République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et Informatique

M É M O I R E

Présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Recherche opérationnelle

Par

OULD TARKI Manel

Thème

NOMBRE D'ARETES DOMATIQUE ET NOMBRE D'ARETES B-DOMATIQUE

Composition du jury :

M^r N.IKHLEF ESCHOUF	Maitre de conférences	U.Y.F-Médéa	Président
M^r A.BOUCHOU	Maitre de conférences	U.Y.F-Médéa	Examinateur
M^r M.ZEMIR	Maitre assistant	U.Y.F-Médéa	Examinateur
M^r M.BENATALLAH	Maitre de conférences	U.Z.A Djelfa	Promoteur

Date de soutenance : 12 Septembre 2019

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse principalement à la notion de la partition d'arêtes domatique et la partition d'arêtes domatique b-maximale dans les graphes.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une partition d'arêtes $\mathcal{P}$ est domatique si chaque classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est un ensemble dominant. La cardinalitée maximum de $\mathcal{P}$ est appelée le nombre d'arêtes domatique de G et notée $ed(G)$. Une partition domatique $\mathcal{P}$ de G est b-maximale si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de cardinalitée plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue à partir de $\mathcal{P}$ en rassemblant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe (ensemble dominant). Le nombre d'arêtes b-domatique $ebd(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k telle que G admet une partition d'arêtes domatique b-maximale de cardinalité k.

Abstract

In this memory, we are mainly interested at the concept of the edge domatic partition and edge b-domatic partition in graphs.

For a given graph $G = (V, E)$, a partition $\mathcal{P}$ is edge domatic if each class $\mathcal{C}$ of $\mathcal{P}$ is an edge dominating set. The maximum cardinality of the edge domatic partition is called the edge domatic number of G and denoted $ed(G)$. An edge domatic partition $\mathcal{P}$ of G is b-maximal if no larger edge domatic partition $\mathcal{P}'$ can be obtained by gethering subsets of some classes of $\mathcal{P}$ to form a new dominating class. The minimum cardinality of a b-maximal edge domatic partition of G is called the edge b-domatic number and is denoted $ebd(G)$.

Remerciements

Je rends Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon promoteur Monsieur Mohamed BENATALLAH, Maître de Conférences à l'université ZIANE ACHOUR de Djelfa, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour sa disponibilité, son aide et ses conseils.

Je remercie également Monsieur Noureddine IKHLEF ESCHOUF, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire. Mes vifs remerciements vont également au Ahmed BOUCHOU, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARÈS de Médéa,et Mohamed ZEMIR,Maître de Conférences à l'université YAHIA FARÈS de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. Yahia Farès.de Médéa.

Enfin, il est important pour moi de remercier mes parents, d'avoir fait de leur mieux pour que je puisse accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de m'encourager. J'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres de la famille surtouts mes soeurs et frères, sans oublier mes amies et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à ma formation.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes soeurs et mes frères*

A *mes amies*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Manel

Table des matières

1 Généralités sur la théorie des graphes **3**

1.1 Définitions et notations 3

1.1.1 Graphe ,Sous-graphe et Graphe partiel 3

1.1.2 Voisinage d'un sommet et voisinage d'une arête 4

1.1.3 Degré d'un sommet et degré d'une arête 5

1.2 Partition de graphes 7

1.3 Quelques graphes particuliers 7

1.4 Invariants de graphe 10

1.5 Domination dans les graphes 12

1.6 Coloration dans les graphes 13

2 Partition d'arêtes domatique d'un graphe **14**

2.1 Partition domatique 14

2.1.1 Les graphes domatiquement pleins 16

2.2 Partition d'arêtes domatique 17

2.2.1 Nombre d'arêtes domatique de certains graphes 18

3 Nombre d'arêtes b-domatique **20**

3.1 Partition domatique b-maximale 20

3.2 Détermination de $bd(G)$ pour des classes particulières de graphes 22

3.3 Propriétés préliminaires 24

3.4 Graphes G tels que $bd(G) = 2$ 25

3.5 Partition d'arêtes domatique b-maximale 25

3.5.1 Nombre d'arêtes b-domatique ebd(G) 26
3.5.2 Nouvelles propriétés d'une partition d'arêtes domatique b-maximale . 28
3.5.3 Détérmination du $ebd(G)$ pour des classses particulières de graphe . . 30

Table des figures

1.1.1 Graphe simple G, Sous-graphe G_A et Graphe partiel G_B. 4
1.1.2 Graphe connexe et graphe non connexe. 6
1.1.3 Chaine P_4 et cycle C_4. 6
1.3.1 Graphe 3-régulier. 7
1.3.2 Graphe complet K_6. 8
1.3.3 Graphe biparti et graphe biparti complet. 8
1.3.4 Graphe et son complèmentaire. 9
1.3.5 Arbre 9
1.3.6 Etoile $K_{1,3}$ 9
1.3.7 Graphe Roue W_4 10
1.3.8 Graphe G et son graphe adjoint $L(G)$ 10
1.4.1 Exemple de deux graphes isomorphes 11

2.1.1 Deux partitions domatiques du K_4 et $K_{4,5}$. 16
2.2.1 Partition d'arêtes domatique du $S(W_5)$ 18
2.2.2 Partition d'arêtes domatique de K_4 et K_5 19

3.2.1 Partition domatique du cycle C_6. 23
3.2.2 Partition domatique b-maximale du cycle C_6. 23
3.2.3 Partition domatique du graphe biparti complet $K_{4,4}$. 24
3.2.4 Partition domatique b-maximale du graphe biparti complet $K_{4,4}$. 24
3.5.1 Deux partitions d'arêtes domatique b-maximale de C_6 26
3.5.2 un graphe 28

3.5.3 partitions d'arêtes domatique b-maximale de C_5 et C_6 31
3.5.4 partitions d'arêtes domatique b-maximale de P_4 et P_5 31
3.5.5 Partition d'arêtes domatique b-maximale de K_4 et K_5 32
3.5.6 partitions d'arêtes domatique b-maximale de $K_{3,4}$ 33
3.5.7 Double étoile $S_{4,5}$ 33
3.5.8 Partition d'arêtes domatique b-maximale d'un arbre T 34
3.5.9 Un graphe milieu du chaîne P_6 et du cycle C_6. 35
3.5.10 Partition d'arêtes domatique b-maximale de $M(C_4)$ et $M(C_6)$. 36
3.5.11 Partition d'arêtes domatique b-maximale de W_5 et W_6 37
3.5.12 La couronne de la chaîne $P_6 \circ K_1$ et du cycle $C_6 \circ K_1$. 37
3.5.13 Partition d'arêtes domatique b-maximale de $P_6 \circ K_1$ et $C_6 \circ K_1$. 38

Inroduction

La recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la deuxième guerre mondiale, ces techniques sont basées sur des concepts et des outils mathématiques.

La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires, l'optimisation dans les réseaux, la théorie des jeux, les files d'attentes...etc, sont les principales techniques aux quelles recourt la recherche opérationnelle.

Il arrive souvent, devant un problème donné qu'on soit amené à en dessiner un schéma sur un papier afin d'en simplifier la compréhension. Ce schéma est constitué d'un ensemble des points représentant les différents objets du problème, dont certains sont reliés par des lignes symbolisant les relations existantes entre eux. Pour raisonner sur de tels schémas, les mathématiciens ont convenu d'appeler ce schéma un graphe. les points sont appelés les sommets et les lignes sont dites des arêtes (arcs, si les lignes sont orientées). Ce genre de problèmes appartient à une branche bien évoluée des mathématiques qui s'appelle la théorie des graphes.

La notion de graphe a été introduite par l'anglais J.J.Sylvester en 1822, et ce n'est qu'en 1936 que parait le premier livre sur la théorie des graphes [19] , écrit par D. konig. La théorie des graphes est apparue d'abord comme une curiositée mathématique avec le problème des ponts de Konigsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Konigsberg, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du $XX^{éme}$ siècle, grâce aux travaux de Koinig, de Kuratowski de Caylay et plus récemment, de Berge, d'erds et de Harary.

La liaison de cette théorie avec d'autres disciplines telles que la physique, la chimie, la gestion et l'informatique a contribué à son développement d'une part, et d'autre part lui permis d'occuper une place importante dans la recherche opérationnelle.

En effet, de nombreux problèmes concrets se ramènent à la recherche d'une partition d'un ensemble d'objets suivants certaines règles. Cette partition peut être ensembles indépendants, ensembles dominants. Plusieurs variantes ont été définis à partir de ces deux partitions.

Parmi les domaines les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes, la technique de domination est devenue un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. L'histoire de la domination remonte au dix-neuvième siècle, grâce aux jeux d'échec. Ce n'est qu'en 1958, qu'elle est formalisée dans un contexte théorique par Claude Berge. Cependant, la notion du nombre domatique à été introduite par Cockayne et Hedetniemi en 1977. Hedetniemi et Laskar (1984), ont introduit le concept du nombre domatique connexe. Puis en 1995, Haynes et Slater ont introduit le nombre domatique couplé. En 2013, Odile Favaron a introduit le nombre b-domatique.

Notre travail s'inscrit dans le domaine de la domination des arêtes dans les graphes, plus particuléairement, nous sommes intéressés au problème de la partition d'arêtes domatique et la partition d'arêtes domatique b-maximale.

Ce mémoire comporte trois chapitres développés dans l'ordre suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons d'abord les définitions de base de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de notre travail. Nous donnons également un aperçu rapide de la domination et la coloration des arêtes.

Le deuxième chapitre est consacré aux travaux entrepris par certains chercheurs concernant la partition domatique et la partition d'arêtes domatique dans les graphes.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution dans le domaine de la partition d'arêtes domatique b-maximale dans les graphes.

On termine ce manuscrit par une conclusion qui résume les résultats que nous avant obtenus, suivi par quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des graphes

Dans la première partie de ce chapitre ,nous présentons des notions classiques de la théorie des graphes ainsi des notations usuelles , dont nous aurons besoin durant la réalisation de ce travail la deuxième partie est destinée pour définir quelques classes de graphes et dans la dernière partie nous définissons la domination et la coloration des arêtes dans les graphes.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe ,Sous-graphe et Graphe partiel

Un graphe G est la donnée d'un couple (V, E) où V est ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et E est l'ensemble de paires d'éléments de V appelés arêtes. Pour un graphe G, on notera $V(G)$ l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes ou simplement V et E si le contexte est explicite. Un graphe est dit triviale s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.
Un graphe G est dit simple si tout couple de ses sommets est relie par au plus une seule arête et que toute arête de $E(G)$ a ses extrémitées distinctes.
L'ordre d'un graphe est le cardinal de son ensemble de sommets et la taille d'un graphe est le cardinal de son ensemble d'arêtes.

On appelle *sous-graphe* de G un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Si $A \subseteq V$, on appelle sous-graphe de G induit (ou engendré par A, le sous-graphe $H = (A, E_A)$

de G avec $E_A = [uv \in E : u, v \in A]$. Dans ce cas, H sera désigné par $G[A]$. On dira aussi que $G[A]$ est un sous-graphe induit de G.

Si $B \subset E$, on appelle *graphe partiel* de G défini par B, le sous-graphe $G_B = (V, B)$ de G dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et B.

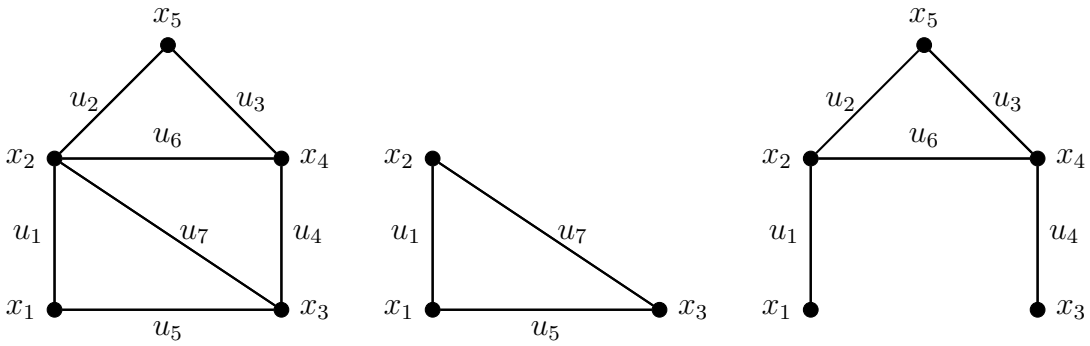


FIGURE 1.1.1 : Graphe simple G, Sous-graphe G_A et Graphe partiel G_B.

1.1.2 Voisinage d'un sommet et voisinage d'une arête

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. L'ensemble de sommets adjacents à un sommet $v \in V(G)$ est le voisinage ouvert de v, est noté par $N_G(v)$. Le voisinage fermé de v est l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. S'il n'y a pas de risque de confusion, les voisinage ouvert et fermé d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement.

  Soit S un sous-ensemble de v. L'ensemble $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ est appelé voisinage ouvert de S, et l'ensemble $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ est son voisinage fermé. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

  Le voisinage privé d'un sommet v relativement à S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et donné par $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

- Le voisinage ouvert d'une arête e est l'ensemble des arêtes adjacentes à e, noté par $N_G(v)$.

  Le voisinage fermé d'une arête e est l'ensemble $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$.

  Une arête h est dite *privé* à e dans S si $h \in N[e] - N[S - \{e\}]$

L'ensemble $pn[e, S] = N[e] - N[S - \{e\}]$ de tous les voisins privés de e dans S est appelé *le voisinage privé.*

1.1.3 Degré d'un sommet et degré d'une arête

Degré d'un sommet Le degré d'un sommet u, est le nombre de sommets adjacents à u, et on note $d(u) = |N(u)\|$

Le degré minimum des sommets d'un graphe est défini par :

$$\delta(G) = min\{d(u), u \in V\}$$

Le degré maximum des sommets d'un graphe est défini par :

$$\Delta(G) = max\{d(u, u \in V\}$$

- Un sommet de degré $n-1$ est dit *universel.*
- Un sommet de degré 0 est dit *isolé* .
- Un sommet de degré 1 est dit *pendant.*

Degré d'une arête .

Le degré d'une arête e notée par $d_e(e)$ est le nombre d'arêtes adjacentes à e.

- Le degré d'une arête e incidente aux sommets u et v notée par uv est :

$$d_e(uv) = d(u) + d(v) - 2.$$

- L'arête incidente à un sommet pendant est dite *arête pendante.*
- L'arête adjacentes à toutes les autres arêtes est dite *aréte universelle.*
- L'arête de degré 0 est dite *arête isolée.*
- Un ensemble d'arêtes est dit *stable* si ses arêtes sont des arêtes isolées.

graphe connexe

Un graphe G=(V,E) est dit connexe , s'il existe une chaine reliant tout paires de sommets $u, v \in V(G)$ .Un graphe qui n'est pas connexe est dit disconnexe (non connexe).

Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe maximale connexe.

Une aréte e est appelée un isthme si le graphe G-e possède une composante connexe en plus (i.e si G est connexe alors G-e n'est pas connexe).

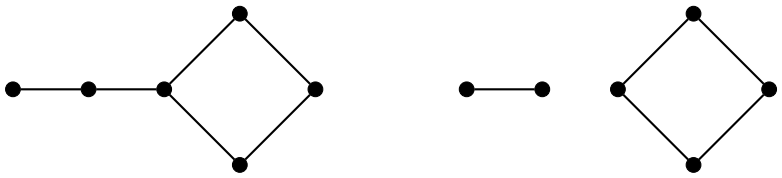


FIGURE 1.1.2 : Graphe connexe et graphe non connexe.

Chaine et cycle

Une chaine P d'un graphe $G = (V, E)$, est une suite de sommets reliés par des arêtes. La longueur de P est le nombre d'arêtes utilisées. Une chaine qui ne passe qu'au plus une fois par chaque sommet est dite élémentaire. Une chaine qui ne passe qu'au plus une fois par chaque arête est dite simple.

Un cycle C d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite d'arêtes consécutives (chaine simple) dont les deux sommets extremitées sont identiques. Dans un cycle élémentaire, le degré de tous les sommets est égale à deux. La longueur d'un cycle est le nombre de ses sommets (ou de ses arêtes). Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.La maille d'un graphe G notée $g(G)$ est la longueur d'un plus petit cycle de G.

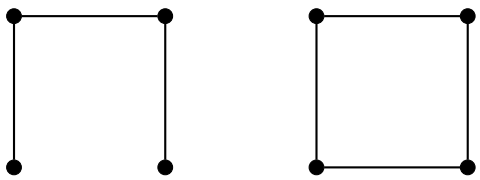


FIGURE 1.1.3 : Chaine P_4 et cycle C_4.

1.2 Partition de graphes

Soit un graphe $G = (V, E)$. Une partition $\mathcal{P}$ de G est une partition de ses sommets ou ses arêtes suivant certaines règles. Si le nombre de classes dans la partition $\mathcal{P}$ est fixé a un entier k, on parle de la k-partition, ou bien, on dit que la partition $\mathcal{P}$ contient k classes.

Ensemble maximal (resp, minimal) / maximum (resp, minimum)

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimal (resp. maximal) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \in A$ (resp. $B \in A$) tel que $G[B]$ vérifie P. Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (resp. maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \in V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $\mid A \mid > \mid B \mid$ (resp. $\mid B \mid > \mid A \mid$) où $\mid A \mid$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.3 Quelques graphes particuliers

• Un graphe G est dit *d-régulier* si tout ses sommets sont de degré d .par exemple les cycles sont des graphes 2-réguliers.

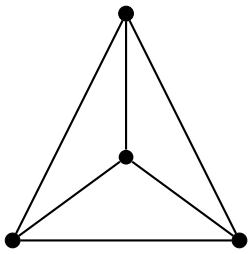


FIGURE 1.3.1 : Graphe 3-régulier.

• Un *graphe complet* d'ordre n , noté par K_n est un graphe dont tous ses sommets sont de degré n-1 (i.e tous les sommets sont des sommets universels).
Un sous ensemble de sommets dans un graphe G tel que chaque deux sommets sont adjacents

est appelé une clique .L'ordre maximale d'une clique dans un graphe G est appelé le nombre de clique de G , noté par $\omega(G)$.

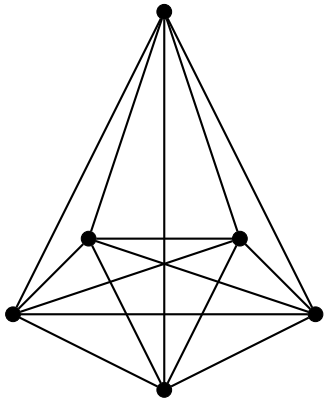


FIGURE 1.3.2 : Graphe complet K_6.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, G est un *graphe biparti* s'il exist une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensemble V_1 et V_2 tels que les sous-graphe $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête donc chaque aréte ait une extrémitée dans V_1 et l'autre dans V_2. Si $|V_1| = n_1$ et $|V_2| = n_2$, alors G est noté K_{n_1,n_2}.

• Un graphe *biparti complet* (un biclique) est un graphe biparti tel que chaque sommet de V_1 est adjacent à chaque sommet de V_2..



FIGURE 1.3.3 : Graphe biparti et graphe biparti complet.

• Le graphe *complémentaire* $\overline{G} = (V, \overline{E})$d'un graphe G=(V,E) est le graphe pour lequel $V(\overline{G} = V(G)$ et $uv \in \overline{E}$si et seulement si $uv \nsubseteq E$.

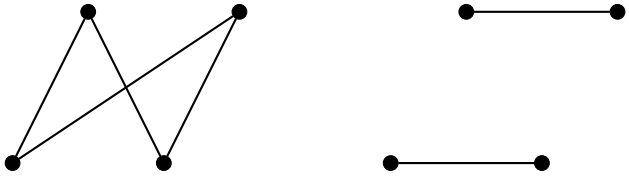


FIGURE 1.3.4 : Graphe et son complèmentaire.

• Un *arbre* noté T est un graphe connexe sans cycle . les sommets d'un arbre sont appelés *noeuds* de l'arbre . les sommets pendants d'un arbre sont appelés *des feuilles*.

— Un arbre d'ordre n possède exactement n-1 arétes .

— Une foret est un graphe non connexe dont ses composantes connexes sont des arbres.

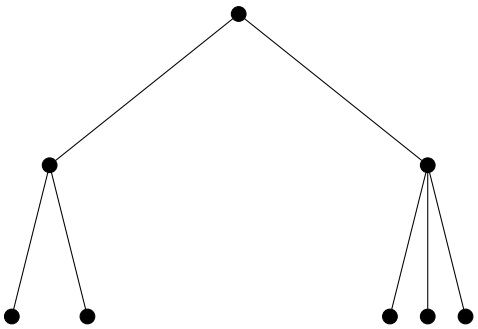


FIGURE 1.3.5 : Arbre

• Une *étoile* est un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = k$, noté $K_{1,k}$. On peut définir une étoile comme un graphe connexe dont tous les sommets sauf un sont de degré 1. L'étoile $K_{1,3}$ est une griffe.

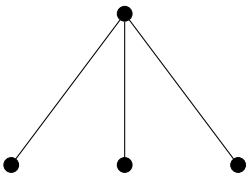


FIGURE 1.3.6 : Etoile $K_{1,3}$

• La *roue* W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet centre à tous les sommets du cycle C_{n-1}. La notation W_n provient du nom anglais *wheel graph* , mais elle n'est pas universelle ,certains auteurs préfèrent W_{n-1} faisant référence à la longueur du cycle.

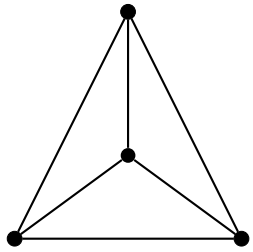


FIGURE 1.3.7 : Graphe Roue W_4

• Le graphe *adjoint* ou *Line graph* d'un graphe non orienté G est un graphe qui représente la relation d'adjacence entre les arêtes de G.

Étant donné un graphe G, son line graph L(G) est le graphe défini de la façon suivante :

— Chaque sommet de L(G) représente une arête de G.

— Deux sommets de L(G) sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes partagent une extrémité commune dans G (on dit alors qu'elles sont adjacentes).

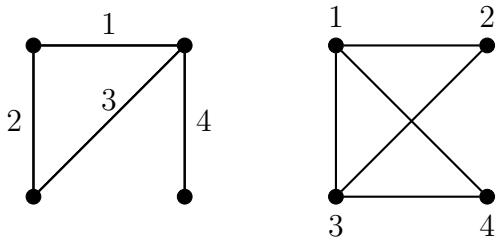


FIGURE 1.3.8 : Graphe G et son graphe adjoint $L(G)$

1.4 Invariants de graphe

Les graphes G et H sont dits *isomorphes* et on écrit $G \simeq H$ s'il existe une application bijective f entre les sommets de G et ceux de H, $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ telle que pour toute paire de sommets u, v de G, l'arête $uv \in E(G)$ si et seulement si l'arête $f(u)f(v) \in E(H)$. En d'autre terme, un isomorphisme est un changement de nom des sommets.

• Un invariant d'un graphe est une propriété préservé par isomorphisme comme le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes.

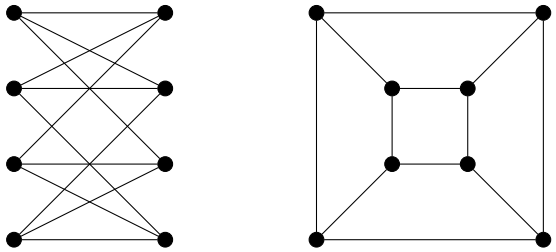


FIGURE 1.4.1 : Exemple de deux graphes isomorphes

Un couplage C dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux-à-deux non-adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une aréte de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage C qui sature tous les sommets de G est parfait. une chaine C-alternée est une chaine élémentaire dont ses arétes sont alternativement dans le couplage C et dans $E \setminus C$. Une chaine C-alternée est dite C-augmentante si ses extrémitées sont insaturés par C.

On a les propriétées suivantes d'un couplage dans le graphe G :

1. Le cardinal d'un couplage est au plus $n/2$, ceci est du au fait que chaque arête du couplage sature deux sommets.
2. Un couplage est parfait si et seulement si $\beta(G) = n/2$.
3. Tout graphe d'ordre impair ne contient pas de couplage parfait. Egalement, un graphe d'ordre pair ne possède pas nécessairement un couplage parfait. Par exemple, une étoile d'ordre $2n$, n'admet pas un couplage parfait.
4. Le nombre de sommet insaturé par un couplage C est $n - 2\,|C|$.

Un ensemble *indépendant* de G (appelé aussi stable) est un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Un stable maximum S de G est un stable de cardinalité maximale. Le nombre de stabilité (nombre d'indépendance), noté $\alpha(G)$, est le cardinal maximum d'un stable S de G.

1.5 Domination dans les graphes

On peut dire que le problème des "cinq reines" est l'origine de l'étude des ensembles dominants dans les graphes. En 1862, De Jaenisch [13] a étudié le problème des reines dans un jeu d'échecs, il voulait déterminer le nombre minimum de reines qui peuvent être placées sur l'échiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient attaquées ou occupées par une reine en un seul coup. Il a montré que le nombre minimum de reines pour un échiquier 8×8 est cinq. Le problème de la reine dominante peut être énoncé en général comme la domination des sommets d'un graphe, et le nombre minimum de reines reste indéterminé .

Claude Berge dans son livre [5] a déduit pour le première fois le concept du nombre de domination d'un graphe. Il a appelé ce nombre le "coefficient de la stabilité externe". Le terme "ensemble dominant" et "nombre de domination" a été utilisé pour la première fois par Ore dans son livre [24]. En 1977, Cockayne et Hedetniemi [8] ont publié une étude des rares résultats connus à l'époque concernant les ensembles dominants dans les graphes. Dans ce papier, Cockayne et Hedetniemi ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour le nombre de domination d'un graphe, qui est devenu par la suite la notation acceptée.

Domination des arêtes

Le concept de la domination des arêtes a été introduit la première fois par Mitchell et Hedetneimi [22]. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble X de E est un dominant du graphe G si toute arête $e \in E$ est ou bien dans X ou bien adjacent à une arête de X. Une arête domine toute les arêtes de son voisinage fermé. Le nombre de domination des arêtes noté $\gamma'(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble d'arêtes dominant. Un ensemble d'arêtes dominant X est dit *indépendant* si ses arêtes sont deux-à-deux non-adjacentes. (i.e : chaque arêtes $e \in X$ est une *arête indépendante*). γ'_i est le cardinal minimum d'un dominant indépendant d'arêtes

Théorème 1.5.1 *[18] Soit C_n un cycle d'ordre n ,alors : pour tout $n \geqslant 3$,*

$$\gamma'(C_n) = \lceil n/3 \rceil$$

Théorème 1.5.2 *[7] Soit G un graphe d'ordre n, alors :*

$$\gamma'(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$$

Les auteurs de [1] ont caractérisé les graphes tels que la borne est atteinte ;

Théorème 1.5.3 *[1] Pour tout graphe connexe G d'ordre paire p , $\gamma'(G) = \lfloor p/2 \rfloor$ si et seulement si G est isomorphe à K_p ou $K_{p/2,p/2}$.*

1.6 Coloration dans les graphes

Une coloration (propre) d'un graphe G est une application C de $V(G)$ dans un ensemble $\{1, 2, ...k\}$ d'entiers positifs, appelés couleurs, telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Ainsi, chaque ensemble de sommets de même couleur est un stable de G. Autrement dit, une coloration est une partition de l'ensemble des sommets $V(G)$ en stables.

Coloration des arêtes

Le probléme de la coloration des arêtes a été posé en 1880 en relation avec la conjucture des quatres couleurs. La coloration des arêtes d'un graphe consiste à attribuer à chaque arête une couleur , en évitant que deux arêtes ayant une extremité commune (adjacentes) soient de la méme couleur.Ainsi, chaque ensemble d'arêtes de même couleur est un couplage de G.

Autrement dit, une coloration d'arêtes est une partition de l'ensemble d'arêtes de G en couplage.Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour réaliser cette coloration est appelé

indice chromatique de G ou **nombre chromatique des arêtes** de G noté $\chi'(G)$ définie par Claude Berge dans [5].

Chapitre 2

Partition d'arêtes domatique d'un graphe

L'un des paramètres importants de la domination dont l'étude a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs est le nombre domatique, voir [3, 6, 10, 16]. Le concept de la partition domatique est semblable à celui de la partition en stables.
Par analogie avec le nombre chromatique lié aux partitions des sommets d'un graphe G en ensembles indépendants, Cockayne et Hedetniemi ont introduit le nombre domatique en étudiant des partitions des sommets de G en ensembles dominants et ont défini le nombre domatique voir [9]. Cockayne [10] a ensuite introduit le nombre a-domatique comme la contre-partie du nombre achromatique. et en 2013, Favaron a introduit le nombre b-domatique en considérant un nouveau type de maximalité d'une partition domatique.

Dans ce chapitre, on donnera quelques résultats connus sur la partition domatique dans les graphes. Par ailleurs, on présente des travaux de Zelinka [28, 29] concernant le nombre domatique. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on introduit l'analogie de cette partition dans l'ensemble des arêtes d'un graphe établis par Zelinka dans [26].

2.1 Partition domatique

Avant de commencer, on a besoin de donner les définitions suivantes qui sont nécéssaires pour la partition domatique d'un graphe.

Définition 2.1.1 *Une partition domatique d'un graphe G est une partition de son ensemble de sommets V en ensembles dominants.*

La partition $\{V\}$ de cardinalité 1 est domatique et les partitions domatiques les plus intéressantes sont celles de grande cardinalité.

Définition 2.1.2 *Soient $C_1, ..., C_k$ les classes d'une partition domatique $\mathcal{P}$, i.e. $\mathcal{P} = \{C_1, ..., C_k\}$ une partition domatique. Un sommet $x \in C_i$ est dominé par $V \setminus C_i$ si x admet au moins un voisin dans chaque classe différente de sa classe C_i. On note qu'une partition est domatique si tout sommet $x \in V$ est dominé par chaque classe différente de sa propre classe.*

Définition 2.1.3 *Le nombre domatique d'un graphe G, noté $d(G)$ est le nombre maximum de classes qui partitionnent l'ensemble V en ensembles dominants.*

Remarque 2.1.1 *Pour toute classe C_i, $i = 1, ..., k$, on a $|C_i| \geq \gamma(G)$.*

En 1977, Cockayne et Hedetniemi [9] ont présenté la première borne supérieure pour le nombre domatique en fonction de $\delta(G)$.

Théorème 2.1.1 ([9]) *Pour tout graphe G, on a*

$$d(G) \leq \delta(G) + 1.$$

De plus, ils ont établié une relation entre le nombre domatique et le nombre dominant.

Théorème 2.1.2 ([9]) *Pour tout graphe G, on a*

$$d(G)\gamma(G) \leq n.$$

Zelinka [28] a donné des bornes inférieures pour le nombre domatique :

Théorème 2.1.3 ([28]) *Pour tout graphe G de degré minimum δ,*

$$d(G) \geq \frac{n}{n - \delta(G)}.$$

Théorème 2.1.4 ([28]) *Pour tout graphe G,*

$$d(G) \geq \gamma(\overline{G}).$$

Quelques valeur exactes du nombre domatique $d(G)$ dans des familles particuliéres de graphe sont données dans [9, 10, 11].

Proposition 2.1.1 ([9, 10, 11])

1. $d(T) = 2$, $n \geq 2$.
2. $d(C_{3n}) = 3$ et $d(C_{3n+1}) = d(C_{3n+2}) = 2$, $n \geq 1$.
3. $d(K_n) = n$, $n \geq 2$.
4. $d(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$, $m, n \geq 2$.

La Figure 2.1.1 suivante représente deux partitions domatiques de K_4 et $K_{4,5}$.

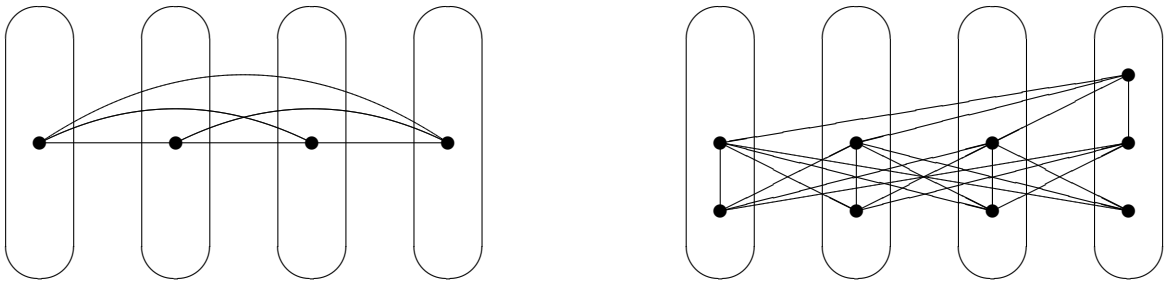


FIGURE 2.1.1 : Deux partitions domatiques du K_4 et $K_{4,5}$.

2.1.1 Les graphes domatiquement pleins

Définition 2.1.4 *Les graphes G tels que $d(G) = \delta + 1$ sont appellés les graphes domatiquement pleins.*

La propriété de la plénitude domatique a toujours été d'un grand intérêt pour les chercheurs, une variété de classes de graphe a été étudiée. Afin d'exhiber cette propriété, nous citons les résultats suivants :
Les graphes connus être domatiquement pleins sont le graphe complet K_n, le graphe sans arêtes et les arbres.

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un graphe régulier domatiquement plein est établie par Zelinka [28] :

Théorème 2.1.5 ([28]) *Un graphe G régulier d'ordre n est domatiquement plein de nombre domatique d existe si et seulement si d divise n. L'ensemble de ses sommets est tel que :*

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{d} V_i, V_i \cap V_j = \emptyset, |V_i| = n/d$$

avec la propriété que le sous graphe $G[V_i \cup V_j]$ est un graphe régulier de degré 1. (pour $i = 1, ..., d$, $j = 1, ..., d$ et $i \neq j$).

2.2 Partition d'arêtes domatique

Par analogie avec le concept de la partition domatique, Zelinka dans [26] a définit la partition d'arêtes domatique.
Une partition d'arêtes domatique d'un graphe est une partition de son ensemble d'arêtes en ensembles dominants.
Le problème de partitionnement des arêtes devient un problème de coloration des arêtes tel que chaque arête est adjacentes à tous les autres classes(couleurs).

Définition 2.2.1 *[26] Le nombre d'arêtes domatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $ed(G)$ est le nombre maximum de classes qui partitionnent l'ensemble E.*

Définition 2.2.2 *Une arête $e \in \mathcal{C}$ est dominée par $E \setminus \mathcal{C}$ si e admet au moins un voisin dans chaque classe différente de sa classe $\mathcal{C}$.*

Théorème 2.2.1 *[26] Soit G un graphe simple de degré minimum de sommet δ et degré minimum d'arête δ_e, alors on a :*

$$\delta(G) \leq ed(G) \leq \delta_e(G) + 1$$

Zelinka [26] a démontré que cette chaine d'inégalité peut pas être améliorer.

Proposition 2.2.1 *[27] Tout graphe G de degré minimum d'arête δ_e satisfait :*

$$ed(G) \leq \delta_e + 1$$

.

Les graphes tels que $ed(G) = \delta_e + 1$ sont appelés des graphes arêtes-domatiquement pleins. Zelinka dans [27] a caractérisé les graphes *arêtes-domatiquement pleins.*

Exemple 2.2.1 *La subdivision du W_5 est un graphe arêtes-domatiquement plein.*

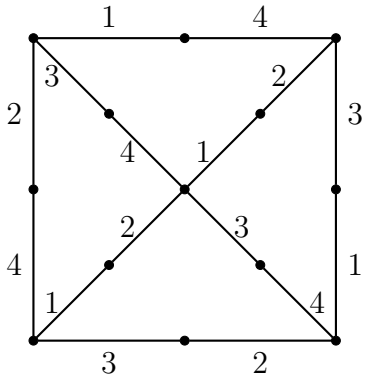


FIGURE 2.2.1 : Partition d'arêtes domatique du $S(W_5)$

Proposition 2.2.2 *Pour tout graphe G on a :*

$$ed(G)\gamma'(G) \leq m$$

En effet, chaque classe contient au moins γ' arêtes.

2.2.1 Nombre d'arêtes domatique de certains graphes

Proposition 2.2.3 *[26]*

Soit C_n un cycle d'ordre n, $n \geq 3$ alors :

$$ed(C_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0[3] \\ 2 & sinon \end{cases} .$$

Exemple 2.2.2 *Soit C_4 un cycle d'ordre 4, et C_6 un cycle d'ordre 6 , alors $ed(C_4) = 2$ et $ed(C_6) = 3$*

Corollaire 2.2.1 *[26] Soit P_n une chaine de longueur n, alors*

$$ed(P_n) = 2$$

Proposition 2.2.4 *[26] Soit K_n un graphe complet d'ordre n, $n > 2$ alors : $ed(K_n) = n$ si n est impair, $ed(K_n) = n - 1$ si n est pair.*

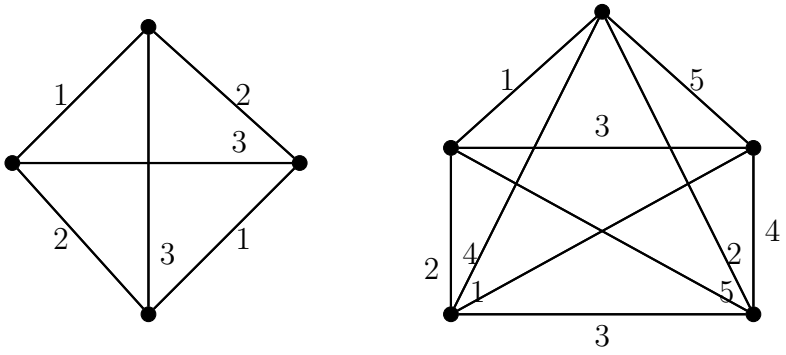


FIGURE 2.2.2 : Partition d'arêtes domatique de K_4 et K_5

Proposition 2.2.5 *[26] Soit $K_{n,m}$ un graphe biparti complet, alors :*

$$ed(K_{n,m}) = max(n, m)$$

Théorème 2.2.2 *[26] Soit T un arbre de degré minimum d'arête δ_e, on a :*

$$ed(T) = \delta_e(T) + 1$$

.

Corollaire 2.2.2 *[26] Le nombre d'arêtes domatique d'une étoile égale au nombre de ses arêtes. Autrement dit*

$$ed(S_n) = n - 1$$

Chapitre 3

Nombre d'arêtes b-domatique

Ce chapitre est consacré à l'étude du concept de la partition d'arêtes domatique b-maximale dans les graphes . En premeir lieu , on va présenter les travaux établis par Favaron concernant la partition domatique .Ensuite on va introduire le nombre d'arêtes b-domatique et proposer des propriétées concernant le paramètre $ebd(G)$. A la fin on déterminera la valeur exacte de ce paramètre de certains graphes.

3.1 Partition domatique b-maximale

Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite b-maximale si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que celle de $\mathcal{P}$ ne peut être obtenue en regroupant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe.

Définition 3.1.1 *Soit $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ une partition domatique. On dit que $\mathcal{P}$ est une partition domatique b-maximale s'il n'existe pas de k sous-ensembles $C'_i \subset C_i, ..., C'_k \subset C_k$ (parmi eux $k-1$ peuvent être vides et $\bigcup_{i=1}^{k} C'_i \neq \emptyset$) de telle sorte que la partition*

$$\mathcal{P}' = \{C_1 \setminus C'_1, C_2 \setminus C'_2, ..., C_k \setminus C'_k, C'_1 \cup C'_2 \cup ... \cup C'_k\}$$

soit domatique.

Remarque 3.1.1 *Une partition domatique b-maximale de cardinalité maximum est une partition domatique.*

Le concept du nombre b-domatique a été introduit en 2013 par Favaron [14]. Nous donnons ici quelques propriétés et résultats établis concernant ce nombre.

Proposition 3.1.1 ([14]) *Une partition domatique telle que chaque classe C contienne un sommet isolé dans $G[C]$ est a-maximal.*

Proposition 3.1.2 ([14]) *Une partition domatique $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ est b-maximale si et seulement si pour tout choix d'ensembles dominants minimaux $C'_i \subset C_i, ..., C'_k \subset C_k$ de G, l'ensemble $V \setminus (C'_1 \cup ... \cup C'_k)$ ne domine pas G.*

Proposition 3.1.3 ([14]) *Toute partition domatique $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant minimal de G est b-maximale.*

Proposition 3.1.4 ([14]) *Toute partition domatique a-maximale $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ dont chaque classe C_i, $1 \leq i \leq k-1$, est un ensemble dominant minimal de G est b-maximale.*

Proposition 3.1.5 ([14]) *Si G admet une partition b-maximale de cardinalité k, alors il existe une famille $\{D_1, D_2, ..., D_k\}$ de k ensembles dominants minimaux disjoints de G tel que $V \setminus (D_1 \cup ... \cup D_k)$ n'est pas un ensemble dominant de G.*

Définition 3.1.2 *Une classe dominante C dans $\mathcal{P}$ est* indivisible *si on ne peut pas diviser C en deux nouveaux classes dominants C' et C''.*

Le résultat de la proposition suivante est légèrement plus faible que celui de la réciproque de la Proposition 3.1.5.

Proposition 3.1.6 ([14]) *S'il existe une famille $\{D_1, D_2, ..., D_k\}$ avec k ensembles dominants minimaux disjoints de G et un indice i_0 tel que $V \setminus (D_1 \cup ... \cup D_k)$ ne domine pas G, mais $V \setminus \bigcup_{i=1, i \neq i_0}^{k} D_i$ est un ensemble dominant indivisible de G, alors G admet une partition b-maximale de cardinalité k.*

Définition 3.1.3 *La cardinalité minimale d'une partition b-maximale de G est appelée le nombre b-domatique est notée par $bd(G)$.*

Zelinka [29] a montré que pour tout entier a avec $2 \leq a \leq n$ et $a \neq n-1$, il existe un graphe connexe G d'ordre n tel que $ad(G) = a$. Un résultat similaire pour $bd(G)$ a été montré par Favaron [14].

Théorème 3.1.1 ([14]) *Soient b, n deux entiers tels que $2 \leq b \leq n$. Alors il existe un graphe connexe G d'ordre n tel que $bd(G) = b$.*

Remarque 3.1.2 *Si G contient des sommets isolés, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique et $ad(G) = bd(G) = d(G) = 1$.*

Dans ce qui suit, on ne considère que les graphes sans sommets isolés.

Notons que toute partition domatique maximale est b-maximale et toute partition b-maximale est a-maximale. En outre, dans [24] Ore a observé que l'ensemble des sommets de tout graphe sans sommets isolés possède deux ensembles dominants disjoints, ce qui implique que $bd(G) \geq 2$. D'où, les inégalités suivantes :

Proposition 3.1.7 ([14]) *Tout graphe G de degré minimum $\delta(G) \geq 1$ satisfait*

$$2 \leq ad(G) \leq bd(G) \leq d(G) \leq \delta(G) + 1.$$

Si un graphe G possède plusieurs composantes connexes $G_1, ..., G_k$, Chang [6] et Zelinka [28] ont montré que $d(G) = \min\{d(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ et $ad(G) = 2$ si $\delta(G) \geq 1$. Le théorème suivant détermine $bd(G)$ lorsque G est non connexe.

Théorème 3.1.2 ([14]) *Soit $G_1, ..., G_k$ les composantes connexes d'un graphe G sans sommets isolés. Alors*

$$bd(G) = \min\{bd(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

3.2 Détermination de $bd(G)$ pour des classes particulières de graphes

D'après la Proposition 3.1.7 chaque graphe connexe G de degré minimum $\delta(G) = 1$, et en particulier chaque arbre non-trivial satisfait la condition $bd(G) = d(G) = 2$.

Le graphe complet K_n satisfait $bd(K_n) = d(K_n) = n = \delta(G) + 1$.

Cockayne [11] a montré que :
$d(C_n) = 3$ si n est divisible par 3, sinon $d(C_n) = 2$
La Figure 3.2.1 suivante présente la partition domatique d'un cycle C_6.

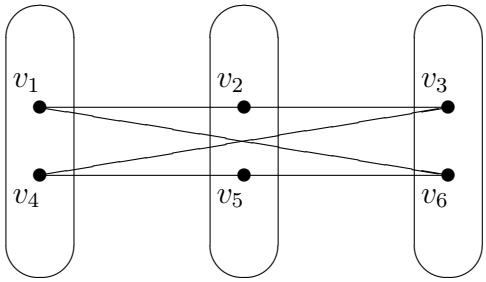


FIGURE 3.2.1 : Partition domatique du cycle C_6.

Théorème 3.2.1 ([14]) *Le cycle C_n satisfait $bd(C_n) = 2$ pour $n \geq 4$.*

Le cycle C_6 de la Figure 3.2.2 est un exemple, où la partition domatique est b-maximale de cardinalié 2.

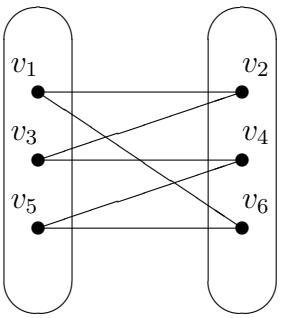


FIGURE 3.2.2 : Partition domatique b-maximale du cycle C_6.

Théorème 3.2.2 ([14]) *Soit $K_{p,q}$ un graphe biparti complet avec $2 \leq p \leq q$. Alors $bd(K_{p,q}) = 2$ et $d(K_{p,q}) = p$.*

La Figure 3.2.3 suivante présente la partition domatique d'un graphe biparti complet $K_{4,4}$.

Le graphe biparti complet $K_{4,4}$ de la Figure 3.2.4 est un exemple, où la partition domatique est b-maximale de cardinalié 2.

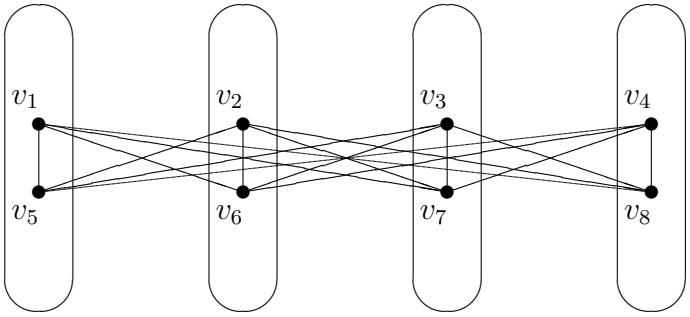


FIGURE 3.2.3 : Partition domatique du graphe biparti complet $K_{4,4}$.

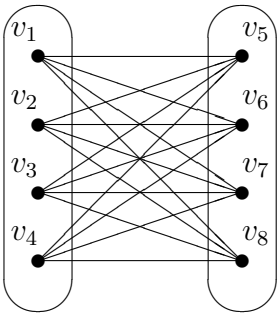


FIGURE 3.2.4 : Partition domatique b-maximale du graphe biparti complet $K_{4,4}$.

3.3 Propriétés préliminaires

Cockayne et Hedetniemi [9] ont montré le résultat suivant.

Proposition 3.3.1 ([9]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G)$. Alors*

$$d(G) \leq \min\{\frac{n}{\gamma(G)}, \delta(G)+1\}. \tag{3.3.1}$$

Favaron [14] a montré que si G possède un sommet isolé, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique de G. Elle a montré également que le nombre domatique de G est une borne supérieure du nombre b-domatique de G.

Proposition 3.3.2 ([14]) *Soit G un graphe de degré minimum $\delta(G)$. Si $\delta(G) = 0$, alors $bd(G) = d(G) = 1$, et si $\delta(G) \geq 1$, alors $2 \leq bd(G) \leq d(G)$.*

Des Propositions 3.3.1 et 3.3.2 découle le résultat suivant :

Proposition 3.3.3 ([14]) *Tout graphe G de degré minimum $\delta(G)$ satisfait :*

$$bd(G) \leq \min\{\frac{n}{\gamma(G)}, \delta(G)+1\}.$$

Si G est un graphe sans sommets universels, alors $\gamma(G) \geq 2$. Ainsi, en utilisant la Proposition 3.3.3, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1 *Si G est un graphe à n sommets et sans sommets universels, alors $bd(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Une condition suffisante pour laquelle une partition domatique donnée d'un graphe G est b-maximale est donnée ci-dessous. Pour un sommet $v \in V$, notons par C_v la classe d'une partition domatique $\mathcal{P}$ contenant v.

Théorème 3.3.1 ([4]) *Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique d'un graphe $G = (V, E)$. Si G possède un sommet v tel que pour tout sommet $u \in N_G[v]$, l'ensemble $pn[u, C_u]$ est non vide, alors $\mathcal{P}$ est une partition b-maximale de G.*

3.4 Graphes G tels que $bd(G) = 2$

Nous présentons ci-après d'autres classes de graphes dont le nombre b-domatique est égal à 2.

Théorème 3.4.1 ([4]) *Si G contient un sommet tel que ses voisins forment un ensemble indépendant, alors : $bd(G) = 2$.*

Corollaire 3.4.1 *[4] Si G est un graphe sans triangles, alors : $bd(G) = 2$.*

3.5 Partition d'arêtes domatique b-maximale

Dans cette partie , on va définir une autre partition de l'ensemble des arêtes qui est la partition d'arêtes domatique b-maximale. Une partition d'arêtes $\mathcal{P}$ est domatique b-maximale si aucune partition $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue en rassemblant des sous-ensembles de certains classe de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe.

Définition 3.5.1 *$\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_p\}$ est b-maximale s'il n'existe pas p sous-ensembles $\mathcal{C}'_i$ de $\mathcal{C}_i$ (parmi eux $p-1$ peuvent être vides) de telle sorte que la partition*

$$\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \backslash \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_2 \backslash \mathcal{C}'_2, ..., \mathcal{C}_p \backslash \mathcal{C}'_P, \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2 \cup ... \cup \mathcal{C}'_P\}$$

soit arête-domatique.

Remarque 3.5.1 *Une partition d'arêtes domatique b-maximale de cardinalité maximum est une partition d'arêtes domatique.*

La proposition 3.5.1 est une autre formulation de la définition d'une partition d'arêtes domatique b-maximale.

Proposition 3.5.1 *Une partition d'arêtes domatique $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ est b-maximale si et seulement si pour tout choix d'ensembles dominants minimaux $C'_i \subset C_i, ..., C'_k \subset C_k$ de G, l'ensemble $E \setminus (C'_1 \cup ... \cup C'_k)$ ne domine pas G.*

Proposition 3.5.2 *Toute partition d'arêtes domatique $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$dont chaque classe est un ensemble d'arêtes dominant minimal de G est b-maximale.*

Preuve. Etant donné que chaque classe est un ensemble d'arêtes dominant minimal, $\mathcal{C}_i = \mathcal{D}_i$ pour tout $i = 1, .., k$ et $E \setminus \bigcup \mathcal{D}_i$ ne domine pas G. ■

Proposition 3.5.3 *Si G admet une partition d'arêtes b-maximale de cardinalité k, alors il existe une famille $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_k\}$ de k ensembles d'arêtes dominants minimaux disjoints de G tel que $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ n'est pas un dominant de G.*

Exemple 3.5.1 *La figure 3.5.1 présente deux partitions d'arêtes domatiques b-maximale de C_6, l'une de cardinalité maximum et l'autre de cardinalité minimum.*

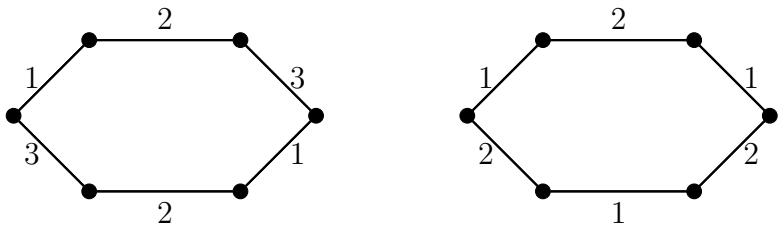


FIGURE 3.5.1 : Deux partitions d'arêtes domatique b-maximale de C_6

3.5.1 Nombre d'arêtes b-domatique ebd(G)

Définition 3.5.2 *La cardinalité minimum d'une partition d'arêtes domatique b-maximale est appelée le nombre d'arêtes b-domatique noté $ebd(G)$.*

Notons que l'ensemble des arêtes de tout graphe G sans arête isolée possède deux sous ensembles dominants disjoints,ce qui implique que $ebd(G) \geq 2$ D'où , le résultat suivant est immédiat :

Proposition 3.5.4 *Tout graphe G de degré minimum d'arête $\delta_e \geq 1$ satisfait la chaine d'inégalité suivante :*

$$2 \leq ebd(G) \leq ed(G) \leq \delta_e + 1$$

.

Daprés la proposition 3.5.4 et la proposition 2.2.2 on a les deux corollaires suivantes :

Corollaire 3.5.1 *Pour tout graphe simple G, on a :*

$$ebd(G) \leq \frac{m}{\gamma'}$$

.

Corollaire 3.5.2 *Soit G un graphe simple de degré minimum d'arête $\delta_e \geq 1$, alors :*

$$ebd(G) \leq min\{\frac{m}{\gamma'}, \delta_e + 1\}$$

Quand un graphe G possède plusieures composantes $G_1, ..., G_k$, Favaron dans [14] a prouvé que $bd(G) = min\{bd(G_i)|1 \leqslant i \leqslant k\}$., la proposition suivante détermine $ebd(G)$ lorsque G est non connexe.

Proposition 3.5.5 *Soit $G_1, ..., G_k$ les composantes d'un graphe non connexe G, Alors :*

$$ebd(G) = min\{ebd(G_i)|1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Preuve. Soit G un graphe non connexe de k composantes connexes. Soit $\mathcal{P}$ une partition d'arêtes domatique de G. La restriction $\mathcal{P}_i$ de $\mathcal{P}$ à la composante G_i est une partition d'arêtes domatique de G_i de la même cardinalité que $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{P}'$ une autre partition d'arêtes domatique de G et $\mathcal{P}'_i$ sa restriction sur G_i. Si , pour tout $1 \leq i \leq k$, $\mathcal{P}'_i$ est obtenue à partir de $\mathcal{P}_i$ alors $\mathcal{P}'$ est obtenue à partir de $\mathcal{P}$. Cela signifie que si $\mathcal{P}_i$ n'est pas b-maximale dans G_i alors $\mathcal{P}$ n'est pas b-maximale. Par conséquent, si $\mathcal{P}$ est b-maximale, en particulier, si $\mathcal{P}$ est une partition $ebd(G)-$maximale, alors il existe une composante G_i telle que $\mathcal{P}_i$ est

b-maximale dans G_i. Par conséquent $|\mathcal{P}_i| \geq ebd(G_i)$ pour un certain i. Comme $|\mathcal{P}_i| = |\mathcal{P}|$ et $|\mathcal{P}| = ebd(G)$ on obtient $ebd(G) \geq min\{ebd(G_i)|1 \leqslant i \leqslant k\}$.
Dans l'autre sens, supposons sans perte de généralité que $ebd(G_1) = min\{ebd(G_i); 1 \leq i \leq k\}$. Soit $\mathcal{P}_i$ est une partition d'arêtes domatique b-maximale de G_i. Soit $\mathcal{P}$ une partition d'arêtes domatique de G telle que chaque classe contient exactement une classe de $\mathcal{P}_1$ et au moins une classe de $\mathcal{P}_i$ pour $2 \leq i \leq k$. Puisque $\mathcal{P}_1$ est b-maximale alors $\mathcal{P}$ est b-maximale et $ebd(G) \leq |\mathcal{P}|$. Comme $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1|$, $ebd(G) \leq min\{ebd(G_i); 1 \leq i \leq k\}$. Par conséquent $ebd(G) = min\{ebd(G_i)|1 \leqslant i \leqslant k\}$.

■

3.5.2 Nouvelles propriétés d'une partition d'arêtes domatique b-maximale

Proposition 3.5.6 *Si $\mathcal{P}$ est une partition d'arêtes domatique b-maximale alors toute classe contient au plus une arête universelle.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ une partition d'arêtes domatique b-maximale de G .On suppose par l'absurde qu'il existe une classe $\mathcal{C}_i$ qui contient deux arêtes universelles e_1 et e_2 , alors on peut diviser $\mathcal{C}_i$ en deux sous-ensembles d'arêtes dominants , contradiction avec la maximalité de $\mathcal{P}$. ■

Corollaire 3.5.3 *L'étoile S_n satisfait $ebd(S_n) = n - 1$.*

Remarque 3.5.2 *La réciproque de la proposition 3.5.6 est fausse en générale.*

Exemple 3.5.2 *Soit $\mathcal{P} = \{\{e_1, e_5\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}$ une partition d'arêtes du graphe de la figure 3.5.2 . La partition $\mathcal{P}$ contient au plus une arête universelle dans chaque classe, mais $\mathcal{P}$ n'est pas b-maximale car il existe une partition $\mathcal{P}' = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3, e_4, e_5\}\}$ plus grande que $\mathcal{P}$ obtenue à partir de cette dernière.*

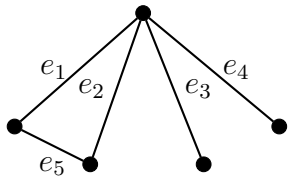


FIGURE 3.5.2 : un graphe

Proposition 3.5.7 *Si e est une arête universelle dans G, alors :*

$$ebd(G) = ebd(G \setminus \{e\}) + 1$$

.

Preuve. Soit e une arête universelle dans G, Posons $k = ebd(G \setminus \{e\})$. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ une partition d'arêtes domatique b-maximale de $G\setminus\{e\}$ de cardinalité k.Donc, il est clair de voir que $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k, \{e\}\}$ est une partition d'arêtes domatique b-maximale de G.Par conséquent $ebd(G) \leq ebd(G \setminus \{e\}) + 1$.
D'autre part, soit $t = ebd(G)$ et soit $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_t\}$ une partition d'arêtes domatique b-maximale de G.Supposons que $e \in \pi_1$ et comme $\pi \setminus \{e\}$ n'est pas une classe dominante, on observe que la partition $\{(\pi_1 \cup \pi_2) \setminus \{e\}, \pi_3, ..., \pi_t\}$ est une partition d'arêtes domatique b-maximale de $G \setminus \{e\}$ de cardinalité $t - 1$ donc $ebd(G \setminus \{e\} \leq ebd(G) - 1$ alors $ebd(G) \geq ebd(G \setminus \{e\}) + 1$.D'où l'égalité.

■

Proposition 3.5.8 *Soit G un graphe simple, si toute arête e de $E(G)$ appartient à au moins un cycle de longueur 3, alors :*

$$ebd(G) \geq 3.$$

Preuve.
Posons $\mathcal{P} = \{C_1, C_2\}$ une partition d'arête domatique b-maximale de G , soit $H \subset G$ tel que $H \simeq C_3$,soit e une arête de H. Nous déstinons les 2 cas suivante :
cas1 : Si $E(H) \in C_1$ alors $\exists\ u, v \in N(E(H))$ telles que $u, v \in C_2$ d'où $|E(H) \cap C_3| \geq 1$ et la restriction de $\mathcal{P}$ à $N(H)$ reste domatique.
cas2 : Si $e \in C_1$ et $(E(H) \setminus e) \in C_2$ alors $|E(H) \setminus e| = 2$ d'où $|E(H) \setminus e \cap C_3| \geq 1$ et la restriction de $\mathcal{P}$ à H reste domatique.
De ce fait, la partition $\mathcal{P}' = \{C_1, C_2, C_3\}$ obtenue à partir de $\mathcal{P}$ est une partition d'arêtes domatique b-maximale et par conséquent, $ebd(G) \geq 3$.

■

Une condition suffisante pour laquelle une partition domatique donnée d'un graphe G est b-maximale est donnée ci-dessous. Pour une arête $e \in E$, notons par C_e la classe d'une partition domatique $\mathcal{P}$ contenant e.

Théorème 3.5.1 *Soit $\mathcal{P}$ une partition d'arête domatique d'un graphe $G = (V, E)$. Si G possède une arête e tel que pour toute arête $h \in N_G[e]$, l'ensemble $pn[h, C_h]$ est non vide, alors $\mathcal{P}$ est une partition d'arête domatique b-maximale de G.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ une partition d'arête domatique d'un graphe $G = (V, E)$, et soit e une arête de E ayant la propriété suivante : tout arête $h \in N_G[e]$ satisfait $pn[h, C_h] \neq \emptyset$. Supposons, au contraire, que $\mathcal{P}$ n'est pas une partition d'arête domatique b-maximale de G. Ceci implique qu'il existe k sous ensembles non vides $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ tels que $\mathcal{P}' = \{\pi_1, ..., \pi_k, \bigcup_{i=1}^{k}(C_i \setminus \pi_i)\}$ est une partition d'arête domatique de G , où $\pi_i \subset C_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $\bigcup_{i=1}^{k}(C_i \setminus \pi_i) \neq \emptyset$. Posons $\pi_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k}(C_i \setminus \pi_i)$. Nous allons montrer que les arêtes de $N_G[e]$ n'appartiennent pas à π_{k+1}. En effet, supposons au contraire qu'il existe une arête $h \in N_G[e] \cap \pi_{k+1}$. Alors, il y a une classe $\pi_p \subset C_h$ qui ne contient pas h pour un certain $p \in \{1, ..., k\}$. De ce fait, soit h est isolé dans C_h et par conséquent aucun arête de π_h ne domine h pour la partition $\mathcal{P}'$, ou bien il existe un sommet $f \in pn[h, C_h]$ et par conséquent aucune arête de π_p ne domine f pour la partition $\mathcal{P}'$. Dans les deux cas, contradiction avec le fait que $\mathcal{P}'$ est une partition d'arête domatique de G. Ceci prouve que e et ses voisins ne peuvent pas appartenir à π_{k+1}. Mais dans ce cas, e sera non dominé par π_{k+1}, ce qui contredit que $\mathcal{P}'$ est une partition d'arête domatique de G. ■

3.5.3 Détérmination du $ebd(G)$ pour des classses particulières de graphe

Proposition 3.5.9 *Soit C_n un cycle d'ordre n ,$n \geq 4$ alors :*

$$ebd(C_n) = 2$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre n ,$n \geq 4$, telle que $E(C_n) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ l'ensemble de ses arêtes.

Posons $\mathcal{C}_1 = \{e_1, e_3, ..., e_{n-1}\}$ si n est pair où bien $\mathcal{C}_1 = \{e_1, e_3, ..., e_n\}$ si n est impair,

$\mathcal{C}_2 = E \setminus C_1$

Il est clair de voir que $\mathcal{C}_2$ est un dominant minimum , de ce fait $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ est une partition d'arêtes domatique.

Montrons que cette partition est b-maximale .

Si n est pair, on a $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des ensembles dominants minimaux ce qui implique (Par la proposition 3.5.2) que $\mathcal{P}$ est b-maximale.

Si n est impair, soit $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1 \setminus \{e_n\}$ un ensemble dominant minimum . On a $E \setminus (\mathcal{C}'_1 \bigcup \mathcal{C}_2 = \{e_n\}$ ne domine pas C_n alors d'après la proposition 3.5.1 la partition $\mathcal{P}$ est b-maximale.et $ebd(C_n) \leq 2$.

Par conséquent, d'après la proposition 3.5.4 $ebd(C_n) \geq 2$ alors l'égalité est atteinte et $ebd(C_n = 2$.

■

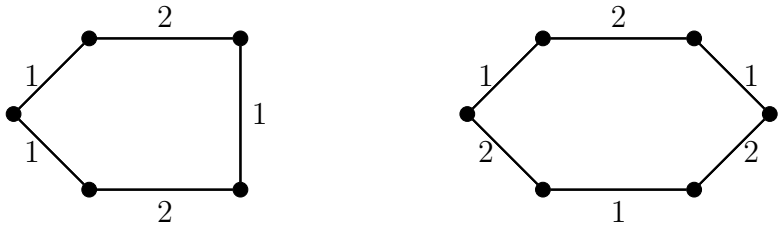


FIGURE 3.5.3 : partitions d'arêtes domatique b-maximale de C_5 et C_6

Proposition 3.5.10 *Soit P_n une chaine d'ordre n , alors :*

$$ebd(P_n) = 2$$

Preuve. On a $\delta_e(P_n) = 1$,alors d'après le corollaire 2.2.1 et la proposition 3.5.4 on a $ed(P_n) = 2$ et $2 \leq ebd(P_n) \leq 2$ d'où l'égalité. ■

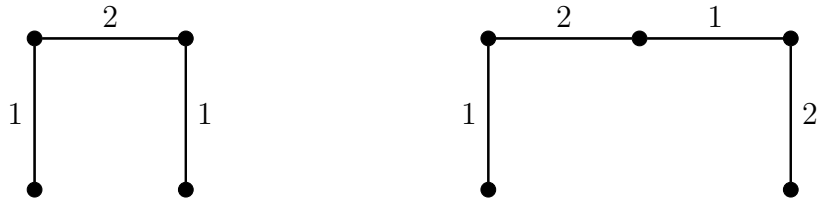


FIGURE 3.5.4 : partitions d'arêtes domatique b-maximale de P_4 et P_5

Proposition 3.5.11 *Soit K_n un graphe complet d'ordre $n \geq 3$, alors :*

$$ebd(K_n) = 3$$

Preuve. Soient K_n un graphe d'ordre $n \geq 3$, e une arête de K_n de degré $\delta_e = 2n-4$ telle que $e = x_1x_2$ (x_1 et x_2 sont les extrémités de e). Soit $\{f_i\}_{1\leq i\leq n-2}$ (respectivement $\{h_j\}_{1\leq j\leq n-2}$) l'ensemble des arêtes incidentes à x_1 (respectivement à x_2). Considérons $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, C_3\}$ une partition d'arêtes domatique telle que $C_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2}\{f_i\}$, $C_3 = \bigcup_{j=1}^{n-2}\{h_j\}$ et $C_1 = E \setminus \{C_2\} \cup \{C_3\}$. Nous allons montrer que cette partition est une partition d'arêtes domatique b-maximale. Supposons ,par l'absurde, que $\mathcal{P}$ n'est pas b-maximale, alors il existe une partition $\mathcal{P}'$ plus grande que $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}' = \{C_1', C_2', C_3', C_4\}$ avec $C_i' \in C_i$,pour $i = 1, .., 3$ et $C_4 = \bigcup_{i=1}^{3}(C_i \setminus C_i')$. On a l'arête e est isolée dans $\mathcal{C}_1$ de ce fait $\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_4 = \emptyset$. D'autre part, pour $i = 1, .., n-2$, $pn[f_i, \mathcal{C}_2] = \{h_i\}$ et $pn[h_i, \mathcal{C}_3] = \{f_i\}$ alors ; d'après le théorème 3.5.1 ; $\mathcal{C}_2 \bigcap \mathcal{C}_4 = \emptyset$ et $\mathcal{C}_3 \bigcap \mathcal{C}_4 = \emptyset$. Dans ce cas, aucune arête de $N_G[e]$ n'appartient à $\mathcal{C}_4$ d'où e sera non dominée par $\mathcal{C}_4$, contradiction avec le fait que $\mathcal{P}'$ est une partition d'arêtes domatique.Par conséquent $ebd(K_n) \leq 3$. D'autre part, on a chaque arête e de K_n appartient à un cycle de longueur 3, par la proposition 3.5.8 $ebd(K_n) \geq 3$ d'où l'égalité est attiente.

■

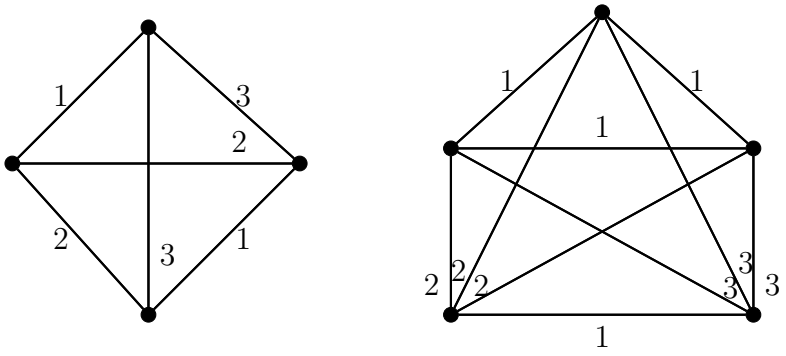


FIGURE 3.5.5 : Partition d'arêtes domatique b-maximale de K_4 et K_5

Exemple 3.5.3 *La partition $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, C_3\}$ du graphe K_4 (voir figure 3.5.5) est b-maximale car chaque classe C_i est un ensemble d'arêtes dominant minimale.*
De même pour le graphe K_5, la classe C_1 contient une arête isolée dans C_1, et C_2 et C_3 sont des ensembles d'arêtes dominants minimaux.

Proposition 3.5.12 *Soit $K_{p,q}$ un graphe bipartie complet, alors :*

$$ebd(K_{p,q}) \leq min\{p, q\}$$

Preuve. Soit $K_{p,q}$ un graphe bipartie complet tel que $p \leq q$ avec les deux sous-ensembles de sommets X et Y telles que $X = \{u_i\}_{1\leq i\leq p}$ et $Y = \{v_j\}_{1\leq j\leq q}$. Soit $\{f_{ij}\}_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq q}$ l'ensemble des arêtes incidentes à u_i

Soit $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, ..., C_p\}$ une partition telle que $C_i = \bigcup_{j=1}^{q}\{f_{ij}\}$. Montrons que cette partition est une partition d'arêtes domatique b-maximale . En effet, toute arête e appartenant à une certaine classe admet un voisins privé des autres classes (i.e $pn[e, C_e]$ est non vide alors d'après le théorème 3.5.1 $\mathcal{P}$ est une partition d'arêtes domatique b-maximale.

■

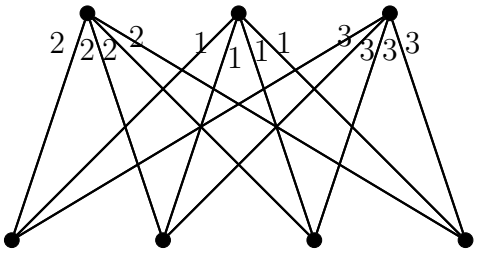


FIGURE 3.5.6 : partitions d'arêtes domatique b-maximale de $K_{3,4}$

Définition 3.5.3 *La double étoile $S_{n,m}$ est un graphe formé en ajoutant une arête qui relie les deux sommets universelles des étoiles S_n et S_m.*

Proposition 3.5.13 *Soit $S_{n,m}$ la double étoile, alors :*

$$ebd(S_{n,m}) = min\{n, m\}$$

Preuve. Soit $S_{n,m}$ la double étoile d'ordre $n+m$ telle que $n < m$ et $e = uv$ l'arête universelle de S alors ,d'après la proposition 3.5.6, $ebd(S_{n,m}) = ebd(S_{n,m} \setminus \{e\}) + 1$.On a aussi $G \simeq S_{n,m} \setminus \{e\}$ est un graphe non connexe qui possède les deux composantes $G_1 \simeq S_1$ et $G_2 \simeq S_2$ dons par la proposition 3.5.5, $ebd(G) = min\{ebd(G_1), ebd(G_2)\} = ebd(G_1) = n - 1$.D'où on trouve $ebd(S_{n,m}) = n - 1 + 1 = n$.

■

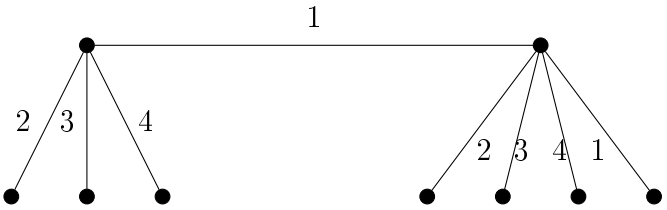


FIGURE 3.5.7 : Double étoile $S_{4,5}$

Proposition 3.5.14 *Soit T un arbre tel que $V(T) = \{u, v, s_i, p_j\}$ avec $\{s_i\}_{1\leq i\leq m}$ l'ensemble des sommets supports et $\{p_j\}_{j\geq 1}$ l'ensemble des sommets pendants, $E(T) = \{e, h_i, f_{ij}\}$avec $e = uv$ $N_T(e) = \{h_i\}$ et $f_{ij} = s_i p_j$ telle que pour chaque i, $\{f_{ij}\} \neq \emptyset$, alors :*

$$ebd(T) = 2$$

Preuve.

Posons $\mathcal{P} = \{C_1, C_2\}$ une partition d'arêtes domatique de T avec $C_1 = \{e, \{f_{ij}\}\}$ et $C_2 = \{h_i\}$. On a l'arête e est isolée dans C_1 et pour chaque i $pn[h_i, \mathcal{C}_2] = \{f_{ij}\}_{j\geq 1}$ d'où, d'après le théorème 3.5.1, cette partition est b-maximale et $ebd(T) = 2$. ■

Exemple 3.5.4 *Soit $\mathcal{P} = \{C_1, C_2\}$ une partition d'arêtes domatique de T (voir figure 3.5.8). On a C_1 contient une arête isolée dans C_1, et toute arête de C_2 admet au moins une arête pendante comme voisin privé dans C_2. Pour cela la partition $\mathcal{P}$ est b-maximale.*

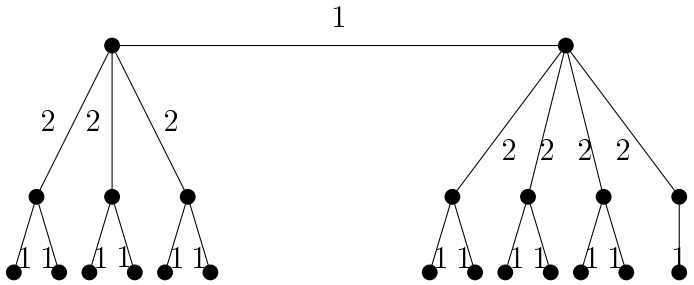


FIGURE 3.5.8 : Partition d'arêtes domatique b-maximale d'un arbre T

Définition 3.5.4 *Le graphe milieu de G, désigné par $M(G)$ est défini comme suit. l'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in E(G)$ et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

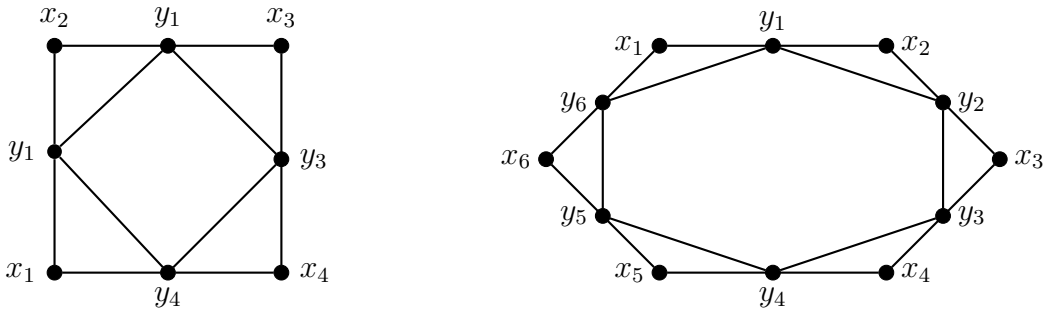


FIGURE 3.5.9 : Un graphe milieu du chaîne P_6 et du cycle C_6.

Proposition 3.5.15 *Soit $M(C_n)$ le graphe milieu du cycle C_n, alors :*

$$ebd(M(C_n)) = 3$$

Preuve. Soit G le graphe *milieu* du cycle C_n. Posons $V(G) = \{x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n\}$ tels que $V(C_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $E(C_n) = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ avec $y_j = x_j x_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. et $y_n = x_n x_1$, .$E(G) = \{f_1, f_2, ..., f_{2n}, h_1, h_2, ..., h_n\}$ tels que pour tout $i = 1, .., n$, $f_{2i-1} = x_i y_i$, $f_{2i} = y_i x_{i+1}$, $f_{2n} = y_n x_1$, $h_i = y_i y_{i+1}$ et $h_n = y_n y_1$. Posons $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ une partition d'arêtes de G telle que $\mathcal{C}_1 = \{f_1, f_3, \{h_i\}_{3 \leq i \leq n-1}\}$ $\mathcal{C}_2 = \{h_1, h_2, f_4, f_{2n}, \{f_{2i+1}\}_{2 \leq i \leq n-1}\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{f_2, f_5, h_n, \{f_{2i}\}_{3 \leq i \leq n-1}\}$. Il est facile de vérifier que cette partition est domatique b-maximale . En effet,soit $N[f_2] = \{f_1, f_2, f_3, h_1, h_n\}$, on a les arêtes f_1 et f_3 sont isolées dans $\mathcal{C}_1$, de plus $pn[h_1, \mathcal{C}_2] = \{f_2\}$, $pn[f_2, \mathcal{C}_3] = \{h_1\}$ et $pn[h_n, \mathcal{C}_3] = \{f_{2n}\}$ alors, d'après le théorème 3.5.1, cette partition est b-maximale et $ebd(M(C_n)) \leq 3$. D'autre part, on a toute arête appartient à exactement un cycle de longueur 3 ceci implique, d'aprés la proposition 3.5.8,que l'égalité est valide et $ebd(M(C_n)) = 3$.

■

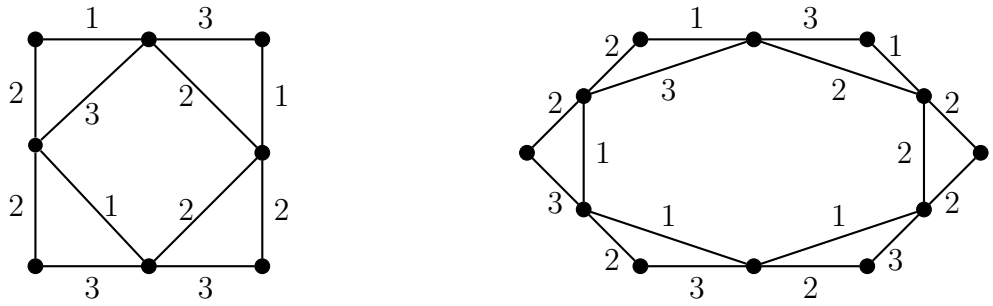


FIGURE 3.5.10 : Partition d'arêtes domatique b-maximale de $M(C_4)$ et $M(C_6)$.

Proposition 3.5.16 *Soit W_n le graphe Roue du cycle C_{n-1}, alors :*

$$ebd(W_n) = 3$$

Preuve. Soit W_n le graphe Roue du cycle C_{n-1} avec $C_{n-1} = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ et un sommet universel y. $E(W_n) = \{f_1, f_2, .., f_n, h_1, h_2, .., h_n\}$ tel que $f_i = x_i x_{i+1}$ et $f_n = x_n x_1$, $h_i = x_i y$. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ une partition d'arêtes de W_n telle que $\mathcal{C}_1 = \{f_1, \{h_i\}_{3 \leq i \leq n}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{f_{2i}\}_{1 \leq i \leq n/2}, h_1, f_{n-1}\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{\{f_{2i+1}\}_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1}, h_2, f_n\}$. Cette partition est arête-domatique, en effet, l'arête f_1 domine h_1 et h_2 et pour $i = 1, .., n$ h_i domine f_{i-1} et f_i d'où $\mathcal{C}_1$ domine $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. De même, l'arête h_1 domine h_2 et pour $1 \leq i \leq n/2$ $\{f_{2i}\}$ domine $\{f_{2i+1}\}$ donc $\mathcal{C}_2$ domine $\mathcal{C}_3$ d'où cette partition est une partition d'arêtes domatique.
Il reste à montrer que cette partition est b-maximale. On a f_1 est isolée dans $\mathcal{C}_1$,et ses voisins h_1 et f_2 sont isolées dans $\mathcal{C}_2$ et h_2 et f_n sont isolées dans $\mathcal{C}_3$ alors d'après le théorème 3.5.1 $\mathcal{P}$ est b -maximale et $ebd(W_n) \leq 3$. On a aussi, chaque arête e de W_n appartient à un cycle de longueur 3 alors, par la proposition 3.5.8, $ebd(W_n) \geq 3$ et par conséquent, $ebd(W_n) = 3$.
■

Exemple 3.5.5 *Les partitions représentées dans la figure 3.5.11 sont des partitions d'arêtes domatique b-maximale car la classe $\mathcal{C}_1$ contient une arête isolée dans $\mathcal{C}_1$ et les classes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont des ensembles d'arêtes indépendants.*

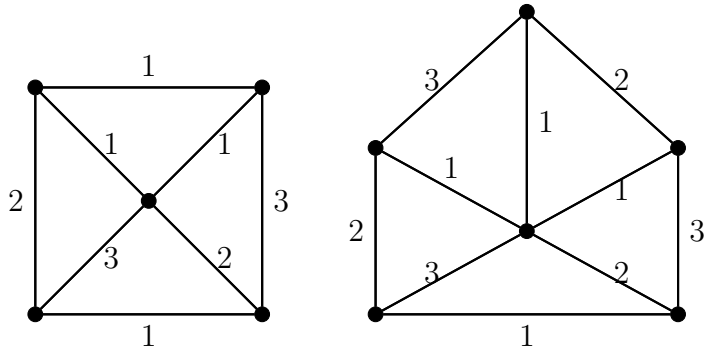


FIGURE 3.5.11 : Partition d'arêtes domatique b-maximale de W_5 et W_6

Définition 3.5.5 *La couronne $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H et pour tout sommet v de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2n$ si celui de H est n.*

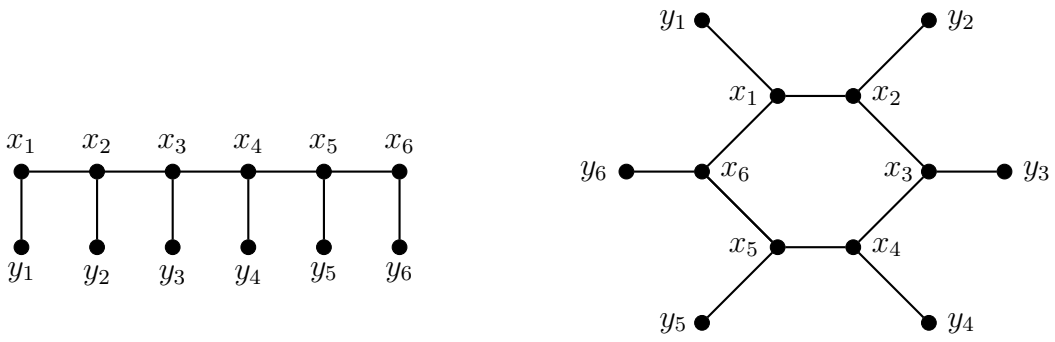


FIGURE 3.5.12 : La couronne de la chaîne $P_6 \circ K_1$ et du cycle $C_6 \circ K_1$.

Proposition 3.5.17 *Soit P_n une chaîne d'ordre n. Alors :*

$$ebd(P_n \circ K_1) = 2.$$

Preuve. Soit G la couronne d'une chaine d'ordre n, Etant donné que $\delta_e(G) = 1$ alors d'après la proposition 3.5.4, $ebd(P_n \circ K_1) = 2$.

■

Proposition 3.5.18 *Soit C_n un cycle d'ordre n. Alors :*

$$ebd(C_n \circ K_1) = 2.$$

Preuve. Soit $G = H \circ K_1$ la couronne d'un cycle d'ordre n, posons $V(G) = \{x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n\}$ tels que $V(C_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ l'ensemble des sommets pendants. $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n, h_1, h_2, ..., h_n\}$ avec $e_i = x_i x_{i+1}$ pour tout i entre 1 et $n-1$, $e_n = x_n x_1$, et $h_i = x_i y_i$ pour $i = 1, .., n$. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition d'arêtes de G telle que $\mathcal{C}_1 = \{\{e_i\}_{3 \leq i \leq n}, \{h_i\}_{1 \leq i \leq 3}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{h_i\}_{4 \leq i \leq n}, e_1, e_2\}$.Clairement, cette partition est une partition d'arêtes domatique, on a aussi l'arête h_2 est dans $\mathcal{C}_1$ et $N(h_2) = \{e_1, e_2\} \in \mathcal{C}_2$, c'est-à-dire h_2 est isolée dans $\mathcal{C}_1$, $pn[e_1, \mathcal{C}_2] = \{h_1\}$, $pn[e_2, \mathcal{C}_2] = \{h_3\}$ pour cela et par le théorème 3.5.1 $\mathcal{P}$ est b-maximale.

■

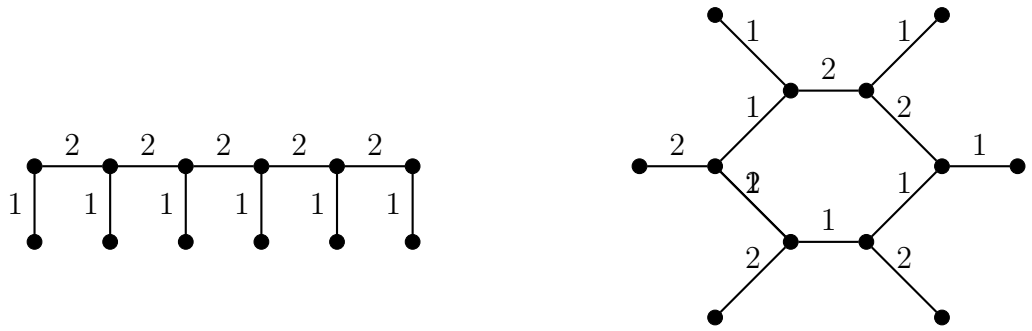


FIGURE 3.5.13 : Partition d'arêtes domatique b-maximale de $P_6 \circ K_1$ et $C_6 \circ K_1$.

Conclusion et Perspercives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à l'étude de la partition d'arêtes domatique et la partition d'arêtes domatique b-maximale dans un graphe simple.

Dans un premier temps, on a reppelé les résultats des recherches réalisés au paravent sur la partition d'arêtes domatique et le nombre d'arêtes domatique.Dans un second temps, on a introduit un nouveau paramètre qui est le nombre d'arêtes b-domatique, noté $ebd(G)$.Après avoir donner quelques propriétés concernant ce paramètre, on a déterminé la valeur exacte de $ebd(G)$ dans des classes particuliers de graphes.Bien que ces résultats et ceux obtenu avant soient importants, nous sommes loin de répondre aux nombreux problèmes dans ce domaine.En perspectives, un grand nombre de problème peuvent être étudier ultérieurement, on citera par exemple :

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partition d'arêtes domatique $\mathcal{P}$ soit b-maximale.
- Déterminer la valeur exacte où bien des bornes de $ebd(G)$ pour les graphes critiques.
- Etablir des relations entre le nombre d'arêtes b-domatique ebd et l'indice chromatique χ'.

Bibliographie

[1] S.Arumugam and S. Velammal. *edge domination in graphs* .TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS Vol. 2, No. 2, pp. 173-179, June 1998

[2] S. Arumugam and K. Raja Chandrasekar, *Minimal dominating sets in maximum domatic partitions*, Australas. J. Combin. 52 (2012) 281–292.

[3] X. Baogen, E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, Z. Shangchao, *Extremal graphs for inequalies involving domination parameters*. Discrete Mathematics 216,1-10(2000).

[4] M. Benatallah, N. Ikhlef Eschouf and M. Mihoubi, *On the b-domatic number of graphs*. Discus. Math. Graph Theory (2018). doi : 10.7151/dmgt.2079.

[5] C. Berge. *Theory of Graphs and its Applications*. Mentheun, London, 1962.

[6] G. J. Chang, *The domatic number problem*. Discrete Math. 125 (1994) 115–122.

[7] G. Chartrand and S. Schuster, *On the independence number of complementary graphs,* Trans. New York Acad. Sci., Series II 36 (3) (1974), 247-251

[8] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination graphs*. Networks, 7 (1977).

[9] E. J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977) 247–261.

[10] E. J. Cockayne, *Domination in undirected graphs—a survey, in : Theory and Applications of Graphs*, Lectures Notes in Math. 642, (Springer, Berlin, 1978) 141–147. doi :10.1007/BFb0070371.

[11] E. J. Cockayne, R. M. Dawes et S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*. Networks, 10 (1980).

[12] S. Corteel, M. Valencia-Pabon and J.-C. Vera, *On approximating the b-chromatic number*, Discrete Appl. Math. 146 (2005) 106–110. doi :10.1016/j.dam.2004.09.006.

[13] C. F De Jaennish, *"Application de l'analyse mathématique au jeu d'échecs"*, Petrograd, 1862.

[14] O. Favaron, *The b-domatic number of a graph*, Discus. Math. Graph Theory 33 (2013) 747–757.

[15] R. W. Irving and D. F. Manlove, *The b-chromatic number of a graph*, Discrete Appl. Math. 91 (1999) 127–141. doi :10.1016/S0166-218X(98)00146-2.

[16] J. Ivanco, *An interpolation theorem for partitions which are indivisible with respect to cohereditary properties*, J. Combin. Theory (B) 52 (1991) 97–101. doi :10.1016/0095-8956(91)90095-2.

[17] F. Jaeger and C. Payan, *relation du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple.* C. R. Acad. Sci. Paris, A, 274,728-730 (1972).

[18] S. R. Jayaram, *Line domination in graphs, Graphs Combin.* 3 (1987), 357-363

[19] D Konig, *Theory of finite and infinite graphs*, Academic publishing company 1936

[20] J. Lyle, N. Drake and R. Laskar, *Independent domatic partitioning or fall coloring of strongly chordal graphs*, Congr. Number. 172 (2005).

[21] D. F. Manlove, *Minimaximal and maximinimal optimization problems : A partial order-based approach*, Ph.D. Thesis, Tech. Rep. 27, Comp. Sci. Dept., Univ. Glasgow, Scotland, 1998.

[22] S. Mitchell and S. T. Hedetniemi, *Edge domination in trees,* Congr. Numer.19 (1977), 489-509.

[23] K. Monika. *Domatic number of graph products.* Journal of Mathematics and Applications. No 30, pp 71-81 (2008).

[24] O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[25] S. H. Poon, W. C. K. Yen and C. T. Ung, *Domatic Partition on Several Classes of Graphs*, Comb. Optim and Appl, V. 7402 of the series Lecture Notes in Computer Science, (2012) 245-256.

[26] B. Zelinka. *edge domatic number of a graph* ,Czechoslovak Mathematical Journal, 33(108) 1983, Praha

[27] B. Zelinka. *Edge-domatically full graphs*, Mathematica Slovaca, Vol. 40 (1990), No. 4, 359–365

[28] B. Zelinka, *Domatically critical graphs*, Czechoslovak Math. J. 30 (1980) 486–489.

[29] B. Zelinka, *Adomatic and idomatic numbers of graphs*, Math. Slovaca 33 (1983) 99–103.