part :

$$\int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{1}{2} \partial_{\mu 1} \phi\left(x_1\right) \partial_{\mu 2} \phi\left(x_2\right) \delta(x_1 - x_2) \tag{C.1}$$

D'autre part en utilisant la transformation de Fourier, et la formule de $\delta$ de Dirac, on peut ecrire le terme cinétique, comme :

$$\int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \int \frac{d^4p_1 d^4p_2}{((2\pi)^4)^2} \phi\left(p_1\right) \phi\left(p_2\right) p_1^\mu p_2^\mu \left(2\pi\right)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \tag{C.2}$$

Il en découle que la symétrie de langmann-Szabo ci dessous, appliquée à ce résultat.

$$\hat{\phi}\left(p\right) \leftrightarrow \pi^2 \sqrt{|\det \Theta|} \phi\left(x\right) \qquad\qquad p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu \tag{C.3}$$

A boutit à l'équation suivante :

$$\int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \to \int \frac{d^4\tilde{x}_{\mu 1}}{(2\pi)^4}\frac{d^4\tilde{x}_{\mu 2}}{(2\pi)^4}\pi^4 \left|\det\Theta\right| \phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\tilde{x}_{\mu 1}\tilde{x}_{\mu 2}(2\pi)^4\delta^4(\tilde{x}_{\mu 1}-\tilde{x}_{\mu 2}) \quad \text{(C.4)}$$

Où

$$\tilde{x}_\mu = (2\Theta^{-1})^{\mu\nu}x_\nu$$

Aprés integration sur $\tilde{x}_2$, on obtient :

$$\int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \int d^4x_1 d^4x_2 \phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\tilde{x}_{\mu 1}\tilde{x}_{\mu 2}\delta^4(\tilde{x}_{\mu 1}-\tilde{x}_{\mu 2})$$

$$\to \int d^4x \tilde{x}_\mu^2 \phi\left(x\right)\phi\left(x\right) \quad \text{(C.5)}$$

Aussi, on peut facilement montrer que, la symétrie de langmann-Szabo appliqé au potentiel quadratiqure donne le terme cinétique .

Par concéquent, le terme bilinéaire (cinétique et potentiel harmonique) dans la théorie $\Phi^4$est invariant sous la symetrie de langmann-Szabo pour $\Omega = 1$.

# Annexe D

# Fonction de corrélation

Fonction de corrélation à deux points :

$$S_{\sigma\lambda} = \int d^4x [\frac{-ig}{4} s_{\sigma\alpha}(x_1 - x)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}) s_{\delta\gamma}(x - x) s_{\beta\lambda}(x - x_2)] \tag{D.1}$$

Où

$$\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) = s_{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x_1 - x_2)} \tag{D.2}$$

On a une sommation sur les quatres indices :

$$S_{\sigma\lambda} = \int d^4x [\frac{-ig}{4} s_{\sigma\beta}(x_1 - x) s_{\delta\delta}(x - x) s_{\beta\lambda}(x - x_2) +$$

$$+ \frac{ig}{4} s_{\sigma\alpha}(x_1 - x) s_{\alpha\beta}(x - x) s_{\beta\lambda}(x - x_2) \ ] \tag{D.3}$$

Pour le premier terme on obtient :

$$= \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_{1+m})_{\sigma\beta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}Tr(\frac{i(\not{k}_{+m})}{k^2-m^2+i\varepsilon})\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_{2+m})_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\int d^4x e^{i(p_1-p_2)x}e^{-ip_1x_1+ip_2x_2} \tag{D.4}$$

On a :

$$\int d^4x e^{i(p_1-p_2)x} = (2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2) \tag{D.5}$$

$$Tr(\frac{i(\not{k}_{+m})}{k^2-m^2+i\varepsilon}) = ik_\mu Tr(\frac{\gamma_\mu}{k^2-m^2+i\varepsilon}) + iTr(\frac{m}{k^2-m^2+i\varepsilon}) \tag{D.6}$$

Avec :

$$Tr(\frac{\gamma_\mu}{k^2-m^2+i\varepsilon}) = 0, \quad Tr(\frac{i(\not{k}_{+m})}{k^2-m^2+i\varepsilon}) = \frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon} \tag{D.7}$$

Alors :

$$= \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_{1+m})_{\sigma\beta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_{2+m})_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2)e^{-ip_1x_1+ip_2x_2} \tag{D.8}$$

On intègre on trouve :

$$= \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_{1+m})_{\sigma\beta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_{1+m})_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{D.9}$$

Donc :

$$= \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_{1+m})_{\sigma\beta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_{1+m})_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{D.10}$$

$$= \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i((\not{p}_{1+m})_{\sigma\beta}(\not{p}_{1+m})_{\beta\lambda})}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{D.11}$$

$$= \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(P_1^2+m^2+2m\not{p}_1)_{\sigma\lambda}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{D.12}$$

Et pour le deuxiéme terme on obtient :

$$= \frac{ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\int d^4x e^{i(p_1-p_2)x}e^{-ip_1x_1+ip_2x_2} \tag{D.13}$$

$$= \frac{ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2)e^{-ip_1x_1+ip_2x_2} \tag{D.14}$$

On intègre on trouve :

$$= \frac{ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\beta\lambda}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{D.15}$$

Donc le résultat final :

$$S_{\sigma\lambda} = \frac{-ig}{4}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(P_1^2+m^2+2m\not{p}_1)_{\sigma\lambda}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)}+$$

$$+\frac{ig}{4}\int \frac{d^4P_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\beta\lambda}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-x_2)} \tag{D.16}$$

Fonction de correlation à quatre point :

$$S_{\sigma\rho\rho'\sigma'} = \int d^4z[(\frac{-ig}{4})^2 s_{\sigma\delta}(x_1-z_1)s_{\alpha\rho}(z_1-x_2)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta})s_{\gamma\delta'}(z_1-z_2)\times$$

$$\times s_{\alpha'\beta}(z_2-z_1)(\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma'\delta'}-\delta_{\alpha'\delta'}\delta_{\gamma'\beta'})s_{\rho'\beta'}(x_3-z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2-x_4)] \tag{D.17}$$

Où

$$\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) = s(x_1-x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x_1-x_2)} \tag{D.18}$$

On a une sommation sur les huitres d'indices :

$$S_{\sigma\rho\rho'\sigma'} = \int d^4z \frac{-g^2}{16}[s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)\times$$

$$\times s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma'\delta'} - s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)\times$$

$$\times s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha'\delta'}\delta_{\gamma'\beta'} - s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)\times$$

$$\times s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma'\delta'} + s_{\sigma\delta}(x_1 - z_1)s_{\alpha\rho}(z_1 - x_2)\times$$

$$\times s_{\gamma\delta'}(z_1 - z_2)s_{\alpha'\beta}(z_2 - z_1)s_{\rho'\beta'}(x_3 - z_2)s_{\gamma'\sigma'}(z_2 - x_4)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\alpha'\delta'}\delta_{\gamma'\beta'}] \tag{D.19}$$

Pour le premier terme :

$$= \int d^4z \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\sigma\gamma}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_1(x_1 - z_1)} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\beta\rho}}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_2(z_1 - x_2)} \times$$

$$\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\gamma'}}{k^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ik(z_1-z_2)} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ik'(z_2-z_1)} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\alpha'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon} \times$$

$$\times e^{-ip_3(x_3-z_2)} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip_4(z_2-x_4)} \tag{D.20}$$

$$= \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\gamma}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\gamma'}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\alpha'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_2+m)_{\beta\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon} \int d^4z_1 e^{-i(p_2-p_1)z_1} \int d^4z_1 e^{-i(k-k')z_1} \times$$

$$\times \int d^4z_2 e^{-i(p_4-p_3)z_2} \int d^4z_2 e^{-i(k'-k)z_2} e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.21}$$

On a :

$$\int d^4z_1 e^{-i(p_2-p_1)z_1} = (2\pi)^4 \delta^4(p_2-p_1) \tag{D.22}$$

$$\int d^4z_1 e^{-i(k-k')z_1} = (2\pi)^4 \delta^4(k-k') \tag{D.23}$$

$$\int d^4z_2 e^{-i(p_4-p_3)z_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p_4-p_3) \tag{D.24}$$

$$\int d^4z_2 e^{-i(k'-k)z_2} = (2\pi)^4\delta^4(k'-k) \tag{D.25}$$

Donc :

$$= \frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_4}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\gamma}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\gamma'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\alpha'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\beta\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1)(2\pi)^4\delta^4(k-k')\times$$

$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_4-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k'-k)e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.26}$$

On intègre en obtient :

$$= \frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\gamma}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\gamma'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\alpha'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha'\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\beta\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} \tag{D.27}$$

Et pour le dexiéme terme :

$$= \int d^4z\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-z_1)}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\alpha\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_2(z_1-x_2)}\times$$

$$\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}+m)_{\delta\alpha'}}{k^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ik(z_1-z_2)} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\alpha}}{k'^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ik'(z_2-z_1)} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\gamma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon} \times$$

$$\times e^{-ip_3(x_3-z_2)} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip_4(z_2-x_4)} \tag{D.28}$$

Donc :

$$= \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{k}+m)_{\delta\alpha'}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \times$$

$$\frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\alpha}}{k'^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_2+m)_{\alpha\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\gamma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon} \int d^4z_1 e^{-i(p_2-p_1)z_1} \int d^4z_1 e^{-i(k-k')z_1} \times$$

$$\times \int d^4z_2 e^{-i(p_4-p_3)z_2} \int d^4z_2 e^{-i(k'-k)z_2} e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.29}$$

$$= \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{k}+m)_{\delta\alpha'}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\alpha}}{k'^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_2+m)_{\alpha\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\gamma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon} (2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1)(2\pi)^4\delta^4(k-k') \times$$

$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_4-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k'-k)e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.30}$$

On intègre on trouve :

$$= \frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\delta\alpha'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\alpha'\alpha}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_1+m)_{\alpha\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\gamma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} \tag{D.31}$$

Et pour le troisième terme :

$$= \int d^4z\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_1(x_1-z_1)}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\alpha\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_2(z_1-x_2)}\times$$

$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}+m)_{\beta\beta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik(z_1-z_2)}\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{k}'+m)_{\gamma'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik'(z_2-z_1)}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times e^{-ip_3(x_3-z_2)}\int\frac{d^4p_4}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip_4(z_2-x_4)} \tag{D.32}$$

Donc :

$$= \frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_4}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\alpha\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\gamma'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\beta\beta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\int d^4z_1e^{-i(p_2-p_1)z_1}\int d^4z_1e^{-i(k-k')z_1}\times$$

$$\times\int d^4z_2e^{-i(p_4-p_3)z_2}\int d^4z_2e^{-i(k'-k)z_2}e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.33}$$

$$=\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_4}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\alpha\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_4+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\gamma'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\beta\beta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1)(2\pi)^4\delta^4(k-k')\times$$

$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_4-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k'-k)e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.34}$$

On intègre on trouve :

$$=\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\alpha\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma'\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\beta\beta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} \tag{D.35}$$

Et pour le quatreième terme :

$$= \int d^4z \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\sigma\delta}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_1(x_1 - z_1)} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\delta\rho}}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_2(z_1 - x_2)} \times$$

$$\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + m)_{\gamma\delta'}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(z_1 - z_2)} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}' + m)_{\delta'\beta}}{k'^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik'(z_2 - z_1)} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_3 + m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \times$$

$$\times e^{-ip_3(x_3 - z_2)} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_4 + m)_{\beta'\sigma'}}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_4(z_2 - x_4)} \tag{D.36}$$

Donc :

$$= \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\sigma\delta}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\delta\rho}}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{i(\not{k} + m)_{\gamma\delta'}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i(\not{k}' + m)_{\delta'\beta}}{k'^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_3 + m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_4 + m)_{\beta'\sigma'}}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \int d^4z_1 e^{-i(p_2 - p_1)z_1} \int d^4z_1 e^{-i(k - k')z_1} \times$$

$$\times \int d^4z_2 e^{-i(p_4 - p_3)z_2} \int d^4z_2 e^{-i(k' - k)z_2} e^{-ip_1x_1 + ip_4x_4 - ip_3x_3 + ip_2x_2} \tag{D.37}$$

$$= \frac{-g^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\sigma\delta}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\delta\rho}}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \times$$

$$\times\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\delta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\delta'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_4+m)_{\beta'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1)(2\pi)^4\delta^4(k-k')\times$$

$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_4-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k'-k)e^{-ip_1x_1+ip_4x_4-ip_3x_3+ip_2x_2} \tag{D.38}$$

On intègre on trouve :

$$=\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\delta\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\delta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{k}'+m)_{\delta'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_4+m)_{\beta'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} \tag{D.39}$$

Alors le résultat final :

$$S_{\sigma\rho\rho'\sigma'}=\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\gamma}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\gamma'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\alpha'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha'\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\beta\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3}-\frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\times$$

$$\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\delta\alpha'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\alpha'\alpha}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\alpha\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\gamma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}\times$$

$$\times e^{-i(x_3-x_4)p_3} - \frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\alpha}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\alpha\rho}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\gamma'\sigma'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma'\beta}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\beta\beta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} + \frac{-g^2}{16}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\int\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}_1+m)_{\sigma\delta}}{p_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_2+m)_{\delta\rho}}{p_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}+m)_{\gamma\delta'}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{k}'+m)_{\delta'\beta}}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}_3+m)_{\rho'\beta'}}{p_3^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{i(\not{p}_4+m)_{\beta'\sigma'}}{p_4^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i(x_2-x_1)p_1}e^{-i(x_3-x_4)p_3} \tag{D.40}$$

# Bibliographie


[1] H. S.Snyder,"Qaunntized space time" ,Phys. Rev. 71(1947).

[2] C.P. Martin et D. Sanchez-Ruiz, " The one loop UV divergent structure of U(1) Yang-Mills Theory on non commutative $\mathbb{R}^4$", Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 476-479, hep-th/9903077.

[3] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk et N. Seiberg. " Noncommutative perturbative dynamics", JHEP 02, (2000) 20, hep-th/9912072.

[4] H. Weyl, "The Theory of Groups and Quantum Mechanics", Dover, New York, 1931.

[5] R. J. Szabo, "Quantum field theory on non commutative spaces",Phys. Rept. 378, 207 (2003),hep-th/0109162.

[6] A. Micu & Sheikh-Jabbari, M. M. (2001). "Noncommutative 4 theory at two loops". Journal of High Energy Physics, 2001(01), 025.

[7] K. Farid (2007). "Aspects mathematiques et phusiques de la geometrie de la geometrie non commutative", (Doctoral dissertation, The University of Arizona).

[8] E. P. Wigner, "Quantum Corrections for Thermodynamic Equilibrium", Phys. Rev. 40(1932) 749.

[9] Dr. Ben Gripaios , "Gauge Field Theory CB3 0HE", (2016) University of Cambridge.

[10] S. Davidson, “THE STANDARD MODEL”, IPNL, 69622 Villeurbanne (September 2006) [Universite C.B. Lyon-1 France].

[11] A. Pich , "The Standard Model of Electroweak Interactions" ,IFIC/05-13, FTUV/05-0201 (2005) [http ://arxiv.org/abs/hep-ph/0502010v1].

[12] P. Z. Skands , "Introduction to QCD", CERN-PH-TH-2012-196 (2015) [https ://arxiv.org/abs/1207.2389].

[13] R.W. Ellis, W.J. Stirling, B.R. Webber, "QCD and Collider Physics". Cambridge Monographs.

[14] A. Deur, S. J. Brodsky, G. F. de Teramond , "The QCD Running Coupling", JLAB-PHY-16-2199, SLAC-PUB-16448, DOE/OR/23177-3645 (2016).

[15] W.Greiner, B.Müller, "GAUGE THEORY OF WEAK INTERACTIONS", Third Edition springers.

[16] M. R. Douglas et N. A. Nekrasov, Rev. Mod. phys. 73(2001) 977,hep-th/0106048.

[17] I. Cgepelev et R. Roiban,"Convergence theorem for non commutative feynman graphs and renormalisation", JHEP 03 (2001) 001, hep-th/0008090.

[18] V. Gayral. "Heat-kernel approach to UV/IR mixing on isospectral deformation manifolds", Annales Henri Poincare 6 (2005) 991-1023, hep-th/0412233.

[19] E. Langmann, R. J. Szabo,"duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces", Phys. Lett. B533 (2002) 168-177, hep-th/0202039.

[20] R. Gurau, J. Magnen, V. Rivasseau et A. Tanasa, "A translation-invariant renormalizable non-commutatie sclar model", Commun. Math. Phys. 287 (2009) 275-290, hep-th/0802.0791.

[21] R. Gurau, V. Rivasseau et F. Vignes-Tourneret. "Propagators for noncommutative field theories", Ann. H. Poincaré (2006), Online first Référence arXiv : hep-th/0512071.

[22] V. Rivasseau. "From Perturbative to Constructive Renormalization". Princeton series in physics. Princeton Univ. Pr., Princeton, USA, 1991. 336 p.

[23] P. K. Mitter et P. H. Weisz. "Asymptotic scale invariance in a massive Thirring model with U(n) symmetry", Phys. Rev. D8 (1973) 4410–4429.

[24] D. J. Gross et A. Neveu. "Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories", Phys. Rev. D10 (1974) 3235.

[25] C. Kopper, J. Magnen et V. Rivasseau. "Mass generation in the large N Gross-Neveu model", Commun. Math. Phys. 169 (1995) 121–180.

[26] K. Zaibak. Mémoire de Magister (Théme : La supersymétrie de jauge pure non commutative a deux dimension).

[27] E. Boutalbi. Mémoire de Magister (Théme : Corrections radiatives à une boucle au propagateur du champ photonique non commutatif).

[28] A. Benhmida et A. Saidani. Mémoire de Soutenance (Thème :Distribution de masse de jet de haut pt dans les événements de Z+ jet au LHC avec Pythia 8).

[29] G. Gheorghe-Răzvan. Thése de Doctorat (Sujet : La renormalisation dans la théorie non commutative des champs).Université Paris 11, arXiv :0802.0940v1 [hep-th] 7 Feb 2008.

[30] F. Vignes-Tourneret. Thése de Doctorat(Sujet : Renormalisation des théories de champs non commutatives). Université Paris 11.