جامعة المدية
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

مطبوعة مقدمة من طرف:

الدكتوره

ولد شرشالي سمية

محاضرات في مادة بحوث العمليات1

(الطرق الكمية المساعدة فى اتخاذ القرار)

مقدمة لطلبة السنة الثالثة اقتصاد كمي، طلبة السنة أولى ماستر مالية مؤسسة –العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية–

السنة الجامعية: 2018-2019

فهرس المحتويات

البيان	الصفحة
فهرس المحتويات	1
مقدمة	3
المحور الأول: مقدمة في بحوث العمليات	**5**
تمهيد	6
أولا: مفهوم بحوث العمليات.	6
ثانيا: التطور التاريخي لبحوث العمليات	7
ثالثا: المجالات التطبيقية في بحوث العمليات	9
رابعا: خطوات تطبيق بحوث العمليات	10
خامسا: نماذج بحوث العمليات	11
الخلاصة	13
تهميشات المحور الأزل	14
المحور الثاني: البرمجة الخطية	**15**
تمهيد	16
أولا: تعريف البرمجة الخطية	17
ثانيا: شروط استخدام البرمجة الخطية	18
ثالثا: فرضيات ومتطلبات البرمجة الخطية	19
رابعا: نمذجة المشكلة الاقتصادية	20
خامسا: سلسلة تمارين حول بناء نموذج خطي	24
الخلاصة	32
تهميشات المحور الثاني	34
المحور الثالث: الطريقة البيانية في حل البرنامج الخطي	**36**
تمهيد	37
أولا: خطوات إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحل البياني.	37
ثانيا: خطوات إيجاد الحل الأمثل باستخدام مستقيم دالة الهدف	45
ثالثا: الحالات الخاصة في الحل البياني	48
رابعا: سلسلة تمارين حول الحل البياني	58

الخلاصة	66
تهميشات المحور الثالث	67
المحور الرابع: : طريقة الحل المبسطة (linear Programming simplex solution method)	68
تمهيد	69
أولا: الصيغة القياسية standard form	69
ثانيا: خطوات الحل باستخدام طريقة Simplex حالة التعظيم	74
ثالثا: خطوات الحل باستخدام طريقة Simplex حالة التدنية	79
رابعا: الحالات الخاصة لطريقة Simplex	84
خامسا: سلسلة تمارين في حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقة المبسطة	94
الخلاصة	100
تهميشات المحور الرابع	102
المحور الخامس: المسالة الثنائية في البرمجة الخطية	104
تمهيد	105
أولا: خطوات تحويل البرنامج الخطي الأولي (Primal) إلى البرنامج الخطي الثنائي (Dual)	105
ثانيا: صياغة النموذج المقابل (Dual)	106
ثالثا: حل النموذج المقابل بطريقة السمبلكس	110
رابعا: سلسلة تمارين حول تكون النموذج الخطي المقابل للنموذج الابتدائي	123
خامسا: التفسيرات الاقتصادية للنموذج المقابل	128
الخلاصة	133
تهميشات المحور الخامس	134
قائمة المراجع	136

مقدمة

الإدارة في حاجة ماسة لوسيلة مساعدة ترشد قراراتها الإدارية وتجعلها تصل بأقل جهد وأقصر زمن إلى القرارات المناسبة في الوقت المناسب، الأساليب الكمية لها قدرات كبيرة متنوعة فهي تحتوي على نماذج تمكن من رؤية الحالة الواقعية بسهولة ونماذج بيانية وتخطيطية ونماذج رياضية، نماذج وصفية تصف وتتنبأ بسلوك الحالة الطبيعية، ونماذج الأمثلية التي تسعى للوصول إلى الحل الأمثل كالبرمجة الخطية ونماذج المخزون والطلبية الاقتصادية.

لقد أصبحت بحوث العمليات أكثر من أي وقت مضى الأداة الرئيسية التي بموجبها يتم وضع السبل الكفيلة باتخاذ قرارات إدارية رشيدة، وتمكن بحوث العمليات، الإدارة من وضع العديد من الطرق والأساليب الرياضية لحل الكثير من المشكلات الهامة للقيام بأعمالها، والوصول إلى اختيار الحل الأمثل لهذه المشكلات.

إن تعقد بيئة العمل وفرزها الكثير من التحديات التي تواجه المنظمة والدخول في الاقتصاد المعرفي الذي بات أيضا بدوره يفرض مجموعة من التحديات على المستوى العربي والدولي، والصعوبة المتأتية أصلا من ندرة الموارد، أصبح هناك حاجة أكثر من أي وقت مضى لاختيار الحلول المثلى لاتخاذ القرارات العقلانية والرشيدة، وبالتالي الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة للأهداف المحددة.

في إطار هذه الأهمية، تأتي هذه المطبوعة التي تهدف إلى تغطية المقرر الذي يدرس لطلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وإيمانا منا بأهمية هذا الموضوع و للإسهام الجاد والصادق في إثراء مكتبتنا في هذا المجال، نضع بين أيديكم هذا العمل بأسلوب منطقي، علمي، وأكاديمي بأسلوب سهل وبسيط حتى يستطيع الطالب أن يستوعبه بسهولة.

وقد جاءت المادة العلمية لمطبوعتنا هذه في خمسة محاور هي كالآتي:

تناول المحور الأول، مفهوم بحوث العمليات، والتطور التاريخي لبحوث العمليات، كذا مجالات تطبيق بحوث العمليات، وخطوات تطبيق بحوث العمليات.

أما المحور الثاني فقد بحث في البرمجة الخطية من خلال تعريفها، شروط استخدامها، وفرضيات ومتطلبات البرمجة الخطية، ونمذجة المشكلة الاقتصادية، و سلسلة تمارين حول بناء برنامج خطي.

وبحث المحور الثالث في حل البرمجة الخطية حسب الطريقة البيانية، من خلال طريقة الإحداثيات، ومستقيم دالة الهدف، والحالات الخاصة في الحل البياني، وسلسلة تمارين في الحل البياني.

وركز المحور الرابع على البرمجة الخطية من خلال الطريقة المبسطة، الصيغة القياسية، خطوات الحل باستخدام طريقة simplex حالة التعظيم، خطوات الحل باستخدام طريقة simplex حالة التدنية، الحالات الخاصة لطريقة simplex، سلسلة تمارين في حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقة المبسطة.

أما المحور الخامس فلقد ركز بشيء من التفصيل على النموذج المقابل، خطوات تحويل البرنامج الخطي الأولي (Primal) إلى البرنامج الخطي الثنائي (Dual)، صياغة النموذج المقابل (Dual)، حل النموذج المقابل بطريقة السمبلكس، سلسلة تمارين حول تكوين النموذج الخطي المقابل للنموذج الابتدائي، التفسيرات الاقتصادية للنموذج المقابل.

المحور الأول

مقدمة في بحوث العمليات

تمهيد:

تعد بحوث العمليات (Opérations Research) واختصارا (RO) من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في الواقع العملي في النصف الأول من هذا القرن، وعلى وجه التحديد في البلدان المتقدمة صناعياً، إذ أحرز تطبيقها نجاحا واسعاً في المجالات المدنية والعسكرية على حد سواء.

إذ أن صناعة القرارات وتطبيقاتها في أي مجال من المجالات يتطلب اللجوء إلى الأساليب العلمية التي تمكن صانعي القرار والقائمين على تنفيذها من الوصول إلى الغايات المرجوة في ظل الإمكانيات المتاحة.

أولاً: مفهوم بحوث العمليات.

هناك عدة تعريفات لبحوث العمليات فهي تطبيق الطرق العلمية والعملية لحل المشاكل المعقدة التي تواجه الإدارات العسكرية (الصناعية التجارية، الإدارية، الهندسية...)

إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي وعملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة والتنبؤ ومقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم وبالتالي اتخاذ القرارات المناسبة والسليمة.

ومن أبرز التعاريف التي يعتمد عليها معظم الاختصاصيين في بحوث العمليات، التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية فعرفته على أنه "استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة الأنظمة الكبيرة من المعدات، المواد الأولية، القوى العاملة، الأموال، الأمور الخدمية الأخرى في المؤسسات والمصانع العسكرية والمدنية".[1]

كما تعرف بحوث العمليات على أنها "عبارة عن استخدام التحليل الكمي لمشكلة معينة لمساعدة الإدارة أو الجهة القائمة على هذه المشكلة باتخاذ القرار المناسب".[2]

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية، فقد عرفت بحوث العمليات بأنه "العلم الذي يهتم باتخاذ القرارات العلمية حول الكيفية التي يتم بموجبها تصميم وبناء أنظمة معدات العمل والقوى العاملة بشكل مثالي في ظل الموارد المحدودة".[3]

وتأسيساً على ما تقدم يمكن استخلاص التعريف الشامل لبحوث العمليات على أنه "عبارة عن أساليب علمية يستخدمها كأساس ومنهج في البحث والدراسة، فبالتالي فإن جوهر بحوث العمليات هو بناء النماذج والاعتماد عليها بهدف مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة والمعقدة".

ثانياً: التطور التاريخي لبحوث العمليات.

يمكن تقسيم مراحل تطور بحوث العمليات إلى ثلاث مراحل وهي:[4]

المرحلة الأولى (مرحلة ما قبل الحرب العالمية الثانية):

تعود جذور بحوث العمليات إلى عام (1885)، إذ ركز فردريك تايلر (Taylor) على تطبيق التحليل العلمي على الأنشطة الإنتاجية، من خلال قيامه بتجارب عديدة للتوصل إلى الحمولة الملائمة من مادة معينة ليتمكن العامل من جرف أكبر كمية ممكنة منها باستخدام الجرافة وبأقل ما يمكن من الجهد، وبعد قيامه بسلسلة من التجارب استطاع (Taylor) التوصل إلى مبتغاه.

ساهم العالم الهندي هنري جانت (Henry l. Gantt) في هذا العلم، من خلال خارطة عرفت باسمه وهي خارطة (جانت) ، لتخطيط أساليب تحميل المكائن من أجل تقليل أية تأخيرات يمكن أن تحدث في العملية الإنتاجية.

وفي عام (1915) وضع (F. w. Harris) نموذجاً يمثل حجم الكمية الاقتصادية المعروفة في مجال السيطرة على المخزون.

في حين نشر عالم الرياضيات الدانمركي (A. K. Erlang) عام 1917 مؤلفة حول المشاكل المتعلقة بكثرة المكالمات الهاتفية.

وفي الثلاثينات من القرن المنصرم، تم تطبيق تحليل السلع، من قبل العالم الفلكي (H. C. Pevinson) إذ ركز جهوده على دراسة علمية للعادات الشرائية وسلوك المستهلكين ومدى استجابتهم لأساليب الترويج المختلفة مثل الإعلان.

كما أثرت الثورة الصناعية بشكل كبير على تطور بحوث العمليات، وعليه دعت الضرورة إلى تطبيق علم بحوث العمليات للتوصل إلى حل مرضٍ، من خلال التوصل إلى قرار يتناسب مع أهداف المنظمة ككل وهو ما يسمى بالقرار المثالي (Optimal Decision).

المرحلة الثانية: خلال الحرب العالمية الثانية.

تواصل تطور علم بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية من خلال استدعاء الإدارة العسكرية في بريطانيا لفريق عمل العلماء، من أجل دراسة المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية للدفاع الجوي، تحت إشراف البروفيسور (Patrick Blackett) من جامعة (Manchester).

هدف الفريق إلى إيجاد أفضل توزيع للمواد العسكرية المحدودة على مختلف العمليات العسكرية ومن ثم تطبيق بحوث العمليات (RO)الاستخدام الفاعل للرادارات وتوزيع القوة الجوية، وكان هذا الفريق الأول في مجال البحوث العمليات.

لقد جاءت تسمية بحوث العمليات، إسناداً إلى مهمة الفريق القائمة على البحث في العمليات والمجالات العسكرية.

المرحلة الثالثة: ما بعد الحرب العالمية الثانية.

لقد أدت النتائج التي تم التوصل إليها أثناء الحرب إلى تشجيع المدراء الصناعيين الباحثين عن الحلول للمشاكل التي كانت تواجههم للاهتمام بهذا العلم.

ففي بريطانيا، وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية انتقل استخدام بحوث العمليات من المجال العسكري إلى مجالات أخرى كالصناعة، الاجتماع والاقتصاد، إذا كان الاقتصاد البريطاني يواجه حالة ركود اقتصادي حاد، مما تطلب البحث عن أساليب جديدة لزيادة فاعلية الإنتاج وإيجاد أسواق جديدة.

بينما كان الوضع مختلفاً في الولايات المتحدة الأمريكية، إذ تم التركيز على بحوث العمليات الدفاعية، ولم يؤشر له دور كبير في المجال الصناعي، ولكن تزايد الاهتمام بعلم بحوث العمليات خلال الثورة الصناعية الثانية، على أثر أتمته العمليات الإنتاجية واستبدال العامل بالماكنة.

وفي الخمسينيات من القرن المنصرم وجه الاهتمام لعلم بحوث العمليات في الجامعات الأمريكية إذ شكلت جمعية متخصصة في مجال بحوث العمليات عام (1950)... وهكذا استمر تطور هذا العلم تدريجياً، من خلال الاستفادة من الحاسوب (Computer Science) في حل المشكلات المتعددة التي تواجه المنظمات والمتعلقة بموضوعات خاصة ببحوث العمليات مثل البرمجة الخطية، نظرية القرارات، شجرة القرارات، التنبؤ، نماذج النقل، مشاكل التخصيص، التحليل الشبكي، نماذج المخزون، تحليل ماركوف، صفوف الانتظار، نظرية المباريات والمحاكاة... وغيرها للتوصل إلى القرار الأمثل.

ثالثاً: المجالات التطبيقية لبحوث العمليات.

يوجد العديد من المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الكثير من النواحي الاقتصادية والصناعية والزراعية والتجارية ومن أهمها:[5]

1. تخطيط وتوزيع الإنتاج:

تهدف المنظمات عادة إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكاليف أو تحسين مستوى الإنتاج وجودته، وقد نجحت بحوث العمليات نجاحاً كبيراً في تقديم أفضل الحلول لهذا النوع من المشكلات، وتقدم بحوث العمليات طريقة تحقق هدف توزيع الإنتاج بأقل تكلفة ممكنة.

2. مراقبة وضبط المخزون:

تقدم بحوث العمليات طريقة ناجحة في إيجاد حل يوازن بين جميع عناصر مشكلة المخزون كارتفاع مستوى المخزون الذي ينتج عنه تلف بعض البضائع بسبب التخزين طويل الأمد، أو انخفاض مستوى المخزون الذي يؤدي إلى خسارة الزبائن في السوق.

3. الاستخدام الأمثل للموارد:

تتصف الموارد بمحدوديتها، بمعنى أن الموارد التي تستخدمها منظمات الأعمال تتصف في كونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها، وترغب المنظمات في توزيع هذه الموارد المحدودة بأفضل طريقة ممكنة ويمكن لبحوث العمليات أن تحل مثل هذه المشكلات بطرق خاصة.

وهناك العديد من المجالات التطبيقية الأخرى لبحوث العمليات منها ما يتعلق بالمواصلات والنقل كتنظيم حركة المرور وتنظيم رحلات الخطوط الجوية وتنظيم استخدامات الهاتف ومنها ما يتعلق بالتخطيط للمشروعات والموارد البشرية وجدولة الأعمال ومنها ما يتعلق بالمجال العسكري.

رابعاً: خطوات تطبيق بحوث العمليات.

تتمثل خطوات بحوث العمليات فيما يلي:[6]

- تعريف وتحليل المشكلة (صياغة المشكلة)؛
- بناء النموذج الرياضي؛
- حساب البدائل التي تسبب إجراءات المشكلة؛
- تحديد تأثير جميع البدائل المتاحة (الحلول المتاحة)؛
- حساب المواصفات لاختيار القرار الأمثل؛
- مراجعة مشروع القرار؛
- اتخاذ القرار النهائي لحل المشكلة.

من خلال ما سبق سنتطرق إلى بعض الخطوات بالتفصيل باعتبارها خطوات تنفيذية لبناء أي نمط لبحوث العمليات فيما يلي:

1) صياغة المشكلة "Formulating The Problème"

يقصد بصياغة المسألة، اتخاذ الخطوات اللازمة لتحويل المشكلة من مسميات وصفية إلى رموز رياضية وصياغتها وفقاً للعلامة التي تربطها، سواء كانت خطية أو غير خطية من خلال هدف المشكلة والقيود التي تشترطها، والخلاصة في هذه المرحلة يجب أن تكون:[7]

- المشكلة بصورة كمية؛
- تحديد واضح للهدف والقيود المفروضة عليه.

2) بناء النموذج الرياضي "Building The Model"

يقصد ببناء النموذج الرياضي إيجاد العلاقة بين معاملات المشكلة الثابتة والمتغيرة في صورة رياضية صحيحة والتي يمكن بواسطة حلها تحقيق الهدف المرغوب فيه.

3) تحليل المعلومات "Information Analysais"

يقصد بتحليل المعلومات حساب المتغيرات المطلوبة وتطبيق طريقة حساسية المتغيرات في مجال الحل الأمثل والتأكد من مصداقية المعلومات من الناحية التطبيقية.

4) تنفيذ نتائج المعلومات "Implémentation of information"

يقصد بتنفيذ نتائج الحل تنفيذ قيم المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل واتخاذ القرار الإداري وفقاً لهذه النتائج.

خامسا: نماذج بحوث العمليات.

لقد تعددت النماذج والأساليب التي تقدمها بحوث العمليات لحل العديد من المشكلات. وفيما يلي بعض تلك النماذج:[8]

1)نماذج التحصيص: تتسم الموارد المتوفرة لمنظمة ما بالقلة أو الندرة، لذلك لابد من توزيع هذه الموارد على الأنشطة المختلفة في المنظمة بطريقة تعطي أفضل ما يمكن، كأن تجعل الأرباح أكبر ما يمكن أو تجعل التكاليف أقل ما يمكن. ويتم معالجة هذه المشكلة عن طريق ما يسمى بالبرمجة الرياضية.

2)نماذج التخصيص: هي حالة خاصة من نماذج النقل، وتبحث في كيفية توزيع عدد معين من الموارد كالأفراد، الآلات، والمنظمات، وغيرها، على عدد من الأعمال بطريقة تجعل المنفعة العائدة من هذا التوزيع أفضل ما يمكن.

3)نماذج النقل: تبحث هذه النماذج في إيجاد طريقة ذات تكلفة أقل في نقل الموارد من مصادر الإنتاج إلى غايات معينة كمراكز التوزيع والتسويق بطريقة تلبي احتياج هذه الغايات من تلك الموارد في حال كون هذه الأخيرة لا تقل عن هذا الاحتياج، أو بطريقة تستنفذ فيها جميع الموارد في حال كون هذه الموارد أقل من احتياج تلك الغايات.

4)نماذج الشبكات: يمكن وضع الكثير من المشاريع التي تتضمن كثيرا من الأنشطة المتداخلة على شكل شبكة تظهر فيها هذه الأنشطة والحوادث التي تنتج عنها. وقد تطورت نظرية تحليل الشبكات ودراستها بشكل أصبح معه من الممكن تخطيط ومراقبة وضبط الموارد والأنشطة لأي مشروع بطريقة تزيد من فعالية تحقيق الأهداف. ومن الأمثلة المشهورة على نماذج الشبكات ما يطلق عليه اسم برنامج تقويم المشروعات ومراجعتها PERT، وطريقة المسار الحرج CPM، والتي تمكننا من دراسة إمكانية تغيير تسلسل الأنشطة والحوادث لتحقيق انجاز أفضل للمشروعات ضمن الموارد المتوافرة لدينا.

5)أساليب المحاكاة: تواجه المنظمات أحيانا مشكلات معقدة يصعب إيجاد نموذج رياضي بسيط لحلها. ومن جهة ثانية فان إجراء التجارب على المنظمة نفسها يكون في معظم الأحيان صعبا وباهظ التكاليف ويحتوي على شيء من المخاطرة. افترض أن مصنعا ما يقوم بإنتاج عدد من السلع وأن الدراسات التقليدية قد أظهرت أن هناك زيادة في الطلب على السلعة التي ينتجها المصنع وبالتالي فان التوسع في الإنتاج سيعود على أصحاب المصنع بفوائد كبيرة. ولذلك فقد قررت إدارة المصنع زيادة ساعات عمل كل من الآلات والعاملين في المصنع بالإضافة إلى شراء مزيد من المواد الخام. إن القيام بتنفيذ مثل هذا القرار قد ينطوي على كثير من المخاطر. فقد يكون السبب في زيادة الطلب على السلعة قد تنتج عن خلل أو ظاهرة مؤقتة مما سينتج عنه خسارة كبيرة عند زوالها. وإذا تم التسليم بأن هذه الظاهرة ليست مؤقتة فقد نظهر مشكلات أخرى متنوعة كعدم جدوى التشغيل الإضافي، ومشكلات في زيادة تكاليف التخزين أو النقل أو تكاليف المواد الخام. وفي مثل هذه الحالات يتم محاكاة SIMULATE المشكلة المطروحة بعمل صورة تماثل الواقع الفعلي لهذه المشكلة دون المساس بالمنظمة نفسها. وقد يستلزم استخدام مجموعة من الأدوات كالحاسوب أو رموز للمشكلة الحقيقية بحيث نستفيد من النتائج التي تم الحصول عليها دون أن نعرض المنظمة لأي خسارة أو ضرر.

6)النماذج الديناميكية: تستخدم هذه النماذج لمعالجة مشكلات ذات مراحل زمنية متتابعة ومترابطة، وتعني هذه النماذج أيضا بمعالجة مشكلات لا يدخل فيهل عنصر الزمن، حيث يتم حل المشكلة وفق خطوات كما لو أنها مراحل زمنية متتابعة ومترابطة. وتعتمد هذه النماذج على مبدأ يسمى مبدأ الأمثلية Principle of optimality والذي ينص على أن الوصول إلى الحل الأمثل يتم عن طريق إيجاد سلسلة من الحلول المثلى المتتابعة لمراحل المشكلة المترابطة ومن ثم استخدام هذا الترابط لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة ككل.

خلاصة:

من خلال ما سبق يمكن استنتاج ما يلي:

- أنه تم تعريف بحوث العمليات من وجهة نظر جمعية بحوث العمليات البريطانية والأمريكية، حيث تم استخلاص التعريف التالي: بحوث العمليات هي عبارة عن أساليب علمية يستخدمها كأساس ومنهج في البحث والدراسة، فبالتالي فإن جوهر بحوث العمليات هو بناء النماذج والاعتماد عليها بهدف مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة والمعقدة.
- ارتبط مصطلح بحوث العمليات منذ بداية نشوءه بشكل وثيق بالمفاهيم العسكرية.
- تمثلت أهم مجالات تطبيق بحوث العمليات في : تخطيط وتوزيع الإنتاج، مراقبة وضبط المخزون، الاستخدام الأمثل للموارد.
- تتمثل أهم الخطوات التنفيذية لبناء أي نمط لبحوث العمليات في: صياغة المشكلة، بناء النموذج الرياضي، تحليل المعلومات، تنفيذ نتائج المعلومات.
- تمثلت أهم نماذج بحوث العمليات في: نماذج التحصيص، نماذج التخصيص، نماذج النقل، نماذج الشبكات، نماذج المحاكاة، نماذج الدينامكية.

تهميشات المحور الأول:

[1]رشيق رفيق مرعي، فتحي خليل حمدان، مقدمة في بحوث العمليات، الطبعة 01، دار وائل للنشر، عمان، 1996، ص15.

[2]شفيق العتوم، بحوث العمليات، الطبعة 01، دار المناهج، عمان، الأردن، 2006، ص13.

[3]حسن ياسين طعمة، مروان محمد السنور، إيمان حسن حنوش، بحوث العمليات نماذج وتطبيقات، الطبعة 01، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2009، ص 22.

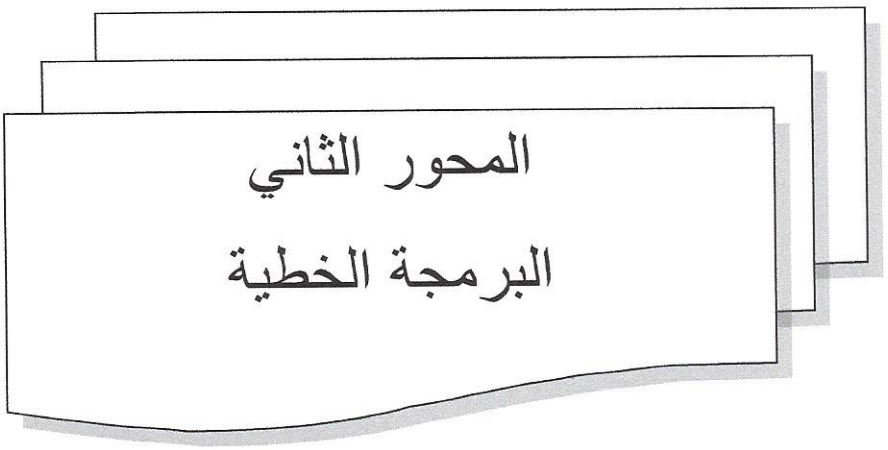
[4]أحمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب، الطبعة 01، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008، ص 21-22-23-24.

[5]جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق، الطبعة 01، دار جليس الزمان للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص 15.

[6]أبو قاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة 02، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، 2014، ص 18.

[7]نفس المرجع السابق، ص 18.

[8]جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سبق ذكره، ص18،17،16،19.


المحور الثاني
البرمجة الخطية

تمهيد.

ظهرت البرمجة الخطية عام 1947 م وبالأخص بعد الحرب العالمية الثانية على يد عالم الرياضيات «George B.Dantzig» الذي كان يعمل خبيراً في الجيش الأمريكي، وفي عام 1949م نشر «George B.Dantzig» الطريقة المبسطة Simplex Algorithm لحل البرامج (المسائل الخطية)، ومنذ هذا الوقت انهالت الإسهامات في تحسين حل البرامج الخطية بطرق جديدة.

فالبرمجة الخطية هي تكتيك رياضي يهتم بحل مشاكل صناعية على وجه العموم فيما يتعلق بتصغير وتعظيم الدوال الخطية بوجود قيود أطرافها متساوية وأقل وأكبر من، ويرجع حل هذه المعادلات للعالم «George B.Dantzig».[1]

حيث تطورت البرمجة الخطية خلال الحرب العالمية الثانية وتم استخدامها آنذاك في معالجة مشاكل التخطيط في السلام الجوي الأمريكي، وفيما بعد أخذت طريقها في المجالات المختلفة وأصبحت أداة رياضية مهمة لمساعدة المدراء في عملية اتخاذ القرارات.[2]

أولاً: تعريف البرمجة الخطية.

تعتبر البرمجة الخطية أحد أهم الطرق وأكثرها انتشاراً في علم الاقتصاد التطبيقي في الإدارة التي يمكن استخدامها في حل عدد كبير من المشكلات الإدارية المتعلقة بالإنتاج والتسويق والتمويل.

ومن بين أهم التعاريف الشائعة للبرمجة الخطية نذكر:

- البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية صممت كمساعد المسيرين في تخصيص أو استعمال الموارد المتاحة للمؤسسة الاقتصادية استعمالاً أمثلاً.[3]
- هي أسلوب رياضي يعتمد لمعالجة المشاكل الإدارية ومن ثم اتخاذ القرارات بحيث يساعد على تحقيق أقصى مستوى من الأرباح أو الوصول بالتكاليف إلى أدنى مستوى ممكن.[4]
- كما عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية بأنها طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، بحيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية.[5]

- تعرف بأنها أسلوب رياضي يساهم في عملية اتخاذ القرارات الإدارية التي تهدف إلى إيجاد الحل الأمثل لكيفية توزيع الموارد (البشرية والمادية) المتاحة بين أفضل الاستخدامات ضمن مجموعة من القيود التي تحد من درجة تحقيق هذا الهدف.[6]

وبالتالي تعتبر البرمجة الخطية إحدى الطرق التي تسمح للقائمين على صنع القرار بحل مشكلات التعظيم والتدنية في وجود ضوابط معينة –أو قيود– تحدد ما ينبغي عمله.

ومما سبق يمكننا تعريف البرمجة الخطية على أنها عبارة عن أسلوب رياضي تساهم في عملية اتخاذ القرار الإداري الذي يهدف إلى إيجاد الحل الأمثل والذي يتمثل في تحقيق أكبر ربح ممكن أو أكبر رقم أعمال ممكن، أكبر إنتاج ممكن، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

إن تحقيق هذا الهدف يكون طبعاً ضمن حدود معينة، وهذه الحدود تمثل الموارد المالية، البشرية والمادية المتاحة للمؤسسة، فبالتالي فإن تحقيق هذا الهدف يكون مقروناً بحجم الموارد التي هي بحوزة المؤسسة.

ومن بين المصطلحات الهامة في بناء البرنامج الخطي ما يأتي:[7]

- **دالة الهدف (objective function)**: وهي الهدف الذي نسعى لتحقيقه من وراء النشاط الذي ترجم على شكل برنامج خطي؛
- **التعظيم (maximisation)**: وهو الحصول بدالة الهدف إلى أعظم مستوى ممكن وتختصر ب (max)؛
- **التدنية (minimisation)**: وهو الحصول بدالة الهدف على أدنى مستوى ممكن وتختصر ب (min)؛
- **بشرط (Subject to)**: وهو خضوع دالة الهدف لمجموعة من الشروط أو القيود وتختصر أحياناً ب (S/t) بالإنجليزية وبالفرنسية (s/c) sous des conditions؛
- **القيود (contraints)**: وهي مجموعة المحددات والشروط التي تقيد دالة الهدف؛
- **الأمثلية (optimisation)**: وهي البحث عن نقطة أعظم أو نقطة أدنى لدالة معينة مقيدة بمجموعة من القيود.

والجدول التالي رقم 01 يوضح عناصر لأي مشكلة تعالجها البرمجة الخطية.

جدول رقم (01): عناصر البرمجة الخطية

دالة الهدف		
تدنية متغيرات القرار		تعظيم متغيرات القرار
موارد	$=$ $\geq$ $\leq$	قيود
متغيرات القرار موجبة أو صفرية "عدم السلبية"		

من خلال ما سبق فإن المؤسسة تسعى إلى تحقيق الهدف الذي يرمز له بمتغير تابع ما عادة ما يكون دالة في عدد من المتغيرات المستقلة ويسمى بدالة الهدف، فإن رمزنا للهدف المراد تحقيقه بالرمز (z) مثلاً ورمزنا للعوامل التي تؤثر فيه بالرمز $(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)$ فالمطلوب يكون

$$opt(max,\ min)z=f(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)$$

وللإشارة كذلك فإن هذه الموارد المتاحة للمؤسسة تشكل قيوداً على المؤسسة في سبيل تحقيقها، حيث تسمى قيود فنية وفي الأغلب يعبر عنها في شكل معادلات أو متباينات لمجموعة من المتغيرات المستقلة (x_j).

ثانيا: شروط استخدام البرمجة الخطية.

هناك شروط معينة يستلزم توافرها في المشكلة التي يمكن حلها بواسطة البرمجة الخطية، وهذه الشروط هي:[8]

1. **الخطية**: يجب أن يكون هناك علاقة خطية بين العوامل المستقلة المؤثرة في المشكلة المدروسة والتي يرمز لها بالرمز (x_i)، والمكلة المدروسة في حد ذاتها والتي نرمز لها بالمتغير التابع (y)، ونعبر عن هذه العلاقة بالصيغة التالية: $y=a+bx_i$.
2. **وحدة الهدف**: يجب أن يسعى نموذج البرمجة الخطية إلى تحقيق هدف وحيد إما في شكل تعظيم أو تدنية لهذا الهدف.

3. **الصياغة الكمية للمشكلة:** يجب أن يكون ممكناً التعبير عن العلاقات بين المتغيرات التي تحتويها المشكلة تعبيراً كمياً إما في شكل معادلات أو في شكل متراجحات أو في الشكلين مع بعض.
4. **تعدد القيود الفنية:** تشتمل المشكلة المدروسة على مجموعة من القيود الفنية، التي تؤثر على حرية متخذ القرار للوصول إلى حل الأمثل، وهذا يفترض التضحية ببعض بدائل الحلول، تتعلق هذه القيود الفنية بمدخلات النشاط والإمكانيات المتاحة.
5. **تعدد بدائل الحل:** يفترض نموذج البرمجة الخطية أن يكون لمتخذ القرار خيارات مختلفة لحل النموذج حتى يمكن اختيار أفضلها، الذي يسمى الحل الأمثل.
6. **قابلية التجزئة:** يقبل نموذج البرمجة الخطية القيم الكسرية للمؤشرات التي يتكون منها، ومن هنا لا يحتاج حل النموذج أن تكون كل قيم متغيراته أرقاماً صحيحة.
7. **عدم السلبية:** إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي:[9]

$$Max_or_min = \sum_{J=1}^{n} c_J x_j$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{J=1}^{n} a_{ij} x_J (\leq, =, \geq) b_i$$

$$(i=1,2,\ldots,m)$$

$$x_J \geq 0 \qquad (J=1,2,\ldots..n)$$

إذ أن: a_{iJ}, b_i, c_J ثوابت تحدد من سياق المشكلة.

ثالثاً: فرضيات ومتطلبات البرمجة الخطية.

تستند البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات هي:[10]

- **قابلية الجمع**: يقصد بذلك أن كميات الموارد الأولية الداخلة في الإنتاج وكميات الإنتاج قابلة للإضافة وأن مجموع نواتج أنشطة الإنتاج تمثل مجموع نواتج كل نشاط إنتاجي منفصل ويمكن تمثيلها رياضياً:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = A \text{ Ressources}$$

- **المعدودية**: معدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها، وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- **العلاقة المحددة**: أن تكون جميع العلاقات الرياضية معروفة وثابتة؛
- **الاستقلالية**: إن اختبار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة نشاط آخر،أي استقلالية عناصر الإنتاج؛
- **التأكد**: أن تكون جميع القيم معلومة، ولا يوجد قيم احتمالية.

أما متطلبات البرمجة الخطية فتنحصر فيما يلي:[11]

- وضع المشكلة الاقتصادية محل الدراسة في شكل نموذج (برنامج) رياضي خطي متكون من دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) وقيود الموارد المفروضة على المؤسسة من أجل تحقيق دالة هدفها.
- ثم حل هذا النموذج الخطي عن طريق إيجاد قيم للمتغيرات المستقلة التي تعطي قيمة مثلى (Max, Min) لدالة الهدف مع مراعاة القيود الفنية المفروضة على المؤسسة.

رابعاً: نمذجة المشكلة الاقتصادية.

تعالج البرمجة الخطية مشاكل التعظيم (العوائد والأرباح)، كما تعالج مشاكل التقليل (التكاليف)، وهي ما تعرف في بحوث العمليات بالمثلى (optimization). سوف نتعرض الآن لبعض الأسئلة التطبيقية التي تبين بعض المشاكل الاقتصادية التي تتطلب استعمال البرمجة الخطية في حلها والتي من خلالها نوضح كيف يمكن تحويل معطيات هذا النمط من المشاكل الاقتصادية إلى معطيات نموذج رياضي خطي.

1. مثال تطبيقي حول تحقيق أعظم عائد.[12]

تقوم شركة بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق 10و.ن، ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة 40و.ن، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهرياً على أكثر من مائة ساعة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق للمؤسسة أعلى عائد.

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة.

1) **الهدف**: الهدف هنا هو تعظيم العائد.

2) **المتغيرات**: كراسي، طاولات.

3) **الرموز**: نعبر عن الكراسي (x_1)، ونعبر عن الطاولات بـ (x_2).

4) **الجدول**: حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضح البيانات في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي:

	x_1 كراسي	x_2 طاولات	الموارد المتاحة شهريا أقل من أو مساوية
قسم النشر	1	2	100 ساعة عمل
قسم التجميع	1	5	150 ساعة عمل
سعر البيع	10ون	40ون	

وبالتالي هذا الجدول يبين بيانات المشكلة في شكل مبسط أما الخطوة التالية هي صياغة البيانات التي في الجدول أعلاه في صورة معادلات كما يلي:

دالة الهدف	$Max\ Z = 10x_1 + 40x_2$	Objective function
القيود	$1x_1 + 2x_2 \leq 100$ $1x_1 + 5x_2 \leq 150$	Constraints
عدم السلبية	$,x_2 \geq 0x_1 \geq 0$	Non négative

وعليه فإننا نكتب النموذج الرياضي لهذه المشكلة بالشكل الإجمالي على النحو التالي:

$$Max\ f(x) = 10x_1 + 40x_2$$

وفقاً للقيود: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ {}_1 + 5x_2 \leq 150 \end{cases}$

وشرط عدم السلبية $x_1 \geq 0، x_2 \geq 0$

ملاحظة: يمكن صياغة نموذج رياضي خطي لمشكلة يطلب فيها حساب القيمة العظمى لدالة الهدف بشكل عام كالتالي:[13]

$$Max\ f(x) = c'x$$

Subject to

$$Ax \leq B$$

$$x \geq 0$$

حيث CER^m، BER^m والمصفوفة A من المرتبة mxn

2. مثال تطبيقي حول تدنية التكاليف

تنتج إحدى الشركات ثلاث أنواع من عصير الفواكه في مصنعين A و B وإن كميات الإنتاج في اليوم تقدر كالآتي:[14]

نوع العصير	المنتج A (لتر)	المنتج B (لتر)
1	1500	1500
2	3000	1000
3	2000	5000

وقد أظهرت دراسة السوق أن من المتوقع أن يكون هناك طلب في شهر جويلية يقدر بـ 20000 لتر من النوع الأول و 40000 لتر من النوع الثاني و44000 لتر من النوع الثالث، وكذلك فإن كلفة تشغيل المصنع A هي 600 وحدة نقدية في اليوم و400 وحدة نقدية للمصنع B.

المطلوب: تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كلا من المصنعين للوفاء بطلب السوق المتوقع في شهر جويلية مع تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن (صياغة المسألة)، وكتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي.

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة:

1) **الهدف**: الهدف هنا تدنية التكاليف.
2) **المتغيرات**: عدد الأيام التي يشتغلها المصنع A ، عدد الأيام التي يشتغلها المصنع B.
3) **الرموز**: نعبر عن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع x_1=A.

نعبر عن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع x_2=B.

ومنه البرنامج الخطي هو: $$Min\ (Z) = 600x_1 + 400x_2$$

$$S/t\begin{cases}1500x_1 + 1500x_2 \leq 20000\\3000x_1 + 1000x_2 \leq 40000\\2000x_1 + 5000x_2 \leq 44000\end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

ملاحظة: نستطيع صياغة نموذج رياضي خطي لمشكلة يطلب فيها القيمة الصغرى لدالة الهدف بشكل عام كالتالي:[15]

$$Min\ f(x) = c'x$$

Subject to

$$Ax \geq b, x \geq 0$$

حيث CER^n ,CER^m والمصفوفة A المرتبة من m,n

خامساً: سلسلة تمارين حول بناء نموذج خطي

تمرين 01:

تقوم منظمة ما بتصنيع المقاعد والمكاتب وتمتلك هذه المنظمة 03 مراكز إنتاجية هي مركز التقطيع والتجهيز، مركز التجميع ومركز الطلاء، علماً بأن الموارد المتاحة لهذه المنظمة هي كما يلي:[16]

مركز التقطيع والتجهيز لديه 400 ساعة عمل آلي.

مركز التجميع لديه 500 ساعة عمل بشري.

مركز الطلاء يمتلك 600 ساعة عمل بشري.

فإذا استغرق تقطيع المكتب الواحد ساعة عمل آلي وتجميع ساعتين من العمل البشري وعملية الطلاء 3 ساعات عمل بشري أيضاً، واستغرق تقطيع وتجهيز المقعد الواحد ساعتين عمل آلي، وتجميعه في ساعتين وطلاؤه في ساعة واحدة.

المطلوب:

أوجد البرنامج الخطي الذي يعظم أرباح هذه المنظمة إن علمت بأن العائد الصافي من بيع المكتب الواحد هو 4 دينارات والعائد الصافي من بيع المقعد الواحد هو 2 دينار.

الحل المختصر للتمرين 01:

الهدف: تعظيم (Max):

X_1: المقعد

X_2: المكتب.

$$MaxZ = 2x_1 + 4x_2$$

$$S/t \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 400 & : \text{قيد التقطيع والتجهيز} \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 500 & : \text{قيد التجميع} \\ x_1 + 3x_2 \leq 600 & : \text{قيد الطلاء} \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

تمرين 02:

مصنع الإلكترونيات الصغيرة ينتج نموذجين من الآلات الحاسبة هما الحاسب التجاري والحاسب العلمي، كل نوع من الحاسبين يمر عبر قسمين، قسم التسليك يعمل به 10 عمال وقسم التجميع يعمل به 8 عمال، حيث طاقة العمل اليومي القصوى لكل عامل هي 8 ساعات، علما أن المنتوج الأول يتطلب 8 ساعات عمل في القسم الأول و 4 ساعات عمل في القسم الثاني، بينما المنتوج الثاني يتطلب 4 ساعات عمل في القسم الأول و 8 ساعات في القسم الثاني.

علماً أن سعر بيع المنتوج الأول هو 1000 و.ن ويكلف 400 و.ن وسعر بيع المنتوج الثاني هو 600 و.ن ويكلف 200 و.ن.

المطلوب:

أكتب البرنامج الخطي الموافق لهذا المصنع والذي يسمح بتعظيم الأرباح.

الحل المختصر للتمرين 02:

$$MaxZ = (1000 - 400)x_1 + (600 - 200)x_2$$

$$MaxZ = 600x_1 + 400x_2$$

$$S/t \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \leq 80 & : \text{قسم التسليك} \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 64 & : \text{قسم التجميع} \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ملاحظة: الطاقة القصوى في قسم التسليك هي: ساعة$8 \times 10 = 80$

الطاقة القصوى في قسم التجميع هي: ساعة$8 \times 8 = 64$.

تمرين 03:

يريد أحد منتجي المثلجات تحضير مادة أولية مركبة من أجل استعمالها في إنتاج المثلجات والمرطبات، هذه المادة يجب أن تحتوي على 30 كغ من الدهون، 20 كغ من السكريات، 2 كغ من البروتين، 60كغ من الماء، (1كغ=1لتر).

من أجل تحضير هذه المادة المركبة، يقوم بشراء بعض المواد من السوق بالإضافة إلى استعمال الماء، قائمة المواد المشتراة، ونسبة المواد المركبة فيها وكذلك ثمن شراء هذه المواد معطاة في الجدول التالي:[17]

	القشدة	صفار بيض طازج	الحليب	صفار البيض مجمد ومحلى	مستخلص السكر	الماء
الدهون	40%	20%	10%	15%	.....	.....
السكريات	0.5%	1%	4%	10%	65%	.....
البروتين	3%	40%	20%	45%	.....	.....
الماء	45%	10%	60%	15%	30%	%100
ثمن الشراء	5و.ن	7 و.ن	3 و.ن	4و.ن	0.6 و.ن	.....

المطلوب:

كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح لهذا المنتج من تحقيق برنامجه الإنتاجي بأقل تكلفة.

الحل المختصر للتمرين 03:

$$MinZ = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0.6x_5$$

$$S/t \begin{cases} 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.15x_4 = 30 \\ 0.005x_1 + 0.01x_2 + 0.04x_3 + 0.1x_4 + 0.65x_5 = 20 \\ 0.03x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 0.45x_4 = 2 \\ 0.45x_1 + 0.1x_2 + 0.6x_3 + 0.15x_4 + 0.3x_5 + x_6 = 60 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq 0$$

اختصاراً $x_J \geq 0$

تمرين 04:

تتعهد إحدى الشركات بتقديم 100 كغ من مادة غذائية تتكون من مزيج ثلاث مواد: A, B, C بشرط أن يحتوي هذا المزيج على:

- 0.08% على الأقل وليس أكثر من 1.2% من الكالسيوم.
- 22% بروتين على الأقل.
- 50% ألياف في أكثر الحدود.

فإذا كانت محتويات المواد الثلاثة من العناصر الغذائية وكلفة كل منهما كالآتي:

المواد	الكمية الموجودة في كل كغ			الكلفة/كغ
	كالسيوم	بروتين	ألياف	
A	0.380	-	-	0.0164
B	0.001	0.09	0.02	0.0463
C	0.002	0.50	0.08	0.1250

المطلوب:

صياغة الحالة في شكل برمجة خطية بحيث يتم تلبية المتطلبات الغذائية وتدنية الكلفة إلى أدنى حد ممكن.

الحل المختصر للتمرين 04:

$$Min(Z) = 0.0164x_1 + 0.0463x_2 + 0.1250x_3$$

$$S/t\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 0.012 \\ 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \geq 0.0008 \\ 0.09x_2 + 0.50x_3 \geq 0.22 \\ 0.02x_2 + 0.08x_3 \leq 0.50 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

تمرين 05:

يقوم محل الجزارة بالقرية بعمل شطائر اللحم التقليدية بتكوين من لحم البقر ولحم الماعز، يحتوي لحم البقر على 80% من اللحم، و20% من الدهون، ويكلف المحل 80 سنتاً لكل رطل، ويحتوي لحم الماعز على 68% من اللحم و32% من الدهون، ويكلف المحل 60 سنتاً لكل رطل.

المطلوب:

ما هي كمية اللحم من كل نوع التي يجب أن يستخدمها المحل في كل رطل من شطائر اللحم، إذا كان المطلوب تصغير التكلفة إلى الحد الأدنى، والحفاظ على نسبة الدهون، بحيث لا تزيد عن 25%.[18]

الحل المختصر للتمرين 04:

الهدف هو تصغير التكلفة (بالسنت)، Z، لكل رطل من شطائر اللحم، حيث Z=80 ضعفاً وزن لحم البقر المستخدم، بالإضافة إلى 60 ضعفاً وزن لحم الماعز المستخدم.

إذا وضعنا رمز X_1: وزن لحم البقر المستخدم في كل رطل من شطائر اللحم.

X_2: وزن لحم الماعز المستخدم في كل رطل من شطائر اللحم.

فبالتالي دالة المهدف هي: $Min\ Z = 80x_1 + 60x_2$

أما القيود هي: $S/t\begin{cases}0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25\\ x_1 + x_2 = 1\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\end{cases}$

تمرين 06:

يمتلك أحد صناع الأثاث 6 وحدات من الخشب، و28 ساعة من الوقت يستغلها في صنع شاشات ديكور، وقد باع نوعين منها في الماضي، ولذلك إنه سيقد نفسه بهما، ويقدر أن النوع الأول يحتاج إلى وحدتين من الخشب و7 ساعات، بينما يحتاج النوع الثاني وحدة واحدة من الخشب و8 ساعات، وتقدر أثمان النوعين ب 120 دولاراً، و80 دولاراً على التوالي.

المطلوب:

كم عدد شاشات الديكور من كل نوع جب أن يقود بتصنيعها إذا أراد تعظيم العائد من المبيعات.[19]

الحل المختصر للتمرين 06:

$$Max\ Z = 120x_1 + 80x_2$$

$$S/t\begin{cases}2x_1 + x_2 \leq 6\\ 7x_1 + 8x_2 \leq 28\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

تمرين 07:

ترعن الشركة العامة لإنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاثة أنواع من العلائق الغذائية [العليقة (1)، العليقة (2)، العليقة (3)] وإن كل عليقة تتضمن مزيج من مركبات [البروتين والألياف].

والجدول التالي يوضح البيانات المشكلة كالآتي:[20]

المركبات	العلائق الغذائية			الاحتياجات
	العليقة (1)	العليقة (2)	العليقة (3)	الدنيا (كلغ)
البروتين	20	25	30	180
الألياف	50	40	60	650
تكاليف الشراء (بالدينار)	100	150	120	

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج العلائق الغذائية بما يجعل تكاليف إنتاج العلائق أقل ما يمكن.

الحل المختصر للتمرين 07:

$$Min\ Z = 100x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

$$S/t \begin{cases} 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \geq 180 \\ 50x_1 + 40x_2 + 60x_3 \geq 650 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 08:

فكر مستثمر ببناء مصنع لإنتاج نوعين من البلوزات. نسائي: حيث كان سعر السوق يصل إلى (15) دينار، ورجالي: بسعر (12) دينار، وأن إنتاج هذين النوعين من البلوزات يمر بثلاث أقسام إنتاجية:[21]

1- قسم الغزل: الذي لا يتجاوز طاقة إنتاجية 54 ساعة عمل للدورة الواحدة وأن البلوز النسائي كان يحتاج إلى 3 ساعات عمل في هذا القسم، أما البلوز الرجالي فإنه يحتاج إلى 6 ساعات عمل.

2- قسم النسيج: تبلغ الطاقة الإنتاجية له بحدود 48 ساعة عمل للدورة الإنتاجية فإن البلوز النسائي ونظراً لدقة العمل المطلوبة فيه فإنه يحتاج إلى 6 ساعات عمل في حين أن البلوز الرجالي بحاجة إلى 3 ساعات عمل.

3- قسم التجهيز النهائي والتعبئة: محددة بطاقة 90 ساعة عمل بواقع 9 ساعات لكل من البلوز النسائي وكذلك الرجالي.

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لمعرفة العدد من البلوزات النسائية وكذلك الرجالية مما يؤدي إلى تعظيم الأرباح.

الحل المختصر للتمرين 08:

$$Max\ Z = 15x_1 + 12x_2$$

$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ 9x_1 + 9x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 09:

تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية والمنزلية نوعين من الثلاجات ذات الحجم العادي والحجم الكبير، وتمر عملية التصنيع في ثلاثة مراحل وهي: مرحلة التجميع ومرحلة الطلاء ثم مرحلة مراقبة جودة الإنتاج، أما الوقت اللازم إنهاء كل مرحلة من مراحل التصنيع الثلاث فقد تم تحديدها في التالي:[22]

النوع	الوقت اللازم للتجميع	الوقت اللازم للطلاء	الوقت اللازم للرقابة على الجودة
ثلاجة الحجم العادي	3.6	1.6	0.5
ثلاجة الحجم الكبير	4.8	1.8	0.6

فإذا كان الوقت المتاح أسبوعياً للقيام بكل مرحلة من مراحل التصنيع يبلغ 4800 ساعة لمرحلة التجميع و1980 ساعة لمرحلة الطلاء و900 ساعة لمرحلة الرقابة على جودة الإنتاج، وتتوقع الشركة أن تبيع أسبوعياً على الأقل ما يعادل 300 ثلاجة ذو الحجم العادي و 180 ثلاجة ذو الحجم الكبير، وبناء على هذه المعلومات فإن مدير الإنتاج يرغب في تحديد الكمية والواجب إنتاجها أسبوعياً من كل نوع من الثلاجات بحيث تحقق الشركة أكبر كمية ممكنة من الربح مع العلم أن ربح الشركة من كل ثلاجة ذو الحجم العادي يعادل 50 دينار بينما ربح الشركة من كل ثلاجة ذو الحجم الكبير يعادل 75 دينار.

الحل المختصر للتمرين 09:

$$Max\ Z = 50x_1 + 75x_2$$

$$S/t \begin{cases} 3.6x_1 + 4.8x_2 \leq 4800 \\ 1.6x_1 + 1.8x_2 \leq 1980 \\ 0.5x_1 + 0.6x_2 \leq 900 \\ x_1 \geq 300, x_2 \geq 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الخلاصة:

من خلال ما سبق يمكن استنتاج ما يلي:

- أن البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي تساهم في عملية اتخاذ القرار الإداري الذي يهدف إلى إيجاد الحل الأمثل والذي يتمثل في تحقيق أكبر ربح ممكن، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.
- أهم المصطلحات في بناء البرنامج الخطي هي: دالة الهدف،التعظيم (maximisation) ، التدنية (minimisation) بشرط (Subject to)، القيود (contraints) الأمثلية (optimisation).
- تتمثل الشروط التي يستلزم توافرها في المشكلة التي يمكن حلها بواسطة البرمجة الخطية في:

الخطية ونعبر عن هذه العلاقة بالصيغة التالية: $y=a+bx_i$. وحدة الهدف، الصياغة الكمية للمشكلة، تعدد القيود الفنية، تعدد بدائل الحل، قابلية التجزئة، عدم السلبية.

- تتمثل الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي:

$$Max_or_min = \sum_{J=1}^{n} c_J x_j$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} a_{ij} x_J (\leq, =, \geq) b_i$$

$(i=1,2,\ldots,m)$

$$x_J \geq 0 \qquad (J=1,2,\ldots..n)$$

إذ أن: a_{iJ}, b_i, c_J ثوابت تحدد من سياق المشكلة.

- تستند البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات هي: قابلية الجمع، المعدودية، العلاقة المحددة، الاستقلالية، التأكد.
- متطلبات البرمجة الخطية تتمثل في وضع المشكلة الاقتصادية محل الدراسة في شكل نموذج (برنامج) رياضي خطي متكون من دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) وقيود الموارد المفروضة على المؤسسة من أجل تحقيق دالة هدفها، ثم حل هذا النموذج الخطي عن طريق إيجاد قيم للمتغيرات المستقلة التي تعطي قيمة مثلى (Max, Min) لدالة الهدف مع مراعاة القيود الفنية المفروضة على المؤسسة.
- تعالج البرمجة الخطية مشاكل التعظيم (العوائد والأرباح)، كما تعالج مشاكل التقليل (التكاليف)، وهي ما تعرف في بحوث العمليات بالمثلى (optimization).

تهميشات المحور الثاني:

[1]أبو قاسم مسعود الشيخ، مرجع سبق ذكره، ص 25.

[2]منعم زمزير الموسوي، بحوث العمليات مدخل علمي لاتخاذ القرارات، الطبعة 02، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، عمان، 2016، ص 53.

[3]مكيد علي، بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية، الجزء الأول، البرمجة الرياضية دروس ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 07.

[4]منعم زمزير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 53.

[5]نفس المرجع السابق، ص 53.

[6]أكرم محمد عرفان المهتدي، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات، الطبعة 01، دار الصفاء، الأردن، عمان، 2010، ص 19.

[7] فتحي صالح أبو سدرة ، زينب إسماعيل المصري، الأسلوب الرياضي في الاقتصاد، منشورات مركز البحوث الاقتصادية، بن غازي، ليبيا، 1988، ص 228.

[8] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 8-9.

[9] محمد عبد العال النعيمي، وفاء شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، بحوث العمليات، الطبعة 02، دار وائل للنشر، الأردن، 2011، ص20.

[10] محمد عباس العميد ، محمد العزاوي، الأساليب الكمية في العلوم الإدارية، الطبعة العربية، دار اليازوري، الأردن، 2013، ص 08.

[11] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 08.

[12] صديق ناصر، البرمجة الخطية، الجامعة الإسلامية-غزة- كلية التجارة، قسم إدارة الأعمال، 2008، ص 08.

[13] محمد دباس الحميد ومحمد العزاوي، مرجع سبق ذكره، ص 17.

[14]مولاي بوعلام، محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات، مطبوعة موجهة لطلبة الليسانس والماستر، جامعة البويرة، كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير، 2017/2016، ص 20.

[15] محمد دباس الحميد ومحمد العزاوي، مرجع سبق ذكره، ص 23.

[16] مراد زكي ،عمار المقري، أساسيات الاقتصاد الرياضي، منشورات جامعة الفاتح، طرابلس، الجماهيرية العظمى، 1998، ص 137.

[17] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص ص30 -31.

[18] ريتشارد بروبنسون، ترجمة: حسن حسنى الغبارى، سلسلة ملخصات شوم، نظريات ومسائل في بحوث العمليات، الطبعة 04، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص 17.

[19] ريتشارد برنسون، مرجع سبق ذكره، ص 19.

[20] حسن ياسين طعمة، مرجع سبق ذكره، ص 44-45-46.

[21] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، الطبعة 02، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006، ص 17-19.

[22] إبراهيم نائب، أنعام باقية، بحوث العمليات خوارزميات وبرامج حاسوبية، الطبعة 01، دار وائل للطباعة والنشر، 1999، ص 38-39-41.

المحور الثالث
الطريقة البيانية في حل البرنامج الخطي

المحور الثالث: الطريقة البيانية في حل البرنامج الخطي

تمهيد:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (x_1, x_2).[1]

أولاً: خطوات إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحل البياني.

توجد عدة خطوات لابد من إتباعها من أجل عملية الحل بالطريقة البيانية إذ لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

1- نقوم بتحويل كل متراجحات القيود إلي معادلات، حيث هذه العملية (التحويل) تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛

2- نهيئ الإحداثيات اللازمة للمتغيرين ولتكن إحداهما المحور العمودي (x_2) والآخر المحور الأفقي(x_1)؛

3- التمثيل البياني للمعادلات على معلم متعامد ومتجانس؛

4- إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات الممثلة للقيود مع محوري الفواصل والتراتيب، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛

5- وإيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيمx_1 و x_2 عند كل نقطة؛

6- نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛

7- نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (Z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization) أو النقطة التي قيمة (Z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تحقيق (Minimization).

وللتفصيل أكثر نأخذ الأمثلة التطبيقية الآتية:

مثال رقم 01: أوجد قيم x_1 و x_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن للبرنامج التالي باستخدام الطرقة البيانية:

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 3x_2$$

$$S/t\begin{cases}5x_1 + 3x_2 \leq 30\\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

1- نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$\begin{cases}5x_1 + 3x_2 = 30 \dots (1)\\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \dots (2)\end{cases}$$

2- على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويمكن بذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينهما كالآتي:

x_1	x_2	المعادلة	رقم المعادلة
0	10	$5x_1 + 3x_2 = 30$	1
6	0		
0	7	$2x_1 + 3x_2 = 21$	2
10.5	0		

بالنسبة لكيفية تحديد منطقة الحلول الممكنة حسب هذا المثال كالآتي:

بالنسبة للمستقيم الذي يمثل المعادلة $[5x_1 + 3x_2 = 30]$، نقوم بتشطيب حسب ما تحققه الإحداثية ولتكن (0.0) لتسهيل فقط حيث يمكن اختيار أي إحداثية عشوائياً، بتعويض الإحداثية (0.0) في المتراجحة نجد أن: $5(0) + 3(0) \leq 30$

$$0 \leq 3$$

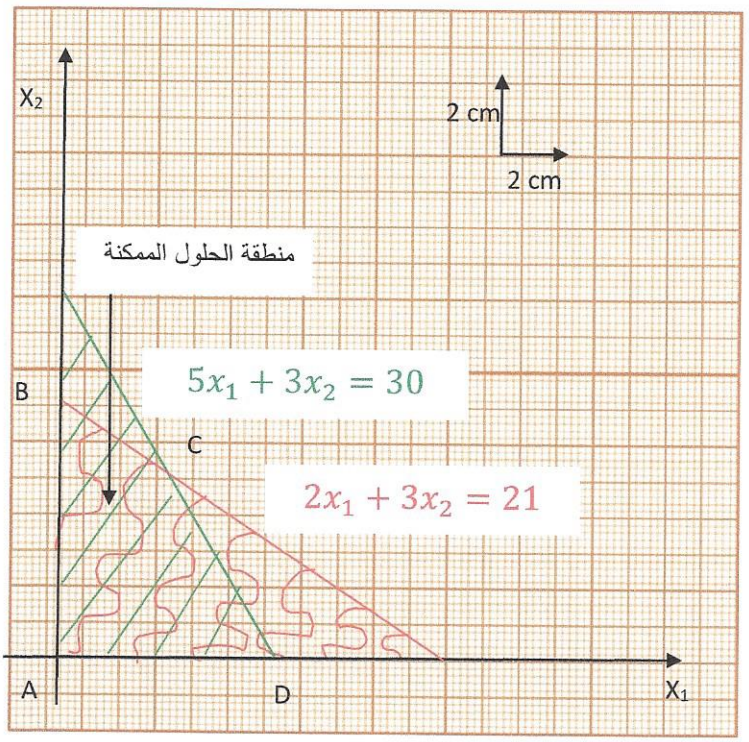
وبالتالي الإحداثية (0.0) تحقق المتراجحة ومن هنا يكون التشطيب على يسار المستقيم أي أسفله أين تنتمي الإحداثية (0.0) كما هو موضح في الرسم.

أما بالنسبة للمستقيم الذي يمثل المعادلة $[2x_1 + 3x_2 = 21]$ نقوم بالتشطيب حسب ما تحققه الإحداثية (0.0).

فبتعويض الإحداثية (0.0) في المتراجحة نجد أن $2x_1 + 3x_2 \leq 21$

$$0 \leq 21$$

وبالتالي الإحداثية (0.0) تحقق المتراجحة ومن هنا يكون التشطيب على يسار المستقيم أي أسفله أي أنه تنتمي الإحداثية (0.0) كما هو موضح في الرسم.



حسب التمثيل البياني نجد أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي يشترك فيها التشطيب والتي تمثل هنا (A, B, C, D)، أي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد.

الآن نبحث عن إحداثيات النقاط (A, B, C, D).

$A=(0,0)$ $B=(0, 7)$ $D=(6, 0)$

النقطة C هي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرين وذلك إما هندسياً أو جبرياً، فإذا كان هندسيا فيكون ذلك بإسقاط النقطة C عمودياً على كل من المحور الأفقي والعمودي، فحسب الكل نجد أن: $C(3, 5)$.

أما جبرياً فيمكن إيجاد إحداثية النقطة C وذلك بحل معادلتين المستقيمين حلاً مشتركاً كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \dots (1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \dots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في (1−) نجد:

$$-5x_1 - 3x_2 = -30 \dots (3)$$

ومنه نقوم بجمع المعادلة رقم (3) مع (2) نجد:

$$-5x_1 + 2x_1 - 3x_2 + 3x_2 = -30 + 21$$

$$-3x_1 = -9$$

$$x_1 = 3$$

بتعويض قيمة $(_1)$ في المعادلة رقم (1) نجد:

$$5(3) + 3x_2 = 30$$

$$15 + 3x_2 = 30$$

$$x_2 = \frac{30 - 15}{3} = 5$$

$$x_2 = 5$$

وبالتالي إحداثية النقطة C هي C(3, 5).

وفي الأخير نقوم باختصار النقطة التي تحقق أعظم قيمة وذلك بتعويض جميع القيم في دالة الهدف حسب الجدول التالي:

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

النقاط	إحداثية النقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A: (x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B: (x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_B = 21$
C	$C: (x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D: (x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_D = 24$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين الذين يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما

$$C: (x_1 = 3, x_2 = 5)$$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

بالنسبة للقيد الأول: 30= (5).(3)+(3).(5)

أما القيد الثاني: 21=(5).(3)+(3).(2)

وبالتالي: Z_c=(4).(3)+(3).(5)

$$Z_c=27$$

مثال رقم 02: ليكن البرنامج الخطي الآتي:

$$Min\ Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$S/t \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$X_J \geq 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نستخدم طريقة الرسم البياني.

1. نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$5x_1 + x_2 = 5 \ldots (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 = 9 \ldots (2)$$

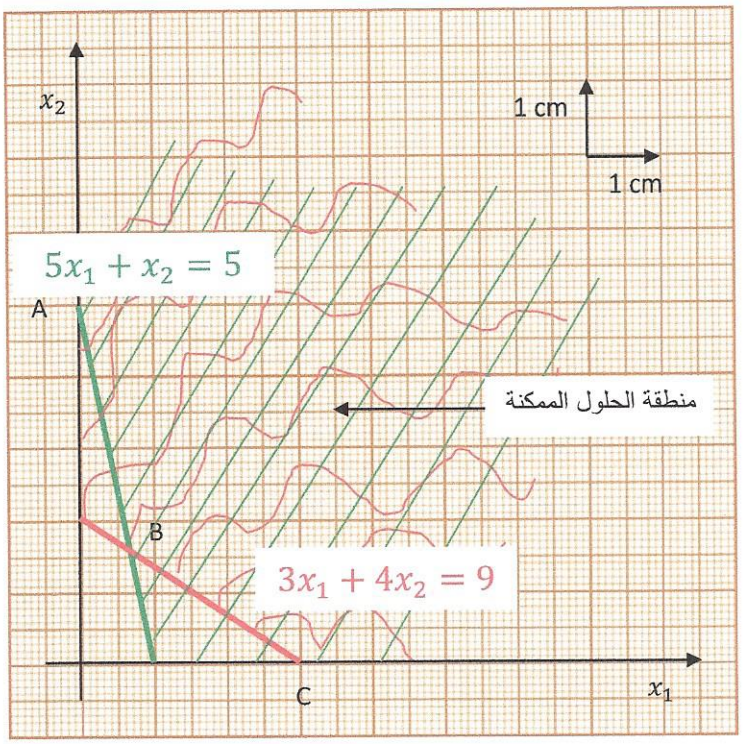
2. على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نل بينهما كالآتي:

x_1	x_2	المعادلة	رقم المعادلة
0	5	$5x_1 + x_2 = 5$	1
1	0		
0	4/9	$3x_1 + 4x_2 = 9$	2
3	0		

بالنسبة لكيفية تحديد منطقة الحلول الممكنة حسب هذا المثال كالآتي:

بالنسبة للمستقيم الذي يمثل المعادلة $5x_1 + x_2 = 5$ نقوم بالتشطيب حسب ما تحققه الإحداثية $(0،0)$ فبتعويضها في المتراجحة $5x_1 + x_2 \geq 5$ نجد $0 \geq 5$ ومنه نجد أن الإحداثية $(0،0)$ لا تحقق المتراجحة ومن هنا يكون التشطيب في المنطقة التي لا تنتمي إليها الإحداثية $(0،0)$ والتي تقع على يمين هذا المستقيم كما هو موضح في الرسم.

أما بالنسبة للمستقيم الذي يمثل المعادلة $3x_1 + 4x_2 = 9$ كذلك نقوم بتشطيب ما تحققه الإحداثية $(0،0)$ التي نقوم بتعويضها في المتراجحة $3x_1 + 4x_2 \geq 9$ نجد أن $0 \geq 9$ فبالتالي الإحداثية لا تحقق المتراجحة ومن هنا يكون التشطيب في المنطقة التي لا تنتمي إليها الإحداثية $(0،0)$ والتي تقع على يمين هذا المستقيم كما هو موضح في الرسم.



حسب التمثيل البياني نجد أن منطقة الحلول الممكنة محددة في المستوي ABC المحدب ناحية المبدأ والمقعر من الأعلى حيث $A: (x_1 = 0, x_2 = 5)$، $C: (x_1 = 3, x_2 = 0)$

أما النقطة B هي نقطة تقاطع المستقيمين (القيدين) والتي يمكن إيجادها جبرياً كالآتي:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 5 \quad \dots (1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 9 \dots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة رقم (1) في (4-) نجد:

$$-20x_1 - 4x_2 = -20 \quad \dots (3)$$

بجمع المعادلة رقم (3) مع المعادلة رقم (2) نجد:

$$-20x_1 + 3x_1 - 4x_2 + 4x_2 = -20 + 9$$

$$-17x_1 = -11$$

$$x_1 = \frac{11}{17} = 0.64$$

بتعويض هذه القيمة في المعادلة رقم (1) نجد:

$$5\left(\frac{11}{17}\right) + x_2 = 5$$

$$x_2 = -\left(\frac{55}{17}\right) + 5$$

$$x_2 = \left(\frac{30}{17}\right) = 1.76$$

وبالتالي إحداثية النقطة B هي $B: (x_1 = \frac{11}{17}, x_2 = \frac{30}{17})$

وفي الأخير نقوم باختيار النقطة التي تحقق أدنى قيمة وذلك بتعويض جميع القيم في دالة الهدف.

النقاط	إحداثية النقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A: (x_1 = 0, x_2 = 5)$	$Z_A = 25$
B	$B: (x_1 = \frac{11}{17}, x_2 = \frac{30}{17})$	$Z_B = 12.64$
C	$C: (x_1 = 3, x_2 = 0)$	$Z_C = 18$

$$Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$Z = 6(0.64) + 5(1.57)$$

$$Z = 12.64$$

اختيار نقطة الحل الأمثل بيانياً:

نقطة الحل الأمثل بيانياً هي النقطة B حيث $x_1 = \frac{11}{17}, x_2 = \frac{30}{17}$ المحققة لأدنى قيمة ممكنة مقدارها $Min\ Z = 12.64$ بالمقارنة مع النقاط A وC.

ثانيا: خطوات إيجاد الحل الأمثل باستخدام مستقيم دالة الهدف.

يمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما تكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك يجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيماً على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، تكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الاقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة.[2]

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية من خلال المثال التالي:

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني.

$$Min\ Z = 0.75x_1 + 0.85x_2$$

$$S/t \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 70 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$X_J \geq 0$$

الحل:

1. نهيئ الإحداثيتين اللازمتين كما في الشكل البياني.
2. نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 100 \ldots (1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 70 \ldots (2) \\ 2x_1 + 8x_2 = 90 \ldots (3) \end{cases}$$

3. نرسم الخط المستقيم الذي يمثل كل معادلة وذلك بالاستعانة بجداول المساعدة.

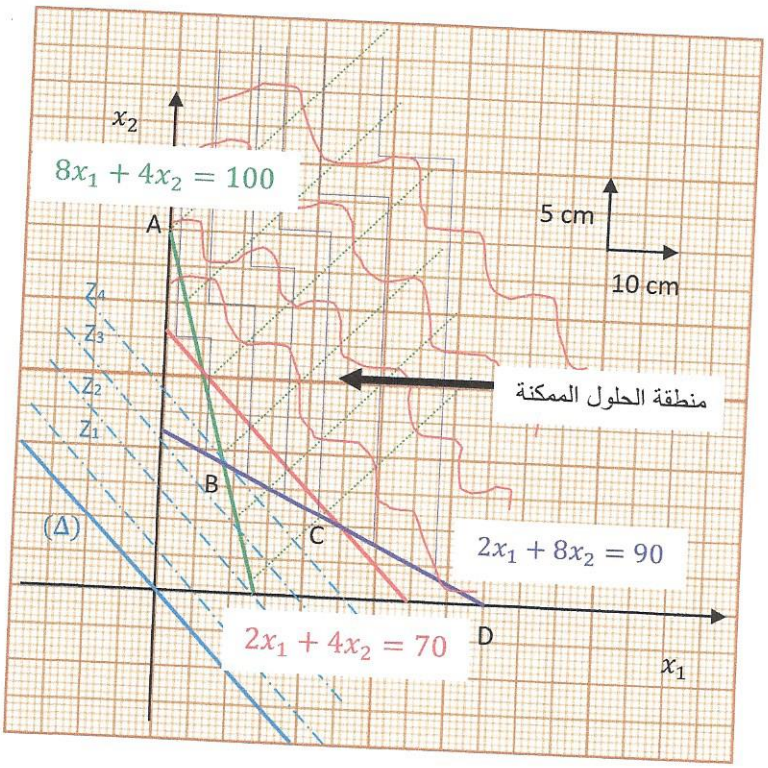
$8x_1 + 4x_2 = 100$	
x_1	x_2
0	25
12.25	0

$2x_1 + 4x_2 = 70$	
x_1	x_2
0	17.5
35	0

$2x_1 + 8x_2 = 90$	
x_1	x_2
0	11.25
45	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم عليه عند رسم الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي $Z=0$ أي المستقيم (Δ) مر من النقطتين.

$0.75x_1 + 0.85x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-2.64
-3.4	3



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل والتي يمكن تحديدها بالنقاط (ABCD)، عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصل إليها في منطقة الحلول الممكنة هي B والخط هنا هو Z_5 وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول ومستقيم القيد الثاني:

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 100 \dots (1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 70 \quad \dots (2) \end{cases}$$

نقوم بضرب المعادلة (1) في (1-) ونجمعها مع المعادلة (2) نجد:

$$8x_1 + 2x_1 - 4x_2 + 4x_2 = -100 + 70$$

$$-6x_1 = -30$$

$$x_1 = 5$$

ومنه

بتعويض قيمة $x_1 = 5$ في المعادلة رقم (1) نجد:

$$8(5) + 4x_2 = 100$$

$$4x_2 = 100 - 40$$

$$x_2 = \frac{60}{4} = 15$$

$$x_2 = 15$$

وبالتالي فإن: $B: (x_1 = 5, x_2 = 15)$

$$Min\ Z = 0.75(5) + 0.85(15) = 16.50$$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: $8(5) + 4(15) = 100$ (محققة تماماً)

القيد الثاني: $2(5) + 4(15) = 70$ (محققة تماماً)

القيد الثالث: $2(5) + 8(15) = 130 > 90$ (محقق).

ثالثاً: الحالات الخاصة في الحل البياني.

إن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة، حيث تتمثل الحالات الخاصة في الطريقة البيانية بما يلي:[3]

1) حالة تعدد الحلول المثلى؛
2) حالة تعذر الحل أو الاستحالة؛
3) حالة الدورانية؛
4) حالة القيد الفائض،
5) منطقة الحل الممكن غير محدودة.

1) **حالة تعدد الحلول المثلى**: وقوع الحل الأمثل على أكثر من نقطة، أي وجود عدة نقاط على منطقة الحل الممكن تتساوى في الأمثل، تحدث حالة تعدد الحلول المثلى في حالتي تعظيم الربح وتخفيض التكاليف، وتنتج حالة تعدد الحلول المثلى عن وجود قيد أو أكثر موازي تماماً لدالة الهدف.[4]

مثال تطبيقي: ليكن النموذج الخطي التالي:

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$X_J \geq 0$$

الحل:

نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلي:

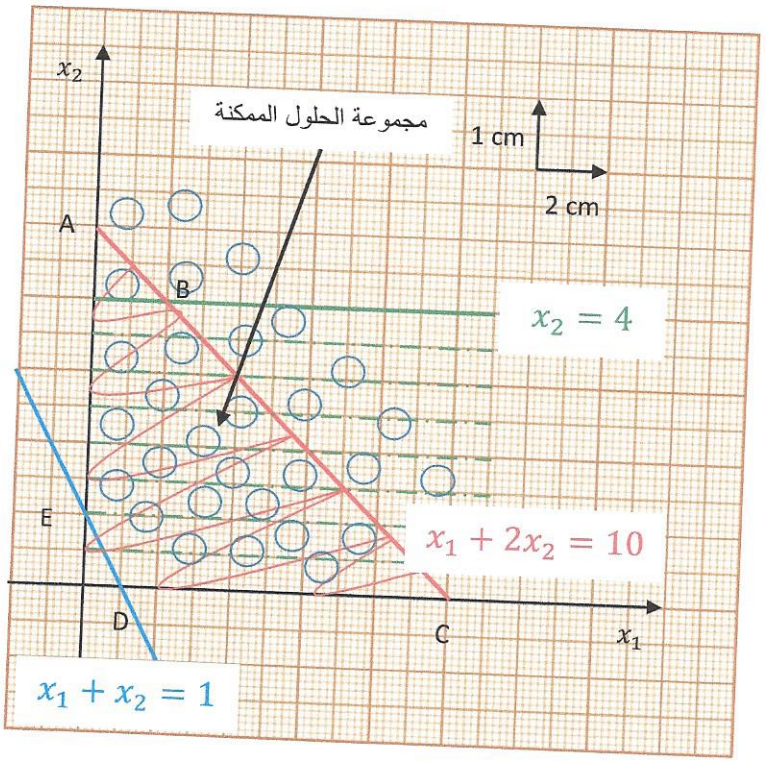
$$x_1 + 2x_2 = 10 \ldots (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \ldots (2)$$

$$x_2 = 4 \quad \ldots (3)$$

إعداد الجدول المساعد في الرسم البياني:

المعادلة	x_1	x_2
$x_1 + 2x_2 = 10$	0	5
	10	0
$x_1 + x_2 = 1$	0	1
	1	0
$x_2 = 4$	هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي	



نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة قد تحدد النقاط (ABCDE) حيث: A(0,4), C(10,0), D(1,0), E(0,1)، أما النقطة B هي نقطة تقاطع المستقيم القيد الأول والرابع:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \dots (1) \\ x_2 = 4 \quad \dots (4) \end{cases}$$

نعوض المعادلة (4) في المعادلة (1) نجد:

$$x_1 + 2(4) = 10$$

$$x_1 = 10 - 8 = 2$$

ومنه: $B: (x_1 = 2, x_2 = 4)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

النقاط	إحداثية النقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A: (x_1 = 0, x_2 = 4)$	$Z_A = 8$
B	$B: (x_1 = 2, x_2 = 4)$	$Z_B = 10$
C	$C: (x_1 = 10, x_2 = 0)$	$Z_C = 10$
D	$D: (x_1 = 1, x_2 = 0)$	$Z_D = 1$
E	$E: (x_1 = 0, x_2 = 1)$	$Z_E = 2$

من الجدول نجد أن النقطتين B وC تحقق لدالة الهدف أكبر قيمة والتي تساوي 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف موازية لأحد القيود الهيكلية.

2) حالة تعذر الحل أو الاستحالة:

نتحصل على هذه الحالة عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا وجد هذا حل أساسي ابتدائي مقبول بمعنى أن القيود الفنية لا تتقاطع في منطقة حل واحدة، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية.[5]

ولتوضيح هذه الحالة إليك المثال التالي:

$$Max\ Z = x_1 + x_2$$

$$S/t \begin{cases} {}^{3}/_{4}\, x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

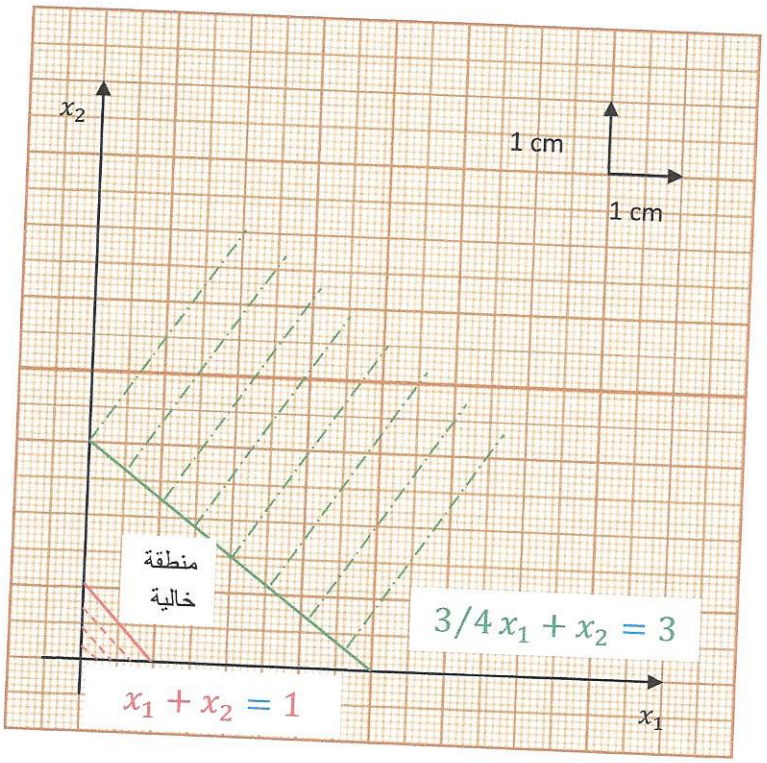
$$X_J \geq 0$$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الرسم البياني.

الحل:

على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينهما.

المعادلة	x_1	x_2
$3/4\,x_1 + x_2 = 3$	0	3
	4	0
$x_1 + x_2 = 1$	0	1
	1	0



من خلال الرسم نلاحظ أن المستقيمين لا يتقاطعان نهائياً أي لا يشتركان في منطقة واحدة، وبذلك لا نستطع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

3) حالة الدورانية:

تحدث هذه الحالة عند استخدام الطريقة البيانية وعند الوصول إلى الحل الأمثل نجد أن نقطة الحل الأمثل واقعة على أحد المحاور بمعنى إما أن تقع على محور الفواصل x_1 أو تقع على محور التراتيب x_2.

ولتوضيح هذه الحالة نستعين بالمثال التالي:[6]

$$max\ z = 10x_1 + 35x_2$$

$$s/t \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ 3x_1 + x_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

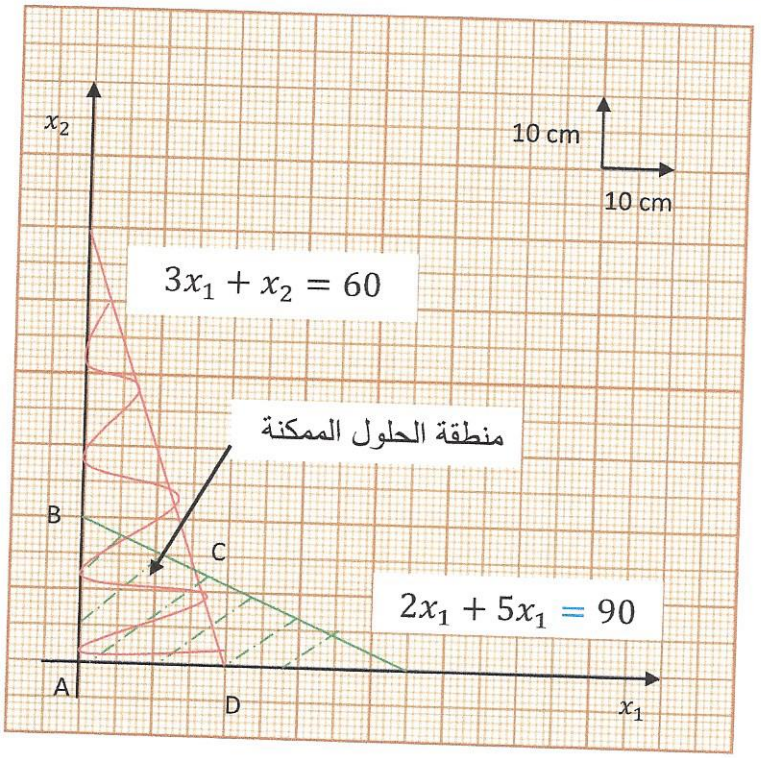
المطلوب:

حل النموذج باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

المعادلة	x_1	x_2
$2x_1 + 5x_2 = 90$	0	18
	45	0
$3x_1 + x_2 = 60$	0	60
	20	0



تتمثل منطقة الحلول الممكنة في المضلع (ABCD).

سنقوم بالبحث عن إحداثية النقطة التي تحقق الحل الأمثل وذلك حسب الجدول التالي:

النقاط	إحداثية النقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A\ (x_1 = 0, x_2 = 0)$	$z_a = 0$
B	$B\colon (x_1 = 0, x_2 = 18)$	$z_B = 360$
C	$C\colon (x_1 = 16.5, x_2 = 11.54)$	$z_C = 568.9$
D	$D\colon (x_1 = 20, x_2 = 0)$	$z_D = 200$

الإحداثية (C) هي نقطة تقاطع القيد الأول والثاني ويمكن حسابها جبرياً كالآتي وذلك بحل جملة معادلتين:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 90 \ldots (1) \\ 3x_1 + x_2 = 60 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في (5-) ونجمعها مع المعادلة (1) نجد:

$$2x_1 - 15x_1 + 5x_2 - 5x_2 = 90 - 300$$

$$-13x_1 = -210$$

$$x_1 = \frac{210}{13} = 16.15$$

بتعويض قيمة (x_1) في المعادلة (1) نجد:

$$2(16.15) + 5x_2 = 90$$

$$5x_2 = 90 - 32.3$$

$$x_2 = 11.54$$

من خلال الجدول نجد أن نقطة الحل الأمثل هي النقطة B، حيث تبلغ الأرباح على تلك النقطة 630 دينار، وبالتالي نلاحظ أن تلك النقطة تقع على محور التراتيب (x_2) وهذا ما يدل على وجود حالة دورانية في هذا المثال.

4) حالة القيد الفائض:

هذه الحالة تعد من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكبر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل الأهمية، وسنوضح الحالة القيد الفائض من خلال المثال الآتي:

$$maxz = x_1 + 5x_2$$

$$s/t \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x_1 \leq 21 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

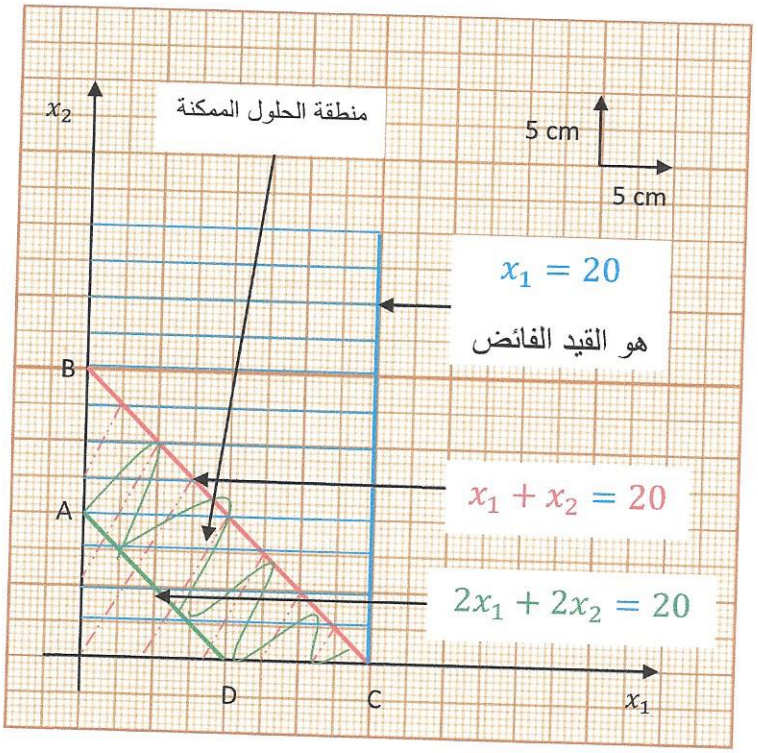
المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية وذلك باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما.

المعادلة	x_1	x_2
$x_1 + x_2 = 20$	0	20
	20	0
$2x_1 + 2x_2 = 20$	0	10
	10	0
$x_1 = 20$	خط مستقيم يوازي محور التراتيب	

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة.



من خلال هذا الشكل نجد أنه يوجد حالة القيد الفائض والمتمثلة في القيد الثالث وهذا لأن القيد الأول والثاني حددا منطقة الحل الممكن.

وسنقوم بالبحث إحداثية النقطة التي تحقق الحل الأمثل وذلك حسب الجدول الآتي:

النقاط	إحداثية النقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A: (X_1 = 0, x_2 = 10)$	$Z_A = 50$
B	$B: (X_1 = 0, x_2 = 20)$	$Z_B = 100$
C	$C: (X_1 = 20, x_2 = 0)$	$Z_C = 20$
D	$D: (X_1 = 10, x_2 = 0)$	$Z_D = 10$

من الجدول يتضح أن نقطة الحل الأمثل بيانياً هي النقطة B حيث تحقق أكبر ربح ممكن قدره 100 دينار.

5) منطقة الحل الممكن غير محدودة

يعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة للطريقة البيانية فهذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تتطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم.[7]

سنوضح هذه الحالة من خلال المثالي التالي:

مثال: لدينا المشكلة للبرمجة الخطية التالية:

$$MAXZ = 6X_1 + 10X_2$$

$$S/T \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 40 \\ 8x_1 + 4x_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

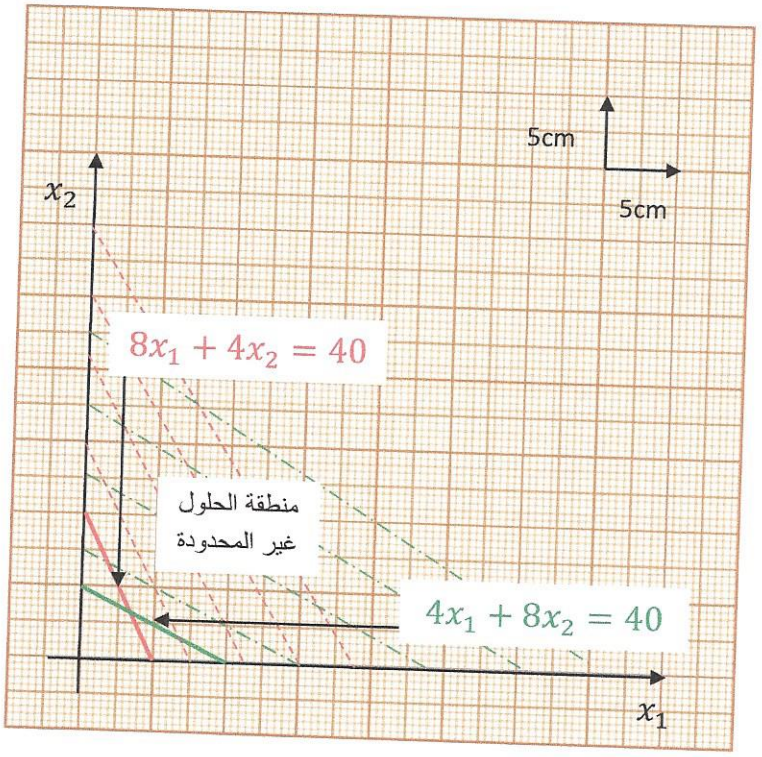
المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نل بينها.

المعادلة	x_1	x_2
$4x_1 + 8x_2 = 40$	0	5
	10	0
$8x_1 + 4x_2 = 40$	0	10
	5	0

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة.



نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة هي مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، لأن أي قيمة تنتمي إلى هذه المنطقة تحقق دالة الهدف ومنها نستطيع القول أن دالة الهدف لا نهائية.

رابعاً: سلسلة تمارين حول الحل البياني.

تمرن رقم 01: [8]

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

$$minz = 2x_1 + x_2$$

$$s/t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

الحل:

نستخرج المستقيمان وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلي:

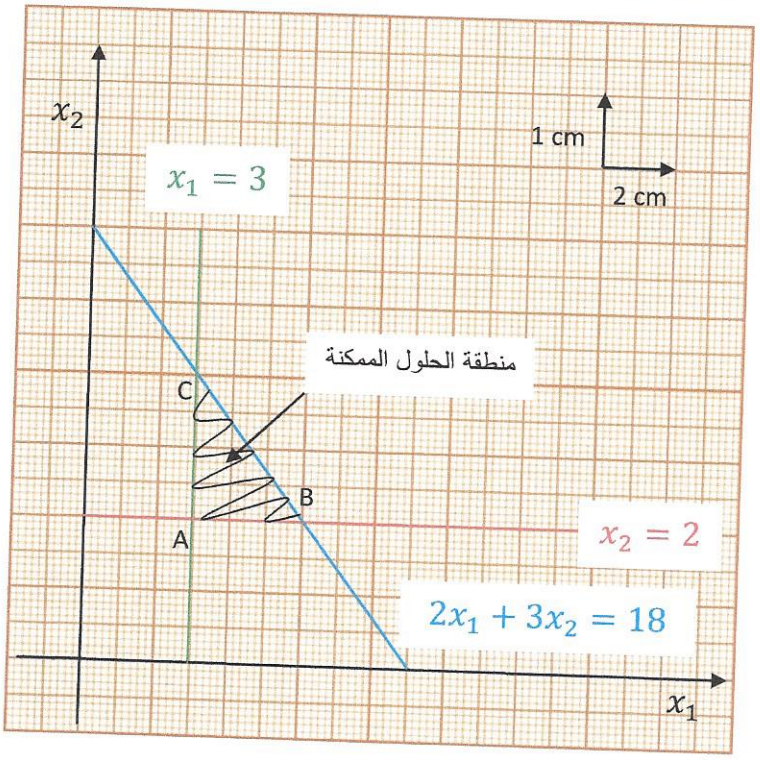
$$2x_1 + 3x_2 = 18 \dots (1)$$

$$x_1 = 3 \quad \dots (2)$$

$$x_2 = 2 \quad \dots (3)$$

إعداد الجدول المساعد في الرسم البياني:

المعادلة	x_1	x_2
$2x_1 + 3x_2 = 18$	0	6
	9	0
$x_1 = 3$	3	0
$x_2 = 2$	0	2



من الشكل البياني السابق، يتضح أن منطقة الحل الممكنة محدودة بالنقاط (A, B, C) إذن أن: A(3,2).

أما بالنسبة للنقطتين (B,C) نتبع ما يلي:

النقطة B هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني، أي أن:

$$2x_1 + 3x_2 = 18 \dots (1)$$

$$x_1 = 3 \qquad \dots (2)$$

نقوم بتعويض (2) في (1) نجد:

$$2(3) + 3x_2 = 18$$

$$3x_2 = 18 - 6$$

$$x_2 = 4$$

ومنه نجد أن: B(3,4).

النقطة C هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثالث، أي أن:

$$2x_1 + 3x_2 = 18 \dots (1)$$

$$x_2 = 2 \qquad \dots (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في (1) نجد:

$$2x_1 + 3(2) = 18$$

$$2x_1 = 18 - 6$$

$$x_1 = 6$$

ومنه نجد أن: $C(6,2)$.

بتعويض قيم الإحداثيات الثلاث في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل، كما يظهر في الجدول التالي:

النقاط	إحداثية النقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A: (x_1 = 3, x_2 = 2)$	$Z_A = 8$
B	$B: (x_1 = 3, x_2 = 4)$	$Z_B = 10$
C	$C: (x_1 = 6, x_2 = 2)$	$Z_C = 14$

عليه يكون الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية على النحو الآتي:

$$x_1 = 3، x_2 = 2$$

$$Min\ Z = 8$$

تمرين رقم 02:[9]

لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10x_1 + 15x_2$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

الحل:

نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلي:

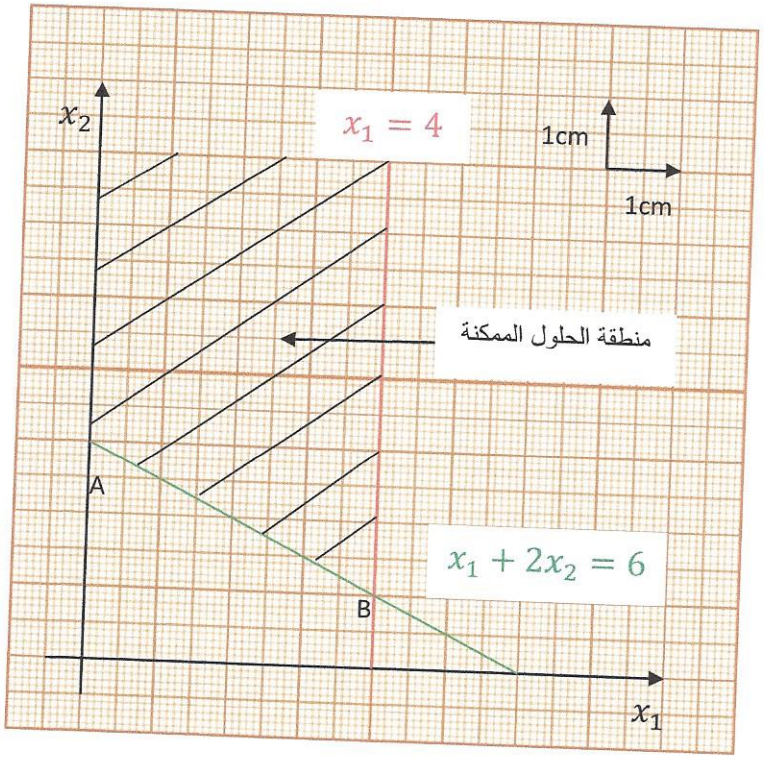
$$x_1 + 2x_2 = 6 \dots (1)$$

$$x_1 = 4 \quad \dots (2)$$

إعداد الجدول المساعد في الرسم البياني:

المعادلة	x_1	x_2
$x_1 + 2x_2 = 6$	0	3
	6	0
$x_1 = 4$	4	0

عليه يكون الشكل البياني كالآتي:



يتضح من خلال الشكل السابق أن منطقة الحلول الممكنة هي منطقة مفتوحة، إذ كلما نبتعد عن نقطة الأصل سنحصل على حل أعلى من سابقة مما سيؤدي إلى الحصول على حل غير محدود (حالة خاصة).

تمرين رقم 03:[10]

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$Max\ Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_2 \geq 8 \end{cases}$$

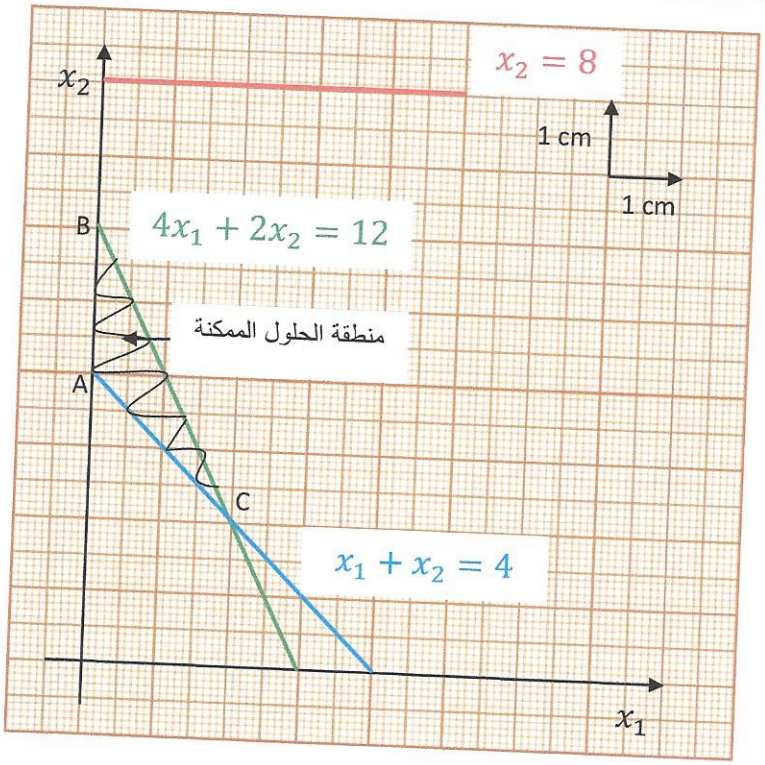
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

على معلم متعامد ومتجانس نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

المعادلة	x_1	x_2
$x_1 + x_2 = 4$	0	4
	4	0
$4x_1 + 2x_2 = 12$	0	6
	3	0
$x_2 = 8$	0	8



يتضح من الشكل البياني السابق أن منطقة الحلول الممكنة هي محدودة بالنقاط (A, B, C) والناتج من تقاطع القيدين الأول والثاني، في حين نلاحظ أن القيد الثالث ، يعد قيداً فائضاً وليس له تأثير على تحديد منطقة الحل الممكنة (A, B, C).

تمرين رقم 04:

$$Max\ Z = -5x_1 + 6x_2$$

$$S/t \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 04:

$$Max\ Z = \frac{46}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{17}{6} \end{cases}$$

تمرين رقم 05:

$$Max\ Z = 80x_1 + 50x_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1800 \\ x_1 \leq 400 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0، x_2 \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 05:

$$Max\ Z = 38750$$

$$\begin{cases} x_1 = 312.5 \\ x_2 = 275 \end{cases}$$

تمرين رقم 06:

$$Min\ Z = 2.5x_1 + 3x_2$$

$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 45 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 55 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0، x_2 \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 06:

$$Min\ Z = 27$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

تمرين رقم 07:

$$Min\ Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$S/t \begin{cases} 10x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 8x_1 + 9x_2 \geq 72 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0، x_2 \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 07:

(المسألة مستحيلة الحل)

تمرين رقم 08:

$$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$S/t \begin{cases} 5x_1 + x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0، x_2 \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 08:

(المسألة لها عدد مالا نهائي من الحلول المثالية).

الخلاصة

من خلال ماسبق يمكن استنتاج مايلي:

- توجد عدة خطوات لابد من إتباعها من أجل عملية الحل بالطريقة البيانية إذ لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي تتمثل في:

نقوم بتحويل كل متراجحات القيود إلي معادلات، نهيئ الإحداثيات اللازمة للمتغيرين ولتكن إحداهما المحور العمودي (x_2) والآخر المحور الأفقي (x_1)، التمثيل البياني للمعادلات على معلم متعامد ومتجانس، إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات الممثلة للقيود مع محوري الفواصل والتراتيب، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة، وإيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم x_1 و x_2 عند كل نقطة، نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف.

ثم نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (Z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization) أو النقطة التي قيمة (Z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تحقيق (Minimization).

- يمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما تكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك باستخدام مستقيم دالة الهدف.
- تتمثل الحالات الخاصة في الطريقة البيانية في: حالة تعدد الحلول المثلى، حالة تعذر الحل أو الاستحالة، حالة الدورانية، حالة القيد الفائض، منطقة الحل الممكن غير محدودة.

تهميشات المحور الثالث:

[1] سهيلة عبد الله سعيد،الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة01، دار حامد ، الأردن، 2007، ص38.

[2] محمد راتول، بحوث العمليات، الطبعة 02، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006،

[3] علي علاونة ومحمد عبيدات، الأساليب الكمية في اتخاذ القرار، الطبعة 01، مركز يزيد للنشر، المملكة الأردنية الهاشمية، 2006، ص186.

[4] نفس المرجع السابق، ص 187.

[5] Gérald Baillargeon, Programmation linéaire appliqué, les éditions SMG, Québec, Canada, 1996, p 55.

[6] علي علاونة ومحمد عبيدات، مرجع سابق، ص ص 1888-189.

[7] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سيق ذكره، ص 52.

[8] حسن ياسين طعمة، مروان محمد السنور، مرجع سبق ذكره، ص 69، 70، 71.

[9] حسن ياسين طعمة، مروان محمد النسور، مرجع سبق ذكره، ص 79،80.

[10] حسن ياسين طعمة، مروان محمد النسور، مرجع سبق ذكره، ص 85.

المحور الرابع

طريقة الحل المبسطة

تمهيد:

تعرفنا في المحور الثاني السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها منظمات الأعمال تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار، لذلك لابد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل من طريقة الحل البياني، وهي طريقة الحل المبسطة التي تعتبر من أهم الطرق المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية المعقدة والتي تحتوي على أكثر من متغيرين وتمتاز هذه الطريقة بالدقة العالية، وبأنها تتضمن مجموعة من المراحل التي من خلالها يتحسن الحل الأولي وصولاً إلى الحل الأمثل.[1]

أولاً: الصيغة القياسية standard form

إن التعامل مع المعادلات أفضل بكثير من التعامل مع علاقات اللامساواة (المتباينات) لذلك فإن الخطوة الأولى في طريقة السمبلكس تحويل القيود من متباينات إلى قيود مساواة مكافئة وهذا ما يدعى بالصيغة القياسية، هذه الأخيرة في مسائل البرمجة الخطية متكونة من m قيود وn متغيرات القرار[2]، تكون بالصورة الآتية:

1- حل النماذج الخطية من الشكل:

$$(opt)Z = \sum_{J=1}^{n} c_J x_J$$

$$\text{s/t} \qquad (opt)Z = \sum_{J=1}^{n} ai_J x_J \leq bi$$

$$, \quad bi \geq 0 x_J \geq 0$$

$$i = 1,2, \ldots . m$$

حيث أن:[3]

x_J: متغيرات القرار لنموذج البرمجة الخطية والتي تمثل الفعاليات.

c_J، bi، ai_J: معاملات النموذج حيث: (c_J) تمثل ربح أو كلفة الوحدة الواحدة من الفعاليات، و(bi) تمثل كمية الموارد المتوفرة أما (ai_J) تمثل مقدار ما تتطلبه الفعالية الواحدة (x_J) من الموارد (bi).

من أجل أي نموذج خطي الذي تكون كل قيوده الفنية من الشكل أصغر أو تساوي $(\geq)$ يجب اتباع الخطوات التالية:

الخطوة 01:

استعمال طريقة simplex يتطلب تحويل القيود الفنية $(\geq)$ إلى الصيغة $(=)$، ولتحويل أي نموذج خطي نفرض متغيرات جديدة، نسميها متغيرات الفرق "slack variable" ونرمز لها بالرمز (Si) أو يطلق عليها اسم المتغيرات المكملة.

فإذا كان الطرف الأيسر من القيد الفني أصغر أو يساوي الطرف الأيمن (bi) أي:

$$\sum ai_J x_J \leq bi \longrightarrow \sum ai_J x_J + S_i = bi$$

فمثلاً لو كان لدي: $6 \leq 4$ نجعل هذه المساواة تحتاج إلى إضافة العدد 2 للطرف الأيسر أي:

$$4 + 2 = 6.$$

وهذا يمكن توضيحه على الصيغة العامة للنموذج الخطي كما يلي:[4]

$$(opt)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + \cdots c_nx_n + 0S_1 + 0S_{2+} \ldots + 0S_m$$

$$\text{S/t}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + S_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + S_m = b_m \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad bi \geq 0, \qquad S_i \geq 0$$

حيث: J=1,…,n ،i=1,…,m

متغيرات الفرق (S_i) هي تمثل المواد العاطلة، أي المواد التي لم أو لازالت لم تستعمل بعد.

نلاحظ حسب الشكل السابق أننا قد قمنا بإضافة متغيرات الفرق (S_i) إلى دالة الهدف بمعاملات صفرية لأن دالة الهدف هي معادلة وليست متباينة.

الخطوة 02: هي تمثيل كل المعلومات الخاصة بالنموذج الخطي في الجدول التالي:[5]

		دالة الهدف	المتغيرات الأساسية (متغيرات القرار)	متغيرات الفرق	
		متغيرات دالة الهدف	$x_1، x_2، \dots، x_n$	$S_1، S_1، \dots، S_m$	الحل
		معاملات متغيرات دالة الهدف	$-c_1، -c_2، \dots، -c_n$	$0، 0، \dots، 0$	0
		معاملات قاعدة الحل			
S_1	معاملات		$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$	$1,0, \dots,0$	b_1
S_2	متغيرات		$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$	$0,1, \dots,0$	b_2
....	القيود الفنية		.....	.....	....
S_m			$a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$	$0,0, \dots,1$	b_m

ملاحظة: في هذا الجدول معاملات دالة الهدف تؤخذ سالبة $-c_1، -c_2، \dots، -c_n$ لتساعدنا فيما بعد على تتبع الحل الأمثل للنموذج الخطي.

الخطوة الثالثة: تتمثل في شروط قبول الحل الابتدائي

- أن تكون دالة الهدف عند مستوى صفر بمعنى هي قيمة تتناسب مع مرحلة ما قبل أن تبدأ المؤسسة نشاطها أي:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + \cdots c_nx_n + 0S_1 + 0S_{2+} \dots + 0S_m = 0$$

- أن تكون معاملات متغيرات الحل الابتدائي $(S_1, S_2, \dots, S_m)$ أحادية موجبة من القيود الفنية، بمعنى أن تكون المعاملات فيما بينها مصفوفة الوحدة أي:

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

باعتبار أن مؤشرات النشاط $(X_J = 0)$ فيصبح النموذج السابق كالتالي:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0,\dots,0 \\ 0,1,\dots,0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 0,0,\dots,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

أي: $(S_1 = b_1)$، $(S_2 = b_2)$، ..... ، $(S_m = b_m)$

بتوفر الشرطين السابقين يصبح الحل الابتدائي مقبولاً.

الخطوة الرابعة: تتمثل هذه الخطوة في البحث عن الحل الأمثل ولتوضيح هذه الخطوة نستعين بالمثال التطبيقي والذي سنتطرق إليه فيما بعد بالتفصيل.

2- حل النماذج الخطية من الشكل:

$$(opt)Z = \sum_{J=1}^{n} c_J x_J$$

$$\text{s/t} \quad \sum_{J=1}^{n} ai_J x_J \ (\leq), (\geq), (=) bi$$

$$, \ bi \geq 0 x_J \geq 0$$

$$i = 1,2,\dots.m$$

عند بداية البحث عن الحل الابتدائي الذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط، في حالة إذا كانت القيود الفنية $(\geq)$، لاحظنا أن Si متغيرات الفرق هي نفسها تكون عناصر الحل الابتدائي على أساس أن متغيرات القرار (x_J) تساوي الصفر.

أما الآن فلدينا قيود فنية على شكل $(=), (\leq)$ ولتحويلها إلى معادلات نتبع الخطوات التالية:

الخطوة 01:

استعمال طريقة Simplex يتطلب تحويل القيود الفنية من $(\leq)$ و $(=)$ إلى الصيغة $(=)$.

في حالة $(\leq)$ يجب أن نطرح من طرفها الأيسر متغيرات الفرق Si

أما في حالة $(=)$ لا نضيف منها أو نطرح منها أي شيء وبالتالي يكون معامل هذه المتغيرات في القيود الفنية أحادي سالب أو صفر أي:

$$\sum ai_J x_J \geq bi \rightarrow \sum ai_J x_J - S_i = bi$$

فمثلا لو كان: $6 \geq 4$

لكي تصبح هذه مساواة نقوم بطرح (2) من الطرف الأيسر ليصبح 6-2=4

4=4

فإذا أردنا أن نبحث عن الحل الابتدائي الذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط وفيه نجعل مؤشرات القرار تساوي الصفر، نلاحظ أن الحل القاعدي (الابتدائي) هنا أيضا يتكون من متغيرات الفرق (S_i)، إلا أن عناصر هذا الحل في هذه الحالة لا تتوفر فيها شروط القبول، لأن هذه المتغيرات الفرق لا تشكل مصفوفة الوحدة، في هذه الحالة لا نستطيع البحث عن حل أمثل، هذا راجع لأن الحلال ابتدائي غير مقبول.

للتخلص من هذه المشكلة وبالتالي الحصول على الحل ابتدائي مقبول، نلجأ إلى استعمال نوع جديد من المتغيرات التي نسميها المتغيرات الاصطناعية، التي نرمز لها بالرمز (R_i)، حيث نقوم بإضافتها إلى الطرف الأيسر من القيد الفني، في هذه الحالة نتحصل على حل ابتدائي مقبول.

ملاحظة: تعتبر هذه المتغيرات الاصطناعية وهمية لا وجود لها في الواقع نستعملها فقط من أجل حل النموذج ثم نتخلص منها عند نهاية الحل.[6]

أما فيما يخص دالة الهدف، فإذا كنا في حالة Max (تعظيم) نقوم بطرحها بكميات كبيرة (m)، أما إذا كنا في حالة Min (تدنية) نقوم بإضافتها بمعاملات كبيرة (m)، حيث هذا m هي كمية موجبة كبيرة جداً تقترب من ما لانهاية.

وهذا يمكن توضيحه على الصيغة العامة للنموذج الخطي كما يلي:

$$(opt)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$S/t\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0,$$

تحويل إلى

$$(opt)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/t\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - S_2 + R_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + 0S_3 + R_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad bi \geq 0, \qquad S_i \geq 0$$

الخطوة الثانية: هي تمثيل كل المعلومات الخاصة بالنموذج الخطي في جدول، مع ضرب جميع معاملات دالة الهدف في (-1).

الخطوة الثالثة: كذلك تتمثل في شروط قبول الحل الابتدائي كما رأينا سابقاً.

الخطوة الرابعة: تتمثل في البحث عن الحل الأمثل ولتوضيح هذه الخطوة لنستعين بالمثال التطبيقي والذي سنتطرق إليه فيما بعد بالتفصيل.

ثانياً: خطوات الحل باستخدام طريقة Simplex حالة التعظيم.

مثال تطبيقي: ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 6x_2$$

$$S/t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

لحل هذا البرنامج الخطي نتبع الخطوات التالية:

- تحويل القيود الفنية من متباينات إلى معادلات وذلك بإضافة (S_1) للقيد الأول، وإضافة (S_2) للقيد الثاني، أما بالنسبة لدالة الهدف نقوم بإضافة S_1 و S_2 بمعاملات صفرية كما يلي:

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + S_1 = 30 \\ 5x_1 + 4x_2 + S_2 = 60 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0\ (S_1, S_2) \geq 0$$

- نقوم الآن بتكوين جدول الحل الابتدائي:

متغيرات Z		x_1 x_2	S_1 S_2	Sol
معاملات Z		-5 -6	0 0	0
متغيرات الحل الابتدائي				
S_1	معاملات متغيرات	2 3	1 0	30
S_2	القيود الفنية	5 4	0 1	60

- البحث عن الحل الابتدائي: نعلم أن الحل الابتدائي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط، أي المرحلة التي لم تبدأ المؤسسة فيها النشاط بعد.

كما ذكرنا سابقاً لابد من تحقق شرطين لكي يكون الحل الابتدائي مقبولا وحسب مثالنا هذا نجد أن:

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

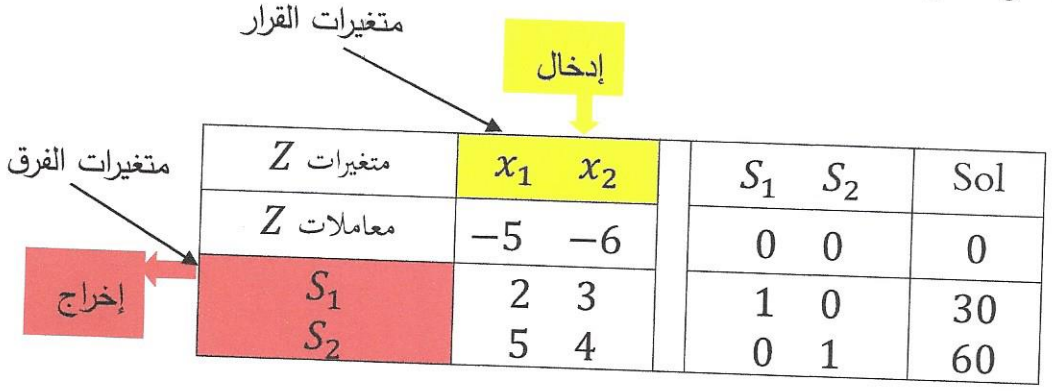
و:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix}$$

أي: $(S_1 = 30)$ و $(S_2 = 60)$

بهذا يكون الشرطين محققين يعني أن الحل الابتدائي مقبول.

- البحث عن الحل الأمثل:



متغيرات Z	x_1	x_2	S_1	S_2	Sol
معاملات Z	-5	-6	0	0	0
S_1	2	3	1	0	30
S_2	5	4	0	1	60

بعد ضرب معاملات دالة الهدف في (-1)

- نعين متغير القرار الذي ندخله إلى قاعدة الحل (الذي يكون معامله يساوي أصغر قيمة سالبة لأننا في حالة (Max) في هذا المثال x_2 يمثل معامله (-6) وهو أصغر قيمة سالبة.
- إن إدخال x_2 إلى قاعدة الحل يتطلب علينا إخراج أحد متغيرات الحل الابتدائي من قاعدة الحل حسب القاعدة التالية، وذلك بقسمة bi على معاملات x_2 (a_{12}, a_{22}) ثم نختار أقل قيمة غير سالبة أي:

$\min(bi/ai_J)$ بحيث أن تتحقق الشروط $bi \geq 0$، $ai_J > 0$

في مثالنا هذا:

$30/3=10$ ⟵ هذه تمثل S_1

$60/4=15$ ⟵ هذه تمثل S_2

أما متغير الفرق الذي سيحل مكانة (x_2) هو S_1

- دخول (x_2) إلى قاعدة الحل في مكان S_1 يعني أن هذا المتغير (x_2) يجب أن يشكل مصفوفة مع بقية المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل وهي S_1 ولتحقيق ذلك نحول معاملات (x_2) إلى قيم معاملات S_1 حيث:

x_2	-6	3	4
S_1	0	1	0

نبدأ التحويل من الصف المحوري، والصف المحوري في هذه الحالة هو ذلك الصف الذي يدخل فيه x_2 وهو الصف الأول وذلك بتحويل (3) إلى (1) وبالتالي نقسم الصف على العدد (3) نجد:

S_1	2	3	1	0	30
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10

الصف المحوري

ننتقل الآن إلى الصف الثاني وهو الصف الذي يوجد فيه المتغير (S_2) ونحول فيه المعامل (x_2):(4) إلى معامل (S_1): هو (0)

هذه العملية يجب أن تتم عبر الصف المحوري، فيجب أن نضرب الصف المحوري في (−4) ونجمعها مع السطر (S_2) ونحصل على:

$-4x_2$	$-\frac{8}{3}$	-4	$-\frac{4}{3}$	0	-40
S_2	5	4	0	1	60
=	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20

أما بالنسبة إلى صف المعاملات دالة الهدف لابد من تحويل معامل (x_2) الذي هو (−6) يصبح (0).

هذه العملية يجب أن تتم عبر الصف المحوري، فيجب أن نضرب الصف المحوري في (6) ونجمعها مع السطر (المعاملات Z) نحصل على:

$(6)x_2$	4	6	2	0	60
(Z) المعاملات	-5	-6	0	0	0
=	-1	0	2	0	60

يصبح لدينا الجدول التالي:

متغيرات القرار

متغيرات الفرق

متغيرات Z	x_1	x_2	S_1	S_2	Sol
معاملات Z	-1	0	2	0	60
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
S_2	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20

هذا الجدول نسميه المحاولة الأولى التي تمثلت بإدخال (x_2) إلى قاعدة الحل، نلاحظ أنه إدخال (x_2) ساهم في تحسين قيمة دالة الهدف، التي انتقلت قيمتها من 0 إلى (60 و.ن)

$$Max\ (Z) = 5(0) + 6(10) = 60$$

لم نصل إلى الحل الأمثل لأنه مازالت توجد قيمة سالبة التي تتمثل في معامل x_1

بمعنى إذا كنا في حالة تعظيم دالة الهدف (Max) حتى نعرف أننا وصلنا إلى الحل الأمثل يجب أن تكون جميع معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية نواصل الحل.

وذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة نتحصل على الجدول التالي:

متغيرات Z	x_1	x_2	S_1	S_2	Sol
معاملات Z	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{480}{7}$
x_2	0	1	$\frac{15}{21}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{90}{21}$
x_1	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{60}{7}$

عند إدخال (x_1) إلى قاعدة الحل أدى إلى تحسين دالة الهدف من (60) إلى $\left(\frac{480}{7}\right.$ و.ن$)$، وبهذا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل (وهذا لأن جميع معاملات دالة الهدف موجبة وصفرية) وبالتالي:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{60}{7} \\ x_2 = \frac{90}{21} = \frac{30}{7} \end{cases}$$

$$Max\ (Z) = 5\left(\frac{60}{7}\right) + 6\left(\frac{30}{7}\right) = \frac{480}{7}$$

ثالثاً: خطوات الحل باستخدام طريقة Simplex حالة التدنية.

مثال تطبيقي: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ (Z) = 3x_1 + x_2 + 5x_3$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

لحل هذا النموذج الخطي بواسطة طريقة Simplex لابد من تحويل القيود الفنية إلى شكل معادلات، أي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases} \quad x_J \geq 0$$

تحويل إلى

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - S_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0S_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 \end{cases} \quad , \quad S_i \geq 0 \quad x_J \geq 0$$

عند البحث عن الحل الابتدائي، بافتراض أن متغيرات القرار (x_J) تساوي الصفر، نلاحظ أن هذا الحل يتكون من متغيرات الفرق (S_1) الذي معامله يساوي (-1)، و (S_2) الذي معامله يساوي (0)، و(S_3) الذي معامله يساوي $(+1)$.

هذه المعاملات ليست كلها أحادية موجبة، فبالتالي لا تشكل مصفوفة الوحدة فيما بينها، نستنتج هنا أن متغيرات الفرق لا تشكل حلاً ابتدائيا مقبولا، ولتجاوز هذه المشكلة وتكوين حل ابتدائي مقبولاً، نفترض المتغيرات الاصطناعية (R_1, R_2) ونضيفها إلى القيد الفني الأول والثاني فتصبح هذه القيود من الشكل التالي:

$$x_1 + 2x_3 - S_1 + R_1 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 0S_2 + R_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$$

$$x_J \geq 0, S_i \geq 0, R_i \geq 0$$

هذا الحل الابتدائي الجديد يتوفر فيه الآن شرط القبول الأول وهو أن معاملاته في القيود الفنية هي أحادية موجبة، أي:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أي: $(R_1 = 2)$، $(R_2 = 1)$، $(S_3 = 3)$

أما بالنسبة إلى دالة الهدف، سنقوم بإضافة متغيرات الفرق بمعاملات صفرية، أما المتغيرات الاصطناعية يتطلب إضافتها بمعاملات موجبة كبيرة (m) فتصبح دالة الهدف كالتالي:

$$Min\ (Z) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 0S_1 + 0S_2 + mR_1 + mR_2$$

وتصبح متغيرات الحل الابتدائي هي: (R_1, R_2, S_3).

والجدول التالي يمثل الحل الابتدائي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1		R_1	R_2	S_3	Sol
Z	-3	-1	-5	0		$-m$	$-m$	0	$-3m$
R_1	1	0	2	-1		1	0	0	2
R_2	1	1	1	0		0	1	0	1
S_3	1	2	0	0		0	0	1	3

ولكن نحن نعرف كذلك أنه لابد من تحقق الشرط الأول والذي يتمثل في حالة الهدف $Z = 0$، لأننا نفترض أن كل متغيرات القرار $(x_J) = 0$ ومعاملات الفرق في دالة الهدف تساوي الصفر.

ولكن نلاحظ أن معاملات المتغيرات الاصطناعية هي $(-)$ وبالتالي فإن دالة الهدف تساوي $(-3m)$ وليس صفر. فبالتالي هذا الجدول لا يعتبر حل ابتدائياً مقبولاً.

ولجعل دالة الهدف تساوي صفر يجب التخلص من هذه القيم غير الصفرية لمعاملات (R_1, R_2) في دالة الهدف وهي $(-m)$ وذلك بجمعها مع معكوسها، فنضرب قيم الصف الثالث الذي يوجد به (R_1) كله في معكوس معامله وهو (m) ونجمعه مع قيم الصف العلوي (صف معاملات دالة الهدف)، ثم نضرب قيم الصف الرابع الذي يوجد به (R_2) كله في معكوس معامله ونجمعه مع الصف العلوي، فتصبح قيم معاملات (R_1, R_2) في دالة الهدف تساوي الصفر، وبالتالي تصبح دالة الهدف=0 كما هو موضح في الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R_2	S_3	Sol
Z	-3 $+2m$	-1 $+m$	-5 $+3m$	0 $-m$	$-m$ $+m$	$-m$ $+m$	0 0	$-3m$ $+3m$
R_1	1	0	2	-1	1	0	0	2
R_2	1	1	1	0	0	1	0	1
S_3	1	2	0	0	0	0	1	3

وبالتالي يعتبر هذا الجدول للحل الابتدائي مقبولاً.

- نبحث الآن عن الحل الأمثل حسب هذا الجدول الحل الابتدائي متغير القرار (x_3) هو الذي ندخله إلى قاعدة الحل لأن معامله هو عبارة عن أكبر قيمة موجبة $-5 + 3m$ على أساس أن m هي قيمة موجبة كبيرة جداً.
- ولمعرفة المتغير الذي نخرجه من متغيرات الحل الابتدائي نحسب النسب غير السالبة المحددة، فيخرج (R_1) ليترك مكانه لـ (x_3).
- دخول (x_3) إلى قاعدة الحل مكان (R_1) يعني أن هذا المتغير يلزم أن يشكل مصفوفة وحدة مع متغيرات الحل القاعدي الأخرى (S_3, R_1) ولتحقيق ذلك نجري العمليات التالية:

نبدأ التحويل من الصف المحوري، والصف المحور في هذه الحالة هو ذلك الصف الذي يدخل فيه (x_3) وهو الصف الأول وذلك بتحويل (2) إلى (1) وبالتالي نقم الصف على العدد (2) نجد:

R_1	1	0	2	-1	1	0	0	2
x_3	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1

ننتقل الآن إلى الصف الثاني وهو الصف الذي يوجد فيه المتغير(R_2) ونحول فيه المعامل (x_3):1 إلى معامل R_1: هو (0).

هذه العملية يجب أن تتم عبر الصف المحوري، فيجب أن نضرب الصف المحوري في (-1) ونجمعها مع السطر (R_2) ونحصل على:

$x_3(-1)$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1
R_2	1	1	1	0	0	1	0	1
=	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0

ننتقل الآن إلى الصف الثالث وهو الصف الذي يوجد فيه المتغير (S_3) ونحول فيه المعامل (x_3): 0 إلى معامل R_1 هو (0)، وبالتالي يبقى كما هو.

- ننتقل الآن إلى صف معاملات دالة الهدف، نحول معامل (x_3): $(-5+3m)$ إلى معامل R_1 هو (0).
- هذه العملية يجب أن تتم عبر الصف المحوري، فيجب أن نضرب الصف المحوري في $(3-5)$ ونجمعها مع السطر (معاملات m) ونحصل على:

$X_3(5-3m)$	$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}m$	0	$5-3m$	$\frac{-5}{2}+\frac{3}{2}m$	$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}m$	0	0	$5-3m$
z	$-3+2m$	$-1+m$	$-5+3m$	$-m$	0	0	0	0
=	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m$	$-1+m$	0	$\frac{-5}{2}+\frac{1}{2}m$	$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}m$	0	0	$5-3m$

يصبح لدينا الجدول التالي:

z	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R_2	S_3	Sol
z	$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\right)$	$(-1+m)$	0	$\left(\frac{-5}{2}+\frac{1}{2}m\right)$	$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}m\right)$	0	0	$+5-3m$
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
R_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	0	0
S_3	1	2	0	0	0	0	1	3

هذا الجدول نسميه جدول المحاولة الأولى التي تمثلت بإدخال x_3 إلى قاعدة الحل، نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت (انخفضت).

لم نصل إلى الحل الأمثل، نظراً لأن معاملات دالة الهدف توجد فيها قيم موجبة، أكبر هذه القيم هي معامل $(-1+m)=(x_2)$ فبالتالي يدخل إلى قاعدة الحل، ويخرج (R_2).

نتبع نفس الخطوات السابقة، نتحصل على الجدول التالي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	-2	$(2-m)$	$(1-m)$	0	$5-3m$
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
S_3	0	0	0	-1	1	-2	1	3

بهذا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وذلك لاختفاء القيم الموجبة من السطر العلوي الثاني وتكون قيمة $min\ (z)=5$ بالتخلي عن القيمة $(-3m)$وهي معامل المتغير الاصطناعي التي التي نهملها بعد الوصول إلى الحل الأمثل.

وقيم عناصر الحل الأمثل: $(x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=1$ (

رابعاً: الحالات الخاصة لطريقة Simplex

إن مشكلات البرمجة الخطية عامة ويمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، ولكن هناك بعض الحالات الخاصة يجب مراعاتها ومن هذه الحالات:

1. عدم وجود حل ملائم No existing or infeasible solution
2. حالة وجود حل أمثل لا نهائي
3. تعدد الحلول المثلى
4. حالة تساوي بعض قيم معاملات دالة الهدف
5. حالة الدوران.

1- عدم وجود حل ملائم No existing or infeasible solution

تحدث هذه الحالة في المسائل التي قيودها لا تحدد منطقة الحل موحدة أي عدم تشارك القيود في الحل وهذا سبب في أن يكون مجال الحل فارغ ولا يمكن الوصول الى حل ملائم لمثل هذه النماذج الرياضية.[7] أي منطقة الحلول الممكنة في هذه الحالة $= \emptyset$ وفي مثل هذه الحالات، إذا كان متغير اصطناعي أو أكثر (R_i) موجوداً من ضمن متغيرات الحل النهائي (في قاعدة الحل لجدول الحل الأمثل)، فهذا يدلنا على أن هذا النموذج الخطي ليس له حل أمثل ممكن.[8]

مثال: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة Simplex:[9]

$$Max\ (Z) = 3x_1 + 2x_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

$$Max\ (Z) = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 - mR_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + S_1 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - S_2 + R_2 = 12 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad S_i \geq 0, \quad R_i \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

Z	x_1	x_2	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	-3 $-3m$	-2 $-4m$	0 $+m$	0	$+m$ $-m$	0
S_1	2	1	0	1	0	2
R_2	3	4	-1	0	1	12

البحث عن الحل الأمثل

Z	x_1	x_2	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	$1+5m$	-2	0	$2+4m$	0	4 $+8m$
x_2	2	1	0	1	0	2
R_2	-5	0	-1	-4	1	4

نلاحظ أن جميع معاملات دالة الهدف موجبة فإن هذا الجدول هو الحل الأمثل، ولكن عندما ننظر إلى عناصر قاعدة الحل الأمثل سنجد أن من بينها يوجد متغير اصطناعي (R_2)، هذا يدل على أن هذا النموذج الخطي ليس له حل أمثل $(Max\ (Z) = \emptyset)$.

2- حالة وجود حل أمثل لانهائي Cas de solution optimale sans borne($opt\ (Z) = \infty$)

إذا لاحظنا في أي مرحلة من مراحل الحل بواسطة طريقة Simplex أن عمود معاملات المتغير الذي يجب أن يدخل إلى قاعدة الحل أصبحت كلها سالبة $a_{iJ} < 0$، أو غير محدودة فهذا يعني أن الحل الأمثل غير محدود،[10] أي $(opt\ (Z) = \infty)$.

مثال: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة Simplex:[11]

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 15x_2$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 15x_2 + 0S_1 + 0S_2 - mR_1 - mR_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 6 \\ x_1 - S_2 + R_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad S_i \geq 0, \quad R_i \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
	Z	-10 $-2m$	-15 $-2m$	0 $+m$	0 $+m$	$+m$ $-m$	$+m$ $-m$	$+10m$ $-10m$
←	R_1	1	2	-1	0	1	0	6
	R_2	1	0	0	-1	0	1	4

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
	Z	$-\frac{5}{2}-m$	0	$-\frac{15}{2}$	$+m$	$\left(\frac{15}{2}+m\right)$	0	$30+6m$
⬅	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	R_2	1	0	0	-1	0	1	4

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	0	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\left(\frac{15}{2}+m\right)$	$\left(\frac{5}{2}+m\right)$	$40+10m$
R_1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
R_2	1	0	0	-1	0	1	4

لم نصل إلى الحل الأمثل بعد، والمتغير الذي يجب أن يدخل الآن إلى قاعدة الحل هو S_1، ولكن نلاحظ أن معاملات هذا المتغير في القيود الفنية في $\left(0 \quad -\frac{1}{2}\right)$، وبالتالي فهذا يدل على أن لهذا النموذج الخطي حلولاً مثلى لا نهائية: أي $(Max\ (Z)=\infty)$.

3- تعدد الحلول المثلى

تعدد الحلول المثلى أو وجود أكثر من حل أمثل بديل يمكن معرفتها عندما نستخدم الطريقة المبسطة (Simplex) وذلك عن طريق إلقاء نظرة عن الجدول النهائي، فإذا كانت قيم المتغيرات القرار في صف معاملات دالة الهدف تساوي الصفر رغم وجودها في مزيج الحل فهذا يعني وجود أكثر من حل أمثل بديل.[12]

ولتوضيح أكثر نستعين بالمثال التالي:

مثال: حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستعمال الطريقة المبسطة:[13]

$$Max\ (Z) = -x_1 + 2x_2$$

$$S/t \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

$$Max\ (Z) = -x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + S_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + S_2 = 4 \\ x_1 + S_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad S_i \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	+1	−2	0	0	0	0
S_1	−1	1	1	0	0	1
S_2	−1	2	0	1	0	4
S_3	1	0	0	0	1	6

جدول المحاولة رقم 01:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	−1	0	2	0	0	2
x_2	−1	1	1	0	0	1
S_2	+1	0	−2	1	0	2
S_3	1	0	0	0	1	6

جدول المحاولة رقم 02:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	2	0	4
x_2	0	1	−1	2	0	3
x_1	1	0	−2	1	0	2
S_3	1	0	2	−2	1	4

لقد وصلنا إلى الحل الأمثل $(x_1 = 2,\quad x_2 = 3,\quad Z = 4)$ ولكن نلاحظ أن المتغير S_1 مثلا فير موجود في قاعدة الحل الأمثل وأن معامله في ف معاملات دالة الهدف يساوي الصفر، فلو أدخلناه فإنه سوف يؤثر على الحل الأمثل المحل عليه سابقا: $(Z = 4)$.

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	2	0	4
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	5
x_1	1	0	0	1	1	6
S_1	1	0	1	−1	$\frac{1}{2}$	2

إذن الحل الأمثل الناتج هو $(x_1 = 6,\quad x_2 = 5,\quad Z = 4)$ وهو مساوي للحل الأمثل السابق أيضا.

4- حالة تساوي بعض قيم معاملات دالة الهدف

كما جرت العادة إذا كنا بصدد التعظيم نقوم باختيار معامل متغير القرار الذي لديه أصغر قيمة سالبة في حين أنه في حالة التدنية نقوم باختيار معامل متغير القرار الذي لديه أكبر قيمة موجبة.

فإذا كنا بصدد البحث عن القيمة المثلى لدالة الهدف لنموذج خطي معين وظهرت في صف معاملات دالة الهدف قيمتين أو أكثر متساويتين، فإنه في هذه الحالة نختار الإدخال أي واحد من المتغيرات المقابلة لهم عشوائياً، لأن إدخال المتغير الآخر سوف يعطي نفس قيمة الحل الأمثل.

مثال: حل النموذج الخطي التالي باستعمال الطريقة المبسطة.

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + S_2 = 8 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad S_i \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	-2	-1	-2	0	0	0
S_1	1	1	0	1	0	2
S_2	2	3	1	0	1	8

في هذه الحالة نجد معامل x_3 (-2) يساوي معامل (x_1) ففي هذه الحالة الاختيار سوف يكون عشوائي سنقوم بإدخال x_3 وإخراج S_2 نجد:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	6	5	0	0	2	16
S_1	1	1	0	1	0	2
x_3	2	3	1	0	1	8

$$Z = 16, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8$$

للتأكد فقط نقوم بإدخال x_1 وإخراج S_1 نجد:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	-2	-1	-2	0	0	0
S_1	1	1	0	1	0	2
S_2	2	3	1	0	1	8

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	0	1	-2	2	0	4
x_1	1	1	0	1	0	2
S_2	0	1	1	-2	1	4

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	0	3	0	-2	2	12
x_1	1	1	0	1	0	2
x_3	0	1	1	-2	1	4

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	2	5	0	0	2	16
S_1	1	1	0	1	0	2
x_3	2	3	1	0	1	8

نلاحظ أنه: $Z = 16, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8$ أي حسب هذا المثال نستنتج أنه لا داعي لتجريب إدخال الاثنين لأن الحل نفسه.

5- حالة الدوران (الانحلال أو عدم الانتظام)

نصادف هذه الحالة عندما يكون أحد القيود في المشكلة قيداً فائضاً، وتبرز مشكلة الدوران حسب النسبة (bi/a_{iJ}) من أجل تحديد المتغير الخارج من الحل وكان هناك مساواة في النسبة الأقل لأكثر من سطر، وهذا يعني أن هناك دوران في الحل.

ولحل هذه المشكلة سنقوم عشوائياً بإخراج أي من المتغيرات الذين تقابلهم القيم الصغيرة المتساوية، ونواصل المحاولات حتى نصل إلى حل أمثل معين، ثم نقوم بعدها بإخراج المتغير الآخر عند النقطة التي ظهرت فيها حالة الدوران ونحاول مرة أخرى الوصول إلى حل أمثل آخر، ثم نقارن الحلول المثلى ونأخذ أحسنهم.[14]

مثال: حل النموذج الخطي باستعمال الطريقة المبسطة.

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + x_3 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

الحل الابتدائي المقبول

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
	Z	-4	-2	1	0	0	0
←	S_1	2	0	1	1	0	8
	S_2	1	1	1	0	1	4

في إطار البحث عن الحل الأمثل ندخل x_1، ولكن من أجل تحديد المتغير الذي يخرج، نحسب النسب نجد أن 4/1=4، 8/2=4 نلاحظ أن القيمتين متساويتين وبالتالي فهناك اختيار لإخراج S_1 أو S_2، فنختار عشوائياً S_1 ونرى:

جدول المحاولة 01:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
	Z	0	-2	1	2	0	16
	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4
←	S_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0

جدول المحاولة 02:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
	Z	0	0	2	1	2	16
	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4
	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0

$$Z = 16, x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0$$

هذا الجدول يمثل الحل الأمثل.

ولكن لو رجعنا إلى الجدول الأول (جدول الحل الابتدائي) وأخرجنا S_2 بدل S_1 نحصل على النتيجة التالية:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
	Z	-4	-2	1	0	0	0
	S_1	2	0	1	1	0	8
←	S_2	1	1	1	0	1	4

جدول المحاولة 01:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	0	+2	5	0	4	16
S_1	0	−2	−1	1	−2	0
x_1	1	1	1	0	1	4

هذه النتيجة تمثل حلاً أمثل وعند المقارنة نلاحظ أن عند إخراج S_2 قد أعطانا نفس الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عندما أخرجنا S_1 وعنده دالة الهدف $Max\ (Z) = 16$.

خامساً: سلسلة تمارين في حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقة المبسطة.

التمرين رقم 01:

حل النموذج الخطي التالي باستعمال الطريقة المبسطة.[15]

$$Max\ (Z) = 3x_1 + 5x_2$$
$$S/t\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 01:

$$Max\ (Z) = 36$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$

التمرين رقم 02:

حل النموذج الخطي التالي باستعمال الطريقة المبسطة.[16]

$$Max\ (Z) = 60x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 90x_4$$
$$S/t\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 1 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 02:

$$Max\ (Z) = \frac{960}{67} = (14{,}33)$$

$$x_1 = \frac{7}{67} = (0{,}10)$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{6}{67} = (0{,}09)$$

$$x_4 = 0$$

التمرين رقم 03:

حل النموذج الخطي باستعمال سمبلكس:[17]

$$Max\ (Z) = 20x_1 + 25x_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 03:

$$Max\ (Z) = 310$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6$$

التمرين رقم 04:

نفس السؤال السابق.[18]

$$Min\ (Z) = 2x_1 + x_2$$

$$S/t \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 04:

$$Min\ (Z) = \frac{12}{5}$$
$$x_1 = \frac{3}{5}$$
$$x_2 = \frac{6}{5}$$

التمرين رقم 05:

نفس السؤال السابق.[19]

$$Min\ (Z) = 3x_1 + 4x_2 + 8x_3$$
$$S/t \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 8x_3 \geq 16 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 05:

$$Min\ (Z) = 19$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 0$$

التمرين رقم 06:

نفس السؤال السابق.[20]

$$Max\ (Z) = 40x_1 + 30x_2$$
$$S/t \begin{cases} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 20 \\ \frac{1}{5}\ x_2 \leq 5 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 30 \\ x_2 \geq 15 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 06:

$$Max\ (Z) = \emptyset$$

التمرين رقم 07:

نفس السؤال السابق.[21]

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S/t \begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 07:

$$Max\ (Z) = \infty$$

التمرين رقم 08:

نفس السؤال السابق.[22]

$$Min\ (Z) = 3x_1 + 8x_2$$
$$S/t \begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ x_1 \leq 80 \\ x_2 \leq 60 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 08:

$$Min\ (Z) = 1200$$
$$x_1 = 80$$
$$x_2 = 120$$

التمرين رقم 09:

نفس السؤال السابق.[23]

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 8x_2$$
$$S/t \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 8 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 09:

$$Max\ (Z) = \emptyset$$

التمرين رقم 10: نفس السؤال السابق.[24]

$$Min\ (Z) = 4x_1 + 5x_2$$
$$S/t \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 27 \\ 5x_1 + 5x_2 = 60 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 60 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 10:

$$Min\ (Z) = \frac{105}{2}$$
$$x_1 = \frac{15}{2}$$
$$x_2 = \frac{9}{2}$$

التمرين رقم 11: نفس السؤال السابق.[25]

$$Min\ (Z) = 3x_1 + 2x_2$$
$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 11:

$$Min\ (Z) = 6$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3$$

التمرين رقم 12: نفس السؤال السابق.[26]

$$Max\ (Z) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 960 \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 5000 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 2400 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 12:

$$Max\ (Z) = 2400$$
$$x_1 = 80$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 720$$

التمرين رقم 13:

نفس السؤال السابق.[27]

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 7x_2$$
$$S/t \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 50 \\ x_1 \geq 20 \\ x_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 13:

$$Min\ (Z) = 205$$
$$x_1 = 20$$
$$x_2 = 15$$

التمرين رقم 14:

نفس السؤال السابق.[28]

$$Max\ (Z) = 3x_1 - x_2$$
$$S/t \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$
$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للتمرين رقم 14:

$$Max\ (Z) = 9$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 0$$

الخلاصة:

من خلال ماسبق يمكن استنتاج مايلي:

- تتمثل الخطوة الأولى في طريقة السمبلكس في تحويل القيود من متباينات إلى قيود مساواة مكافئة وهذا ما يدعى بالصيغة القياسية.

- إذا كان الطرف الأيسر من القيد الفني أكبر أو يساوي الطرف الأيمن bi يصبح من الشكل مساواة وذلك بطرح متغير الفرق، وإضافة متغير اصطناعي.
- فإذا كان الطرف الأيسر من القيد الفني يساوي الطرف الأيمن (bi) في هذه الحالة نقوم بإضافة متغير الفرق بمعاملات صفرية، واضافة متغير اصطناعي.
- تمثيل كل المعلومات الخاصة بالنموذج الخطي في الجدول .
- تتمثل شروط قبول الحل الابتدائي في:
- أن تكون دالة الهدف عند مستوى صفر بمعنى هي قيمة تتناسب مع مرحلة ما قبل أن تبدأ المؤسسة نشاطها أي:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + \cdots c_nx_n + 0S_1 + 0S_{2+} \ldots + 0S_m = 0$$

- أن تكون معاملات متغيرات الحل الابتدائي $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ أحادية موجبة من القيود الفنية، بمعنى أن تكون المعاملات فيما بينها مصفوفة الوحدة .
- البحث عن الحل الأمثل.

تهميشات المحور الرابع:

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سبق ذكره، ص 69.

[2] حامد سعد نور الشموتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، الطبعة 01، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 44.

[3] نفس المرجع السابق، ص 45.

[4] سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سبق ذكره، ص56.

[5] مكيد علي، مرجع سبق ذكره.

[6] مكيد علي، نفس المرجع السابق، ص 72.

[7] سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سبق ذكره، ص 97.

[8] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 92.

[9] نفس المرجع السابق، ص 95.

[10] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 95.

[11] حسن ياسين طعمة، مرجع سبق ذكره، ص 79.

[12] صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة 01، إثراء للنر والتوزيع، الأردن، 2009، ص 187.

[13] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص ص 107، 108.

[14] مكيد علي، نفس المرجع السابق، 98.

[15] محمود الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 135.

[16] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 112.

[17] حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، الطبعة 01، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص 55.

[18] سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سبق ذكره، ص 126.

[19] أحمد عبد اسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب، الطبعة 01، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 226.

[20] أحمد عبد اسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سبق ذكره، ص 229.

[21] أحمد عبد اسماعيل الصفار، مرجع سبق ذكره، ص 232.

[22] نفس المرجع السابق، ص 237.

[23] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سبق ذكره، ص 90

[24] نفس المرجع السابق، ص 97.

[25] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سبق ذكره، ص 99.

[26] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوني العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008، ص ص 49-52.

[27] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سبق ذكره، ص 53-57.

[28] نفس المرجع السابق، ص 57.

المحور الخامس

المسألة الثنائية في البرمجة الخطية

تمهيد:

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية (Primal models)، ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل (الثنائي) (Dual). إذ أن لكل نموذج يوجد نموذج آخر يقابله، من هذا يتبين لنا أن كل مشكلة تتوفر فيها شروط البرمجة الخطية ويمكن تمثيلها على شكل نموذج برمجة خطية يوجد لها نموذجان، الأول هو الذي يمثل المشكلة الأولية، أما النموذج الثاني (المقابل) الذي يمثل الجانب الآخر من المشكلة.

يحتوي الحل المقابل (الثنائي) على عدد من المعلومات الاقتصادية التي تهم الإدارة، ويمكن إيجاد الحل المقابل بشكل أسهل وأسرع من النموذج الأولي، حيث أن عدد مرات الإعادة أو خطوات الحل تكون أقل من تلك اللازمة لحل النموذج الأولي، وبشكل عام عندما يكون عدد متغيرات القرار أقل من عدد القيود فإنه من المفيد حل المشكلة على أساس الحل المقابل (الثنائي).[1]

أولاً: خطوات تحويل البرنامج الخطي الأولي (Primal) إلى البرنامج الخطي الثنائي (Dual)

فيما يلي عرض خطوات تحويل النموذج الأولي إلى ثنائي:[2]

- تحويل طبيعة دالة الهدف من التعظيم (max) في النموذج الأولي إلى تخفيض (min)، والعكس صحيح.
- معاملات متغيرات القرار في دالة هدف النموذج الأولي تصبح قيم الطرف الأيمن (الكميات) في قيود النموذج المقابل، أي: أن عدد القيود في النموذج المقابل تساوي عدد متغيرات القرار في النموذج الأولي.
- قيم الطرف الأيمن (الكميات) في قيود النموذج الأولي تصبح معاملات متغيرات القرار في دالة هدف النموذج المقابل، أي: أن عدد متغيرات القرار في النموذج المقابل تساوي عدد قيود النموذج الأولي.
- تكوين قيود النموذج المقابل.

1.4 قيم عمود معاملات متغيرات القرار في قيود النموذج الأولي تمثل قيم معاملات متغيرات القرار في الطرف الأيسر لقيود النموذج المقابل، أي أن قيم العمود الأول في النموذج الأولي تمثل صف معاملات متغيرات القرار في القيد الأول للنموذج المقابل، وقيم العمود الثاني في النموذج الأولي تمثل صف معاملات متغيرات القرار في القيد الثاني للنموذج المقابل...، وهكذا.

2.4 تغيير إشارات القيود في النموذج الأولي لكي تصبح في النموذج المقابل على النحو الآتي:

النموذج الأولي	النموذج الثنائي
أقل من أو يساوي$\geq$	أكبر من أو يساوي$\leq$
أكبر من أو يساوي$\leq$	أقل من أو يساوي$\geq$

في حالة وجود قيود بإشارة (=) في النموذج الأولي، لابد من إتباع الخطوات التالية:

- يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي($\geq$)، والأخرى بإشارة أكبر من أو يساوي($\leq$) .
- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأول تعظيم(max)نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أكبر من أو يساوي($\leq$) إلى قيد إشارته أقل من أو يساوي($\geq$) وذلك عن طريق ضرب القيد أكبر من أو يساوي في (-1).
- في حالة إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأول تخفيض(min)نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أقل من أو يساوي($\geq$) إلى قيد أكبر من أو يساوي($\leq$)، وذلك عن طريق ضرب القيد الأقل من أو يساوي في (-1).
- يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.

من خلال ما سبق يمكن استخلاص ما يلي:

- في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم(max)يجب أن تكون جميع القيود الفنية بإشارة أقل من أو يساوي.
- في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تدنية(min)يجب أن تكون جميع القيود الفنية بإشارة أكبر من أو يساوي.

ثانياً: صياغة النموذج المقابل (Dual)

هناك صيغتين للبرامج الخطية والتي تتمثل في الصيغة القانونية والصيغة المختلطة وفيما يلي شرح كل من الصيغتين.

1- ثنائية الصيغ القانونية: إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في الصيغة القانونية التالية:[3]

$$\max(Z) = c\grave{x}$$

$$S/t\{Ax \leq 0$$

$$x \geq 0$$

فإن البرنامج الثنائي يكتب كما يلي:

$$\min(W) = B\grave{y}$$

$$S/t\{\grave{A}y \geq c$$

$$y \geq 0$$

مثال رقم 01: أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:[4]

$$\max(Z) = 5x_1 + 2x_2$$

$$S/t\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

دالة الهدف للنموذج المقابل سوف تكون تدنية وهي تحتوي على ثلاثة متغيرات بقدر عدد قيود الأولي ومعاملات المتغيرات تمثل الجانب الأيمن الأولي:

$$\min(W) = 20y_1 + 30y_2 + 25y_3$$

أما قيود المقابل فهي عبارة عن قيدين الأولي يحتوي على متغيرين، القيد الأول يحتوي على ثلاثة متغيرات مع معاملات تمثل معاملات x_1 في قيود الأولي أي:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 5$$

يلاحظ إن إشارة القيد هي أكبر أو يساوي أي عكس إشارة الأولي وإن الجانب الأيمن للقيد يمثل معاملx_1في دالة الهدف الأولي، أما القيد الثاني فيحتوي على ثلاثة متغيرات مع معاملات تمثل معاملات x_2في القيود الأولي وإشارة القيد تكون أكبر أو يساوي والجانب الأيمن للقيد تمثل معاملx_2في دالة هدف الأولي:

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2$$

وعليه فإن الصيغة النهائية للنموذج المقابل هي:

$$\min(W) = 20y_1 + 30y_2 + 25y_3$$

$$S/t \begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

مثال رقم 02: أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:[5]

$$\min(Z) = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3$$

$$S/t \begin{cases} 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 300 \\ 40x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 200 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

دالة الهدف للنموذج المقابل سوف تكون تعظيم(max)وهي تحتوي على متغيرين بقدر عدد قيود البرنامج الأولي ومعاملات المتغيرات تمثل الجانب الأيمن من البرنامج الخطي الأولي

$$\max(W) = 300y_1 + 200y_2$$

أما القيود المقابل فهي:

$$20y_1 + 40y_2 \leq 5$$

$$10y_1 + 5y_2 \leq 7$$

$$10y_1 + 10y_2 \leq 9$$

وعليه فإن الصيغة النهائية للنموذج المقابل هي:

$$\max(W) = 300y_1 + 200y_2$$

$$S/t\begin{cases}20y_1 + 40y_2 \leq 5\\10y_1 + 5y_2 \leq 7\\10y_1 + 10y_2 \leq 9\end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

2- ثنائية الصيغ المختلطة: وهي الصيغة تكون فيها المتراجحات $(\geq ، \leq)$ وتوجد معادلة بصيغة مساواة وكل منها معاملة خاصة.

وسنقوم بتوضيح ذلك من خلال المثال التطبيقي التالي:

مثال تطبيقي رقم 03: أوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:[6]

$$\min(Z) = 5x_1 + 10x_2$$

$$S/t\begin{cases}2x_1 + 4x_2 \leq 24\\-2x_1 + 2x_2 \geq 4\\2x_1 + 2x_2 = 8\end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل: نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل (أكبر من أو يساوي) فنحصل على النموذج المكافئ التالي:

$$\min(Z) = 5x_1 + 10x_2$$

$$S/t\begin{cases}-2x_1 - 4x_2 \geq -24\\-2x_1 + 2x_2 \geq 4\\2x_1 + 2x_2 \geq 8\\-2x_1 - 2x_2 \geq -8\end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

حيث: القيد الفني الأول للنموذج الأولي$2x_1 + 4x_2 \leq 24$، قمنا بضرب القيد الفني الأولي للنموذج الأولي في (-1) فيصبح: $-2x_1 - 4x_2 \geq -24$

أما القيد الفني الثاني للنموذج الأولي: $-2x_1 + 2x_2 \geq 4$ يبقى كما هو لأن المتراجحة من الشكل أكبر من أو يساوي $(\leq)$.

القيد الفني الثالث للنموذج الأولي هو: $2x_1 + 2x_2 = 8$، كما وضحنا سابقاً نقوم بتحويل القيد الفني إلى:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8 \dots (I)$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8 \dots (II)$$

حيث نقوم بضرب (I) في (-1) نحصل على:

$$-2x_1 - 2x_2 \geq -8$$

وبحسب القواعد السابقة فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

النموذج الأولي

$$\min(Z) = 5x_1 + 10x_2$$

$$S/t \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 \geq -24 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل

$$\max(W) = -24y_1 + 4y_2 + 8y_3 - 8y_4$$

$$S/t \begin{cases} -2y_1 \pm 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 \leq 5 \\ -4y_1 \pm 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 \leq 10 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

ثالثاً: حل النموذج المقابل بطريقة السمبلكس

إحدى الفرضيات الأساسية لحل النموذج الأولي بواسطة الطريقة المبسطة هي إن الموارد (قيم الجانب الأيمن للقيود) يجب أن تكون أكبر من الصفر، حل النموذج المقابل بواسطة طريقة السمبلكس يساعد على التخلص من هذا الشرط حيث أن قيمة الموارد ممكن أن تكون سالبة وعلى هذا الأساس فلا حاجة لإدخال المتغيرات الاصطناعية للنموذج.[7]

ولتوضيح هذا نستعين بالأمثلة التطبيقية التالية:

مثال تطبيقي رقم 01: [8]

$$\min(Z) = 6x_1 + 5x_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

$$\min(Z) = 6x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + mR_1 + mR_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - S_2 + R_2 = 9 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad bi \geq 0, \qquad S_i \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	-6 $+5m$	-5 $+5m$	0 $-m$	0 $-m$	$-m$ $+m$	$-m$ $+m$	$-14m$ $+14m$
R_1	2	1	-1	0	1	0	5
R_2	3	4	0	-1	0	1	9

من أجل البحث عن الحل الأمثل ندخل إلى قاعدة الحل المتغير x_2 في مكان R_2 .

جدول المحاولة رقم 01:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$\left(\frac{-9}{4}+\frac{5}{4}m\right)$	0	$-m$	$\left(\frac{-5}{4}+\frac{m}{4}\right)$	0	$\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}m\right)$	$\frac{45}{4}-\frac{45}{4}m$
R_1	$\frac{5}{4}$	0	-1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{11}{4}$
x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$

جدول المحاولة رقم 02:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	0	0	$\frac{-9}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\left(\frac{9}{5}-m\right)$	$\left(\frac{4}{5}-m\right)$	$\frac{81}{5}$
x_1	1	0	$\frac{-4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{11}{5}$
x_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

هذا الجدول يمثل الحل الأمثل لهذا النموذج الخطي حيث:

$$\min(Z) = \frac{81}{5}$$

$$x_1 = \frac{11}{5}$$

$$x_2 = \frac{3}{5}$$

الآن نحاول أن نحل الشكل الثنائي للنموذج الابتدائي السابق، الشكل الثنائي للنموذج الابتدائي السابق هو:

$$\max(W) = 5y_1 + 9y_2$$

$$S/t \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \leq 6 \\ y_1 + 4y_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

الحل:

$$\max(W) = 5y_1 + 9y_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$2y_1 + 3y_2 + S_1 = 6$$

$$y_1 + 4y_2 + S_2 = 5$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

Z	y_1	y_2	S_1	S_2	Sol
Z	-5	-9	0	0	0
S_1	2	3	1	0	6
S_2	1	4	0	1	5

جدول المحاولة رقم 01:

Z	y_1	y_2	S_1	S_2	Sol
Z	$-\frac{11}{4}$	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{4}$
S_1	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$
y_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

جدول المحاولة رقم 02:

Z	y_1	y_2	S_1	S_2	Sol
Z	0	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{81}{5}$
y_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{9}{5}$
y_2	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل:

$$\max(W) = \frac{81}{5}$$

$$y_1 = \frac{9}{5}$$

$$y_2 = \frac{4}{5}$$

من خلال المثال التطبيقي هذا نستخلص العلاقة بين الحل الأمثل الأصلي (الابتدائي) والمرافق.

1- $opt(Z) = opt(W)$ حسب المثال نجد: $\min(Z) = \max(W) = \frac{81}{5}$

2- معاملات متغيرات الحل الابتدائي R_1، R_2 في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي تساوي قيمة متغيرات الحل الأمثل للنموذج الثنائي والعكس أيضاً صحيح.

حسب مثالنا هذا:

من الجدول الأمثل للنموذج الابتدائي نجد:

$$R_1 = \frac{9}{5}$$

$$R_2 = \frac{4}{5}$$

من الجدول الأمثل للنموذج الثنائي نجد:

$$y_1 = \frac{9}{5}$$

$$y_2 = \frac{4}{5}$$

من خلال ما سبق نستنتج أنه توجد علاقة بين الحل الأمثل الأصلي والمرافق كالآتي:[9]

1- $opt(Z) = opt(\grave{Z})$ (ما عدا الحالات الخاصة حيث لا يكون فيها الحلان متساويان أي:

النموذج الابتدائي	النموذج الثنائي
• $opt(Z) = \emptyset$	• $opt(\grave{Z}) = \infty$
• $opt(Z) = \infty$	• $opt(\grave{Z}) = \emptyset$
• حل غير منتظم	• حلول مثلى متساوية
• حلول مثلى متساوية	• حل غير منتظم

2- معاملات متغيرات الحل الابتدائي (R_i)أو(S_i) في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي تساوي قيم متغيرات الحل للنموذج الثنائي والعكس أيضاً صحيح.

مثال تطبيقي رقم 02:

$$\max(Z) = 2x_1 + 5x_2$$

$$S/t \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل:

$$\max(Z) = 2x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - mR_1$$

$$S/t \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - S_1 + R_1 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + S_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + S_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0, \qquad bi \geq 0, \qquad S_i \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

Z	x_1	x_2	S_1	R_1	S_1	S_2	Sol
Z	-2	-5	0	$+m$	0	0	$+12m$
	$-4m$	$-3m$	$+m$	$-m$	0		$-12m$
R_1	4	3	-1	1	0	0	12
S_2	-1	2	0	0	1	0	6
S_3	2	-1	0	0	0	1	4

جدول محاولة رقم 01:

	Z	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
	Z	0 0	-6 $-5m$	0 $+m$	0 0	0 0	1 $+2m$	$4+8m$
←	R_1	0	5	-1	1	0	-2	4
	S_2	0	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	8
	x_1	1	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	2

جدول محاولة رقم 02:

	Z	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
	Z	0	0	$\frac{-6}{5}$	$\left(\frac{6}{5}+m\right)$	0	$\frac{-7}{5}$	$\frac{44}{5}+12m$
	x_2	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{4}{5}$
←	S_2	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$	1	$\frac{11}{10}$	$\frac{34}{5}$
	x_1	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{5}$

جدول محاولة رقم 03:

Z	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	m	4	3	$36+12m$
				0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_2	1	0	0				
S_1	0	1	0	-1	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{68}{3}$
x_1	0	0	1				
				0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$

هذا الجدول يمثل الحل الأمثل حيث:

$$\max(Z) = 36$$

$$x_1 = \frac{14}{3}$$

$$x_2 = \frac{16}{3}$$

الآن نحاول أن نحل الشكل الثنائي للنموذج الابتدائي

الكل الثنائي هو:

بما أن النموذج الابتدائي من الشكل:

$$\max(Z) = 2x_1 + 5x_2$$

$$S/t \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

مادامت دالة الهدف في النموذج الابتدائي هي تعظيم$(\max)$ لابد أولاً من تحويل جميع القيود الفنية إلى كل أقل من أو يساوي، وعليه تصبح كما يلي:

$$\max(Z) = 2x_1 + 5x_2$$

$$S/t \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -12 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

يعني في هذه الحالة قمنا بتحويل القيد الفني الأول الذي كان من الكل أكبر من أو يساوي وذلك بضربه في (1-) ثم بعد ذلك نكون النموذج المرافق، فنحصل عليه كالتالي:

$$\min(W) = -12y_1 + 6y_2 + 4y_3$$

$$S/t \begin{cases} -4y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

الحل بواسطة طريقة Simplex

$$\min(W) = -12y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 0S_1 + 0S_2 + mR_1 + mR_2$$

$$\begin{cases} -4y_1 - y_2 + 2y_3 - S_1 + R_1 = 2 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 - S_2 + R_2 = 5 \end{cases}$$

جدول الحل الابتدائي المقبول

Z	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$+12$	-6	-4	0	0	$-\mathrm{m}$	$-\mathrm{m}$	$-7m$
	$-7m$	$+\mathrm{m}$	$+\mathrm{m}$	$-\mathrm{m}$	$-\mathrm{m}$	$+\mathrm{m}$	$+\mathrm{m}$	$+7m$
R_1	-4	-1	2	-1	0	1	0	2
R_2	-3	2	-1	0	-1	0	1	5

جدول المحاولة رقم 01:

Z	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	4 $-6m$	8 $+\frac{3}{2}\mathrm{m}$	0 0	-2 $-\frac{1}{2}\mathrm{m}$	0 $-\mathrm{m}$	$0\left(\frac{2}{-\frac{1}{2}\mathrm{m}}\right)$		4 $-m$
y_3	-2	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1
R_2	-5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	6

جدول المحاولة رقم 02:

Z	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$(-6-2m)$	0	0	$\frac{-14}{3}$	$\frac{-16}{3}$	$\left(\frac{14}{3}-\mathrm{m}\right)$	$\left(\frac{16}{3}-\mathrm{m}\right)$	$36-7m$
y_3	$\frac{-11}{3}$	0	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
y_2	$\frac{-10}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4

هذا الجدول يمثل الحل الأمثل حيث:

$$\min(W) = 36$$

$$y_1 = 0 \text{ ، } y_2 = 4 \text{ ، } y_3 = 3$$

لإستنتاج:

$$\max(Z) = \min(W) = 36$$

معاملات متغيرات الحل الابتدائي ، R_1 S_2 ، S_3 في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي تساوي قيمة متغيرات الحل الأمثل للنموذج الثنائي حيث:

$$R_1 = y_1 = 0$$

$$S_2 = y_2 = 4$$

$$S_3 = y_3 = 3$$

مثال تطبيقي رقم 03:

$$\max(Z) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

نقوم بحل البرنامج الخطي الابتدائي

وفيما يلي جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	R_2	Sol
Z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2}{5}+m$	$\frac{141}{5}+2m$
x_1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_2	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

$$\max(Z)=\frac{141}{5}, x_1=\frac{9}{5}, x_2=\frac{8}{5}$$

أما عناصر النموذج الثنائي كذلك يمكننا استنتاجها

$$S_1=y_1=\frac{29}{5}، R_2=y_2=\frac{-2}{5}، \min(W)=\frac{141}{5}$$

نلاحظ أن قيمة المتغير الثنائي (y_2) هي قيمة سالبة $\left(\frac{-2}{5}\right)$ وهذا على خلاف العادة في نماذج البرمجة الخطية التي نعتبر فيها أن المتغيرات هي دائماً متغيرات لا سلبية أي$(y_i \geq 0)$، وذلك لأن هذه هي حالة خاصة نابجة عن أن القيد الفني الثاني في النموذج الابتدائي هو في شكل معادلة.

لذلك فإن المتغير(y_2) نعتبره في هذه الحالة متغير (حر) يمكن أن يأخذ قيماً سالبة أو موجبة أو صفر، وهو في الحقيقة أخذ قيمة سالبة.

نقوم الآن بتكوين النموذج الثنائي:

بما أن دالة الهدف للنموذج الابتدائي هي $(\max)$ نقوم بتحويل القيود الفنية إلى كل أصغر من أو يساوي فتصبح:

$$\max(Z) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$S/t\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -12 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المرافق:

$$\min(W) = 5y_1 + 12(y_2^+ - y_2^-)$$

$$S/t\begin{cases} y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) \geq 5 \\ 2y_1 + (y_2^+ - y_2^-) \geq 12 \\ y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) \geq 4 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0 \text{ و } y_2 \text{ حر}$$

جدول الحل الابتدائي المقبول:

W	y_1	y_2^+	y_2^-	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
W	-5 $+4m$	-12 $+4m$	$+12$ $-4m$	0 $-m$	0 $-m$	0 $-m$	$-m$ $+m$	$-m$ $+m$	$-m$ $+m$	$-21m$ $+21m$
R_1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	2	-1	$+1$	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4

جدول المحاولة رقم 01:

W	y_1	y_2^+	y_2^-	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
W	$\left(\frac{-13}{8} + \frac{8}{3}m\right)$	0	0	$-m$	$-m$	$\left(\frac{-2}{3} + \frac{m}{3}\right)$	0	0	$\left(\frac{2}{3} - \frac{4m}{3}\right)$	
R_1	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
R_2	$\frac{7}{3}$	0	0	0	-1	$\frac{-1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{40}{9}$
y_2^+	$\frac{1}{3}$	1	-1	0	0	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

جدول المحاولة رقم 02:

W	y_1	y_2^+	y_2^-	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
W	0	$(13-8m)$	$(-13+8m)$	$-m$	$-m$	$(-5+3m)$	0	0	$(5-4m)$	$\frac{60}{3}-\frac{48}{3}$
R_1	0	0	-1	1	-1	0	1	0	-1	1
R_2	0	0	-7	7	0	-1	0	1	-2	4
y_1	1	1	3	-3	0	0	0	0	1	4

جدول المحاولة رقم 03:

W	y_1	y_2^+	y_2^-	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
W	0	0	0	$-m$	$\left(-\frac{13}{7}+\frac{m}{7}\right)$	$\left(-\frac{9}{7}+\frac{5m}{7}\right)$	0	$\left(\frac{13}{7}-\frac{8}{7}m\right)$	$\left(\frac{9}{7}-\frac{12}{7}m\right)$	$\frac{152}{7}+\frac{144}{7}m$
R_1	0	0	0	-1	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$
y_2^-	0	-1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
y_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{40}{7}$

جدول المحاولة رقم 04:

W	y_1	y_2^+	y_2^-	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
W	0	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{56}{35}$	0	$\left(\frac{9}{5}-m\right)$	$\left(\frac{8}{5}-m\right)$	0	$\frac{141}{5}-21m$
S_3	0	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$
y_2^-	0	-1	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
y_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{29}{5}$

هذا الجدول يمثل الحل الأمثل حيث:

$$y_1 = \frac{29}{5}$$

$$y_2^- = \frac{2}{5}$$

$$\min(W) = \frac{141}{5}$$

لكننا وجدنا قيمة $y_2 = \frac{-2}{5}$ عندما حلينا النموذج الأصلي وهذا راجع أننا وضعنا $y_2 = y_2^+ - y_2^-$

وبما أن $(y_2^+ = 0)$ إذن: $y_2 = 0 - y_2^- = 0 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$

رابعا: سلسلة تمارين حول تكون النموذج الخطي المقابل للنموذج الابتدائي

تمرين رقم 01: أوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الآتية:[10]

$$\max(Z) = 25x_1 + 35x_2$$

$$S/t \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر للنموذج الابتدائي هو:

$$\max(Z) = \frac{335}{4}$$

$$x_1 = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

النموذج المقابل هو:

$$\min(W) = 8y_1 + 10y_2$$

$$S/t \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \geq 25 \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 35 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

الحل المختصر للنموذج المقابل هو:

$$\min(W) = \frac{335}{4}$$

$$y_1 = \frac{55}{16}$$

$$y_2 = \frac{45}{8}$$

تمرين رقم 02: أوجد النموذج الخطي للبرمجة الخطية الآتية:[11]

$$\min(Z) = 200x_1 + 160x_2$$

$$S/t \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الحل المختصر لنموذج الابتدائي هو:

$$\min(Z) = 680$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

النموذج المقابل هو:

$$\max(W) = 12y_1 + 24y_2 + 8y_3$$

$$S/t \begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 200 \\ 2y_1 + 12y_2 + 2y_3 \leq 160 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

الحل المختصر للنموذج المقابل هو:

$$\max(W) = 680$$

$$y_1 = 10$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = 70$$

تمرين رقم 03: نفس السؤال السابق:[12]

$$\max(Z) = x_1 + x_2 - x_3$$

$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 14 \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$\min(W) = 14y_1 - 6y_2$$

$$S/t \begin{cases} 3y_1 - 5y_2 \geq 1 \\ 4y_1 \geq 1 \\ -5y_1 + 2y_2 \geq -1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

تمرين رقم 04 : نفس السؤال السابق:[13]

$$\min(Z) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 20 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 30 \\ 5x_1 + 3x_4 \geq 35 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$\max(W) = -20y_1 + 30y_2 + 35y_3$$

$$S/t \begin{cases} -2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq 2 \\ -3y_1 + 2y_2 \leq -3 \\ +4y_1 \leq -3 \\ +2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

تمرين رقم 05: نفس السؤال السابق:[14]

$$\max(Z) = 3x_1 + x_2$$

$$S/t \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$\min(W) = 5(y_1^+ - y_1^-) + 2y_2$$

$$S/t \begin{cases} (y_1^+ - y_1^-) + 4y_2 \geq 3 \\ (y_1^+ - y_1^-) - 2y_2 \geq 1 \end{cases}$$

$y_1 = (y_1^+ - y_1^-)$: حيث y_1، حر $y_2 \geq 0$

تمرين رقم 06: نفس السؤال السابق:[15]

$$\max(Z) = 12x_1 + 14x_2$$

$$S/t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$\min(W) = 24y_1 + 16y_2 + 7y_3 + 6y_4$$

$$S/t\begin{cases}2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 12\\ 3y_1 + y_2 + y_4 \geq 14\end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

تمرين رقم 07: نفس السؤال السابق:[16]

$$\min(Z) = 2x_1 + x_2$$

$$S/t\begin{cases}x_1 + 3x_2 \geq 30\\ 4x_1 + 2x_2 \geq 40\end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$\max(W) = 30y_1 + 40y_2$$

$$S/t\begin{cases}y_1 + 4y_2 \leq 2\\ 3y_1 + 2y_2 \leq 1\end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

تمرين رقم 08: نفس السؤال السابق:[17]

$$\min(Z) = 2x_1 + x_2$$

$$S/t\begin{cases}3x_1 + x_2 = 3\\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6\\ x_1 + 2x_4 \leq 3\end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$\max(W) = 3(y_1^+ - y_1^-) + 6y_2 - 3y_3$$

$$S/t \begin{cases} 3(y_1^+ - y_1^-) + 4y_2 - y_3 \leq 2 \\ (y_1^+ - y_1^-) + 3y_2 - 2y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_1 = (y_1^+ - y_1^-) \text{ حيث: } \quad y_1 \text{ حر}، y_2 \geq 0، y_3 \geq 0$$

خامساً: التفسيرات الاقتصادية للنموذج المقابل.

يستعمل النموذج المقابل في التحليل الاقتصادي في عدة مجالات سنحاول ذكرها فيما يلي:[18]

1. المتغيرات الثنائية (y_i) تعبر عن ربح أو تكلفة الفرص البديلة لاستعمال الموارد في النشاط الاقتصادي: تقييم الفرص البديلة لاستعمال الموارد الاقتصادية المتاحة والعمل دائماً على توظيفها أو استثمارها في قطاعات النشاط ذات العائد النسبي الأكبر. عادة ما يسمح النموذج الثنائي بالمساعدة في إجراء تقييم الفرص البديلة لاستعمال الموارد المتاحة.
2. المتغيرات الثنائية (y_i) تعكس درجة تأثير الموارد المستعملة في النشاط على دالة الهدف: إن قيم (y_i) للنموذج الثنائي تمكننا من معرفة الأهمية النسبية أو التأثير النسبي للموارد المختلفة $(b_1, b_2, b_3, \dots b_m)$ على تحقيق القيمة المثلى لدالة الهدف.

مثال: نفترض أن النموذج التالي يعكس حالة نشاط إنتاجي لمؤسسة معينة، تنتج ثلاث منتجات وتستعمل في إنتاجهم موردين إنتاجيين بكميات ($b_1 = 20$ وحدة)، ($b_2 = 10$ وحدة) كالتالي[19]:

$$\max(Z) = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	0	0	1	0.6	1.2	24
x_1	1	0	-1	0.6	-0.8	4
x_2	0	1	1	-0.2	0.6	2

الجدول التالي يوضح أن هذه المؤسسة تستطيع أن تعظم أرباحها بمقدار (24 وحدة نقدية) وذلك في حدود كميات الموردين اللذان تستعملهما في نشاطها، أما كميات الإنتاج التي تسمح لها بالوصول إلى هذا المستوى من النشاط الأمثل فهي $x_1 = 4$، $x_2 = 2$، كذلك من هذا الجدول نستطيع إستنتاج قيم y_1 و y_2 للنموذج الثنائي، حيث:

$$y_1 = S_1 = 0.6$$

$$y_2 = S_2 = 1.2$$

- أذا افترضنا أننا نزيد زيادة 5 وحدات من المورد الأول من أجل زيادة حجم النشاط في المؤسسة المعينة وأردنا معرفة تأثير ذلك على القيمة المثلى لدالة الهدف (أرباح المؤسسة) فيكفي حساب الزيادة في دالة الهدف $(\Delta)\dot{Z}$ الناتجة عن الزيادة في المرور الأول (b_1) وهي (Δb_1) أذن: $(\Delta)\dot{Z} = \Delta b_1 \times y_1$ ومنه تصبح قيمة دالة الهدف $(\Delta)\dot{Z} = 5 \times 0.6 = 3$ بالتعويض نجد: $\dot{Z} = 24 + 3 =$ و.ن 27، لو أردنا أن نتأكد من ذلك نقوم بإعادة حل النموذج السابق بواسطة الطريقة المبسطة، وذلك بزيادة الطرف الأيمن للقيد الفني الأول بخمس وحدات (عوض 20 وحدة)، نحل على الجدول الحل الأمثل التالي:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	0	0	1	0.6	1.2	27
x_1	1	0	-1	0.6	-0.8	7
x_2	0	1	1	-0.2	0.6	1

نستنتج أن $Z = 27$ وهي نفسها التي تحصلنا عليها.

- لابد من معرفة الآن هل نستطيع أن نقيم ونعرف مباشرة مقدار تأثير زيادة أو خفض كمية الموارد على قيمة دالة الهدف دائما؟ أم هل هناك حدود لهذه القدرة.
- في الحقيقة هناك مجال لتغيير كمية الموارد تبقى في هذه الحالة العلاقة الصحيحة، أما خارج هذا المجال فإن هذه العلاقة تصبح غير صحيحة.

يمثل هذا المجال في الحدود التي تبقى فيها أسعار الظل المثلى (y_i) لهذه الموارد مستقرة، أما خارج هذا المجال فإن القيم المثلى لأسعار الظل (y_i) تتغير وبالتالي فإن طبيعة الموارد بالنسبة لنشاط المؤسسة تتغير أيضاً.

سنحاول توضيح تحديد هذا المجال خلال الخطوات التالية:

- نضرب عناصر قيم العمود الأيمن في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي في (-1).
- نقسم هذه القيم على قيم عمود المورد الذي تريد تقييم مجال تغييره.
- من القيم الناتجة نأخذ أصغر قيمة موجبة وأكبر قيمة سالبة، الأولى تمثل الحد الأعلى لتغيير الموارد والثانية تمثل الحد الأدنى لتغييرها.
- إذا ما تغير المورد المعني في حدود هذا المجال فإن القيم المثلى لأسعار الظل (y_i) تبقى مستقرة.
- إذا لم تكن من بين القيم المحصل عليها بعد التقسيم قيماً موجبة فهذا يعني أو المورد يمكن زيادته إلى ما لانهاية، وإذا لم توجد قيماً سالبة فالمورد يمكن تخفيضه إلى الصفر دون أن يؤثر ذلك على المجال المذكور.

نرجع إلى جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي السابق:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Sol
Z	0	0	1	0.6	1.2	24
x_1	1	0	-1	0.6	-0.8	4
x_2	0	1	1	-0.2	0.6	2

تحديد مجال تغيير المورد الأول (b_1) الذي لا يؤثر على استقرار قيم أسعار الظل (y_i) الحالية:

$$-\frac{4}{0.6} = -6.67$$

$$\frac{-2}{-0.2} = 10$$

- نختار من بين هذه القيم أصغر قيمة موجبة وأكبر قيمة سالبة، ويكون مجال تغيير المورد (b_1)، الذي لا يؤثر على الحل الأمثل الثنائي الحالي هو: $-6.67 \leq \Delta b_1 \leq 10$

وبالتالي فإن: $20 - 6.67 \leq b_1 \leq 10 + 20$

$$13.34 \leq b_1 \leq 30$$

- تحديد مجال تغيير المورد الثنائي (b_2)

$$\frac{-4}{-0.8} = 5$$

$$\frac{-2}{0.6} = -3.34$$

إذن: $-3.34 \leq \Delta b_2 \leq 5$

وبالتالي فإن: $10 - 3.34 \leq b_2 \leq 10 + 5$

$$6.67 \leq b_2 \leq 15$$

3. تقييم ندرة الموارد المستعملة في النشاط الاقتصادي: لتوضيح ذلك نستعين بالمثال التالي:[20]

$$\max(Z) = 9x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

$$S/t \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 300 \end{cases}$$

$$x_J \geq 0$$

الجدول التالي يمثل جدول الحل الأمثل:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	9.25	0	1.5	0.75	975
x_1	0	0	0.25	1	−0.5	−0.25	475
x_2	1	0	0.8	0	0.5	−0.75	25
x_3	0	1	0.75	0	−0.5	1.25	125

1- برنامج الإنتاج الأمثل الذي يسمح للمؤسسة من تعظيم أرباحها هو:

$$x_1 = 25، x_2 = 125، x_3 = 0$$

2- من أجل تحقيق هذا البرنامج الإنتاجي تم تخفيض الموارد المتاحة كالتالي:

استهلك من المورد الأول كمية مقدارها: $3(25) + 2(125) + 0 = 350$

وتبقى من هذا المورد كمية تساوي 475 وحدة بدون استعمال.

استهلك من المورد الثاني كمية مقدارها: $5(25) + 3(125) + 0 = 500$

وهذا يعني أن الكمية المتاحة من المورد الثاني استعملت بالكامل.

أما المورد الثالث فاستعملت منه الكمية: $2(25) + 2(125) + 0 = 300$

وهذا يدل على أن الكميات التي كانت متوفرة من هذا المورد استغلت استغلالاً كاملاً من أجل تنفيذ برنامج الإنتاج الأمثل.

3- الموارد التي استعملت بالكامل، والممثلة بمتغيرات الفرق (S_2)، (S_3) لم تظهر في قاعدة الحل في جدول الحل الأمثل، هذا يعني أن قيمتها $S_3 = 0$، $S_2 = 0$، في حين أن الموارد التي لم تستعمل بالكامل، والمتمثلة في مثالنا هذا بمتغير الفرق (S_1)، فإنها تظهر في قاعدة الحل في الجدول الأمثل، والقيمة التي تظهر بها هي بالضبط الكمية غير المستعملة منها في وضع النشاط الأمثل.

4- قيمة عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي نستطيع إخراجها مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي وهي: $y_3 = 0.75$، $y_2 = 1.5$، $y_1 = 0$، هذه القيم تعني مقدار زيادة أو نقص في دالة الهدف الناتجة عن زيادة أو انخفاض أي مورد من الموارد الثلاثة بوحدة واحدة، $(y_1 = 0)$ تعني أن مقدار تأثير المورد الأول على دالة الهدف هو صفر، وهذا راجع إلى أن هذا المورد هو موجود لدى المؤسسة بكميات فائضة وبالتالي فإن زيادة كميات المستعمل منه لا تؤثر على دالة هذه المؤسسة، فيأتي المورد الثاني في المرتبة الأولى يليه المورد الثالث ثم المورد الأول الذي ليس له أهمية بالنسبة للمؤسسة.

5- يتبين من جدول الحل الأمثل أن المؤسسة قررت عدم إنتاج المنتج الثالث $(x_3 = 0)$، وتفسير ذلك أن الفرص البديلة لاستعمال كميات الموارد اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثالث هي ذات عائد أكبر من العائد الناتج عن استعمال ذاك المورد ف إنتاج المنتج الثالث، وقد قامت المؤسسة بتقييم العائد الناتج عن استعمال موارد المنتج الثالث استعمالا آخر ومقارنته بالعائد الناتج عن استعمالها في إنتاج المنتج الثالث والذي يساوي $(C_3 = 2)$، فوجدت أن عائد الاستعمال البديل هو الأكبر.

الخلاصة:

من خلال ماسبق يمكن استنتاج مايلي:

خطوات تحويل البرنامج الخطي الأولي (Primal) إلى البرنامج الخطي الثنائي (Dual) تتمثل في:

- تحويل طبيعة دالة الهدف من التعظيم (max) في النموذج الأولي إلى تخفيض (min)، والعكس صحيح.
- معاملات متغيرات القرار في دالة هدف النموذج الأولي تصبح قيم الطرف الأيمن (الكميات) في قيود النموذج المقابل.
- قيم الطرف الأيمن (الكميات) في قيود النموذج الأولي تصبح معاملات متغيرات القرار في دالة هدف النموذج المقابل.
- تكوين قيود النموذج المقابل تكون كالتالي: قيم عمود معاملات متغيرات القرار في قيود النموذج الأولي تمثل قيم معاملات متغيرات القرار في الطرف الأيسر لقيود النموذج المقابل، أي أن قيم العمود الأول في النموذج الأولي تمثل صف معاملات متغيرات القرار في القيد الأول للنموذج المقابل، وقيم العمود الثاني في النموذج الأولي تمثل صف معاملات متغيرات القرار في القيد الثاني للنموذج المقابل...، وهكذا.
- تغيير إشارات القيود في النموذج الأولي لكي تصبح في النموذج المقابل على النحو الآتي:

النموذج الأولي	النموذج الثنائي
أقل من أو يساوي$\geq$	أكبر من أو يساوي$\leq$
أكبر من أو يساوي$\leq$	أقل من أو يساوي$\geq$

- في حالة وجود قيود بإشارة (=) في النموذج الأولي، لابد من إتباع الخطوات التالية:
- يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي($\leq$)، والأخرى بإشارة أكبر من أو يساوي($\geq$) .
- يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.
- في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم(max)يجب أن تكون جميع القيود الفنية بإشارة أقل من أو يساوي.
- في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تدنية(min)يجب أن تكون جميع القيود الفنية بإشارة أكبر من أو يساوي.

تهميشات المحور الخامس:

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سبق ذكره، ص 130.

[2] جهاد صياح بني هاني، مرجع سبق ذكره، ص ص 130، 131.

[3] مولاي بوعلام، محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات، مطبوعة موجهة لطلبة الليسانس والماستر، جامعة أكلي محمد أولحاج، البويرة، 2016، ص 80.

[4] حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سبق ذكره، ص 89.

[5] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سبق ذكره، ص 141.

[6] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، مرجع سبق ذكره، ص 133.

[7] علي خليل الزبيدي، حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سبق ذكره، ص 96.

[8] مكيد علي، مرجع، مرجع سبق ذكره، ص 124.

[9] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 123.

[10] مراد كمال عوض، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، الطبعة 01، دار البداية للنشر والتوزيع، 2017، ص99.

[11] مراد كمال عوض، مرجع سبق ذكره، ص 101.

[12] مراد كمال عوض، مرجع سبق ذكره، ص102.

[13] نفس المرجع السابق.

[14] مراد كمال عوض، مرجع سبق ذكره،، ص 105.

[15] محمد الفاتح محمود بشير المغربي، بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة 01، الدار العالمية للنشر والتوزيع، 2017، ص 108.

[16] محمد الفتاح محمود بشير المغربي، مرجع سبق ذكره، ص124.

[17] مكيد علي، نفس المرجع السابق، ص 133.

[18] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص،ص 134 – 137.

[19] نفس المرجع السابق، ص 139-142.

[20] مكيد علي، مرجع سبق ذكره.


قائمة المراجع

I. المراجع باللغة العربية

أ.الكتب

1. أبو قاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة 02، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، 2014.
2. إبراهيم نائب، أنعام باقية، بحوث العمليات خوارزميات وبرامج حاسوبية، الطبعة 01، دار وائل للطباعة والنشر، 1999.
3. أحمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب، الطبعة 01، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.
4. كرم محمد عرفان المهتدي، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات، الطبعة 01، دار الصفاء، الأردن، عمان، 2010.
5. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق، الطبعة 01، دار جليس الزمان للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.
6. حامد سعد نور الشموتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، الطبعة 01، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.
7. حسن ياسين طعمة، مروان محمد السنور، إيمان حسن حنوش، بحوث العمليات نماذج وتطبيقات، الطبعة 01، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2009.
8. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوني العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.
9. رشيق رفيق مرعي، فتحي خليل حمدان، مقدمة في بحوث العمليات، الطبعة 01، دار وائل للنشر، عمان، 1996.
10. ريتشارد بروبنسون، ترجمة: حسن حسنى الغبارى، سلسلة ملخصات شوم، نظريات ومسائل في بحوث العمليات، الطبعة 04، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.
11. سهيلة عبد الله سعيد،الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة01، دار حامد ، الأردن، 2007.

12. شفيق العتوم، بحوث العمليات، الطبعة 01، دار المناهج، عمان، الأردن، 2006.
13. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة 01، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.
14. صديق ناصر، البرمجة الخطية، الجامعة الإسلامية-غزة- كلية التجارة، قسم إدارة الأعمال، 2008.
15. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، الطبعة 02، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006.
16. علي علاونة ومحمد عبيدات، الأساليب الكمية في اتخاذ القرار، الطبعة 01، مركز يزيد للنشر، المملكة الأردنية الهاشمية، 2006.
17. فتحي صالح أبو سدرة ، زينب إسماعيل المصري، الأسلوب الرياضي في الاقتصاد، منشورات مركز البحوث الاقتصادية، بن غازي، ليبيا، 1988.
18. محمد الفاتح محمود بشير المغربي، بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة 01، الدار العالمية للنشر والتوزيع، 2017.
19. محمود الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.
20. محمد راتول، بحوث العمليات، الطبعة 02، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.
21. محمد عباس العميد ، محمد العزاوي، الأساليب الكمية في العلوم الإدارية، الطبعة العربية، دار اليازوري، الأردن، 2013.
22. محمد عبد العال النعيمي، وفاء شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، بحوث العمليات، الطبعة 02، دار وائل للنشر، الأردن، 2011.
23. مراد زكي ،عمار المقري، أساسيات الاقتصاد الرياضي، منشورات جامعة الفاتح، طرابلس، الجماهيرية العظمى، 1998.
24. مراد كمال عوض، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، الطبعة 01، دار البداية للنشر والتوزيع، 2017.
25. منعم زمزير الموسوي، بحوث العمليات مدخل علمي لاتخاذ القرارات، الطبعة 02، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، عمان، 2016.

II. المحاضرات

26.مكيد علي، بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية، الجزء الأول، البرمجة الرياضية دروس ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

27.مولاي بوعلام، محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات، مطبوعة موجهة لطلبة الليسانس والماستر، جامعة البويرة، كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير، 2017/2016.

III. باللغة الأجنبية:

28. Gérald Baillargeon, Programmation linéaire appliqué, les édition SMG, Québec, Canada, 1996, p 55.