Travaux dirigés de physique (01) du point matériel

CLÉ DE RÉUSSITE ET D'EXCELLENCE EN PHYSIQUE 1

ÉDITÉ PAR

DR. KECHIDI ZIANE

Université de Médéa
Algérie

Octobre 2017

DESTINÉS AUX
ETUDIANTS DE SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE
L1

Avant-propos

Cette polycopié de travaux dirigés de physique 01, s'adresse aux étudiants de Licence L1 ST, SM, MI, des écoles préparatoires et aux jeunes enseignants. Par ailleurs, ce travail est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de première année à l'université de Médéa et ailleurs. Ce recueil d'exercices constituera de précieux outil pour les étudiants; c'est un outil pédagogique, notamment la clarté, la concision et la cohérence du texte, les couleurs utilisées dans les équations avec de belles figures clarifiées, et très démonstratives.

Les exercices, généralement accompagnés de solutions détaillées avec parfois quelques rappels de cours succincts suffisamment clairs, ont été choisis de manière à combler certaines lacunes d'origine mathématique d'une part et d'autre part; à ce qu'ils soient suffisants pour aborder et résoudre n'importe quels problèmes dans les examens et les concours. Nous espérons qu'il leur sera une aide précieuse dans leur effort de compréhension de cette branche de la physique.

Notre préoccupation essentielle au cours de la rédaction de cette polycopie est de faciliter et d'assurer aux étudiants une transition continue, souvent difficile pour eux, des classes du secondaire à la première année universitaire. La principale difficulté que nous avons rencontrée lors de ce cours de physique a été certainement d'ordre mathématique. Les concepts acquis dans le secondaire sont ici repris de façon plus formelle et rigoureuse.

Cette polycopie, concise et structurée, expose les notions importantes qui couvrent l'ensemble du programme de physique 01, elle comprend quatre chapitres : Rappels mathématiques, Cinématique du point matériel, Dynamique du point matériel et Travail et énergie.

Dans le premier chapitre, le lecteur trouvera un rappel des notions mathématiques de base indispensables aux étudiants durant toute leur carrière. Nous insistons plus particulièrement sur l'intérêt de l'analyse dimensionnelle pour vérifier l'homogénéité des résultats et la prédiction des lois physiques ainsi que sur les opérations sur les vecteurs et le passage d'un champ de scalaire à un champ de vecteur et vice versa.

Le second chapitre est consacré à la cinématique du point matériel ainsi qu'aux changements de référentiels. L'accent est particulièrement mis sur les différents systèmes de coordonnées ainsi que le passage d'un système de coordonnées à un autre. Il est mis également, sur le calcul des variables de la cinématique par les méthodes analytique et graphique.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les lois fondamentales de la mécanique en décrivant les forces les plus classiques susceptibles d'intervenir dans les problèmes de mécanique.

Enfin dans le dernier chapitre, nous introduisons les concepts d'énergie et de travail d'une force conservative et non conservative.

Je remercie Monsieur Tahraoui Abdellatif, Professeur de physique à l'USTHB, de la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant d'écrire ce polycopie. Ses encouragements, discussions fructueuses et conseils m'ont largement aidé à mener cette tâche à bien. Je le prie de bien vouloir trouver ici mes sincères remerciements et l'expression de ma profonde gratitude.

J'exprime ma gratitude à messieurs les experts; M. Tahraoui Abdellatif, professeur à l'USTHB et M. Zitouni Hannachi, Maître de conférences A à l'université de Médéa, pour leur disponibilité, et lecture attentive avec leurs remarques et suggestions efficaces qu'ils m'ont apportés afin d'améliorer la qualité du manuscrit.

Enfin je ne saurais oublier de remercier Madame Bensaid, professeure de langue française, qui a bien voulu relire ce manuscrit et me faire part de ses remarques pertinentes surtout du point de vue linguistique. Je l'en remercie chaleureusement.

Cette polycopie est mise à la disposition de l'ensemble de la communauté universitaire. Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation lors de l'utilisation de ce document. D'autre part, toute reproduction intégrale ou partielle destinée à une utilisation collective, plagiat accidentel ou intentionnel est illicite. NB*La reproduction (ou photocopie) sans citation est un délit****

L'auteur

A mes chers parents, à ma femme et à mes enfants Oussama, Houd Abdelmalek, Amir Al Ibrahim, Fatima Ezzaha et Sara, je dédie ce travail.



Copyright ©2016-2017 Kechidi Ziane

First printing, Octobre 2017

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières v

Liste des figures vii

Liste des tableaux ix

I Rappels Mathématiques

1 Rappels Mathématiques 3

1.1 Grandeurs physique, équations aux dimensions et systèmes d'unités 3

1.2 Analyse dimensionnelle et homogénéité d'une équation 4

1.3 Grandeurs scalaires et grandeurs vectoriels 4

1.4 Passage d'un champ de scalaires à un champ de vecteurs et vice-versa 7

1.5 Corrigés détaillés des exercices 8

1.6 Grandeurs physique, équations aux dimensions et systèmes d'unités 8

1.7 Grandeurs scalaires et grandeurs vectoriels 10

1.8 Passage d'un champ de scalaires à un champ de vecteurs et vice-versa 16

II Cinématique du point matériel

2 Cinématique du point matériel 23

2.1 Corrigés détaillés des exercices 27

III Dynamique du point matériel

3 Dynamique du point matériel 45

3.1 Corrigés détaillés des exercices 48

IV Travail et énergie

4 Travail et énergie 59

4.1 Travail et énergie. Théorème de l'énergie cinétique 59

4.2 Corrigés détaillés des exercices 61

V Examens de Fin de Semestre avec leurs Corrections

5 Examens de fin de semestre avec leurs corrigés détaillés 75

5.1 Corrigés détaillés des exercices 76

LISTE DES FIGURES

1.1 Représentation des vecteurs A et B dans le plans (xOy) . . . 5
1.2 Représentation des vecteurs obtenus par certaines opérations sur les vecteurs A et B . . . 11
1.3 Détermination des directions des vecteurs par la mesure (à l'aide d'un rapporteur) de l'angle que font ces vecteurs avec l'axe des x dans le plan . . . 12

2.1 Cinématique . . . 23
2.2 Cinématique . . . 24
2.3 Cinématique . . . 24
2.4 Cinématique . . . 25
2.5 Cinématique . . . 27
2.6 Diagramme ou graphe des accélérations . . . 28
2.7 Diagramme ou graphe des espaces . . . 29
2.8 Représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations aux instants t1, t2, t3, t4 et t5 . . . 30
2.9 Diagramme des vitesses v=f(t) . . . 31
2.10 Cinématique . . . 32
2.11 Représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 2\ (s)$ et $t_2 = 8\ (s)$ . . . 33
2.12 Représentation des diagrammes des espaces des mobiles A et B . . . 35
2.13 Représentation des digrammes des accélérations des mobiles A et B . . . 36
2.14 Représentation des vecteurs vitesses et accélérations aux instants t1, t2, t3 et t4 . . . 39
2.15 Système de coordonnées polaires . . . 40
2.16 Représentation des vecteurs vitesses absolue, entrainement et relative . . . 41

3.1 Mouvement d'un bloc M sur un plan incliné . . . 45
3.2 Un bloc M sur un plan incliné attaché à un ressort . . . 46
3.3 Pendule conique . . . 46
3.4 Deux poulies liées par une corde (Palan) . . . 48
3.5 Représentation qualitative des forces exercées sur le cube . . . 48
3.6 Représentation qualitative des forces exercées sur le cube . . . 49
3.7 Représentation qualitative des forces exercées sur le cube . . . 49
3.8 Représentation qualitative des forces exercées sur le cube maintenu en équilibre par un ressort sur le plan incliné . . . 50
3.9 Représentation qualitative des forces exercées sur le cube en mouvement d'oscillation sur le plan incliné . . . 51
3.10 Représentation qualitative des forces exercées sur la bille . . . 52
3.11 Représentation qualitative des forces exercées sur la balle . . . 53
3.12 Représentation qualitative des forces exercées sur le grelon . . . 54

4.1 Mouvement d'un mobile sur une piste rectiligne puis curviligne . . . 60
4.2 Trajet décrit par la particule soumise à une force F . . . 62
4.3 Trajet décrit par la particule soumise à une force F . . . 62
4.4 Trajet décrit par la particule soumise à une force F . . . 63
4.5 Trajet décrit par la particule soumise à une force F . . . 63
4.6 Représentation de toutes les forces forces qui s'exercent sur la bille . . . 65
4.7 Représentation vectorielle de toutes les forces exercées sur le caisse . . . 66
4.8 Représentation vectorielle de toutes les forces exercées sur le caisse au point P2 . . . 68

5.4 Représentation qualitative des forces exercées sur le bloc M . . . 79
5.5 Projection de la force F suivants les directions . . . 79

LISTE DES TABLEAUX

2.1 Représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 2\ (s)$ et $t_2 = 8\ (s)$ 33
2.2 Représentation des vecteurs vitesses et accélérations aux instants t_1, t_2, t_3 et t_4 39

Première partie

Rappels Mathématiques

CHAPITRE 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

« Efforts and courage are not enough without purpose and direction. »

John F. Kennedy

Sommaire

1.1	**Grandeurs physique, équations aux dimensions et systèmes d'unités**	**3**
1.1.1	Dimensions et unités des grandeurs physique fondamentales et dérivées	3
1.2	**Analyse dimensionnelle et homogénéité d'une équation**	**4**
1.2.1	Prédiction des lois de physique	4
1.3	**Grandeurs scalaires et grandeurs vectoriels**	**4**
1.3.1	Analyse vectorielles	4
1.4	**Passage d'un champ de scalaires à un champ de vecteurs et vice-versa**	**7**
1.5	**Corrigés détaillés des exercices**	**8**
1.6	**Grandeurs physique, équations aux dimensions et systèmes d'unités**	**8**
1.7	**Grandeurs scalaires et grandeurs vectoriels**	**10**
1.8	**Passage d'un champ de scalaires à un champ de vecteurs et vice-versa**	**16**

1.1 Grandeurs physique, équations aux dimensions et systèmes d'unités

1.1.1 Dimensions et unités des grandeurs physique fondamentales et dérivées

Exercise 1.1 En mécanique, la force d'attraction qui s'exerce entre deux points matériels, de masses m et m', séparés par une distance r, est donnée en module par la loi de Newton $F_g = G\frac{mm'}{r^2}$. Déterminer la dimension, puis l'unité de la constante de gravitation G dans le système international d'unités de base (S.I.) ou (M.K.S.A). ■

Exercise 1.2 En électromagnétisme, le champ électrostatique $\vec{E}$ crée par une charge ponctuelle Q en un point de l'espace est donné par la relation $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, le champ magnétique élémentaire $\vec{dB}$ créé en un point M par un élément de courant $Id\ell$ est donné par $\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\vec{d\ell}\wedge\vec{u}$ et la force électromagnétique subie par un point matériel de charge q plongé dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est donnée par la force de Lorentz qui s'écrit $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$.

1. Déterminer la dimension, puis l'unité du champ électrostatique $\vec{E}$ dans le système international d'unités de base (S.I.).
2. Déterminer la dimension, puis l'unité du champ magnétique $\vec{B}$ dans le système international

d'unités de base (S.I.).

3. Donner les équations aux dimensions de la permittivité du vide ϵ_0 et perméabilité magnétique du vide μ_0.
4. La permittivité du vide ϵ_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 sont liés par la relation $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Par analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de cette relation.

■

1.2 Analyse dimensionnelle et homogénéité d'une équation

Exercise 1.3 L'énergie a pour équation aux dimensions $[E] = L^2MT^{-2}$. Vérifier l'homogénéité de l'expression $E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ qui donne l'énergie cinétique totale de translation (du centre de masse) plus l'énergie cinétique de rotation (autour du centre de masse). Avec I, le moment d'inertie du solide indéformable défini par $I_\Delta = \int r^2\, dm$. ■

Exercise 1.4 Par analyse dimensionnelle, trouver les dimensions ainsi que les unités de base des grandeurs F, g et h de l'équation homogène suivante,

$$\vec{F} = 2m\frac{d\vec{v}}{dt} - g\cos(\omega t)\,\vec{i} - \lambda h\exp(-\lambda r)\,\vec{j} \tag{1.1}$$

où m, t, r, v, ω, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des grandeurs physique qui représentent, la masse, le temps, la distance, la vitesse linéaire, la vitesse angulaire et des vecteurs unitaires respectivement. ■

1.2.1 Prédiction des lois de physique

Exercise 1.5 Retrouver par une analyse dimensionnelle l'expression de la période P des oscillations d'un pendule simple qui est constitué par un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable au bout duquel est attachée une masse m. On néglige la résistance de l'air et on se limitera au cas de faibles oscillations.

■

Exercise 1.6 Une bille sphérique de rayon r en chute lente, à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide visqueux de viscosité dynamique η.

— A l'aide d'une analyse dimensionnelle, trouver l'expression de la force de frottement $\vec{F}$ en fonction de r, $\vec{v}$ et η (grandeurs caractéristiques du problème).

— Comparer la relation trouvée avec la loi de Stokes ($\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$). Conclure.

On donne : $[\eta] = L^{-1}MT^{-1}$ ■

1.3 Grandeurs scalaires et grandeurs vectoriels

1.3.1 Analyse vectorielles

Exercise 1.7 On considère l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé ($\mathbf{O}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) et les trois vecteurs,

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \tag{1.2}$$
$$\vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \tag{1.3}$$
$$\vec{w} = 4\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} \tag{1.4}$$

Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{v}-\vec{w}\|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ ■

Exercise 1.8 Soit le référentiel orthonormal $\mathscr{R}(\mathbf{O};\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ et la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Dans le plan Oxy deux vecteurs déplacement $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ayant le même point initial $\mathbf{O}$ sont représentés par la figure (1.1) où les coordonnées (x,y) sont exprimées en (m).

1. A partir de la figure 1.1 déterminer,
   (a) les composantes (A_x, A_y) du vecteur $\vec{A}$ tels que $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j}$.
   (b) les composantes (B_x, B_y) du vecteur $\vec{B}$ tels que $\vec{B} = B_x\,\vec{i} + B_y\,\vec{j}$.
2. Calculer la norme $\|\vec{A}\|$ et $\|\vec{B}\|$.
3. Avec une règle graduée en mm, mesurer la longueur du segment de droite orienté $\overrightarrow{OM_1} = \vec{A}$ et de $\overrightarrow{OM_2} = \vec{B}$
4. En déduire l'échelle utilisée pour représenter les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
5. Calculer graphiquement le module et la direction de :
   (a) la résultante (ou vecteur somme) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$,
   (b) $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$,
   (c) $\vec{E} = \frac{3}{2}\vec{A}$,
6. Par la méthode analytique (calcul), refaire les mêmes calculs de cette dernière question.
7. Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
8. En déduire l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ $\left(\varphi = \left(\vec{A}, \vec{B}\right)\right)$ et montrer que $\vec{A} \perp \vec{B}$.
9. Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$,
10. En déduire l'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
11. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C}$,
12. Calculer graphiquement et par calcul, la norme de $(\vec{B}_C)$ la projection de $\vec{B}$ sur $\vec{C}$. On donne $\vec{B}_C = \left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{C}}{\left(\|\vec{C}\|\right)^2}\right)\vec{C}$.

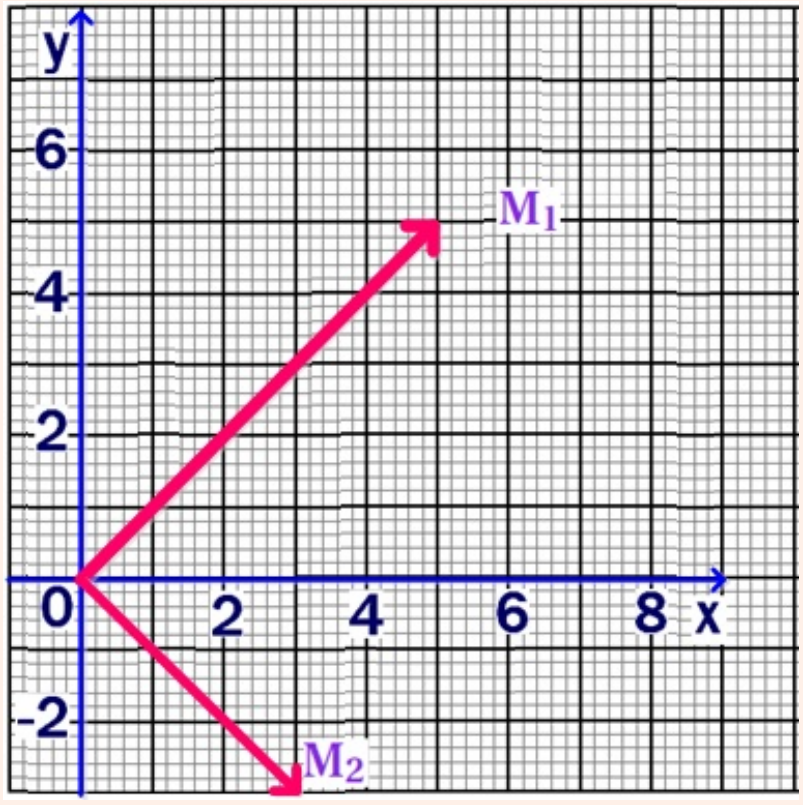


FIGURE 1.1 – Représentation des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans le plans (xOy)

Exercise 1.9 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère trois vecteurs de déplacement

$$\vec{U} = 8,66\,\vec{i} + 0,5\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\,(m) \quad (1.5)$$
$$\vec{V} = -6\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\,(m) \quad (1.6)$$
$$\vec{W} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\,(m) \quad (1.7)$$

1. Calculer en précisant le module, le sens et la direction :
   (a) de la résultante $\vec{R} = \vec{U} + \vec{V}$
   (b) du vecteur défini par $\vec{D} = \vec{U} - \vec{V}$
2. Calculer l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$
3. Calculer le volume du parallélépipède formé par $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$

■

Exercise 1.10 Soient $P_0 \equiv (3,2,2)$ et $P_1 \equiv (1,1,1)$ deux points dans un espace de coordonnées cartésiennes à trois dimensions $\mathscr{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Evaluez l'angle θ entre le vecteur $\overrightarrow{OP_0}$ et le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$.
2. Calculer l'aire du triangle $\widehat{OP_0P_1}$.

■

Exercise 1.11 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère quatre points A(1,1,0), B(0,2,4), C(-1,-1,1) et D(1,3,2).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{W} = \overrightarrow{AD}$.
2. Calculer le produit vecoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$.
3. En déduire l'aire du triangle $\widehat{ABC}$.
4. Cacluler l'angle entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ($\theta = \widehat{BAC}$).
5. Calculer le produit mixte $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}$.
6. En déduire le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

■

Exercise 1.12 Soient dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de composantes dans le système de coordonnées cartésiennes (2,0,0), (2,2,0) et (-2,0,2) respectivement.

1. Déterminer le module, le sens et la direction du produit vectoriel $\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
3. En déduire l'angle entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
4. Calculer le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.
5. En déduire l'angle entre les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{C}$

■

Exercise 1.13 Soient dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de composantes dans le système de coordonnées cartésiennes (3,4,5), (-3,4,0) et (0,2,1) respectivement.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (1.8)$$
$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (1.9)$$
$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (1.10)$$

2. Calculer,

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) + \vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad (1.11)$$

■

1.4 Passage d'un champ de scalaires à un champ de vecteurs et vice-versa

Exercise 1.14 Soit un champ de scalaires,

$$\varphi(x,y,z) = 2yz^3\cos(x/y), \tag{1.12}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x, y et z.
2. En déduire la différentielle $d\varphi(x,y,z)$ de $\varphi(x,y,z)$.
3. Calculer le gradient de $\varphi(x,y,z)$ noté $\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$.

■

Exercise 1.15 Soit un champ de force $\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{P})$ définit en tout point $\mathrm{P}(x,y,z)$ de l'espace lié à un repère $\mathscr{R}(\mathbf{O};\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ muni d'une base orthonormée directe par :

$$\vec{\mathrm{F}} = 2z\sin(2\pi k y)\,\vec{i} + 3y\ln(\lambda x)\,\vec{j} + 4x\exp(-\beta z)\,\vec{k}, \tag{1.13}$$

où k, λ et β sont des constantes.

1. Calculer la divergence de $\vec{\mathrm{F}}$ noté $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{F}}$.
2. Calculer le rotationnel de $\vec{\mathrm{F}}$ noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathrm{F}}$.

■

Exercise 1.16 Soit un fluide en mouvement avec un champ de vitesse donnée par,

$$\vec{v} = \sqrt{x^3 y}\,\vec{i} + 3xz\ln(2z)\,\vec{j} + \frac{yz^2}{x+y}\,\vec{k}. \tag{1.14}$$

1. Calculer la divergence de $\vec{v}$ (noté $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$) au point M(2,1,2).
2. Calculer le rotationnel de $\vec{v}$ (noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{v}$) au point M(2,1,2).
3. Calculer la divergence du rotationnel de $\vec{v}$ (noté $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right)$) en tout point $\mathrm{M}(x,y,z)$ de l'espace.
4. Calculer le rotationnel du rotationnel de $\vec{v}$ (noté $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right)$) et montrer que,

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) - \Delta\vec{v} \tag{1.15}$$

■

Exercise 1.17 Soit un champ de scalaires $\varphi(x,y,z) = x^3\cos(3y)\exp(-2z)$.

1. Calculer le gradient de φ noté $\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$.
2. Calculer la divergence du gradient de φ noté $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)\right) = \Delta\varphi(x,y,z)$
3. Calculer le rotationnel du gradient de φ noté $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)\right)$

■

Exercise 1.18 Soient un champ de scalaires $\varphi(x,y,z)$ et un champ de forces $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)$, définis dans un espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathbf{R}(\mathbf{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et sont donnés par :

$$\varphi(x,y,z) = xyz, \tag{1.16}$$

$$\vec{\mathrm{F}}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}, \tag{1.17}$$

On donne dans le système de coordonnées cartésiennes les expressions de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ et d'un vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \tag{1.18}$$

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}. \tag{1.19}$$

1. Calculer le gradient de φ noté $\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$.
2. Calculer le rotationnel du gradient de φ noté $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\varphi(x,y,z))$
3. Calculer la divergence de $\vec{F}$ noté $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x,y,z)$.
4. Calculer le rotationnel de $\vec{F}$ noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}(x,y,z)$.
5. Calculer le travail de la force $\vec{F}(x,y,z)$ le long d'un contour fermé noté $\oint\vec{F}\cdot\vec{dl}=\iint\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\cdot\vec{dS}$.
6. En déduire si cette force est conservative ou non conservative.

■

Exercise 1.19 Soient un champ de scalaires $\varphi(x,y,z)$ et deux champs de forces $\vec{F_1}(x,y,z)$ et $\vec{F_2}(x,y,z)$, donnés par :

$$\varphi(x,y,z) = xy\exp(-2\pi\lambda z) \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante,} \tag{1.20}$$
$$\vec{F_1}(x,y,z) = yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}, \tag{1.21}$$
$$\vec{F_2}(x,y,z) = xyz\,\vec{i}+yz^2\,\vec{j}+xy^3z\,\vec{k}, \tag{1.22}$$

et sont définis dans un espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathbf{R}(\mathbf{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Vérifier les relations suivantes :

$$\vec{\nabla}\wedge(\varphi\vec{F_1}) = \varphi(\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1})+\vec{\nabla}\varphi\wedge\vec{F_1} \tag{1.23}$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F_1}) = \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F_1}+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{F_1} \tag{1.24}$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F_1}\wedge\vec{F_2}) = \vec{F_2}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1}-\vec{F_1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_2} \tag{1.25}$$

■

1.5 Corrigés détaillés des exercices

1.6 Grandeurs physique, équations aux dimensions et systèmes d'unités

Exo01 :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F_g}=-G\frac{M\times m}{r^2}\vec{u}\Rightarrow[F_g]=[G]\frac{[m][m']}{[r^2]}\ \text{d'une part et}\\ \vec{F_g}=m\vec{a}\Rightarrow[F_g]=MLT^{-2}\ \text{d'autre part}\end{array}\right\}\Rightarrow[G]=\frac{[F_g][r^2]}{[m][m']}\ \text{soit}\ \boxed{[G]=M^{-1}L^3T^{-2}} \tag{1.26}$$

L'unité de G dans le système de base SI est donc $\boxed{kg^{-1}m^3s^{-2}}$

Exo02 :

1. $$\left.\begin{array}{l}\vec{F_e}=q\times\vec{E}\Rightarrow[F]=[q][E]\ \text{d'une part et}\\ I=\frac{dq}{dt}\Rightarrow[q]=[I][t]=IT\ \text{d'autre part}\end{array}\right\}\Rightarrow[E]=\frac{[F_e]}{[q]}\ \text{soit}\ \boxed{[E]=MLI^{-1}T^{-3}} \tag{1.27}$$

   et l'unité du champ électrique $\vec{E}$ est donc égal à $\boxed{kgmA^{-1}s^{-3}\equiv Vm^{-1}}$

2. $$[F_m]=[q][v][B]\Rightarrow\boxed{[B]=MI^{-1}T^{-2}} \tag{1.28}$$

   et l'unité du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est égal à $\boxed{kgA^{-1}s^{-2}\equiv T}$

3. $$[E]=\frac{1}{[\epsilon_0]}\frac{[Q]}{[r^2]}\Rightarrow\boxed{[\epsilon_0]=M^{-1}L^{-3}I^2T^4} \tag{1.29}$$

4. $$[B]=\frac{[\mu_0][I][l]}{[r^2]}\Rightarrow\boxed{[\mu_0]=MLI^{-2}T^{-2}} \tag{1.30}$$

5. $$[\epsilon_0][\mu_0][c^2]=1\Rightarrow\text{la relation}\ \boxed{\epsilon_0\mu_0c^2=1}\ \text{est homogène.} \tag{1.31}$$

Exo03 :

$$\left.\begin{array}{l}[E_c]=[m]\left[v^2\right]=[I]\left[\omega^2\right]\\ [I]=\left[r^2\right][m]=L^2M,\\ [\omega]=\frac{[v]}{[R]}=T^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow L^2MT^{-2}=L^2MT^{-2}=L^2MT^{-2}\Rightarrow \text{la relation } \boxed{E_c=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2} \text{ est homogène.} \tag{1.32}$$

Exo04 : L'équation (1.1) est homogène, nous pouvons donc écrire,

$$[\mathbf{f(r,t)}]=[\mathbf{m}]\frac{[\mathbf{v}]}{[\mathbf{t}]}=[\mathbf{g(r,t)}]=[\lambda][\mathbf{h(r,t)}], \tag{1.33}$$

d'une part, et d'autre part l'argument de la fonction $\exp(-\lambda\mathbf{r})$ est sans dimension, ce qui nous permet d'écrire $[\lambda][\mathbf{r}]=\mathbf{1}$, soit $[\lambda]=\mathbf{L^{-1}}$.
Il résulte donc,

$$\boxed{[\mathbf{f(r,t)}]=\mathbf{MLT^{-2}}},\ \boxed{[\mathbf{g(r,t)}]=\mathbf{MLT^{-2}}},\ \boxed{[\mathbf{h(r,t)}]=\mathbf{ML^2T^{-2}}}. \tag{1.34}$$

Exo05 : Après recensement de toutes les grandeurs physique qui peuvent (logiquement) avoir une influence sur la période des oscillations P d'un pendule simple de langueur ℓ, de masse m dans le champ de pesanteur g et de l'angle initial θ_{Max} de déviation par rapport a la verticale.
On peut postuler une loi de cette période sous la forme suivante,

$$\mathbf{P}=C^{st}\mathbf{g}^{\alpha}\ell^{\beta}\mathbf{m}^{\delta}\theta_{\mathbf{Max}}{}^{\gamma} \tag{1.35}$$

L'équation aux dimensions de l'expression (1.35) s'écrit sous la forme,

$$[\mathbf{P}]=[\mathbf{g}]^{\alpha}[\ell]^{\beta}[\mathbf{m}]^{\delta}[\theta_{\mathbf{Max}}]^{\gamma} \tag{1.36}$$

Le simple examen des dimensions des quantités physiques impliquées dans le problème montre que,

$$\mathbf{T}=(\mathbf{LT^{-2}})^{\alpha}(\mathbf{L})^{\beta}(\mathbf{M})^{\delta}(\mathbf{1})^{\gamma} \tag{1.37}$$

En rassemblant les grandeurs de même dimensions, on trouve,

$$\mathbf{T}=\mathbf{L}^{\alpha+\beta}\mathbf{T}^{-2\alpha}\mathbf{M}^{\delta}\mathbf{1}^{\gamma} \tag{1.38}$$

Ou les exposants α, β, δ, et γ peuvent être déterminer par indentification avec les exposants du premier membre de l'équation (1.38) homogène. On obtient,

$$\mathbf{0}=\alpha+\beta \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \tag{1.39}$$

$$\mathbf{1}=-\mathbf{2}\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \tag{1.40}$$

$$\mathbf{0}=\delta \quad\Rightarrow\quad \delta=\mathbf{0} \tag{1.41}$$

$$\mathbf{0}=\gamma \quad\Rightarrow\quad \gamma=\mathbf{0} \tag{1.42}$$

En déduit enfin l'expression de la période P en remplaçant dans l'équation (1.35) les exposants α,β,δ, et γ par les valeurs ainsi calculées,

$$\mathbf{P}=C^{st}\mathbf{g}^{-\frac{1}{2}}\ell^{\frac{1}{2}}\mathbf{m}^{\mathbf{0}}\theta_{\mathbf{Max}}{}^{\mathbf{0}} \tag{1.43}$$

La relation cherchée est donc de la forme,

$$\mathbf{P}=\mathbf{C^{st}}\sqrt{\frac{\ell}{\mathbf{g}}} \tag{1.44}$$

Exo06 : La force de frottement visqueuse $\vec{F}$ ne dépend, a priori, que d'une constante sans dimension k, du rayon r de la bille, de sa vitesse $\vec{v}$ et du coefficient de viscosité du fluide de la forme,

$$\vec{F}=kr^{\alpha}\vec{v}^{\beta}\eta^{\gamma} \tag{1.45}$$

1. Par une analyse dimensionnelle on détermine les coefficients, α, β et γ,

$$[\mathbf{F}]=[\mathbf{r}]^{\alpha}[\mathbf{v}]^{\beta}[\eta]^{\gamma} \tag{1.46}$$

on trouve,

$$\boxed{\alpha=1},\ \boxed{\beta=1} \text{ et } \boxed{\gamma=1}, \tag{1.47}$$

d'où l'expression de $\vec{F}$ est de la forme,

$$\vec{F}=kr\eta\vec{v} \tag{1.48}$$

2. Par comparaison avec la loi de Stokes, on déduit que $\boxed{k=-6\pi}$.

1.7 Grandeurs scalaires et grandeurs vectoriels

Exo01 :

Exercise 1.20 Par définition, un vecteur $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + \vec{j} + A_z\,\vec{k}$ donné dans un espace muni d'un repère orthonormé ($\mathbf{O}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), son module (ou norme) est donné par,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2} \tag{1.49}$$

On déduit donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{((3)^2+(2)^2+(5)^2)} = 6.1644 \tag{1.50}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{((5)^2+(-2)^2+(3)^2)} = 6.1644 \tag{1.51}$$
$$\|\vec{w}\| = \sqrt{((4)^2+(1)^2+(2)^2)} = 4.5826 \tag{1.52}$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{((8)^2+(0)^2+(8)^2)} = 11.3137 \tag{1.53}$$
$$\|\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{((-2)^2+(4)^2+(2)^2)} = 4.8990. \tag{1.54}$$

Le produit scalair est défini par,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x)(v_x)+(u_y)(v_y)+(u_z)(v_z) = 26. \tag{1.55}$$

Le produit vectoriel est défini par,

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ \mathbf{v_x} & \mathbf{v_y} & \mathbf{v_z} \end{pmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ \mathbf{v_y} & \mathbf{v_z} \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_z} \\ \mathbf{v_x} & \mathbf{v_z} \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} \\ \mathbf{v_x} & \mathbf{v_y} \end{vmatrix}$$
$$= (\mathbf{u_y v_z} - \mathbf{v_y u_z})\,\vec{i} - (\mathbf{u_x v_z} - \mathbf{v_x u_z})\,\vec{j} + (\mathbf{u_x v_y} - \mathbf{v_x u_y})\,\vec{k}$$
$$= \mathbf{16}\,\vec{i} + \mathbf{16}\,\vec{j} - \mathbf{16}\,\vec{k}$$

Pour calculer le produit mixte $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$, on calcul tout d'abord,

$$\vec{v}\wedge\vec{w} = -7\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 13\,\vec{k} \tag{1.56}$$

puis on calcul,

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = 48 \tag{1.57}$$

et

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = 16\,\vec{i} - 74\,\vec{j} + 20\,\vec{k} \tag{1.58}$$

De même, on calcul tout dabord

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = 16\,\vec{i} + 16\,\vec{j} - 16\,\vec{k} \tag{1.59}$$

ensuite, on calcul

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = 48\,\vec{i} - 96\,\vec{j} - 48\,\vec{k} \tag{1.60}$$

On remarque que

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) \neq (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} \tag{1.61}$$

■

Exo02 :

1. A partir de la figure 1.1, la projection orthogonale des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sur les axes Ox et Oy sont des vecteurs représentés par la figure 1.2,

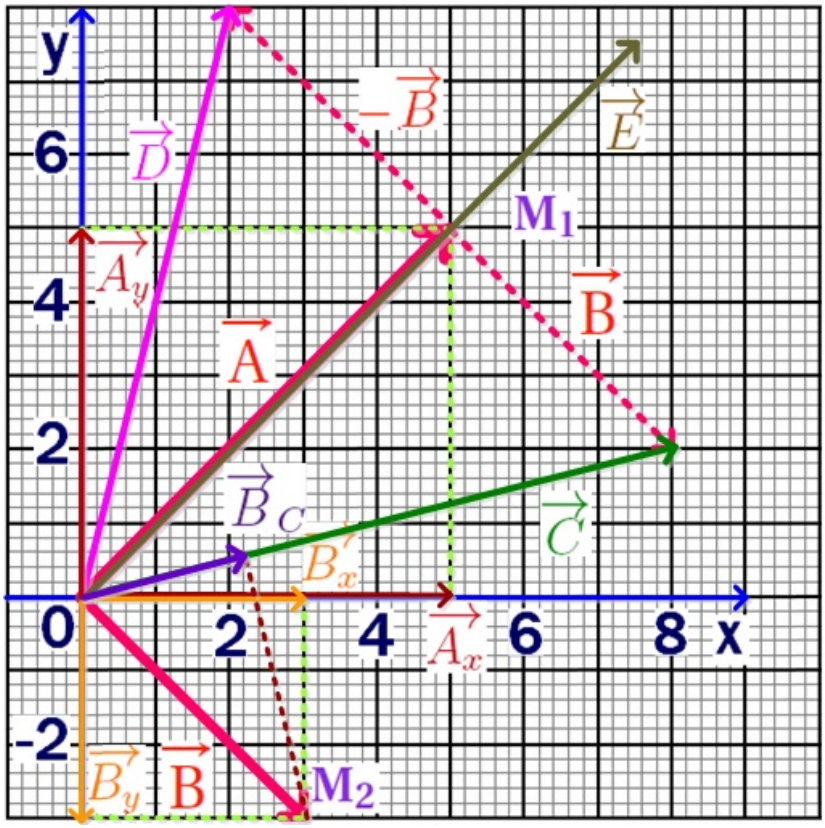


FIGURE 1.2 – Représentation des vecteurs obtenus par certaines opérations sur les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

(a)

$$\vec{A}_x = 5\,\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{A}_y = 5\,\vec{j} \tag{1.62}$$

(b)

$$\vec{B}_x = 3\,\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{B}_y = -3\,\vec{j} \tag{1.63}$$

2. D'où les expressions des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ en fonction de leurs composantes cartésiennes,

$$\vec{A} = 5\,\vec{i} + 5\,\vec{j} \tag{1.64}$$
$$\vec{B} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} \tag{1.65}$$

et les normes (ou modules) des $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont donc égales à :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 5\sqrt{2}\ m^2 \tag{1.66}$$
$$\|\vec{B}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 3\sqrt{2}\ m^2 \tag{1.67}$$

3. Par le biais d'une règle graduée en millimètres, on mesure la longueur des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et on obtient :

$$\text{longueur du vecteur } \vec{A},\ \overline{OM_1} = 6.6 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{A}\| = 6.6\ cm(\text{papier}) \tag{1.68}$$
$$\text{longueur du vecteur } \vec{B},\ \overline{OM_2} = 4.0 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{B}\| = 4.0\ cm(\text{papier}) \tag{1.69}$$

4. Apartir des équations 1.66, 1.67, 1.68 et 1.69, on peut déduire alors l'échelle utilisée pour représenter les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$5\sqrt{2}\ m(\text{rèel}) \text{ est représentée par } 6.6\ cm \quad \Rightarrow \quad 1\ cm(\text{papier}) \rightarrow 1.0714\ m(\text{réel}) \tag{1.70}$$
$$3\sqrt{2}\ m(\text{rèel}) \text{ est représentée par } 4.0\ cm \quad \Rightarrow \quad 1\ cm(\text{papier}) \rightarrow 1.0607\ m(\text{réel}) \tag{1.71}$$

d'ou

$$\text{Echelle : } 1\ cm(\text{papier}) \quad \rightarrow \quad 1.066\ m(\text{réelle}) \tag{1.72}$$

5. Etude graphique,
   - Pour déterminer le module (norme ou grandeur) d'un vecteur, il suffit de mesurer la longueur de ce vecteur par une règle et multiplier la valeur trouvée par l'échelle.
   - Pour la direction : a l'aide d'un rapporteur (figure 1.3), on peut déterminer l'angle que fait un vecteur avec l'axe des x et qui représente la direction ou l'orientation de ce vecteur dans le plan xOy.

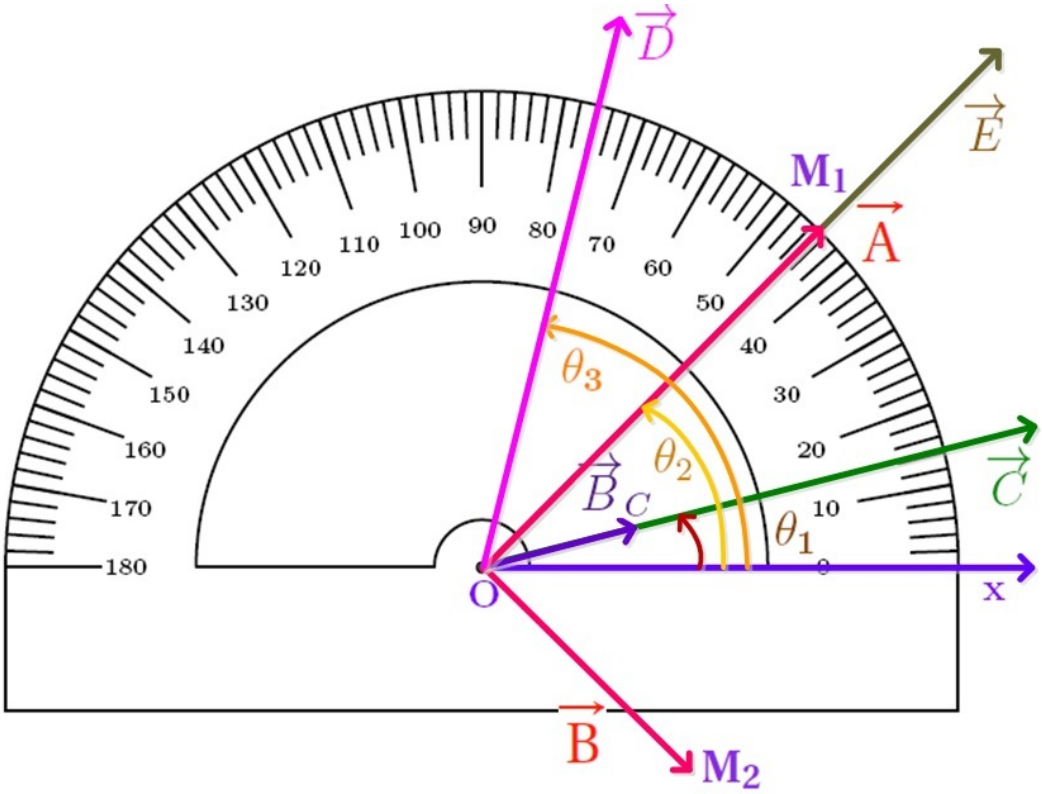


FIGURE 1.3 – Détermination des directions des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ et $\vec{B_C}$ par la mesure (à l'aide d'un rapporteur) des angles θ que font ces vecteurs avec l'axe Ox dans le plan

on obtient donc :

$$\|\vec{C}\| = 7.7 \times \text{Échelle} = 8.208\ m \tag{1.73}$$
$$\theta_1 = 14.5° \tag{1.74}$$
$$\|\vec{D}\| = 7.7 \times \text{Échelle} = 8.208\ m \tag{1.75}$$
$$\theta_3 = 76.1° \tag{1.76}$$
$$\|\vec{E}\| = 10 \times \text{Échelle} = 10.660\ m \tag{1.77}$$
$$\theta_2 = 45.1° \tag{1.78}$$

6. Etude analytique,
   Premièrement, on va exprimer chaque vecteur en fonction de ces composantes cartésiennes et puis en déduit leurs modules et leurs directions :
   (a)

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\vec{i} + (A_y + B_y)\,\vec{j} = 8\,\vec{i} + 2\,\vec{j} = \vec{C_x} + \vec{C_y} \tag{1.79}$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 8.246\ m \tag{1.80}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{8}\right) = 14.04° \tag{1.81}$$

   (b)

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\,\vec{i} + (A_y - B_y)\,\vec{j} = 2\,\vec{i} + 8\,\vec{j} = \vec{C_x} + \vec{C_y} \tag{1.82}$$

$$\|\vec{D}\| = \sqrt{D_x^2+D_y^2} = 8.246\ m \tag{1.83}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = 75.96° \tag{1.84}$$

(1.85)

(c)

$$\vec{E} = \frac{3}{2}\vec{A} = \frac{3}{2}(A_x)\vec{i} + \frac{3}{2}(A_y)\vec{j} = 7.5\vec{i} + 7.5\vec{j} = \vec{E_x} + \vec{E_y} \tag{1.86}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{3}{2}\|\vec{A}\| = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = 10.606\ m \tag{1.87}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = 45° \tag{1.88}$$

7.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (5\vec{i}+5\vec{j}+0\vec{k})\cdot(3\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}) = 0 \tag{1.89}$$

8.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \text{ d'une part et,}\\ \vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)\\ \qquad = (5\sqrt{2})(3\sqrt{2})\cos(\varphi) \text{ d'autre part}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ avec k un entier positif et } \vec{A}\perp\vec{B}. \tag{1.90}$$

9.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}\wedge\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)\vec{u} = 30\vec{u} \text{ d'une part et}\\ \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 5 & 0\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix} = -30\vec{k} \text{ d'autre part}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} \equiv -\vec{k}, \text{ et } \|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = 30\ m^2. \tag{1.91}$$

d'ou l'Aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est donnée par

$$\boxed{\text{Aire}=\|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = 30\ m^2} \tag{1.92}$$

10. Un vecteur unitaire est tout simplement un vecteur dont la norme dans un repère ortho-normal vaut 1. Un tel vecteur nous permet d'indiquer la direction et le sens d'un vecteur sans en faire intervenir la norme. Ainsi, pour tout vecteur $\vec{C}$, on peut définir un vecteur unitaire $\vec{u}$ donnant sa direction et son sens : il s'agit du vecteur déterminé par :

$$\vec{C} = \|\vec{C}\|\vec{u} \quad\Rightarrow\quad \vec{u} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{\vec{C}}{\sqrt{68}} \tag{1.93}$$

c'est un vecteur unité qui a la même direction et le même sens que $\vec{C}$

11. — Par calcul,

$$\|\vec{B}_C\| = \left\|\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{C}}{\left(\|\vec{C}\|\right)^2}\right)\vec{C}\right\| = \left(\frac{18}{68}\right)\|8\vec{i}+2\vec{j}\| = 2.183\ m \tag{1.94}$$

— Graphiquement,

$$\|\vec{B}_C\| = (\text{longueur du vecteur } \vec{B}_C)(\times\text{Echèlle}) = (2.2)(1.066) = 2.345\ m \tag{1.95}$$

Exo03 :

1. Les caractéristiques des vecteurs suivants :
   (a) $\vec{R} = \vec{U}+\vec{V} = 2.66\vec{i}+0.50\vec{j}+0\vec{k}$ (m) sont :

$$\|\vec{R}\| = 2.7066\ m \quad \text{et} \quad \theta = \arctan(\frac{0.5}{2.66}) = 0.1858\ rad = 10.6456°. \tag{1.96}$$

(b) $\vec{D} = \vec{U} - \vec{V} = 14.66\,\vec{i} + 0.50\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ (m) sont :

$$\|\vec{D}\| = 14.6685\ m \quad \text{et} \quad \alpha = \arctan(\frac{0.5}{14.66}) = 0.0341\ rad = 2°. \tag{1.97}$$

2. L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est donnée par,

$$S = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| \quad = \quad 3\ m^2. \tag{1.98}$$

3. Le volume du parallélépipède formé par $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ est donné par,

$$\tau = \|(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}\| \quad = \quad 12\ m^3. \tag{1.99}$$

Exo04 : On vas exprimer en termes de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs qui vont du point O au points P_0 et P_1 et que l'on notes $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP_1}$ respectivement :

$$\overrightarrow{OP_0} = (x_{P_0} - x_O, y_{P_0} - y_O, z_{P_0} - z_O) \quad = \quad 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}, \tag{1.100}$$

$$\overrightarrow{OP_1} = (x_{P_1} - x_O, y_{P_1} - y_O, z_{P_1} - z_O) \quad = \quad 1\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 1\,\vec{k}. \tag{1.101}$$

1. L'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP_1}$ peut être évalué soit,
   (a) À partir des deux définitions du produit scalaire :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \|\overrightarrow{OP_0}\|\|\overrightarrow{OP_1}\| \cos\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP_1}\right), \text{ avec} \\ \|\overrightarrow{OP_0}\| = \sqrt{17}\ ,\ \|\overrightarrow{OP_1}\| = \sqrt{3} \text{ et} \\ \overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \left(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \cdot \left(1\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 1\,\vec{k}\right) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_1}}{\|\overrightarrow{OP_0}\|\|\overrightarrow{OP_1}\|}\right) = 11.4218°. \tag{1.102}$$

   (b) À partir de la définition du produit vectoriel,

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1} = \|\overrightarrow{OP_0}\|\|\overrightarrow{OP_1}\| \sin\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP_1}\right) \vec{u} \text{ et} \\ \overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\,\vec{i} - 1\,\vec{j} + 1\,\vec{k} \\ \text{avec } \|\overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1}\| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{\|\overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1}\|}{\|\overrightarrow{OP_0}\|\|\overrightarrow{OP_1}\|}\right) = 11.4218°. \tag{1.103}$$

2. L'aire du triangle $\widehat{OP_0P_1}$ est égale à la moitie de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP_1}$ soit,

$$S = \frac{\|\overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1}\|}{2} \quad = \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071\ m^2 \tag{1.104}$$

Exo05 :

1. Les coordonnées des vecteurs suivants : $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont données par :

$$\vec{U} \quad = \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = -1\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 4\,\vec{k}, \tag{1.105}$$

$$\vec{V} \quad = \quad \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = -2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}, \tag{1.106}$$

$$\vec{W} \quad = \quad \overrightarrow{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A) = 0\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}. \tag{1.107}$$

2. Le produit vectoriel : $\vec{U} \wedge \vec{V} = 9\,\vec{i} - 7\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$.
3. L'aire du triangle $\widehat{ABC}$ est égal à : $S = \frac{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}{2} = 6,04\ m^2$.
4. L'angle entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est : $\theta = \widehat{BAC} = \arcsin\left(\frac{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{U}\|\|\vec{V}\|}\right) = 71.68°$.
5. Le produit mixte $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = -6$.
6. Le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ est donné par $\tau = \|\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{W}\| = 6\ m^3$.

Exo06 :

1. Le produit vectoriel $\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est donné par,

$$\begin{aligned} \vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B} \quad &= \quad \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \quad (0 \times 0 - 0 \times 2)\,\vec{i} - (2 \times 0 - 0 \times 2)\,\vec{j} + (2 \times 2 - 0 \times 2)\,\vec{k} \\ &= \quad (0)\,\vec{i} + (0)\,\vec{j} + (4)\,\vec{k} = 4\,\vec{k} \end{aligned} \tag{1.108}$$

En déduit alors les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{P}$:
- le module est égal à $\|\overrightarrow{P}\|=4$
- les sens est suivant le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$
- la direction est suivant l'axe $z'Oz$

2. L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est égale à $\|\overrightarrow{P}\|=4$
3. L'angle θ entre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donné par,

$$\theta=\arcsin\left(\frac{\|\overrightarrow{P}\|}{\|\overrightarrow{A}\|\|\overrightarrow{B}\|}\right)=\arcsin\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4} \tag{1.109}$$

4. Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ est donné par,

$$\left(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{C}=\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{C}=4\overrightarrow{k}\cdot(-2\overrightarrow{i}+0\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})=8. \tag{1.110}$$

5. L'angle α entre les vecteurs $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{C}$ est alors,

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{C}\|}{\|\overrightarrow{P}\|\|\overrightarrow{C}\|}\right)=\arccos\left(\frac{8}{8\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4} \tag{1.111}$$

Exo13 :

1. $(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\wedge\overrightarrow{C}=\overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})-\overrightarrow{A}(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C})$
On a d'une part,

$$(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})=\overrightarrow{D}=-20\overrightarrow{i}-15\overrightarrow{j}+24\overrightarrow{k}\quad et\quad\overrightarrow{D}\wedge\overrightarrow{C}=-63\overrightarrow{i}+20\overrightarrow{j}-40\overrightarrow{k} \tag{1.112}$$

et d'autre part,

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}=13,\ \overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})=-39\overrightarrow{i}+52\overrightarrow{j}+0\overrightarrow{k}\quad et\quad\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}=8,\ \overrightarrow{A}(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C})=24\overrightarrow{i}+32\overrightarrow{j}+40\overrightarrow{k} \tag{1.113}$$

d'où,

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})-\overrightarrow{A}(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C})\ =\ -63\overrightarrow{i}+20\overrightarrow{j}-40\overrightarrow{k}=(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\wedge\overrightarrow{C} \tag{1.114}$$

2. $(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{C}=(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})\cdot\overrightarrow{A}=(\overrightarrow{C}\wedge\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{B}$

$$\left.\begin{aligned}(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{C}=\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{C}=-6,\\ \overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C}=\overrightarrow{E}=4\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-6\overrightarrow{k}\,et\,\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{A}=-6,\\ \overrightarrow{C}\wedge\overrightarrow{A}=\overrightarrow{F}=6\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-6\overrightarrow{k}\,et\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{B}=-6\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{C}=(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})\cdot\overrightarrow{A}=(\overrightarrow{C}\wedge\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{B} \tag{1.115}$$

3. $\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})=(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})\overrightarrow{B}-(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})\overrightarrow{C}$
De même, on a d'une part,

$$\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})=\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{E}\ =\ -39\overrightarrow{i}+38\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k} \tag{1.116}$$

et d'autre part,

$$(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})\overrightarrow{B}=(13)\overrightarrow{B}\ =\ -39\overrightarrow{i}+52\overrightarrow{j}+0\overrightarrow{k} \tag{1.117}$$

$$(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})\overrightarrow{C}=(7)\overrightarrow{C}\ =\ 0\overrightarrow{i}+14\overrightarrow{j}+7\overrightarrow{k} \tag{1.118}$$

d'où

$$(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})\overrightarrow{B}-(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})\overrightarrow{C}=-39\overrightarrow{i}+38\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k}\ =\ \overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C}) \tag{1.119}$$

4. A partir du calcul précédente en déduit que :

$$\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})\ =\ -39\overrightarrow{i}+38\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k} \tag{1.120}$$

$$\overrightarrow{B}\wedge(\overrightarrow{C}\wedge\overrightarrow{A})\ =\ -24\overrightarrow{i}-18\overrightarrow{j}-33\overrightarrow{k} \tag{1.121}$$

$$\overrightarrow{C}\wedge(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\ =\ 63\overrightarrow{i}-20\overrightarrow{j}+40\overrightarrow{k} \tag{1.122}$$

d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})+\overrightarrow{B}\wedge(\overrightarrow{C}\wedge\overrightarrow{A})+\overrightarrow{C}\wedge(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})\ &=\ (-39-24+63)\overrightarrow{i}+(38-18-20)\overrightarrow{j}+(-7-33+40)\overrightarrow{k}\\ &=\ (0)\overrightarrow{i}+(0)\overrightarrow{j}+(0)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}\end{aligned} \tag{1.123}$$

1.8 Passage d'un champ de scalaires à un champ de vecteurs et vice-versa

Exercise 1.21 1. Les dérivées partielles premières par rapport à x, y et z de la fonction scalaire $\varphi(x,y,z) = 2yz^3\cos(x/y)$ sont données par :

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} = 2yz^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x/y)\right) = -2z^3\sin(x/y) \quad (1.124)$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y} = 2z^3\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos(x/y)\right) = 2z^3\left(\cos(x/y)+\frac{x}{y}\sin(x/y)\right) \quad (1.125)$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = 2y\cos(x/y)\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3\right) = 6yz^2\cos(x/y) \quad (1.126)$$

2. La différentielle de $\varphi(x,y,z)$ est défini par

$$d\varphi(x,y,z) = \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}dz \quad (1.127)$$

$$d\varphi(x,y,z) = -2z^3\sin(x/y)dx+2z^3\left(\cos(x/y)+\frac{x}{y}\sin(x/y)\right)dy+6yz^2\cos(x/y)dz \quad (1.128)$$

3. Le gradient de f est donné par

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) = \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\vec{k} \quad (1.129)$$

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) = -2z^3\sin(x/y)\vec{i}+2z^3\left(\cos(x/y)+\frac{x}{y}\sin(x/y)\right)\vec{j}+6yz^2\cos(x/y)\vec{k} \quad (1.130)$$

■

Exercise 1.22 1. La divergence de $\vec{F}$ noté $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ est donnée par :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\right) \quad (1.131)$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} = 0+3\ln(\lambda x)-4x\beta\exp(-\beta z) \quad (1.132)$$

2. Le rotationnel de $\vec{F}$ noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ est donnée par :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (1.133)$$

$$= (0)\vec{i}+2\left(\sin(2\pi ky)-2\exp(-\beta z)\right)\vec{j}+\left(3\frac{y}{x}-4\pi kz\cos(2\pi ky)\right)\vec{k} \quad (1.134)$$

■

Exo03 :

1. La divergence de $\vec{v}$ noté $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ est donnée par :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{3x^2y}{2\sqrt{x^3y}}+0+\frac{2yz}{x+y} \quad (1.135)$$

soit au point M(2,1,2)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(2,1,2) = 3.4547 \quad (1.136)$$

2. Le rotationnel de $\vec{v}$ noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{v}$ est donnée par :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{z^2}{x+y}-\frac{yz^2}{(x+y)^2}-3x(1+\ln(2z))\right)\vec{i}+\left(\frac{yz^2}{(x+y)^2}\right)\vec{j}+\left(3z\ln(2z)-\frac{x^3}{2\sqrt{x^3y}}\right)\vec{k} \quad (1.137)$$

soit au point M(2,1,2)

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v}(2,1,2) = -13.4289\vec{i}+0.4444\vec{j}+6.9036\vec{k} \quad (1.138)$$

3. La divergence du rotationnel de $\overrightarrow{v}$ en tout point M(x,y,z) de l'espace est donnée par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right) &= \frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_x}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_y}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_z}{\partial z}\\
&= \frac{\partial\left(\frac{z^2}{x+y}-\frac{yz^2}{(x+y)^2}-3x(1+\ln(2z))\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{yz^2}{(x+y)^2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(3z\ln(2z)-\frac{x^3}{2\sqrt{x^3y}}\right)}{\partial z}\\
&= \left(\frac{2yz^2}{(x+y)^3}-\frac{z^2}{(x+y)^2}-3\ln(2z)-3\right)+\left(\frac{z^2}{(x+y)^2}-\frac{2yz^2}{(x+y)^3}\right)+(3\ln(2z)+3)\\
&= 0
\end{aligned}\tag{1.139}$$

4. Calculer le rotationnel du rotationnel de $\overrightarrow{v}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right) &= \left(\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_z}{\partial y}-\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}-\left(\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_z}{\partial x}-\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j}\\
&\quad+\left(\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_y}{\partial x}-\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}\\
&= \left(\frac{x^6}{4\sqrt[3]{x^3y}}-\frac{2yz}{(x+y)^2}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3y}}+\frac{2z}{(x+y)}-\frac{3x}{z}-\frac{2yz}{(x+y)^2}-\frac{3x^5y}{4\sqrt[3]{x^3y}}\right)\overrightarrow{j}\\
&\quad+\left(\frac{2z^2}{(x+y)^2}-\frac{4yz^2}{(x+y)^3}\right)\overrightarrow{k}
\end{aligned}\tag{1.140}$$

Maintenant pour montrer que,

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)-\Delta\overrightarrow{v}\tag{1.141}$$

on a d'une part

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right) &= \frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\partial y}\overrightarrow{j}+\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\partial z}\overrightarrow{k}\\
&= \left(\frac{3xy}{\sqrt{x^3y}}-\frac{9x^4y^2}{4\sqrt[3]{x^3y}}-\frac{2yz}{(x+y)^2}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3y}}+\frac{2z}{(x+y)}-\frac{2yz}{(x+y)^2}-\frac{3x^5y}{4\sqrt[3]{x^3y}}\right)\overrightarrow{j}\\
&\quad+\left(\frac{2y}{(x+y)}\right)\overrightarrow{k}
\end{aligned}\tag{1.142}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\Delta\overrightarrow{v} &= \left(\frac{\partial^2v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial^2v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_y}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial^2v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_z}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{k}\\
&= \left(\frac{3xy}{\sqrt{x^3y}}-\frac{9x^4y^2}{4\sqrt[3]{x^3y}}-\frac{x^6}{4\sqrt[3]{x^3y}}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{3x}{z}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{2y}{(x+y)}-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+\frac{4yz^2}{(x+y)^3}\right)\overrightarrow{k}
\end{aligned}\tag{1.143}$$

il résulte donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)-\Delta\overrightarrow{v} &= \left(\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\partial x}-\left(\frac{\partial^2v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial z^2}\right)\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\partial y}-\left(\frac{\partial^2v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_y}{\partial z^2}\right)\right)\overrightarrow{j}\\
&\quad+\left(\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\partial z}-\left(\frac{\partial^2v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_z}{\partial z^2}\right)\right)\overrightarrow{k}\\
&= \left(\frac{x^6}{4\sqrt[3]{x^3y}}-\frac{2yz}{(x+y)^2}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3y}}+\frac{2z}{(x+y)}-\frac{3x}{z}-\frac{2yz}{(x+y)^2}-\frac{3x^5y}{4\sqrt[3]{x^3y}}\right)\overrightarrow{j}\\
&\quad+\left(\frac{2z^2}{(x+y)^2}-\frac{4yz^2}{(x+y)^3}\right)\overrightarrow{k}
\end{aligned}\tag{1.144}$$

et c'est bien se qu'il fallu à démontré.
Exo04 :

1. Le gradient de la fonction scalaire φ noté $\overrightarrow{grad}\varphi(x,y,z)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) &= \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\\ &= 3x^2\cos(3y)\exp(-2z)\,\vec{i}\,-3x^3\sin(3y)\exp(-2z)\,\vec{j}\,-2x^3\cos(3y)\exp(-2z)\,\vec{k}\\ &= \mathrm{F}_x\,\vec{i}\,+\mathrm{F}_y\,\vec{j}\,+\mathrm{F}_z\,\vec{k}\,.\end{aligned}\tag{1.145}$$

2. Le rotationnel du gradient de φ noté $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\varphi(x,y,z))$ et donc :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) &= \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\\ &= 3x^2\cos(3y)\exp(-2z)\,\vec{i}\,-3x^3\sin(3y)\exp(-2z)\,\vec{j}\,-2x^3\cos(3y)\exp(-2z)\,\vec{k}\\ &= \mathbf{F_x}\,\vec{i}\,+\mathbf{F_y}\,\vec{j}\,+\mathbf{F_z}\,\vec{k}\,.\end{aligned}\tag{1.146}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\varphi) &= \begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \mathbf{F_x}&\mathbf{F_y}&\mathbf{F_z}\end{pmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \mathbf{F_y}&\mathbf{F_z}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \mathbf{F_x}&\mathbf{F_z}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ \mathbf{F_x}&\mathbf{F_y}\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{F_z}-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{F_y}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F_z}-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{F_x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F_y}-\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{F_x}\right)\vec{k}\\ &= \left(\mathbf{6x^3}\sin(\mathbf{3y})\exp(\mathbf{-2z})-\mathbf{6x^3}\sin(\mathbf{3y})\exp(\mathbf{-2z})\right)\vec{i}\\ &\quad+\left(\mathbf{-6x^2}\cos(\mathbf{3y})\exp(\mathbf{-2z})+\mathbf{6x^2}\cos(\mathbf{3y})\exp(\mathbf{-2z})\right)\vec{j}\\ &\quad+\left(\mathbf{-9x^2}\sin(\mathbf{3y})\exp(\mathbf{-2z})+\mathbf{9x^2}\sin(\mathbf{3y})\exp(\mathbf{-2z})\right)\vec{k}=\vec{0}\,.\end{aligned}\tag{1.147}$$

Sol Exercice N°05

1.

$$\vec{\nabla}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\,\vec{i}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\,\vec{j}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\,\vec{k}=\mathbf{yz}\,\vec{i}+\mathbf{xz}\,\vec{j}+\mathbf{xy}\,\vec{k}\tag{1.148}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\right) &= \begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\\ \mathbf{yz}&\mathbf{xz}&\mathbf{xy}\end{pmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\\ \mathbf{xz}&\mathbf{xy}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\\ \mathbf{yz}&\mathbf{xy}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\\ \mathbf{yz}&\mathbf{xz}\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\mathbf{xy}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{xz}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{xy}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{yz}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{xz}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\mathbf{yz}\right)\vec{k}\\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{x})\,\vec{i}\,+(\mathbf{y}-\mathbf{y})\,\vec{j}\,+(\mathbf{z}-\mathbf{z})\,\vec{k}=\vec{0}\,.\end{aligned}\tag{1.149}$$

3.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{F}}\,(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{F_x}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\mathbf{F_y}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{F_z}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{yz})+\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{xz})+\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}(\mathbf{xy})=\vec{0}\,.\tag{1.150}$$

4.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathrm{F}}\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) &= \begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\\ \mathbf{F_x}&\mathbf{F_y}&\mathbf{F_z}\end{pmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\\ \mathbf{xz}&\mathbf{xy}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\\ \mathbf{yz}&\mathbf{xy}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}&\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\\ \mathbf{yz}&\mathbf{xz}\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\mathbf{xy}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{xz}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{xy}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{yz}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{xz}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\mathbf{yz}\right)\vec{k}\\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{x})\,\vec{i}\,+(\mathbf{y}-\mathbf{y})\,\vec{j}\,+(\mathbf{z}-\mathbf{z})\,\vec{k}\,=\vec{0}\,.\end{aligned}\tag{1.151}$$

5. Par définition le travail effectué par une force $\overrightarrow{F}$ sur une particule M pour décrire un contour fermé est donné par,

$$\Delta W = \oint \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS}, \tag{1.152}$$

or d'après l'équation (1.151) on déduit que,

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \boxed{\Delta W = 0} \tag{1.153}$$

6. D'après l'équation (1.153), le travail de la force $\overrightarrow{F}$ le long d'un contour fermé quelconque est nul, donc la force F est conservative. Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ dépend uniquement des extrémités du point de départ et du point d'arrivé, il est indépendant du chemin suivi par le mobile M pour aller d'un point à l'autre.

Exo :

Pour montrer ces identités, on vas procéder à un calcul par étape :

1.

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\varphi \overrightarrow{F_1}) = \varphi(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{\nabla}\varphi \wedge \overrightarrow{F_1} \tag{1.154}$$

Le calcul du membre gauche de l'équation (1.154) est,

$$\begin{aligned} \varphi \overrightarrow{F_1} &= \left(xy^2 z \exp(-2\pi\lambda z)\right)\overrightarrow{i} + \left(x^2 yz \exp(-2\pi\lambda z)\right)\overrightarrow{j} + \left(x^2 y^2 \exp(-2\pi\lambda z)\right)\overrightarrow{k} \\ &= H_x \overrightarrow{i} + H_y \overrightarrow{j} + H_z \overrightarrow{k} = \overrightarrow{H} \end{aligned} \tag{1.155}$$

d'ou

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \wedge (\varphi \overrightarrow{F_1}) &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} \\ &= \left(x^2 y + 2\pi\lambda x^2 yz\right)\exp(-2\pi\lambda z)\overrightarrow{i} - \left(xy^2 + 2\pi\lambda xy^2 z\right)\exp(-2\pi\lambda z)\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} \end{aligned} \tag{1.156}$$

Passant maintenant au premier terme du membre droite de l'équation (1.154),

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F_1} &= \left(\frac{\partial F_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1y}}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial F_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} \\ &= (0)\overrightarrow{i} + (0)\overrightarrow{j} + (0)\overrightarrow{k} \end{aligned} \tag{1.157}$$

soit

$$\varphi(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F_1}) = (0)\overrightarrow{i} + (0)\overrightarrow{j} + (0)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \tag{1.158}$$

et le deuxième terme à droite de l'équation (1.154) est,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}\varphi(x,y,z) &= \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial z}\overrightarrow{k} \\ &= \left(y\exp(-2\pi\lambda z)\right)\overrightarrow{i} + \left(x\exp(-2\pi\lambda z)\right)\overrightarrow{j} - \left(2\pi\lambda xy\exp(-2\pi\lambda z)\right)\overrightarrow{k} \\ &= G_x \overrightarrow{i} + G_y \overrightarrow{j} + G_z \overrightarrow{k}. \end{aligned} \tag{1.159}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}\varphi \wedge \overrightarrow{F_1} &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ G_x & G_y & G_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{pmatrix} = (G_y F_{1z} - F_{1y} G_z)\overrightarrow{i} - (G_x F_{1z} - F_{1x} G_z)\overrightarrow{j} + (G_x F_{1y} - F_{1x} G_y)\overrightarrow{k} \\ &= \left(x^2 y + 2\pi\lambda x^2 yz\right)\exp(-2\pi\lambda z)\overrightarrow{i} - \left(xy^2 + 2\pi\lambda xy^2 z\right)\exp(-2\pi\lambda z)\overrightarrow{j} + (0)\overrightarrow{k} \end{aligned} \tag{1.160}$$

d'ou

$$\varphi(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{\nabla}\varphi \wedge \overrightarrow{F_1} = \left(x^2 y + 2\pi\lambda x^2 yz\right)\exp(-2\pi\lambda z)\overrightarrow{i} - \left(xy^2 + 2\pi\lambda xy^2 z\right)\exp(-2\pi\lambda z)\overrightarrow{j} + (0)\overrightarrow{k} \tag{1.161}$$

La comparaison entre les équations (1.156) et (1.161) donne une vérification de l'identité (1.154). Passant à l'identité suivante

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F_1}) = \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F_1}+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{F_1} \tag{1.162}$$

D'après le calcul précédent, on déduit que,

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F_1}) = \frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=\left(-2\pi\lambda x^2y^2+zx^2+zy^2\right)\exp\left(-2\pi\lambda z\right) \tag{1.163}$$

et aussi

$$\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F_1} = \varphi\left(\frac{\partial F_{1x}}{\partial x}+\frac{\partial F_{1y}}{\partial y}+\frac{\partial F_{1z}}{\partial z}\right)=(0) \tag{1.164}$$

et le dernier terme de l'équation (1.163)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{F_1} &= \left(y\,\vec{i}+x\,\vec{j}-2\pi\lambda xy\,\vec{k}\right)\exp\left(-2\pi\lambda z\right)\cdot\left(yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}\right)\\ &= \left(y^2z+x^2z-2\pi\lambda x^2y^2\right)\exp\left(-2\pi\lambda z\right)\end{aligned} \tag{1.165}$$

d'ou

$$\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F_1}+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{F_1} = \left(y^2z+x^2z-2\pi\lambda x^2y^2\right)\exp\left(-2\pi\lambda z\right) \tag{1.166}$$

De même, la comparaison entre les expressions (1.163) et (1.166) donne une vérification de l'identité (1.162).
En fin la dernière identité,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F_1}\wedge\vec{F_2}) = \vec{F_2}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1}-\vec{F_1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_2} \tag{1.167}$$

on a

$$\begin{aligned}\vec{F_1}\wedge\vec{F_2} &= \begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z}\\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z}\end{pmatrix}=(F_{1y}F_{2z}-F_{2y}F_{1z})\,\vec{i}-(F_{1x}F_{2z}-F_{2x}F_{1z})\,\vec{j}+(F_{1x}F_{2y}-F_{2x}F_{1y})\,\vec{k}\\ &= \left(x^2y^3z^2-xy^2z^2\right)\vec{i}+\left(x^2y^2z-xy^4z^2\right)\vec{j}+\left(-x^2yz^2+y^2z^3\right)\vec{k}\\ &= A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j}+A_z\,\vec{k}\end{aligned} \tag{1.168}$$

d'ou, le terme gauche de l'équation (1.167) donne,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F_1}\wedge\vec{F_2}) = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\left(-2xy^3z^2+2y^2z^2\right) \tag{1.169}$$

Maintenant, pour le terme $\vec{F_2}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1}$, le produit $\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1}$ est donné par l'équation (1.157), soit

$$\vec{F_2}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1} = (0) \tag{1.170}$$

et pour le dernier terme $\vec{F_1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_2}$, on a,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge\vec{F_2} &= \left(\frac{\partial F_{2z}}{\partial y}-\frac{\partial F_{2y}}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial F_{2z}}{\partial x}-\frac{\partial F_{2x}}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_{2y}}{\partial x}-\frac{\partial F_{2x}}{\partial y}\right)\vec{k}\\ &= \left(3xzy^2-2zy\right)\vec{i}+\left(-zy^3+xy\right)\vec{j}+(-xz)\,\vec{k}\end{aligned} \tag{1.171}$$

d'ou

$$\begin{aligned}\vec{F_1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_2} &= \left(yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}\right)\cdot\left(\left(3xzy^2-2zy\right)\vec{i}+\left(-zy^3+xy\right)\vec{j}+(-xz)\,\vec{k}\right)\\ &= \left(2xy^3z^2-2y^2z^2\right)\end{aligned} \tag{1.172}$$

et par conséquent

$$\vec{F_2}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_1}-\vec{F_1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{F_2} = \left(-2xy^3z^2+2y^2z^2\right) \tag{1.173}$$

De même, la comparaison entre les équations (1.169) et (1.173) justifier l'identité (1.167).

Deuxième partie

Cinématique du point matériel

CHAPITRE 2

CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

« Efforts and courage are not enough without purpose and direction. »

John F. Kennedy

Sommaire

2.1 Corrigés détaillés des exercices 27

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME ET UNIFORMÉMENT VARIÉ

Exercise 2.1 La vitesse d'une voiture assimilée à un point matériel, se déplaçant le long de l'axe $x'Ox$, est donnée par la figure 2.1. En suppose qu'à $t = t_0$, $x(t_0) = 0$ m.



FIGURE 2.1 – Diagramme des vitesses v=g(t)

1. A partir du diagramme des vitesses $v(t)$,
   (a) déterminer les conditions initiales du mouvement (origine des temps ou date de début du mouvement t_0 et la vitesse initiale $v(t_0)$),
   (b) tracer le diagramme des accélérations $a(t)$ en fonction du temps,
   (c) en déduire la nature du mouvement dans les différents phases du mouvement. justifier.
   (d) tracer, qualitativement le diagramme des espaces en fonction du temps $x = f(t)$.
2. Ecrire les équations horaires du mouvement v(t) et x(t) dans l'intervalle de temps [0 (s),90 (s)].
3. Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 20$ (s)

4. En utilisant une échelle adéquate, représenter les vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 10\ (s)$, $t_2 = 30\ (s)$, $t_3 = 45\ (s)$, $t_4 = 50\ (s)$ et $t_5 = 75\ (s)$.
5. Calculer la distance totale parcourue entre t_0 et $t = 90\ (s)$ et la comparer avec la valeur du déplacement à la date $t = 90\ (s)$.

■

Exercise 2.2 Un mobile M assimilé à un point matériel de masse m, se déplace le long de l'axe $x'Ox$. Son mouvement est décrit par le digramme des accélérations illustré par la figure 2.2. A l'instant **t=0 (s)**, le mobile est à l'origine des abscisses **x(0)=0 (m)** avec une vitesse initiale **v(0)=2 (m/s)**.

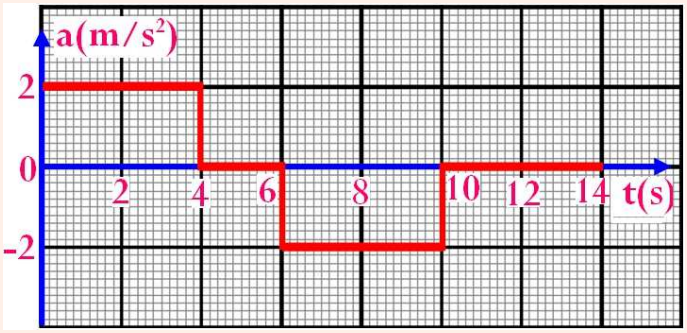


FIGURE 2.2 – Diagramme des accélérations a=f(t)

1. Etude graphique :
   (a) Tracer le diagramme des vitesses $v(t)$ en fonction du temps. **Attention** : **v(0)=2 (m/s)**
   (b) Quelles sont les différentes phases du mouvement et préciser la nature de chacune des phases.
   (c) Tracer, qualitativement le diagramme des espaces en fonction du temps $x = f(t)$.
   (d) Calculer, à partir du diagramme des vitesses, la distance parcourue entre t_0 et $t = 14\ (s)$.
2. Etude analytique :
   (a) Ecrire les équations horaires du mouvement $v(t)$ et $x(t)$ dans chaque phase.
   (b) Représenter à l'échelle ci-dessous les vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 2\ (s)$ et $t_2 = 8\ (s)$.

$$\text{Echelle} : 1(cm)\text{papier} \longrightarrow 4(m),\ \ 1(cm)\text{papier} \longrightarrow 2(m/s),\ \ (cm)\text{papier} \longrightarrow 1(m/s^2) \qquad (2.1)$$

   (c) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t_1 = 10\ (s)$ et $t_2 = 14\ (s)$.

■

Exercise 2.3 Deux mobiles **A** et **B** assimilables à des points matériels, sont animés d'un mouvement rectiligne sur une piste représentée par la figure (2.3). Le mobile **A** démare à partir du point $P_A = -20\ m$ et l'autre **B** à partir du point $P_B = 30\ m$. Le sens du parcours est indiqué sur la figure. Les variations au cours temps des vitesses par rapport à O sont représentées par la figure (2.4).

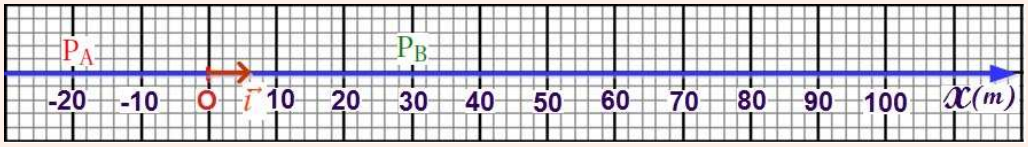


FIGURE 2.3 – Trajectoire décrite par les mobiles **A** et **B**

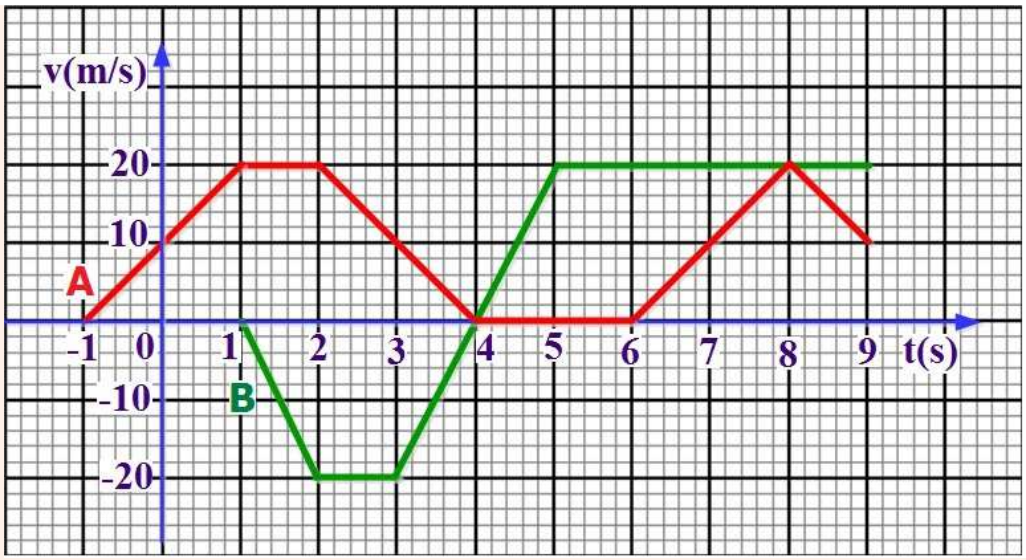


FIGURE 2.4 – Diagramme des vitesses des deux mobiles **A** et **B**

1. Etude graphique :
   (a) Représenter qualitativement le diagrame des espaces des deux mobiles **A** et **B**.
   (b) Déterminer l'instant t_1 et l'endroit x_1 où a lieu le croisement des deux mobiles (quand et où les deux mobiles se rencontrent).
   (c) Déterminer les instants t_2 et t_3 auxquelles le mobile **B** passe respectivement pour la première et la deuxième fois par l'origine O du repère. Quelle sont alors les vitesses de **B** à ces dates? Que peut-on déduire sur le mouvement du mobile (sens de déplacement du mobile par rapport au repère)?
   (d) Quelle distance a parcourue le mobile **B** durant l'intervalle de temps $[t_2, t_3]$?
   (e) Déterminer la position et la date du point de rebroussement du mobile **B**.
   (f) Calculer la distance que le mobile **A** a parcourue avant de commencer à freiner, et déterminer la position corespondante.
   (g) Quelle distance parcourt le mobile **B** avant que le mobile **A** s'immobilisé?
   (h) Quelle est la distance séparant les mobiles **A** et **B** avant que le mobile **A** s'arrête et le mobile **B** rebrousse sont chemin?
   (i) Le mobile **B** rattrape-t'-il le mobile **A** durant son arrêt?, justifier votre réponse.
   (j) A quelle position x_2 et date t_4 le mobile **B** va-t-il rattraper (ou dépassera-t-il) le mobile **A**?
   (k) Quelles sont leurs vitesses à ce point?
   (l) Quelle sera alors la distance parcourue par le mobile **B** depuis l'instant de son départ?
   (m) Représenter qualitativement le diagramme des accélérations des deux mobiles **A** et **B**.
   (n) Déterminer en justifiant votre réponse, la nature du mouvement des mobiles **A** et **B** pour chacune des phases.
2. Etude analytique :
   (a) Ecrire les équations horaires du mouvement des mobiles **A** et **B** et retrouver les valeurs des positions et vitesses des mobiles à la fin de chacune des phases.
   (b) Retrouver la date où le mobile **B** va rattraper le mobile **A** si on suppose que cela est possible au cours de l'intervalle de temps $t \in [6\ s, 8\ s]$.

■

MOUVEMENT PLAN À DEUX DIMENSIONS

Exercise 2.4 Dans le plan xOy d'un repère cartésien $\Re(O; x, y, z)$, muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le mouvement d'un mobile est décrit par les équations paramétriques ou horaires

$$\begin{cases} x &= 70.7t \\ y &= -4.9t^2 + 70.7t \\ z &= 0 \end{cases} \quad \text{(où x,y et z sont exprimés en mètre et t en seconde)}$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire et montrer que celle-ci est une parabole.

2. Tracer la trajectoire du mobile en utilisant une échelle adéquate.
3. Quelles sont les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps.
4. En déduire la nature du mouvement suivant les axes Ox et Oy.
5. Représenter les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$ aux instants $t_1 = 1(s)$, $t_2 = 7.21(s)$ et $t_3 = 10(s)$.
6. Déterminer les composantes intrinsèques tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ et normale $\overrightarrow{a_N}$ du vecteur accélération selon les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{u_T}$ du trièdre de Serret- Frenet.
7. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u_T}$, $\overrightarrow{a_N}$ et $\overrightarrow{a_T}$ à l'instant $t = 4$ (s).
8. En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire à cet instant.

■

Exercise 2.5 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\Re(O; x, y)$, soit un point P a pour coordonnées polaires ρ et θ données par

$$\begin{cases} \rho & = & r_0(1+\cos\theta(t)) \\ \theta(t) & = & \omega t \ \text{(où } r_0\text{, t et } \omega \text{ sont exprimés en m, s et rad/s respectivement)} \end{cases}$$

avec r_0 et ω sont des constantes positives. Déterminer dans la base des coordonnées polaires :

1. le vecteur position du point P,
2. les composantes radiale $\overrightarrow{v_\rho}$ et orthoradiale $\overrightarrow{v_\theta}$ de la vitesse,
3. les composantes radiale $\overrightarrow{a_\rho}$ et orthoradiale $\overrightarrow{a_\theta}$ de l'accélération,
4. en déduire la vitesse curviligne v_c (norme du vecteur vitesse) ainsi que l'abscisse curviligne $s(t)$ de P.

1. Exprimer, en fonction de r_0, t et ω, la composante tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ de l'accélération.
2. En déduire l'expression de la composante normale $\overrightarrow{a_N}$ de l'accélération.
3. Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire en utilisant la relation $\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{a}\| = \frac{v^3}{R_c}$.

■

Exercise 2.6 Un objet assimilable à un point matériel se déplace sur une trajectoire circulaire de centre O est de rayon R = 20 cm avec une accélération angulaire $\alpha = 2\pi$ (rad/s^2). La vitesse initiale étant nulle.

1. Déterminer les équations horaires du mouvement angulaire $\omega(t)$ et $\theta(t)$.
2. Calculer et représenter au temps $t = 0,5$ s, les valeurs respectives des variables linéaires, abscisse curviligne S(0,5), vitesse curviligne $v_c(0,5)$, l'accélération tangentielle $a_T(0,5)$, l'accélération normale $a_N(0,5)$ et l'accélération totale $a(0,5)$.

■

MOUVEMENT RELATIF

Exercise 2.7 On considère un fleuve rectiligne de largeur L = 2 km, figure 2.5. La vitesse du courant par rapport à la terre $\|\overrightarrow{v_e}\| = 20$ km/h est uniforme et parallèle aux rives. Un bateau de plaisance, assimilable à un point matériel, effectue une traversée du fleuve avec une vitesse par rapport à l'eau est constante $\|\overrightarrow{v_r}\| = \sqrt{2}v_e$. Exprimer le vecteur vitesse du bateau par rapport au sol en fonction de $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{v_r}$. Si le bateau part d'un point A et veut arriver au point B se trouvant juste en face du point A du rive opposée, calculer l'angle entre $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{v_r}$

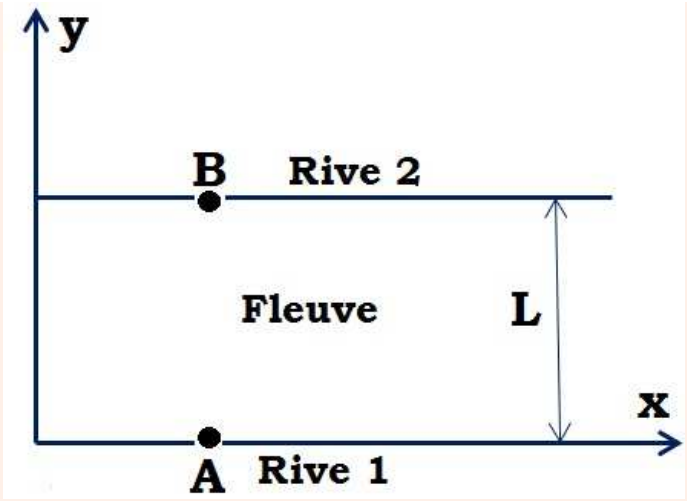


FIGURE 2.5 – Diagramme des vitesses v=g(t)

1. Ecrire les équations horaires du mouvement relatif.
2. En déduire l'équation de la trajectoire relative.
3. Quelle est la durée de cette traversée.

■

Exercise 2.8 On considère deux référentiels $\Re(O;x,y,z)$ et $\Re'(O';x',y',z')$ dont les axes Oz et Oz' sont confondus ; $\Re'$ tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante. Soit, une masselotte assimilée à un point matériel M, animé d'un mouvement relatif rectiligne sur l'axe Ox' suivant la loi $x' = a(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$ où $a = cte$ et exprimée en mètre. A un instant t donné,

1. écrire la loi de composition des vitesses,
2. déterminer le vecteur vitesse relative,
3. déterminer le vecteur vitesse d'entrainement en utilisant la relation $\overrightarrow{v_e} = (\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt})^{\Re} + (\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge \overrightarrow{r'}$,
4. en déduire le vecteur vitesse absolue,
5. écrire la loi de composition des accélérations,
6. déterminer le vecteur accélération relative,
7. déterminer le vecteur accélération d'entrainement en utilisant la relation $\overrightarrow{a_e} = (\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2})^{\Re} + (\overrightarrow{\alpha_{\Re'}})^{\Re} \wedge \overrightarrow{r'} + (\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge \left[(\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge \overrightarrow{r'}\right]$,
8. déterminer le vecteur accélération de Coriolis en utilisant la relation $\overrightarrow{a_c} = 2(\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge (\overrightarrow{v_M})^{\Re'}$
9. en déduire le vecteur accélération absolue,
10. trouver les expressions des composantes intrinsèques (tangentielle et normale) de l'accélération.
11. en déduire l'expression de rayon de courbure R_c de la trajectoire.

■

2.1 Corrigés détaillés des exercices

Exo01 :

1. A partir du diagramme des vitesses $v(t)$,
   (a) En déduit $t_0 = -20\ (s)$ et $v(t_0) = 0\ (m/s)$.
   (b) L'accélération du mobile est définie par,

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \tag{2.2}$$

   c'est-à-dire, graphiquement, c'est la pente de la tangente à la courbe de $v(t)$. Le calcul du diagramme des accélérations $a(t)$ est représenté par la figure (2.6).
   (c) La nature de mouvement du mobile dépond du signe de produit $v(t) \times a(t)$. L'étude des deux graphes 2.1 et 2.6 nous permet facilement d'une part d'identifier les différentes phase de mouvement et la nature de mouvement d'autre part :

   Phase 1 : $t \in [-20,20]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ($av > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) accéléré).

Phase 2 : $t \in [20,40]$ $\begin{cases} v>0 \\ a=0 \end{cases}$ ($av=0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme (v=C$^{st} \neq 0$))

Phase 3 : $t \in [40,50]$ $\begin{cases} v>0 \\ a<0 \end{cases}$ ($av<0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) décéléré).

Phase 4 : $t \in [50,60]$ $\begin{cases} v<0 \\ a<0 \end{cases}$ ($av>0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) accéléré).

Phase 5 : $t \in [60,90]$ $\begin{cases} v<0 \\ a>0 \end{cases}$ ($av<0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) retardé).

(d) La figure (2.7) représente le diagramme des espaces $x(t)$ obtenu par le calcul de l'aire sous la courbe de $v(t)$.

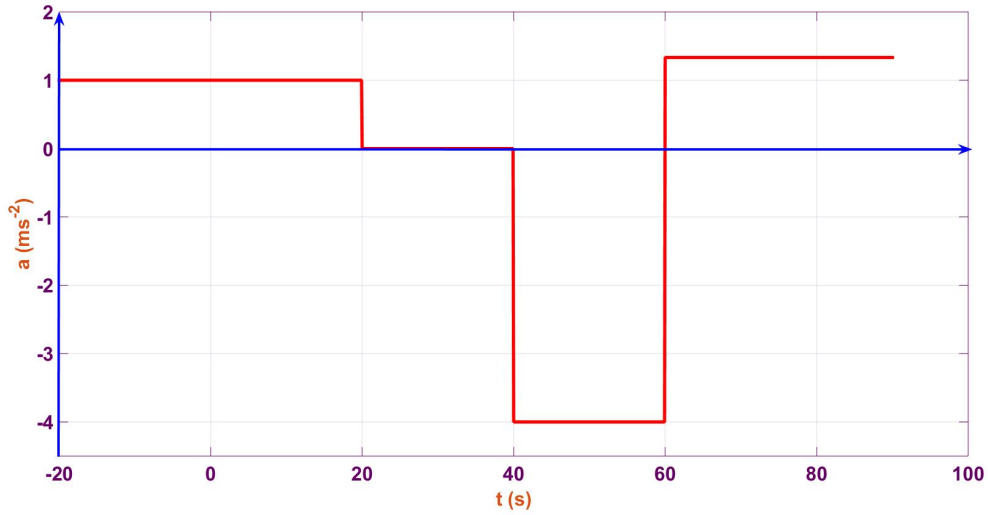


FIGURE 2.6 – Diagramme ou graphe des accélérations

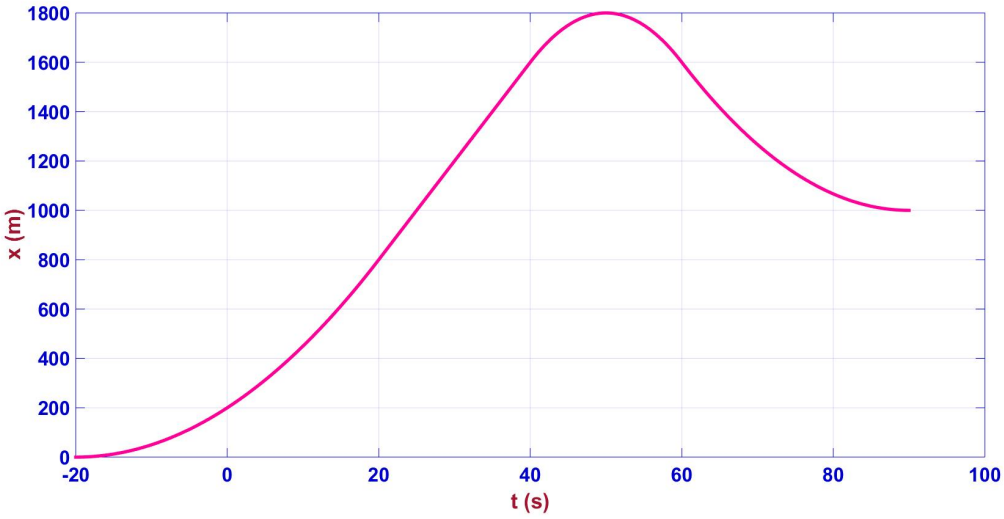


FIGURE 2.7 – Diagramme ou graphe des espaces

2. Les équations horaires v(t) et x(t) dans les différentes phases de mouvement sont calculées à partir des expressions générales (2.3) et (2.4) qui sont valables quel que soit les conditions initiales et selon la nature de mouvement :
Cas d'un mouvement rectiligne uniforme :

$$\text{a=0 et v=C}^{st} \neq 0 \quad \begin{cases} v = \text{C}^{st} = v(t_0) \\ x(t) = v(t_0)\,t + x(t_0) \end{cases} \tag{2.3}$$

Cas d'un mouvement rectiligne uniformément (a=Cst) varié :

$$a = \text{C}^{st} \neq 0 \quad \begin{cases} v(t) = a(t-t_0) + v(t_0) \\ x(t) = \frac{a}{2}(t-t_0)^2 + v(t_0)(t-t_0) + x(t_0) \end{cases} \tag{2.4}$$

Phase 1 :

$$t \in [-20,40] \quad \begin{cases} a = 1 \\ v(t) = t + 20 \\ x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 20t + 200 \end{cases} \tag{2.5}$$

Phase 2 :

$$t \in [20,40] \quad \begin{cases} a = 0 \\ v = \text{C}^{st} = 40\ (m/s \\ x(t) = 40t \end{cases} \tag{2.6}$$

Phase 3 :

$$t \in [40,50] \quad \begin{cases} a = -4 \\ v(t) = -40t + 200 \\ x(t) = -2t^2 + 200t - 3200 \end{cases} \tag{2.7}$$

Phase 4 :

$$t \in [50,60] \quad \begin{cases} a = -4 \\ v(t) = -4t + 200 \\ x(t) = -2t^2 + 200t - 3200 \end{cases} \tag{2.8}$$

Phase 5 :

$$t \in [60,90] \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ v(t) = \frac{4}{3}t - 120 \\ x(t) = \frac{2}{3}t^2 - 120t + 6400 \end{cases} \tag{2.9}$$

3. La vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 20\ (s)$ est donnée par $v_{moy} = \frac{x(20)-x(0)}{20-0} = 30\ (m/s)$.

4. Les vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 10\ (s)$, $t_2 = 30\ (s)$, $t_3 = 50\ (s)$, $t_4 = 55\ (s)$ et $t_5 = 75\ (s)$, sont donnés par :

$$t_1 = 10\ (s) \quad \begin{cases} x(10) = 450\ (m) \\ \vec{v}(10) = 30\vec{i}\,(m/s) \\ a(10) = 1\vec{i}\,(m/s^2) \end{cases} \tag{2.10}$$

$$t_2 = 30\ (s) \quad \begin{cases} x(30) = 1200\ (m) \\ \vec{v}(30) = 40\vec{i}\,(m/s) \\ \vec{a}(30) = 0\vec{i}\,(m/s^2) \end{cases} \tag{2.11}$$

$$t_3 = 45\ (s) \begin{cases} x(45) = 1750\ (m) \\ \vec{v}(45) = 20\vec{\imath}\,(m/s) \\ \vec{a}(45) = -4\vec{\imath}\,(m/s^2) \end{cases} \tag{2.12}$$

$$t_4 = 50\ (s) \begin{cases} x(50) = 1800\ (m) \\ \vec{v}(50) = 0\vec{\imath}\,(m/s) \\ \vec{a}(50) = -4\vec{\imath}\,(m/s^2) \end{cases} \tag{2.13}$$

$$t_5 = 75\ (s) \begin{cases} x(75) = 1150\ (m) \\ \vec{v}(75) = -20\vec{\imath}\,(m/s) \\ \vec{a}(75) = \frac{4}{3}\vec{\imath}\,(m/s^2) \end{cases} \tag{2.14}$$

La figure (2.8) représente la représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations du mobile sur sa trajectoire aux instants $t_1 = 10\ (s)$, $t_2 = 30\ (s)$, $t_3 = 50\ (s)$, $t_4 = 55\ (s)$ et $t_5 = 75\ (s)$.
En utilisant les échelles suivantes :
$1\ (cm) \longmapsto 100\ (m)$, $1\ (cm) \longmapsto 10\ (m/s)$ et $1\ (cm) \longmapsto 1\ (m/s^2)$

5. La distance totale parcourue par le mobile entre t_0 et $t = 90\ (s)$ peut être calculée en sommant toutes les aires sous la courbe de $x(t)$. Soit $d = \frac{(40)(40)}{2} + (40-20)(40) + \frac{(50-40)(40)}{2} + \frac{(60-50)(40)}{2} + \frac{(90-60)(40)}{2} = 2600\ (m)$.
Par contre le déplacement total durant cet intervalle de temps est $x_t = \frac{(40)(40)}{2} + (40-20)(40) + \frac{(50-40)(40)}{2} - \frac{(60-50)(40)}{2} - \frac{(90-60)(40)}{2} = 1000\ (m)$

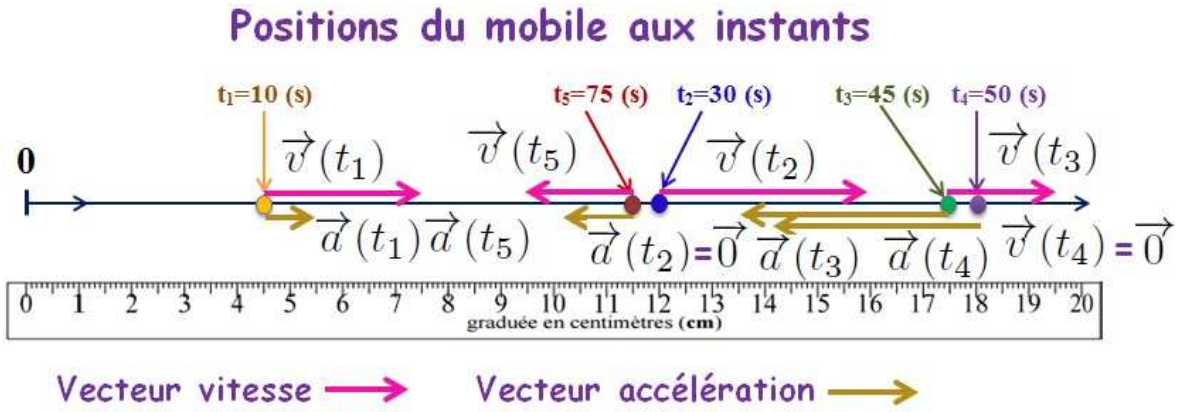


FIGURE 2.8 – Représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations aux instants t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5

Exo02 :

1. Etude graphique :
   (a) Sachant que par définition,

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} v(t)dt = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \text{ soit } v(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} a(t)dt}_{\textbf{Aire}} + v(0), \tag{2.15}$$

Avec **Aire**, représente l'aire sous la courbe de $a(t)$, limitée par la courbe de $a(t)$, l'axe des temps t et les verticales d'équations $t = t_0$ et $t = t_p$. Le diagramme des accélérations nous permet donc de calculer toutes les valeurs de $v(t)$ u mobile durant son mouvement.

— Entre $[t_0 = 0\ (s)$ et $t_1 = 4\ (s)]$, $a = C^{st} = 2\ (m/s^2)$ donc, la courbe de $v(t)$ est une droite de pente constante et positive. Pour représenter cette courbe, il suffit de connaître deux points. Le premier point est donné par $v(0) = 2\ (m/s)$ et le deuxième point sera calculer en utilisant la technique de calcul d'aire suivante,

$$v(4) = \int_0^4 a(t)dt + v(0) = 2 \times 4 + v(0) = 8 + 2 = 10\ (m/s) \tag{2.16}$$

— Entre $[t_1 = 4\ (s)$ et $t_2 = 6\ (s)]$, $a = C^{st} = 0 \Rightarrow v = C^{st} = 10\ (m/s)$, la courbe de $v(t)$ est une droite de pente égale à zéro.

$$v(6) = v(4) = 10\ (m/s) \tag{2.17}$$

— Entre $[t_2 = 6\ (s)$ et $t_3 = 10\ (s)]$ $a = C^{st} = -2\ (m/s^2)$, la courbe de $v(t)$ est une droite de pente constante et négative.

$$v(4) = \int_6^{10} a(t)dt + v(6) = -2 \times 4 + 10 = 2\ (m/s) \tag{2.18}$$

— Entre $[t_3 = 10\ (s)$ et $t_4 = 14\ (s)]$, $a = C^{st} = 0 \Rightarrow v = C^{st} = 2\ (m/s)$, la courbe de $v(t)$ est une droite de pente égale à zéro.

$$v(14) = v(12) = 2\ (m/s) \tag{2.19}$$

Toutes ces courbes sont représentées par la figure 2.9 qui montre l'évolution de la vitesse du mobile M en fonction du temps.

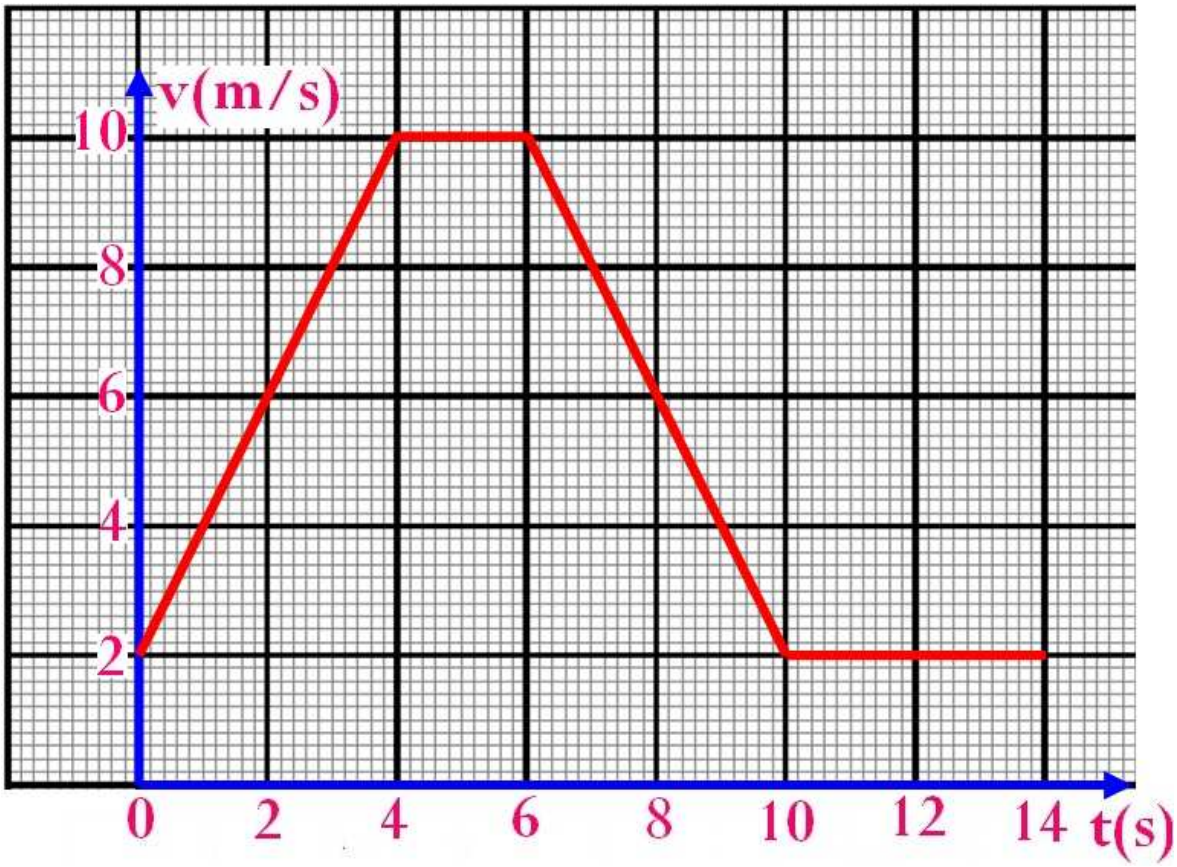


FIGURE 2.9 – Diagramme des vitesses v=f(t)

(b) D'après les diagrammes des vitesses et des accélération, en peut déduire les différentes phases du mouvement suivantes :

Phase 1 : $t \in [0,4]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ($av > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=C^{st}) accéléré).

Phase 2 : $t \in [4,6]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a = 0 \end{cases}$ ($av = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme (v=$C^{st} \neq 0$))

Phase 3 : $t \in [6,10]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ ($av < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=C^{st}) décéléré).

Phase 4 : $t \in [10,14]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a = 0 \end{cases}$ ($av = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme (v=$C^{st} \neq 0$))

(c) Sachant que la vitesse représente la pente de la tangente à la courbe de $x(t)$, les caractéristiques (**valeur**, **signe** et variation (**croissance** ou **décroissance**)) liées à **v(t)** sont suffisants pour connaître qualitativement la forme de la courbe de $x(t)$. D'après le diagramme des vitesses, on

déduit donc :

Phase 1 : $t \in [0,4]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \nearrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de x(t) doit avoir une pente positive et strictement croissante,

entre $x(0)$ et $x(4)$, avec $\begin{cases} x(0) = 0\ (m) \\ x(4) = \int_0^4 v(t)dt + x(0) = \frac{(2+10)\times 4}{2} + x(0) = 24 + 0 = 24\ (m). \end{cases}$

Phase 2 : $t \in [4,6]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v = C^{st} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La pente de la tangente à la courbe de x(t) doit être constante et positive,

entre $x(4)$ et $x(6)$, avec $\begin{cases} x(4) = 24\ (m) \\ x(6) = \int_4^6 v(t)dt + x(4) = 2 \times 10 + x(4) = 20 + 24 = 44\ (m). \end{cases}$

Phase 3 : $t \in [6,10]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \searrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La pente représentée par v est positive et strictement décroissante,

entre $x(6)$ et $x(10)$, avec $\begin{cases} x(6) = 44\ (m) \\ x(10) = \int_6^{10} v(t)dt + x(6) = \frac{(2+10)\times 4}{2} + x(6) = 24 + 44 = 68\ (m). \end{cases}$

Phase 4 : $t \in [10,14]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v = C^{st} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe x(t) doit avoir une pente constante et positive,

entre $x(10)$ et $x(14)$, avec $\begin{cases} x(6) = 68\ (m) \\ x(10) = \int_{10}^{14} v(t)dt + x(10) = 2 \times 4 + x(10) = 8 + 68 = 76\ (m). \end{cases}$

La figure 2.10 représente l'évolution du déplacement du mobile M en fonction du temps.

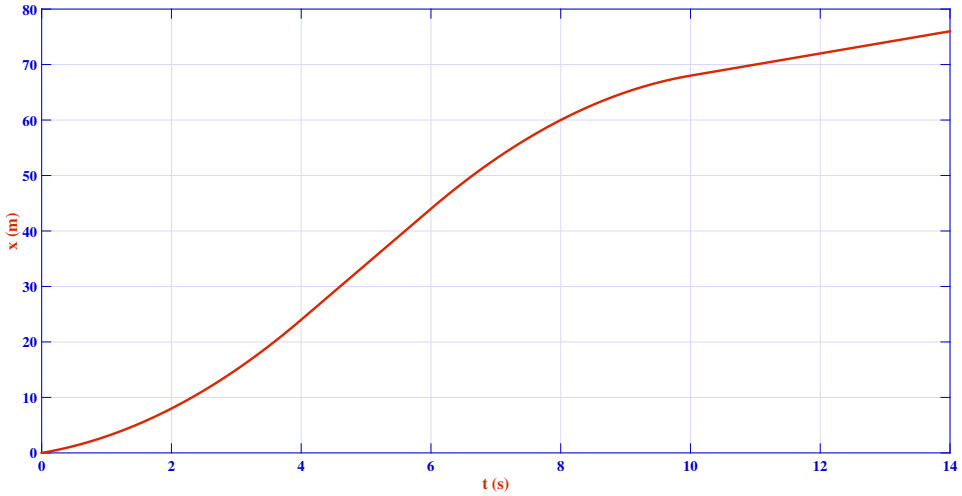


FIGURE 2.10 – Diagramme des espaces x(t)=f(t)

(d) La distance parcourue entre t_0 et $t = 14\ (s)$ peut être calculer par le calcul d'aire sous la courbe de $v(t)$

$$\boxed{d = (2+10) \times \frac{4}{2} + (6-4) \times 10 + (2+10) \times \frac{10-6}{2} + (14-10) \times 2 = 76\ (m)} \tag{2.20}$$

2. Etude analytique :

(a) Les équations horaires du mouvement $v(t)$ et $x(t)$ pour chacune des phases sont :

Phase 1 :

$$t \in [0,4] \begin{cases} a = 2 \\ \frac{dv}{dt} = a \ \Rightarrow\ \int_{v(0)}^{v(t)} dv = 2\int_0^t dt \ \Rightarrow\ \boxed{v(t) = 2t + 2} \\ \frac{dx}{dt} = v(t) \ \Rightarrow\ \int_{x(0)}^{x(t)} dx = 2\int_0^t tdt + 2\int_0^t dt \ \Rightarrow\ \boxed{x(t) = t^2 + 2t} \end{cases} \tag{2.21}$$

Phase 2 :

$$t \in [4,6] \begin{cases} a = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \ \Rightarrow\ \int_{v(4)}^{v(t)} dv = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{v(t) = C^{st} = 10\ (m/s)} \\ \frac{dx}{dt} = v(t) \ \Rightarrow\ \int_{x(4)}^{x(t)} dx = 10\int_4^t dt, x(t) - x(4) = 10(t-4) \ \Rightarrow\ \boxed{x(t) = 10t - 16} \end{cases} \tag{2.22}$$

Phase 3 :

$$t \in [6,10] \begin{cases} a = -2 \\ \frac{dv}{dt} = -2 \Rightarrow \int_{v(6)}^{v(t)} dv = -2\int_6^t dt \Rightarrow \boxed{v(t) = -2t + 22} \\ \frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow \int_{x(6)}^{x(t)} dx = -2\int_6^t t\,dt + 22\int_6^t dt \Rightarrow \boxed{x(t) = -t^2 + 22t - 52} \end{cases} \tag{2.23}$$

Phase 4 :

$$t \in [10,14] \begin{cases} a = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{v(10)}^{v(t)} dv = 0 \Rightarrow \boxed{v(t) = C^{st} = 2\ (m/s)} \\ \frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow \int_{x(10)}^{x(t)} dx = 2\int_{10}^t dt \Rightarrow \boxed{x(t) = 2t + 48} \end{cases} \tag{2.24}$$

(b) Les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ aux instants $t_1 = 2\ s$ et $t_2 = 8\ s$ sont donnés dans le tableau (2.1) et représentés sur la figure (2.11).

TABLE 2.1 – Représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 2\ (s)$ et $t_2 = 8\ (s)$

Variables / Temps	$\overrightarrow{a(t)}$ (m/s^2)	$\overrightarrow{v(t)}$ (m/s)	$x(t)$ (m)
$t_1 = 2\ (s)$	$2\vec{i}$	$6\vec{i}$	8
$t_2 = 8\ (s)$	$-2\vec{i}$	$6\vec{i}$	60

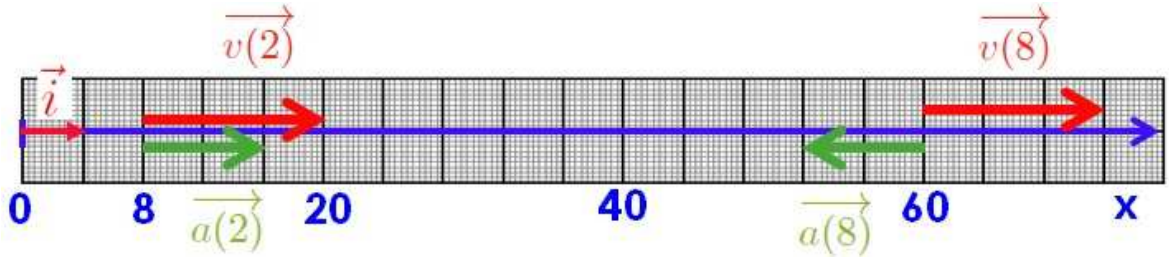


FIGURE 2.11 – Représentation vectorielle des vecteurs vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 2\ (s)$ et $t_2 = 8\ (s)$

(c) La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t_1 = 10\ (s)$ et $t_2 = 14\ (s)$ est donnée par,

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{x(14) - x(10)}{t_2 - t_1}\vec{i} = \frac{76 - 68}{14 - 10}\vec{i} = 2\vec{i}\,(m/s) \tag{2.25}$$

Exo03 :

1. Etude graphique : Le diagramme des vitesses $v(t)$ des deux mobiles montré par la figure (2.4) nous permet de décrire complètement leurs mouvements au cours du temps.
   (a) Sachant que par définition

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx = v(t)dt \text{ soit } \int_{x(t(0))}^{x(t)} \mathrm{d}x(t) = \int_{t(0)}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.26}$$

par conséquent,

$$x(t) - x(t(0)) = \underbrace{\int_{t(0)}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t}_{\textbf{Aire}} \Rightarrow x(t) = \textbf{Aire} + x(t(0)), \tag{2.27}$$

où **Aire** représente l'aire sous la courbe de **v(t)** limitée par la courbe de **v(t)**, l'axe du temps et les verticales passants par **t(0)** et **t**. On déduit alors les valeurs de **x(t)** correspondantes aux différents instants **t(i)**,

— Etude du mouvement du mobile **A** :
Conditions initiales : A partir du praphe (2.4) et de la figure (2.3), on déduit que $v_A(t_A(0)) = 0\ ms^{-1}$ et $x_A(t_A(0)) = -20\ m$ où $v_A(t_A(0))$ et $x_A(t_A(0))$ sont respectivement la vitesse et l'abscisse du mobile à la date $t_A(0) = -1\ s$.
Les différentes valeurs du déplacement $\mathbf{x_A t(i)}$ peuvent être calculées à la fin de chaque phase de mouvement comme suit :

$$x_A(t=1\ s) = \int_{-1}^{1} v_A(t)\,dt + x_A(t=-1\ s) = \text{Aire} + x_A(-1) = \frac{(1-(-1))(20)}{2} - 20 = 0. \tag{2.28}$$

$$x_A(t=2\ s) = \int_{1}^{2} v_A(t)\,dt + x_A(t=1\ s) = \text{Aire} + x_A(1) = (2-1)(20) + 0 = 20\ m. \tag{2.29}$$

$$x_A(t=4\ s) = \int_{2}^{4} v_A(t)\,dt + x_A(t=2\ s) = \text{Aire} + x_A(2) = \frac{(4-2)(20)}{2} + 20 = 40\ m. \tag{2.30}$$

$$x_A(t=6\ s) = \int_{4}^{6} v_A(t)\,dt + x_A(t=4\ s) = \text{Aire} + x_A(4) = 0 + 40 = 40\ m = x_A(t=6\ s). \tag{2.31}$$

$$x_A(t=8\ s) = \int_{6}^{8} v_A(t)\,dt + x_A(t=6\ s) = \text{Aire} + x_A(6) = \frac{(8-6)(20)}{2} + 40 = 60\ m. \tag{2.32}$$

$$x_A(t=9\ s) = \int_{8}^{9} v_A(t)\,dt + x_A(t=8\ s) = \text{Aire} + x_A(8) = \frac{(9-8)(10+20)}{2} + 60 = 75\ m. \tag{2.33}$$

Maintenant, pour représenter qualitativement l'allure de la courbe de $x_A(t)$, il suffit d'étudier les caractéristiques de la vitesse $v_A(t)$ car par définition

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \text{ la pente de la tangente à la courbe de } x_A(t), \tag{2.34}$$

c'est-à-dire, dans chaque phase de mouvement, il faut trouver la forme de la courbe de $x(t)$ dont la pente à les caractéristiques (**négative, nulle ou positive et croissante ou décroissante**) que la vitesse $v(t)$ déjà connue.

Phase 1 : $t \in [-1,1]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \nearrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_A(t)$ doit avoir une pente positive et croissante.

Phase 2 : $t \in [1,2]$ $\begin{cases} v = C^{st} \\ v = 20\ ms^{-1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_A(t)$ doit avoir une pente constante positive non nulle.

Phase 3 : $t \in [2,4]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \searrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_A(t)$ doit avoir une pente positive et décroissante.

Phase 4 : $t \in [4,6]$ $\begin{cases} v = C^{st} \\ v = 0\ ms^{-1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_A(t)$ doit avoir une pente constante et nulle.

Phase 5 : $t \in [6,8]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \nearrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_A(t)$ doit avoir une pente positive et croissante.

Phase 6 : $t \in [8,9]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \searrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_A(t)$ doit avoir une pente positive et décroissante.

— Etude du mouvement du mobile **B** :
Pour décrire le mouvement de **B**,on suit les mêmes démarches précédentes et on obtient :
Conditions initiales :
$t_B(0) = 1\ s$, $v_B(t_B(0)) = 0\ ms^{-1}$ et $x_B(t_B(0)) = +30\ m$.

Les valeurs du déplacement $\mathbf{x_B t(i)}$ à la fin de chaque phase sont données par :

$$x_B(t=2\ s) = \int_1^2 v_B(t)\,dt + x_B(t=1\ s) = \text{Aire} + x_B(1) = \frac{(2-1)(-20)}{2} + 30 = 20\ m. \tag{2.35}$$

$$x_B(t=3\ s) = \int_2^3 v_B(t)\,dt + x_B(t=2\ s) = \text{Aire} + x_B(2) = (3-2)(-20) + 20 = 0\ m. \tag{2.36}$$

$$x_B(t=4\ s) = \int_3^4 v_B(t)\,dt + x_B(t=3\ s) = \text{Aire} + x_B(3) = \frac{(4-3)(-20)}{2} + 0 = -10\ m. \tag{2.37}$$

$$x_B(t=5\ s) = \int_4^5 v_B(t)\,dt + x_B(t=4\ s) = \text{Aire} + x_B(4) = \frac{(5-4)(20)}{2} - 10 = 0\ m. \tag{2.38}$$

$$x_B(t=8\ s) = \int_5^8 v_B(t)\,dt + x_B(t=5\ s) = \text{Aire} + x_B(5) = (8-5)(20) + 0 = 60\ m. \tag{2.39}$$

$$x_B(t=9\ s) = \int_8^9 v_B(t)\,dt + x_B(t=8\ s) = \text{Aire} + x_B(8) = (9-8)(20) + 60 = 80\ m. \tag{2.40}$$

De même, les allures de la courbe représentative de $\mathbf{x_B(t)}$ dans chaque phase sont déterminées par :

Phase 1 : $t \in [1,2]$ $\begin{cases} v < 0 \\ v \nearrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_B(t)$ doit avoir une pente négative et croissante.

Phase 2 : $t \in [2,3]$ $\begin{cases} v = C^{st} \\ v = -20\ ms^{-1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_B(t)$ doit avoir une pente constante négative non nulle.

Phase 3 : $t \in [3,4]$ $\begin{cases} v < 0 \\ v \searrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_B(t)$ doit avoir une pente négative et décroissante.

Phase 4 : $t \in [4,5]$ $\begin{cases} v > 0 \\ v \nearrow \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_B(t)$ doit avoir une pente positive et croissante.

Phase 5 : $t \in [5,9]$ $\begin{cases} v = C^{st} \\ v = 20\ ms^{-1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La courbe de $x_B(t)$ doit avoir une pente constante positive non nulle.

Les résultats obtenus de l'étude graphique du mouvement des deux mobiles **A** et **B** sont représentés par la figure (2.13).

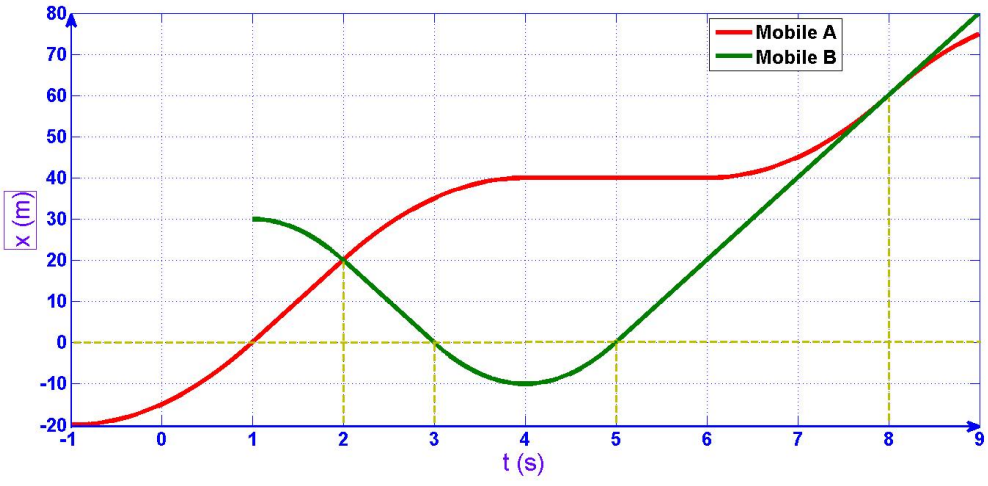


FIGURE 2.12 – Représentation des digrammes des espaces des mobiles A et B

(b) D'après le diagramme des espaces, les deux mobiles se rencontrent à l'instant $t_1 = 2\ s$ et à la position $x_1 = 20\ m$.

(c) Toujours d'après le diagramme des espaces, les instants auxquelles le mobile **B** passe respectivement pour la première et la deuxième fois par l'origine O du repère, sont $t_2 = 3\ s$ et $t_3 = 5\ s$. Les valeurs des vitesses sont déduite à partir du diagramme des vitesses aux instants $t_2 = 3\ s$ et $t_3 = 5\ s$ et elles sont respectivement, $v_B(t_2) = -20\ ms^{-1}$ et $v_B(t_3) = 20\ ms^{-1}$. Le mobile **B** passe par l'origine O du repère avec une vitesse de $v_B(t_2)$ dans le sens contraire du mouvement, et avec une vitesse de $v_B(t_3)$ dans le même sens du mouvement.

(d) La distance parcourue par le mobile **B** durant l'intervalle de temps $[t_2, t_3]$ est donnée par la somme des aires sous la courbe de $x_B(t)$ limitées par l'axe des tempes et les verticales passants par t_2 et t_3, soit, $d_B = \left|\frac{(-20-0)(4-3)}{2}\right| + \frac{(20-0)(5-4)}{2} = 20\ m$.

(e) La position et la date du point de rebroussement du mobile **B** sont aussi déduite à partir du graphe 2.13, $t_4 = 4\ s$ et à la position $x_B(t_4) = -10\ m$.

(f) Le mobile **A** commence à freiner à l'instant $t_5 = 2\ s$, la distance parcourue avant cette date est alors $d_A(2\ s) = \frac{(20-0)(1-(-1))}{2} + (20-0)(2-1) = 40\ m$, et sa position à cet instant est $x_A(t_5) = 20\ m$.

(g) Le mobile **A** est arrêté à l'instant $t_6 = 4\ s$, la distance que parcourt le mobile **B** avant cette date est $d_B(4\ s) = \left|\frac{(-20-0)(2-1)}{2}\right| + |(-20-0)(3-2)| + \left|\frac{(-20-0)(4-3)}{2}\right| = 40\ m$.

(h) La distance qui sépare les mobiles **A** et **B** avant que le mobile **A** s'arrête et le mobile **B** rebrousse sont chemin est égale à $D = x_A(4\ s) - x_B(4\ s) = 40 - (-10) = 50\ m$

(i) Le mobile **B** ne peut pas rattraper pas le mobile **A** durant son arrêt, car à cette date $x_A(4\ s) = 40\ m$ et $x_B(4\ s) = -10\ m$.

(j) Le mobile **B** va rattraper (ou dépasser) le mobile **A** à la position $x_2 = x_A(t_r) = x_B(t_r) = 60\ m$ et à la date $t_r = 8\ s$.

(k) A cette instant et cette position, la vitesse de **A** est $v_A(t_r) = 20\ ms^{-1}$ et la vitesse **B** est $v_B(t_r) = 20\ ms^{-1}$.

(l) Et la distance parcourue par le mobile **B** depuis l'instant de son départ est $x_B(t_r) = \left|\frac{(-20-0)(2-1)}{2}\right| + |(-20-0)(3-2)| + \left|\frac{(-20-0)(4-3)}{2}\right| + (20-0)(8-4) = 120\ m$.

(m) Le diagramme des accélérations des deux mobiles **A** et **B** est déduite du diagrammes des vitesses 2.4 par le calcul de la tangente à la courbe de $v(t)$ et il est représenté par la figure 2.13.

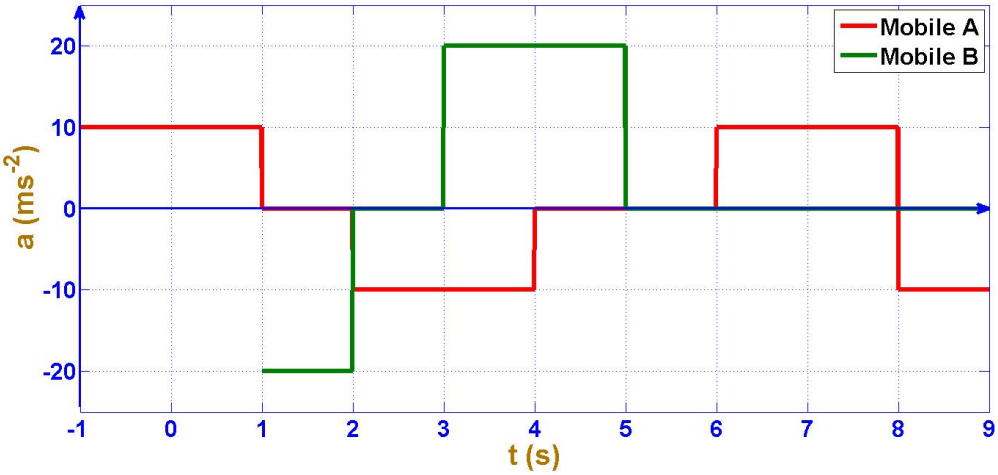


FIGURE 2.13 – Représentation des digrammes des accélérations des mobiles A et B

(n) Les différentes phases de mouvement sont déterminés à partir du diagramme des vitesses où la fonction $v(t)$ est monotone (strictement croissante ou décroissante) et positive, négative ou nulle. Et puis pour la nature du mouvement des mobiles **A** et **B** pour chacune des phases est obtenue par l'étude du signe du produit $a \times v$. On obtient :

— Pour le mobile **A**

Phase 1 : $t \in [-1,1]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ($av > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) accéléré).

Phase 2 : $t \in [1,2]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a = 0 \end{cases}$ ($av = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme ($\|\vec{v}\| = C^{st} \neq 0$)

Phase 3 : $t \in [2,4]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ ($av < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) décéléré).

Phase 4 : $t \in [4,6]$ $\begin{cases} v = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ ($av = 0 \Rightarrow$ Le mobile est au repos (immobile)).

Phase 5 : $t \in [6,8]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ($av > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) accéléré).

Phase 6 : $t \in [6,8]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ ($av < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) retardé).

— Pour le mobile **B**

Phase 1 : $t \in [1,2]$ $\begin{cases} v < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ ($av > 0 \Rightarrow$ Le m^{vt} est r^{ct} uniformément accéléré dans le sens contraire du mouve

Phase 2 : $t \in [2,3]$ $\begin{cases} v < 0 \\ a = 0 \end{cases}$ ($av = 0 \Rightarrow$ Le m^{vt} est R uniforme ($\|\vec{v}\| =$ Cst) dans le sens contraire du mouvemen

Phase 3 : $t \in [3,4]$ $\begin{cases} v < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ($av < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) décéléré).

Phase 4 : $t \in [4,5]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ($av > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément (a=Cst) accéléré).

Phase 5 : $t \in [5,9]$ $\begin{cases} v > 0 \\ a = 0 \end{cases}$ ($av = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme.

2. Etude analytique :

(a) Les équations horaire du mouvement des mobiles **A** et **B** peuvent être déduite facilement à partir de la précédente discutions et des relations générales (2.3) et (2.4). On peut vérifier à chaque fois que les résultats obtenus par la méthode analytique sont identiques à ceux obtenus par la méthode graphique.

— Pour le mobile **A**

Phase 1 :

$$t \in [-1,1] \begin{cases} a_A = 10\ ms^{-2} \\ v_A(t) = 10t + 10, \ (v_A(1) = 10\ ms^{-1}) \\ x_A(t) = 5t^2 + 20t - 15, \ (x_A(1) = 0\ m) \end{cases} \tag{2.41}$$

Phase 2 :

$$t \in [1,2] \begin{cases} a_A = 0 \\ v_A = \text{C}^{st} = 20\ ms^{-1} \\ x_A(t) = 20t - 20, \ (x_A(2) = 20\ m) \end{cases} \tag{2.42}$$

Phase 3 :

$$t \in [2,4] \begin{cases} a_A = -10\ ms^{-2} \\ v_A(t) = -10t + 40, \ (v_A(4) = 0\ ms^{-1}) \\ \\ x_A(t) = -5t^2 + 40t - 40, (x_A(4) = 40\ m) \end{cases} \tag{2.43}$$

Phase 4 :

$$t \in [4,6] \begin{cases} a_A = 0 \\ v_A(t) = 0\ ms^{-1} \\ x_A(t) = 40\ m.(x_A(4) = 40\ m = \text{C}^{st} = x_A(6)) \end{cases} \tag{2.44}$$

Phase 5 :

$$t \in [6,8] \begin{cases} a_A = 10\ ms^{-2} \\ v_A(t) = 10t - 60 \\ x_A(t) = 5t^2 - 60t + 220.(x_A(8) = 60\ m) \end{cases} \tag{2.45}$$

Phase 6 :

$$t \in [8,9] \begin{cases} a_A = -10\ ms^{-2} \\ v_A(t) = -10t + 100 \\ x_A(t) = -5t^2 + 100t - 420.(x_A(9) = 75\ m) \end{cases} \tag{2.46}$$

— Pour le mobile **B**
Phase 1 :

$$t \in [1,2] \begin{cases} a_B = -20\ ms^{-2} \\ v_B(t) = -20t + 20 \\ x_B(t) = -10t^2 + 20t20.(On vérifier que x_B(2) = 20\ m) \end{cases} \quad (2.47)$$

Phase 2 :

$$t \in [2,3] \begin{cases} a_B = 0 \\ v_B = C^{st} = -20\ ms^{-1} \\ x_B(t) = -20t + 60.(x_B(3) = 0\ m) \end{cases} \quad (2.48)$$

Phase 3 :

$$t \in [3,5] \begin{cases} a_B = 20\ ms^{-2} \\ v_B(t) = 20t - 80 \\ x_B(t) = 10t^2 - 80t + 150.(x_B(5) = 0\ m) \end{cases} \quad (2.49)$$

Phase 4 :

$$t \in [5,9] \begin{cases} a_B = 0 \\ v_B(t) = 20\ ms^{-1} \\ x_B(t) = 20t - 100.(x_B(9) = 80\ m) \end{cases} \quad (2.50)$$

(b) La date où le mobile **B** va rattraper le mobile **A** au cours de l'intervalle de temps $t \in [6\ s, 8\ s]$, peut être obtenue en écrivant

$$x_A(t_r) = x_B(t_r) \text{ soit } 5t_r^2 - 60t_r + 220 = 20t_r - 100 \Rightarrow 5t_r^2 - 80t_r + 320 = 0 \text{ on obtient } t_r = 8\ s. \quad (2.51)$$

Exo04 :

1. Les équations horaires du mouvement du mobile sont données par :

$$\begin{cases} x = 70.7t \\ y = -4.9t^2 + 70.7t \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

2. L'équation de la **trajectoire** est obtenue par élimination du paramètre temps **t** entre les équations (2.52) en écrivant **f(x,y,z)=0**. De l'équation de $x(t)$ on tire $t = \frac{x}{70.7}$, et en le remplace dans l'équation de $y(t)$, on obtient :

$$y = -\frac{4.9}{(70.7)^2}x^2 + x \quad (2.53)$$

3. Sachant que l'équation générale d'une parabole est de la forme ; $y = ax^2 + bx + c$, la trajectoire décrite par le mobile est une parabole d'équation (2.53) et elle est représentée par la figure (2.14).
4. Les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps sont données par :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = 70.7\ (m/s) \\ v_y(t) = -9.8t + 70.7\ (m/s) \end{cases} \qquad \vec{v}(t) = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -9.8\ (m/s^2) \end{cases}$$

5. La nature du mouvement est donc :

Suivant l'axe Ox : $a_x = 0$ et $v_x = C^{st} \neq 0$, le mouvement est rectiligne uniforme.

Suivant l'axe Oy : $a_y < 0\ \forall\ t$,

mais $\begin{cases} t \in [0, 7.21\ (s)],\ v_y > 0 \Rightarrow a_y v_y < 0\ , \text{ le mouvement est rectiligne uniformément retardé.} \\ t > 7.21\ (s),\ v_y < 0 \Rightarrow a_y v_y > 0\ , \text{ le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.} \end{cases}$

6. Les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ aux instants $t_1 = 1(s)$, $t_2 = 7.21(s)$ et $t_3 = 10(s)$ sont donnés dans le tableau (2.2) et représentés sur la figure (2.14).
Avec : $\|\overrightarrow{v(t_1)}\| = 93.3129\ (m/s)$, $\|\overrightarrow{v(t_2)}\| = 70.7\ (m/s)$ et $\|\overrightarrow{v(t_3)}\| = 75.7877\ (m/s)$.
En utilsant les échelles suivantes :
$1\ (cm) \longmapsto 50\ (m)$, $1\ (cm) \longmapsto 20\ (m/s)$ et $1\ (cm) \longmapsto 4\ (m/s^2)$

TABLE 2.2 – Représentation des vecteurs vitesses et accélérations aux instants t_1, t_2, t_3 et t_4

Variables / Temps	$a_x(t)(m/s^2)$	$a_y(t)(m/s^2)$	$v_x(t)\ (m/s)$	$v_y(t)\ (m/s)$	$x(t)\ (m)$	$y(t)\ (m)$
t_1=1 (s)	0	-9.8	70.7	60.9	70.7	65.8
t_2=7.21 (s)	0	-9.8	70.7	0.0	510.0	255.0
t_3=10 (s)	0	-9.8	70.7	-27.3	707	217.0
t_4=4 (s)	0	-9.8	70.7	31.5	282.8	204.4

7. Les composantes intrinsèques de l'accélération, tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ et normale $\overrightarrow{a_N}$ seront déterminées comme suit :
   A partir du module du vecteur vitesse

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2(70.7)^2 + (9.8)^2 t^2 - 2(70.7)(9.8)\,t}, \tag{2.54}$$

   on cherche la composante

$$a_T = \frac{d\|\overrightarrow{v}\|}{dt} = \frac{(9.8)^2 t - (70.7)(9.8)}{\sqrt{2(70.7)^2 + (9.8)^2 t^2 - 2(70.7)(9.8)\,t}}, \tag{2.55}$$

   et puis on déduit la composante normale

$$a_N = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - a^2} = \frac{(70.7)(9.8)}{\sqrt{2(70.7)^2 + (9.8)^2 t^2 - 2(70.7)(9.8)\,t}}. \tag{2.56}$$

8. Les vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a_N}$ et $\overrightarrow{a_T}$ à l'instant $t_4 = 4\ (s)$ sont représentés sur la figure (2.14). Avec : $\overrightarrow{v(t_4)} = 77.4\ \overrightarrow{u_T}$, $\overrightarrow{a_N(t_4)} = 8.9\ \overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{a_T(t_4)} = -4\ \overrightarrow{u_T}$

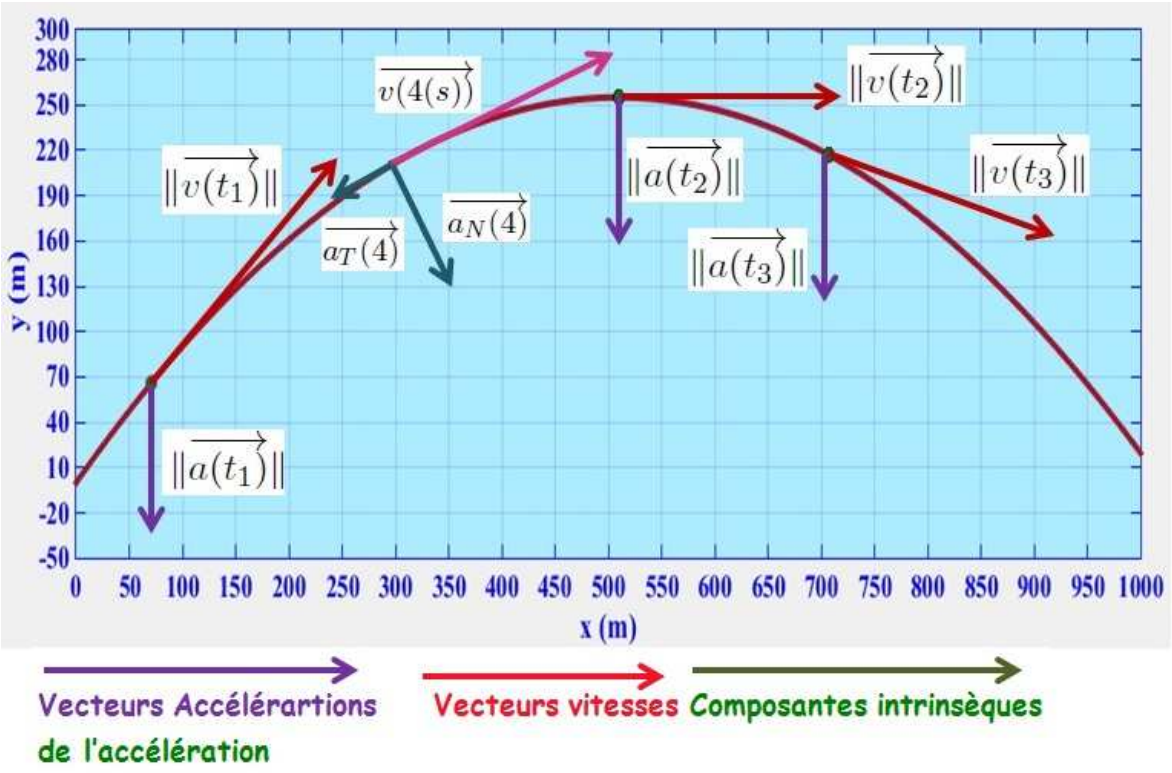


FIGURE 2.14 – Représentation des vecteurs vitesses et accélérations aux instants t_1, t_2, t_3 et t_4

9. En utilisant la relation $a_N = \frac{v^2}{R_c}$ pour calculer le rayon de courbure de la trajectoire, on trouve :

$$R_c = \frac{\left(2(70.7)^2 + (9.8)^2 t^2 - 2(70.7)(9.8)\,t\right)^{\frac{3}{2}}}{(70.7)(9.8)}. \tag{2.57}$$

   AN : A l'instant $t_4 = 4\ (s)$, $R_c = 669.2297\ (m)$.

Exo05 :

1. Dans le système des coordonnées polaires (ρ,θ) de base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\theta})$;
   (a) La position du point P est repérée par le vecteur position, $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \rho\vec{e_\rho} = r_0(1+\cos\theta(t))\vec{e_\rho}$.
   (b) Les composantes radiale $\vec{v_\rho}$ et orthoradiale $\vec{v_\theta}$ de la vitesse, s'obtienne en écrivant :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{e_\rho})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} \tag{2.58}$$

La dérivée dans le premier terme de l'équation (2.68) est égale à;

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d(r_0(1+\cos\theta(t)))}{dt} = r_0\frac{d\cos\theta(t)}{dt} = r_0\frac{d\cos\theta(t)}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt} = -\omega r_0\sin\theta(t). \tag{2.59}$$

Dans le deuxième terme on a :

$$\frac{\mathbf{d}\vec{e_\rho}}{\mathbf{dt}} \neq \vec{0} \quad \text{car} \begin{cases} \|\vec{e_\rho}\| = 1 = C^{st} & \text{le } \textbf{module} \text{ de } \vec{e_\rho} \text{ reste } \textbf{constant} \text{ au cours du } \textbf{temps}. \textbf{ Mais} \\ \theta = (\vec{e_\rho}, \overrightarrow{Ox}) & \text{la } \textbf{direction} \text{ de } \vec{e_\rho} \textbf{ varier} \text{ en fonction du } \textbf{temps}. \end{cases} \tag{2.60}$$

Par conséquent, on doit chercher la forme explicite de $\vec{e_\rho}$ en fonction de la grandeur physique θ qui mesure les variations de la direction de $\vec{e_\rho}$ au cours du temps, c'est-à-dire il faut exprimer $\vec{e_\rho}$ en fonction de θ et des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui restent **contants** en **module** et en **direction**. A partir de la figure (2.15) on montre que :

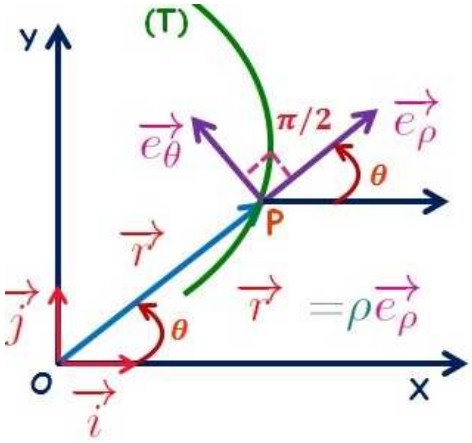


FIGURE 2.15 – Système de coordonnées polaires

$$\vec{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \tag{2.61}$$
$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \tag{2.62}$$

[1]

Il resulte donc que :

$$\frac{\mathbf{d}\vec{e_\rho}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}\vec{e_\rho}}{\mathbf{d}\theta}\times\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}}\vec{e_\theta} \tag{2.63}$$
$$\frac{\mathbf{d}\vec{e_\theta}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}\vec{e_\theta}}{\mathbf{d}\theta}\times\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}} = -\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}}\vec{e_\rho} \tag{2.64}$$

L'équation (2.68) devient alors :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega r_0\sin\theta(t)\vec{e_\rho} + r_0\omega(1+\cos\theta(t))\vec{e_\theta} \tag{2.65}$$

On déduit alors les composantes radiale $\vec{v_\rho}$ et orthoradiale $\vec{v_\theta}$ de la vitesse :

$$\vec{v_\rho} = -\omega r_0\sin\theta(t)\vec{e_\rho} \tag{2.66}$$
$$\vec{v_\theta} = r_0\omega(1+\cos\theta(t))\vec{e_\theta} \tag{2.67}$$

1. ©La reproduction (ou photocopie) sans citation est un délit : M. Kechidi Ziane. Octobre 2016 Université de Médéa

(c) Les composantes radiale $\overrightarrow{a_\rho}$ et orthoradiale $\overrightarrow{a_\theta}$ de l'accélération, peuvent être calculées à partir de la dérivée par rapport au temps de l'expression de la vitesse expimée dans le système de coordonnées polaires ;

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d[-\omega r_0 \sin\theta(t)\overrightarrow{e_\rho} + r_0\omega(1+\cos\theta(t))\overrightarrow{e_\theta}]}{dt} \tag{2.68}$$

On déduit alors ;

$$\overrightarrow{a_\rho} = -\omega^2 r_0(1+2\cos\theta(t))\overrightarrow{e_\rho} \tag{2.69}$$
$$\overrightarrow{a_\theta} = -2\omega^2 r_0 \sin\theta(t)\overrightarrow{e_\theta} \tag{2.70}$$

(d) La vitesse curviligne v_c s'obtient en utilisant la relation,

$$v_c = \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = 2\omega r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.71}$$

(e) L'abscisse curviligne $s(t)$ peut être déduite à partir de l'expression de la vitesse curviligne,

$$v_c = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow s(t) = 4r_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + C^{st}; \text{En prend } s(t_0) = 0 \Rightarrow C^{st} = 0 \tag{2.72}$$

(a) La composante tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ de l'accélération peut être calculée en utilisant la relation,

$$a_T = \frac{dv_c}{dt} = -\omega^2 r_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \tag{2.73}$$

et la composante normale $\overrightarrow{a_N}$ de l'accélération peut être déduite à partir de la relation,

$$a_N = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 - a_T^2} = 3\omega^2 r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.74}$$

(b) Le rayon de courbure de la trajectoire est donné par la relation $R_c = \frac{v_c^3}{\|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{a}\|}$. On calculant le produit vectoriel $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{a}$,

$$\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ v_\rho & v_\theta & 0 \\ a_\rho & a_\theta & 0 \end{pmatrix} = (0)\vec{e}_\rho - (0)\vec{e}_\theta + (v_\rho \times a_\theta - v_\theta \times a_\rho)\vec{e}_z = 6\omega^3 r_0^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_z \tag{2.75}$$

et on utilisant l'expression de v_c donnée par l'équation (2.71), on trouve,

$$R_c = \frac{4}{3} r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.76}$$

Mouvement relatif

Exo01 :

— Le vecteur vitesse du bateau par rapport au sol noté $\overrightarrow{v_a}$ est obtenu en écrivant la loi de composition des vitesses représentée sur la figure (2.16) ;

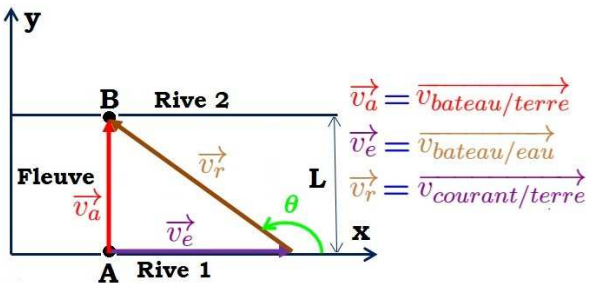


FIGURE 2.16 – Représentation des vecteurs vitesses absolue, entrainement et relative

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \tag{2.77}$$

avec, $\overrightarrow{v_e}$ la vitesse du courant par rapport à la terre et $\overrightarrow{v_r}$, la vitesse du bateau par rapport à l'eau.

— On projetant l'équation (2.77) suivant les deux axes Ox et Oy et se référant de la figure (2.14), on trouve

$$\begin{cases} \text{Suivant Ox} : 0 = -v_r \cos\alpha + v_e \\ \text{Suivant Oy} : v_a = v_r \sin\alpha \end{cases} \quad (\text{avec } \alpha + \theta = 180\check{r}) \tag{2.78}$$

A partir de la première équation de (2.78), et on utilisant les valeurs de $\|\vec{v_e}\| = 20\ km/h$ et $\|\vec{v_r}\| = \sqrt{2}v_e$, on déduit la valeur de l'angle θ entre $\vec{v_e}$ et $\vec{v_r}$. On a $\alpha = \arccos(\frac{v_e}{v_r}) = 45\check{r}$, donc $\theta = 135\check{r}$

— Les équations horaires du mouvement relatif s'obtiennent en écrivant ;

$$\begin{cases} \text{Suivant O'x'} : \frac{dx'}{dt} = -v_r \cos\alpha \Rightarrow x'(t) = -v_r \cos\alpha\, t \ \text{ avec } \ x'(0) = 0 \\ \text{Suivant O'y'} : \frac{dy'}{dt} = v_r \sin\alpha \Rightarrow y'(t) = v_r \sin\alpha\, t \ \text{ avec } \ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.79}$$

On éliminant le paramètre t entre les deux équations du système (2.79), on obtient l'équation de la trajectoire relative $\boxed{y' = -(\tan\alpha)x}$; c'est une droite qui passe par l'origine du repère mobile.

— Le temps mis par le bateau pour traverser le fleuve est calculé à partir de l'équation du mouvement absolu ; on a $\frac{dy}{dt} = v_a = v_r \sin\alpha = 20\ km/h \ \Rightarrow\ y(t) = 20t$ on déduit donc $t = \frac{L}{v_e} = 0.1\ h$

exo02 :

— 1. La loi de composition des vitesses est donnée par,

$$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r} \tag{2.80}$$

2. Le vecteur vitesse relative,

$$\vec{v_r} = \frac{d\vec{r'}}{dt} = a\omega(-\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\,\vec{i'} \tag{2.81}$$

3. Le vecteur vitesse d'entrainement,

$$\vec{v_e} = (\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt})^{\Re} + (\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge \vec{r'} = a\omega(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\vec{j'} \tag{2.82}$$

4. Le vecteur vitesse absolue est donc,

$$\vec{v_a} = a\omega[(-\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\,\vec{i'} + (\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\vec{j'}] \tag{2.83}$$

5. La loi de composition des accélérations est donnée par,

$$\vec{a_a} = \vec{a_e} + \vec{a_r} + \vec{a_c} \tag{2.84}$$

6. Le vecteur accélération relative est égal,

$$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt}]^{R'} = -a\omega^2(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\vec{i'} \tag{2.85}$$

7. Le vecteur accélération d'entrainement,

$$\vec{a_e} = (\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2})^{\Re} + (\overrightarrow{\alpha_{\Re'}})^{\Re} \wedge \vec{r'} + (\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge \left[(\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge \vec{r'}\right] = -a\omega^2(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\vec{i'} \tag{2.86}$$

8. Le vecteur accélération complémentaire ou de Coriolis,

$$\vec{a_c} = 2(\overrightarrow{\omega_{\Re'}})^{\Re} \wedge (\overrightarrow{v_M})^{\Re'} = 2a\omega^2(-\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\,\vec{j'} \tag{2.87}$$

9. Le vecteur accélération absolue est donc égal à,

$$\vec{a_a} = 2a\omega^2[(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\vec{i'} + (-\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\,\vec{j'}] \tag{2.88}$$

— Les expressions des composantes intrinsèques (tangentielle et normale) de l'accélération sont données par,

$$a_T = \frac{d\|\vec{v_a}\|}{dt} = \frac{d(\sqrt{2}a\omega)}{dt} = 0 \tag{2.89}$$

et,

$$a_N = \sqrt{a_a^2 - a_T^2} = \sqrt{2(2a\omega^2)^2} = 2\sqrt{2}a\omega^2 \tag{2.90}$$

— Le rayon de courbure R_c de la trajectoire est donc,

$$R_c = \frac{v_a^2}{a_N} = \frac{(\sqrt{2}a\omega)^2}{2\sqrt{2}a\omega^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{2.91}$$

Troisième partie

Dynamique du point matériel

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

« Efforts and courage are not enough without purpose and direction. »

John F. Kennedy

Sommaire

3.1 Corrigés détaillés des exercices 48

Exercise 3.1 Un bloc d'acier M, assimilable à un point de masse $m = 1\ kg$, est maintenu immobile par une corde de masse négligéable sur un plan incliné en acier doux faisant un angle $\theta = 30°$ avec l'horizontale figure (3.1). On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,81\ ms^{-2}$ et la distance du point initial O au plan horizontal est $H = 1.15\ m$.

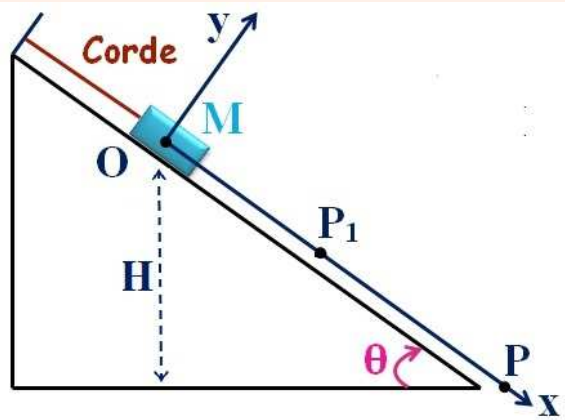


FIGURE 3.1 – Mouvement d'un bloc M sur un plan incliné

— Les frotements entre le bloc et le plan sont négligeable,
  1. représenter qualitativement toutes les forces appliquées sur le bloc,
  2. quel est la grandeur de la tension dans la corde?
— La corde est coupée. Le bloc reste immobile grâce aux frotements entre le bloc et le plan qui sont caractérisés par un coefficient de frottement statique $\mu_s = 0.7$. A l'instant $t = 0$, le bloc M se met en mouvement à partir du point O lorsque $\theta = \theta_M$ avec une vitesse initiale nulle.
  1. représenter qualitativement toutes les forces éxercées sur le bloc M juste à l'instant de démarrage du bloc M.
  2. calculer la valeur de θ_M.
— L'angle θ étant maintenu à la valeur θ_M, le bloc M arrive au point P avec une vitesse $v_p = 3\ ms^{-1}$,

1. représenter qualitativement toutes les forces éxercées sur le bloc pour une position quelconque P_1 du bloc située entre O et P,
2. déterminer l'expression de l'accélération du bloc en fonction de g, θ_M et μ_c où $\mu_c(\mu_g$ ou $\mu_d)$ est le coefficient de frottement cinétique (glissement ou dynamique),
3. en déduire la nature du mouvement,
4. calculer alors l'accélération de M,
5. en déduire la valeur de μ_c.

— A la place de la corde, on utilise un resort de masse négligéable, de raideur $k = 50$ N et de longuer à vide l_0. On attache au ressort le bloc M de masse m qui peut glisser sant frottement sur le plan incliné, figure (3.2).

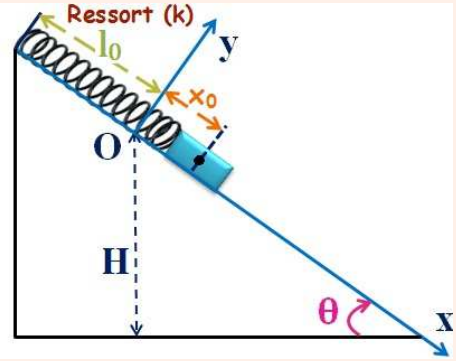


FIGURE 3.2 – Un bloc M sur un plan incliné attaché à un ressort

1. Représenter et écrire le bilan des forces et en déduire la position x_0 de la masse au repos.,
2. A partir de cette postion d'équilibre x_0, on écarte le bloc M d'une distance x_M et on le relache sans vitesse initiale, donner l'équation du mouvement en fonction des conditions initiales et de t.
3. Calculer la valeur de pulsation ω des oscillations propres du bloc autour de ça position d'équilibre x_0.

■

Exercise 3.2 Une petite bille M de masse $m = 300$ g assimillée à un point matériel est reliée à un point A d'un axe vertical Δ par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse figure (3.3). Pendant l'expérience, la bille decrive un mouvement circulaire uniforme. On donne; la longueur et la tension du fil sont $\ell = 40$ cm et T = 4.1 N respectivement, l'accélération de la pesanteur est $g = 9,81$ ms^{-2}.

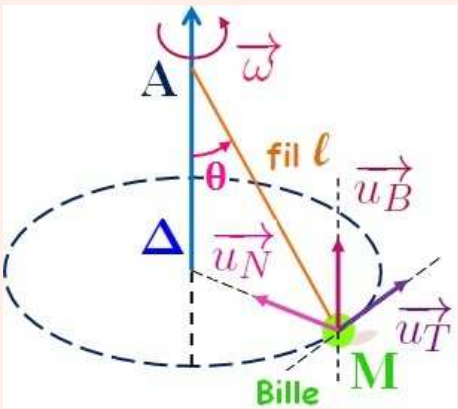


FIGURE 3.3 – Pendule conique

— Représenter qualitativement toutes les forces appliquées sur la bille.
— Ecrire la loi fondamental de la dynamique appliquée à la bille et la projeter dans la base $(\vec{u_T}, \vec{u_N}, \vec{u_B})$.
— Calculer vitesse angulaire ω.
— En déduire la vitesse linéaire v.

— Calculer le moment cinétique $\overrightarrow{L}_{/\Delta}$ de M par rapport à l'axe Δ.

■

Exercise 3.3 Une balle de tennis M de masse $m = 100\ g$, assimilée à un point matériel, est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $v_0 = 100\ ms^{-1}$. On supposera que le référentiel du laboratoire est galiléen et que l'accélération de la pesanteur est constante $g = 9{,}81\ ms^{-2}$. La balle est soumise à une force de frottement fluide de la forme $\overrightarrow{F}_f = -\eta\overrightarrow{v}$ avec $\eta = 0.1\ Nsm^{-1}$ c'est le coefficient de frottement fluide et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de la balle. On prendra comme origine des espaces le point O et l'origine du temps l'instant ou la balle est lancée à partir de O.

— Représenter qualitativement toutes les forces appliquées sur le projectile.
— Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique et sa projection suivant l'axe Oz du mouvement.
— Montrer que la vitesse de la balle tend vers une vitesse limite que l'on déterminera.
— Donner l'équation horaire du mouvement.
— Calculer le temps t_H nécessaire à M pour atteindre la hauteur maximale Z_H de sa trajectoire. Préciser la position Z_H.

■

Exercise 3.4 Considérons un grêlon de forme sphérique de rayon R = 6 mm, en chute verticale dans l'air humide sous la seule action de la pesanteur. Le grêlon est soumis à :

1. son poids $\overrightarrow{P} = m_g\overrightarrow{g}$, avec m_g la masse du grêlon,
2. la poussée d'Archimède, égale au poids du volume de fluide déplacé par le grêlon $\overrightarrow{F}_A = -m_a\overrightarrow{g}$, où m_a est la masse du fluide (l'air dans ce cas) déplacé,
3. la force de frottement visqueux donnée par la loi de loi de Stokes $\overrightarrow{f} = -k\eta\overrightarrow{v}$, avec k c'est un coefficient caractéristique de la géométrie du corps en mouvement (dans le cas d'un corps sphérique de rayon R, $k = 6\pi R$) et η le coefficient de viscosité du fluide (l'air dans ce cas).

On donne : $g = 9{,}81\ ms^{-2}$, masse volumique du grêlon $\rho_g = 917\ kg/m^3$, masse volumique de l'air $\rho_a = 1{,}3\ kg/m^3$ et le coefficient de viscosité $\eta = 1{,}8\ 10^{-5}(kgm^{-1}s^{-1})$ à une température T = 20 řC, le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1. écrire l'équation vectorielle traduisant le principe fondamental de la dynamique.
2. Montrer que la projection du principe fondamentale de la dynamique sur l'axe de mouvement donne l'équation différentielle suivante,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k\eta}{m_g}v = g(\frac{m_a}{m_g} - 1) \tag{3.1}$$

La vitesse initiale de la gouttelette étant nulle,

(a) Montrer en justifiant votre réponse, que la solution de cette équation différentielle est de la forme,

$$v(t) = v_m(\exp(-\frac{t}{\tau}) - 1) \tag{3.2}$$

en précisant les expressions de v_m et τ (un temps caractéristique lié à la dissipation de l'énergie mécanique) en fonction des paramètres du problème m_g, m_a, η, R et g.

(b) Montrer l'homogénéité de la relation (3.2).

(c) Montrer que la vitesse du grêlon tend vers une vitesse limite v_l et calculer sa valeur numérique.

■

Exercise 3.5 Le montage montré par la figure (3.4) représente un système mécanique (appelé palan) constitué par un bloc de masse $m_1 = 1\ kg$ qui glisse sans frottement sur le incliné sous l'action d'une masse supendue $m_2 = 10\ kg$. Les deux masses sont reliées par une corde de masse néligéable ; cette corde passe par une première poulie fixe ainsi que par une deuxième poulie mobile solidaire de la masse m_2 et elle est fixée au plafond. Les frottements sont négligeables et $g = 10\ m/s^2$.
Calculer l'accélération des corps m_1 et m_2 et la tension de la corde.

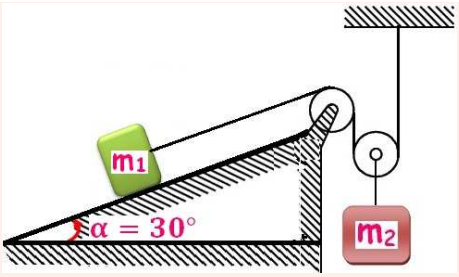


FIGURE 3.4 – Deux poulies liées par une corde (Palan)

3.1 Corrigés détaillés des exercices

Exo01 :

— Les frotements entre le bloc et le plan sont négligeable,

1. Les forces forces appliquées sur le bloc sont ;

$$\text{La force du poids } \vec{P} = m\vec{g} \tag{3.3}$$

$$\text{La force de contact } \vec{C} \tag{3.4}$$

$$\text{La tension du fil } \vec{T} \tag{3.5}$$

et sont représentées qualitativement par la figure (3.5).

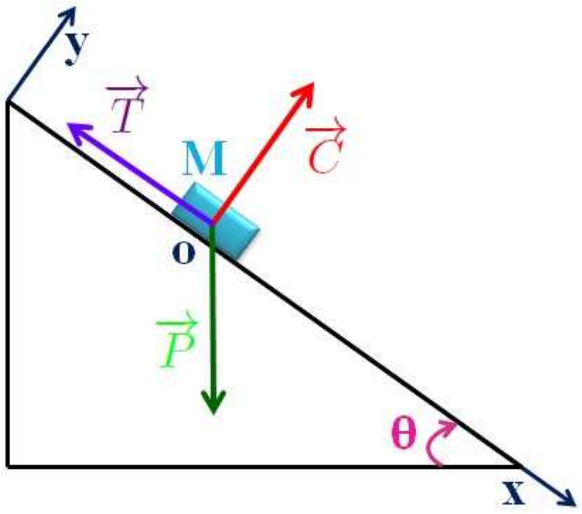


FIGURE 3.5 – Représentation qualitative des forces exercées sur le cube

2. Le principe fondamentale de la dynamique appliqué sur le système de la figure (3.5) donne,

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}, \vec{T} + \vec{C} + \vec{P} = \vec{0} \tag{3.6}$$

La projection de (3.6) suivant les deux axes $x'ox$ et $y'oy$ donne ;

$$\text{Suivant la direction}(x'ox) \quad P_x - T = 0 \tag{3.7}$$

$$\text{Suivant la direction}(y'oy) \quad -P_y + C = 0 \tag{3.8}$$

De l'équation (3.7), on tire $T = mg\sin\theta = 4.9$ N.

— 1. Les forces exercées sur le bloc M juste à l'instant de démarrage du bloc M sont représentées sur la figure (3.6).

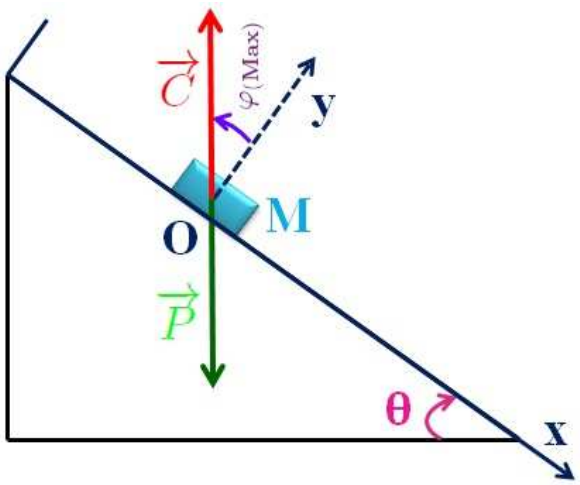


FIGURE 3.6 – Représentation qualitative des forces exercées sur le cube

2. La valeur de θ_M est déterminée en écrivant la loi fondamentale de la dynamique appliquée sur le système de la figure (3.6).

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}\,,\ \vec{C} + \vec{P} = \vec{0} \tag{3.9}$$

La projection de (3.9) suivant les deux axes $x'ox$ et $y'oy$ donne ;

$$\text{Suivant la direction}(x'ox)\ \ P_x - C_{//(Max)} = 0 \Rightarrow\ mg\sin\theta_M = C_{//(Max)} \tag{3.10}$$

$$\text{Suivant la direction}(y'oy)\ \ -P_y + C_\perp = 0 \Rightarrow\ mg\cos\theta_M = C_\perp \tag{3.11}$$

or

$$\mu_s = \tan(\varphi_{(Max)}) = \frac{C_{//(Max)}}{C_\perp} \tag{3.12}$$

on déduit donc que,

$$\theta_M = \arctan(\frac{C_{//(Max)}}{C_\perp}) = \arctan(\mu_s) = 35° \tag{3.13}$$

— Le bloc M arrive au bas de la pente avec une vitesse $v = 3\ ms^{-1}$.

1. Les forces appliquées sur le cube M pour une position quelconque P_1 située entre O et P sont reprtésentées sur la figure (3.7).

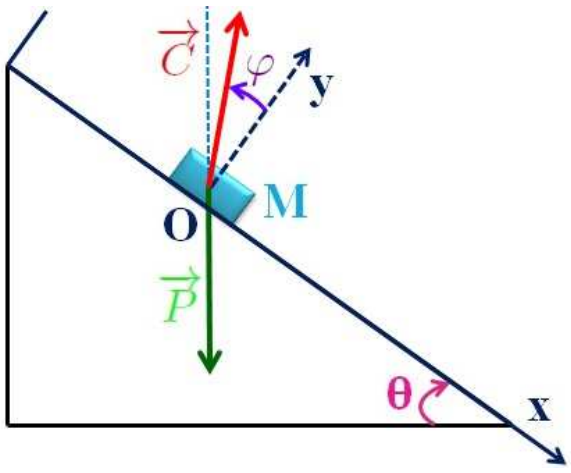


FIGURE 3.7 – Représentation qualitative des forces exercées sur le cube

Dans ce cas l'angle φ entre $C_{//}$ et $C_\perp$ est inferieur à $\varphi_{(Max)}$ car $\mu_c < \mu_s$.

2. L'accélération du bloc est obtenue à partir de la deuxième loi de Newton suivante,

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}\,,\ \vec{C} + \vec{P} = m\vec{a} \tag{3.14}$$

La projection de (3.14) suivant les deux axes $x'ox$ et $y'oy$ donne;

$$\text{Suivant la direction}(x'ox)\quad mg\sin\theta_M - C_{//} = ma \tag{3.15}$$

$$\text{Suivant la direction}(y'oy)\quad -mg\cos\theta_M + C_\perp = 0 \Rightarrow\ mg\cos\theta_M = C_\perp \tag{3.16}$$

Des équations (3.15) et (3.16) et en utilisant l'expression du coefficient de frotement dynamique,

$$\mu_c = \tan(\varphi) = \frac{C_{//}}{C_\perp} \tag{3.17}$$

on trouve

$$a = g\cos\theta_M(\tan\theta_M - \mu_c) = g\cos\theta_M(\mu_s - \mu_c) \tag{3.18}$$

3. A partir de l'équation (3.18); du fait que $g>0$, $\cos\theta_M>0$, $\mu_s>\mu_c$ en déduit que l'accélération est une contante positive $a>0$. De plus, la vitesse du bloc est égale à,

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = at + v(t=0) = at \tag{3.19}$$

Par conséquent le produit $av>0$ est positif quelque soit le temps t. Le mouvement décrit par le bloc est donc réctiligne uniformément accéléré.

4. la valeur de l'éccélération a est donc calculée en utilisant l'expression,

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i) \Rightarrow a = \frac{v_p^2}{OP} \text{ avec } OP = \frac{H}{\sin\theta_M} \Rightarrow a = 2.25\ ms^{-2} \tag{3.20}$$

5. la valeur de μ_c est égale à

$$\mu_c = \tan\theta_M - \frac{a}{g\cos\theta_M} = 0.42 \tag{3.21}$$

— 1. Les forces forces appliquées sur le bloc sont;

$$\text{La force du poids } \vec{P} = m\vec{g} \tag{3.22}$$

$$\text{La force de contact } \vec{C} \tag{3.23}$$

$$\text{La force élastique du ressort } \vec{F}_{el} \tag{3.24}$$

et sont représentées qualitativement par la figure (3.9).

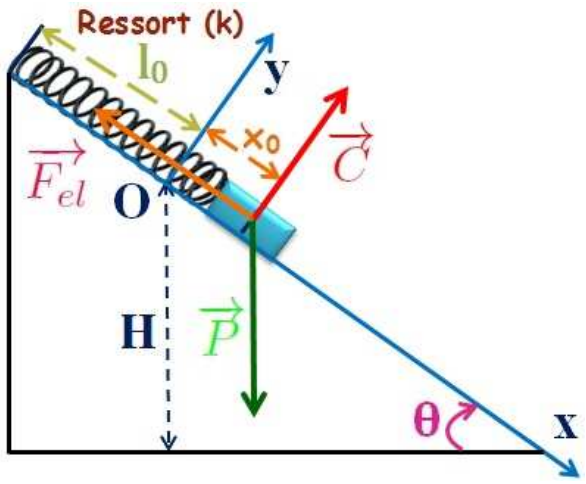


FIGURE 3.8 – Représentation qualitative des forces exercées sur le cube maintenu en équilibre par un ressort sur le plan incliné

La position x_0 de la masse M au repos est obtenue en écrivant que le bilan des forces à l'équilibre égal à zéro,

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}\,,\ \vec{F}_{el} + \vec{C} + \vec{P} = \vec{0} \tag{3.25}$$

La projection de (3.25) suivant les deux axes $x'ox$ et $y'oy$ donne;

$$\text{Suivant la direction}(x'ox)\quad mg\sin\theta_M - kx_0 = 0 \tag{3.26}$$

$$\text{Suivant la direction}(y'oy) \quad -mg\cos\theta_M + C = 0 \Rightarrow \; mg\cos\theta_M = C \tag{3.27}$$

A partir de l'équation (3.26), en tire l'expression de x_0,

$$x_0 = \frac{mg\sin\theta_M}{k} = 11\ (cm) \tag{3.28}$$

2. L'équation du mouvement en fonction des conditions initiales et de t peut être obtenue en écrivant le principe fondamentale de la dynamique appliqué sur le système de la figure (3.9),

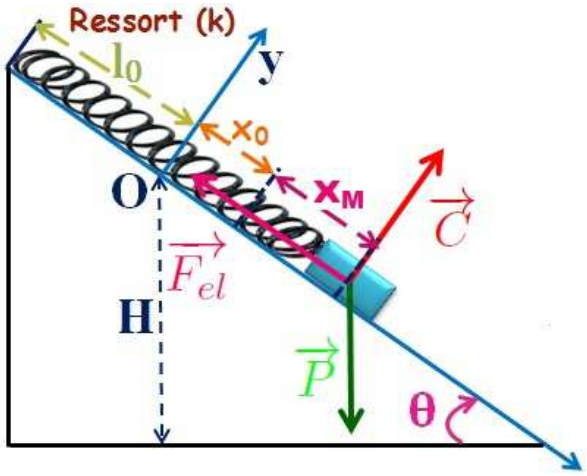


FIGURE 3.9 – Représentation qualitative des forces exercées sur le cube en mouvement d'oscillation par un ressort sur le plan incliné

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}, \vec{F_{el}} + \vec{C} + \vec{P} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.29}$$

La projection de (3.29) suivant les deux axes $x'ox$ et $y'oy$ donne;

$$\text{Suivant la direction}(x'ox) \quad mg\sin\theta_M - k(x_0 + x) = m\frac{dv_x}{dt} \tag{3.30}$$

$$\text{Suivant la direction}(y'oy) \quad -mg\cos\theta_M + C = 0 \Rightarrow \; mg\cos\theta_M = C \tag{3.31}$$

A partir de l'équation (3.30), en déduit que,

$$\underbrace{mg\sin\theta_M - kx_0}_{\text{(=0 condition d'équilibre éq.(3.26))}} + kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.32}$$

C'est une équation différentielle de second ordre et sans second membre, il sagis donc d'une équation d'un oscillateur harmonique libre dont la solution est de la forme

$$x(t) = x_M\cos(\omega t + \varphi), \tag{3.33}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7.1\ (rad/s)$ et x_M l'amplitude maximale des oxcillations. La phase initiale φ se détermine par les conditions initiales. Sachant qu'à $t = 0$, $x(0) = x_M \Rightarrow 1 = \cos(\varphi) \Rightarrow \varphi = 0$. La solution se réduit donc sous la forme

$$x(t) = x_M\cos(\omega t), \tag{3.34}$$

Exo02 :

1. Les forces forces appliquées sur la bille sont;

$$\text{La force du poids } \vec{P} = m\vec{g} \tag{3.35}$$

$$\text{La tension du fil } \vec{T} \tag{3.36}$$

et sont représentées qualitativement par la figure (3.10).

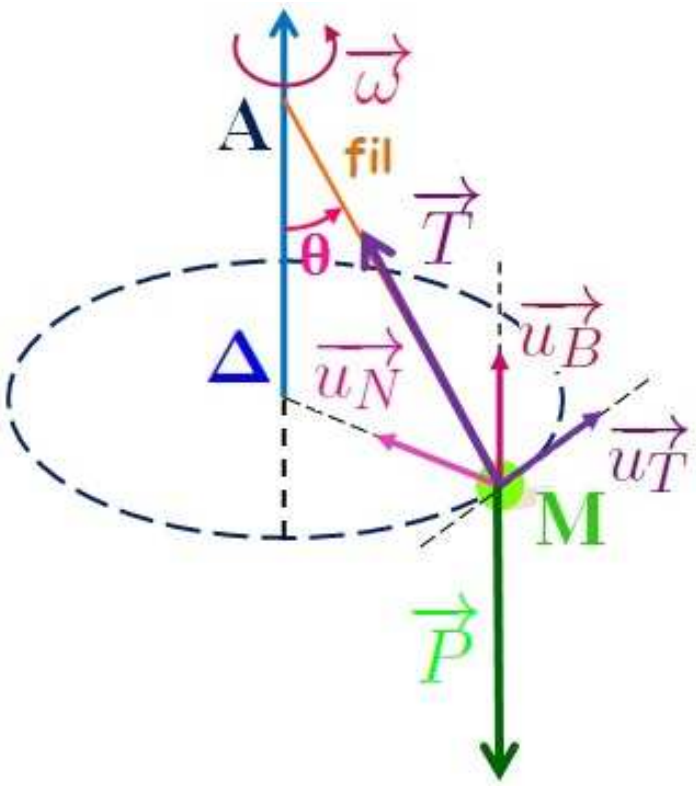


FIGURE 3.10 – Représentation qualitative des forces exercées sur la bille

2. La loi fondamental de la dynamique appliquée sur la bille représentée par la figure (3.10) s'écrit,

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}, \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \tag{3.37}$$

La projection de l'équation (3.37) dans le repère de serret-frenet $(\vec{u_T},\vec{u_N},\vec{u_B})$. donne;

$$\text{Suivant la direction tangentielle } 0 = ma_T \tag{3.38}$$

$$\text{Suivant la direction normale } T\sin\theta = ma_N \tag{3.39}$$

$$\text{Suivant la direction binormale } -mg + T\cos\theta = 0 \tag{3.40}$$

3. La bille decrive un mouvement circulaire uniforme, l'accélaration angulaire peut être exprimé en fonction de la vitesse angulaire ω et de rayon de la trajectoire R, $a_N = R\omega^2$. L'équation (3.39) s'écrit donc $T\sin\theta = mR\omega^2$. A partir de la figure (3.10), $R = \ell\sin\theta$ avec $\theta = \arccos(\frac{mg}{T}) = 29,31°$, la vitesse angulaire est donc égale à

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{m\ell}} = 5,30(rad/s) \tag{3.41}$$

4. La vitesse linéaire $v = R\omega = 1,04\ (m/s)$.
5. Le moment cinétique $\vec{L}_{/\Delta}$ de M par rapport à l'axe (Δ) est donné par

$$\vec{L} = \vec{L} \wedge \vec{P} = Rmv\sin(\frac{\pi}{2})\ \vec{u_B} = 0,04\ \vec{u_B}(kgm^2/s) \tag{3.42}$$

Exo03 :

1. Les forces forces appliquées sur la balle sont;

$$\text{La force du poids } \vec{P} = m\vec{g} \tag{3.43}$$

$$\text{La force de frottement fluide } \vec{F} = -\eta\vec{v} \tag{3.44}$$

et sont représentées qualitativement par la figure (3.11).

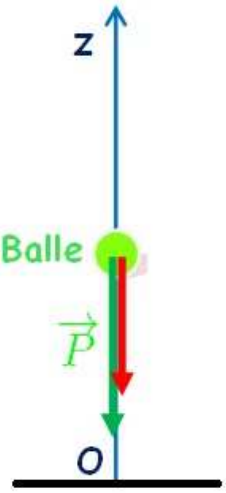


FIGURE 3.11 – Représentation qualitative des forces éxercées sur la balle

2. Le principe fondamentale de la dynamique appliqué sur la balle donne

$$\sum_i \vec{\mathrm{F}}_i = m\vec{a} \Rightarrow \vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{P}} = m\frac{\mathbf{d}\vec{v}}{\mathbf{dt}} \tag{3.45}$$

La projection de (3.45) suivant l'axe Oz du mouvement donne ;

$$-\eta v - mg = m\frac{dv}{dt} \tag{3.46}$$

3. L'équation (3.46) est une équation différentielle de premier ordre et avec second membre dont la soltution est de la forme, **Solution générale**=**Solution homogène**+**Solution particulière**
La **Solution homogène** v_h est la solution de l'équation

$$\frac{dv_h}{dt} + \frac{\eta}{m}v_h = 0 \tag{3.47}$$

Elle est égale à

$$v_h = \mathrm{C}^{st}\exp^{-\frac{\eta}{m}t} \tag{3.48}$$

La **Solution particulière** v_p est un polynôme d'ordre zéro car le second membre de l'équation (3.46) est une constante égale à g, on écrit donc v_p=αt^0, on remplace cette solution dans l'équation générale (3.46) pour trouver le coefficient α

$$\frac{dv_p}{dt} + \frac{\eta}{m}v_p = -g \tag{3.49}$$

on déduit alors que v_p=$-g\frac{m}{\eta}$. d'ou la solution générale

$$v = v_h + v_p = \mathrm{C}^{st}\exp^{-\frac{\eta}{m}t} - g\frac{m}{\eta} \tag{3.50}$$

maintenant on cherche la constante C^{st} en utilisant les conditions initiales, soit à $t=0$, $v(t=0)=v_0=\mathrm{C}^{st}-g\frac{m}{\eta}$ d'ou $\mathrm{C}^{st}=v_0+g\frac{m}{\eta}$, on remplace ce resultat dand l'équation (3.50) on obtient

$$v(t) = (v_0 + g\frac{m}{\eta})\exp^{-\frac{\eta}{m}t} - g\frac{m}{\eta} \tag{3.51}$$

A la limite, la vitesse de la balle tend vers une vitesse limite égale à $v_l = -g\frac{m}{\eta}$

4. L'équation horaire du mouvement s'obtient on intégrant l'expression de la vitesse.

$$z(t) = \int (v_0 + g\frac{m}{\eta})\exp^{-\frac{\eta}{m}t}dt - g\frac{m}{\eta}\int dt \Rightarrow z(t) = -\frac{m}{\eta}[(v_0 + g\frac{m}{\eta})\exp^{-\frac{\eta}{m}t} + gt] + \mathrm{C}^{st} \tag{3.52}$$

La conastante C^{st} se détermine par les conditions initiales, on a à $t=0$, $z(t=0)=0 \Rightarrow 0=-\frac{m}{\eta}[(v_0 + g\frac{m}{\eta})\exp^0 + g(0)] + \mathrm{C}^{st} \Rightarrow \mathrm{C}^{st} = \frac{m}{\eta}[(v_0 + g\frac{m}{\eta})$, soit

$$z(t) = \frac{m}{\eta}(v_0 + g\frac{m}{\eta})(1 - \exp^{-\frac{\eta}{m}t}) - \frac{m}{\eta}gt \tag{3.53}$$

5. Le temps t_H nécessaire à M pour atteindre la hauteur maximale Z_H de sa trajectoire correspond à $v(t_H) = 0$.

$$v(t_H) = 0 \Rightarrow \quad t_H = -\frac{m}{\eta}\ln(\frac{gm}{v_0\eta + gm}) = 2,42\ (s) \tag{3.54}$$

La position Z_H correspondante est égale à $Z_H(t_H) = 76,30\ (m)$.

Exo : Le grêlon est soumis à :

1. son poids $\vec{P} = m_g\vec{g}$, avec m_g la masse du grêlon,
2. la poussée d'Archimède, égale au poids du volume de fluide déplacé par le grêlon $\vec{F_A} = -m_a\vec{g}$, où m_a est la masse du fluide (l'air dans ce cas) déplacé,
3. la force de frottement visqueux donnée par la loi de loi de Stokes $\vec{F_f} = -k\eta\vec{v}$, avec k c'est un coefficient caractéristique de la géométrie du corps en mouvement (dans le cas d'un corps sphérique de rayon R, $k = 6\pi R$) et η le coefficient de viscosité du fluide (l'air dans ce cas).

On donne : $g = 9,81\ ms^{-2}$, masse volumique du grêlon $\rho_g = 917\ kg/m^3$, masse volumique de l'air $\rho_a = 1,3\ kg/m^3$ et le coefficient de viscosité $\eta = 1,8\ 10^{-5}(kgm^{-1}s^{-1})$ à une température T = 20 ŕC, le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1. L'équation vectorielle traduisant le principe fondamental de la dynamique s'écrit sous la forme,

$$\sum_i \vec{F}_i = m_g\vec{a}, \vec{F_A} + \vec{F_f} + \vec{P} = m_g\vec{a} \Rightarrow \mathbf{-m_a\vec{g} - k\eta\vec{v} + m_g\vec{g} = m_g\frac{dv}{dt}} \tag{3.55}$$

2. La projection du principe fondamentale de la dynamique donné par l'équation (3.56) suivant le sens du mouvement représenté par la figure 3.5 donne,

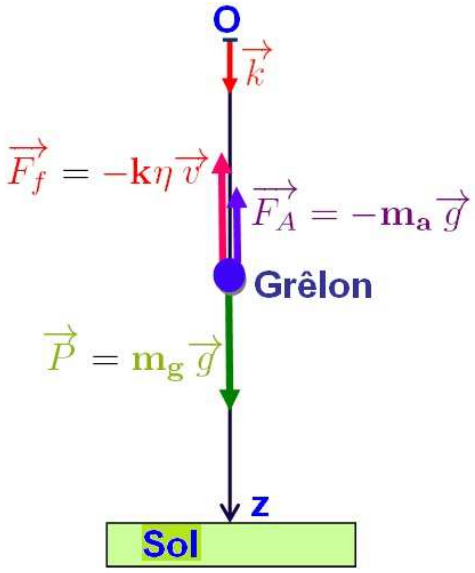


FIGURE 3.12 – Représentation qualitative des forces exercées sur le grêlon

$$\mathbf{-m_ag - k\eta v + m_gg = m_g\frac{dv}{dt}} \tag{3.56}$$

soit

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k\eta}{m_g}v = -g(\frac{m_a}{m_g} - 1) \tag{3.57}$$

En posant $\frac{1}{\tau} = \frac{k\eta}{m_g}$, on obtient finalement

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g(1 - \frac{m_a}{m_g}) \tag{3.58}$$

L'équation (3.58) ainsi obtenue est une équation différentielle 1^{er} ordre et avec 2^{ndr} membre constant. Elle admet pour solution de la forme, **Solution générale=Solution homogène+Solution particulière**
La **Solution homogène** v_h est la solution de l'équation différentielle (3.58) sans second membre ;

$$\frac{dv_h}{dt} + \frac{1}{\tau}v_h = 0 \tag{3.59}$$

Elle est égale à

$$v_h = C^{st} \exp^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.60}$$

La **Solution particulière** v_p est un polynôme d'ordre zéro car le second membre de l'équation (3.58) est constant. On écrit donc v_p=αt^0. On remplace cette solution dans l'équation générale (3.58) pour trouver le coefficient α

$$\frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{\tau} v_p = g(1 - \frac{m_a}{m_g}) \tag{3.61}$$

on déduit alors que v_p=$g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g})$. D'ou la solution générale

$$v(t) = v_h + v_p = C^{st} \exp^{-\frac{t}{\tau}} + g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g}) \tag{3.62}$$

Maintenant la constante d'intégrationon C^{st} est déterminée à l'aide des conditions initiales. Sachant qu'à $t = 0$, $v(t = 0) = 0 = C^{st} + g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g})$ d'ou $C^{st} = -g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g})$. On inject ce resultat dans l'équation (3.62). Finalement on obtient ;

$$v(t) = g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g})(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{3.63}$$

On pose $v_m = g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g}) = \frac{g}{k\eta}(m_g - m_a)$, soit en fonction des données du problème $v_m = \frac{2R^2}{9\eta}(\rho_g - \rho_a)$. L'équation(3.63) s'écrit donc ;

$$v(t) = v_m(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{3.64}$$

3. A la limite, la vitesse du grêlon tend vers une vitesse limite v_l donnée par ;

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_l = g\tau(1 - \frac{m_a}{m_g}) \approx 4\ 10^3\ (m/s) \tag{3.65}$$

Quatrième partie

Travail et énergie

CHAPITRE 4

TRAVAIL ET ÉNERGIE

« Energy cannot be created or destroyed, it can only be changed from one form to another. »

Albert Einstein

Sommaire

4.1 Travail et énergie. Théorème de l'énergie cinétique **59**
4.1.1 Travail d'une force conservative . . . 59
4.1.2 Travail d'une force le long d'un contour fermé . . . 59
4.1.3 Travail d'une force quelconque . . . 60
4.1.4 Application du théomème de l'énergie cinétique . . . 60
4.2 Corrigés détaillés des exercices **61**

4.1 Travail et énergie. Théorème de l'énergie cinétique

4.1.1 Travail d'une force conservative

Exercise 4.1 Considérons une particule se déplaçant sous l'action d'un champ de force déterminé par,

$$\vec{F} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k} \tag{4.1}$$

Vérifiee que si $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$, alors $\vec{F}$ dérive d'un potentiel E_p (appelé énergie potentielle) qu'on vous demande de trouver son expression. ■

4.1.2 Travail d'une force le long d'un contour fermé

Exercise 4.2 Considérons une particule astreinte à se déplacer entre deux points A (0, 0) et B (3, 3) d'un référentiel $\Re(O; x, y)$; elle est soumise à une force

$$\vec{F} = 2xy^2\,\vec{i} + 2x^2y\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \tag{4.2}$$

1. Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ si la particule décrit du point A au B les trajets suivants :
   (a) le segment AB de A à B.
   (b) le segment BA de B à A.
   (c) le long du contour fermé ABA en parcourant le segment AB de A à B puis de B à A.
   (d) le long de l'axe des x de $(0,0)$ à $(3,0)$ puis parallèlement à l'axe des y jusqu'à $(3,3)$.
   (e) le long de l'axe des x de $(3,3)$ à $(0,3)$ puis parallèlement à l'axe des y jusqu'à $(0,0)$.
2. Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$
3. Conclure.

4.1.3 Travail d'une force quelconque

Exercise 4.3 Un pendule simple est constitué d'une bille de masse $m = 20\ g$ suspendue par un fil de masse négligeable et de longueur L = 40 cm. On prendra $g = 10\ m/s^2$ et on négligera la résistance de l'air. On écarte le pendule d'un angle $\theta_0 = 45°$ par rapport à la verticale et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Ecrire le bilan des forces qui s'exercent sur la bille et les représenter.
2. Calculer le travail du poids entre la position initiale et la position verticale.
3. Calculer le travail de la tension du fil.
4. Calculer le moment cinétique de la bille par rapport à O.

4.1.4 Application du théomème de l'énergie cinétique

Exercise 4.4 A l'aide d'un ressort dont l'une des extrémités est fixée au point A (voir figure 4.1), un petit caisse M de masse $m = 300\ g$, assimilable à un point matériel, est lancé sur une piste constituée de deux parties AB et $\overset{\frown}{BC}$. AB est une partie rectiligne horizontale de longueur 3R et $\overset{\frown}{BC}$ représente un quart d'une circonférence verticale de rayon R et de centre O_1. Dans tout le problème on néglige la résistance de l'air. Le ressort est parfait, de constante de raideur $k = 50\ N/m$ et de longueur à vide $l_0 = R = 30\ cm$. L'axe Ox est choisi comme référence des énergies potentielles de pesanteur.

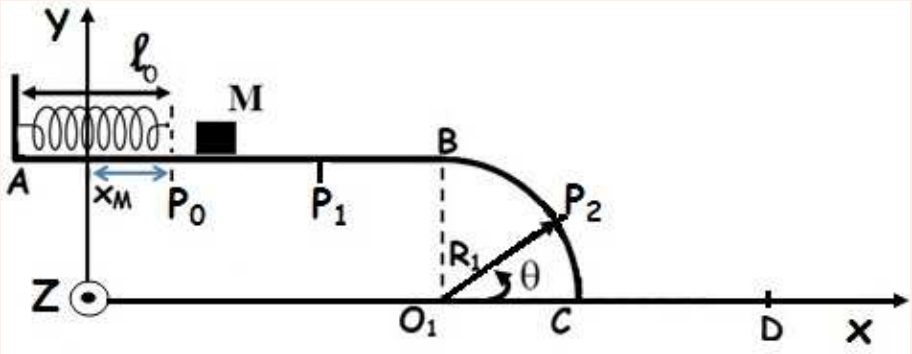


FIGURE 4.1 – Mouvement d'un mobile sur une piste rectiligne puis curviligne

On supposera que les coefficients de frottement statique et de glissement entre le caisse et la piste AB sont respectivement $\mu_s = 0,7$ et $\mu_g = 0,3$. Par contre les frottements sont négligeables sur la piste $\overset{\frown}{BC}$. Le mouvement est étudié par rapport au référentiel $\Re(O; x, y, z)$ dans lequel l'accélération de la pesanteur est $g = 10\ ms^{-2}$.

1. A l'instant initial $t = 0$, on comprime le système ressort-masse contre un support fixe, et on le lâche sans vitesse initiale.
   (a) Calculer la compression maximale x_{M1} pour que la masse m reste immobile après avoir été lâchée.
   (b) On utilisant une échelle qui vous semble la meilleure, représenter dans ce cas toutes les forces qui s'exercent sur M.
2. A l'aide d'une compression x_M, le caisse M arrive au point B avec une vitesse $v_B = 1.5\ (m/s)$.
   (a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de l'énergie cinétique de M :
      i. pour une position quelconque M du caisse, située avant le point P_0. En déduire l'expression de l'énergie cinétique de M (E_{c,P_0}) au point P_0 ;
      ii. pour une position P_1 du caisse située entre P_0 et B. En déduire la valeur de la compression x_M pour que le caisse M arrive au point B avec la vitesse $v_B = 2\ (m/s)$.
   (b) Quel est le travail effectué par la force de frottement entre P_0 et B.
3. En supposant que le trajet inverse puisse s'effectuer, calculer le travail effectué par la force de frottement entre B et P_0.
4. Calculer le travail de cette force de frottement le long du contour fermé P_0BP_0. Conclure.
5. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour une position quelconque P_2 du caisse entre B et C.

6. En projetant cette relation dans le système de coordonnées polaires, déterminer l'action $C_\perp$ de la piste $\overset{\frown}{BC}$ sur le caisse M.
7. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.
8. A partir de quel endroit (repéré par l'angle $\theta_q = (\overrightarrow{O_1C}, \overrightarrow{O_1P_2})$) le caisse perd-il le contact avec la surface $\overset{\frown}{BC}$.
9. Dans le cas où $v_B = 0$, quelle est la valeur θ_{q0} de cet angle.
10. Calculer la valeur de la vitesse minimale $v_{B,M}$ pour que le caisse M quitte la surface $\overset{\frown}{BC}$, dès son passage en B, décrit une trajectoire parabolique dans l'air et tombe sur le plan CD.
11. Quel est le mouvement ultérieur du caisse.
12. Calculer la portée maximale ainsi que le temps de tombé du caisse sur le plan CD.
13. En déduire sa vitesse quand il retombe sur le plan CD.
14. Retrouver ce résultat en appliquant le principe de conservation de l'énergie totale.

■

4.2 Corrigés détaillés des exercices

Exercise 4.1.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_z = (\mathbf{2xy + z^3})\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{x^2}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{3xz^2}\vec{\mathbf{k}} \tag{4.3}$$

Par identification, on trouve :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = \mathbf{2xy + z^3} \tag{4.4}$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = \mathbf{x^2} \tag{4.5}$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z} = \mathbf{3xz^2} \tag{4.6}$$

Soit

$$E_p = -\int (2xy + z^3)dx = -x^2y - xz^3 + f(y,z) \tag{4.7}$$

$$E_p = -\int x^2 dy = -x^2y + g(x,z) \tag{4.8}$$

$$E_p = -\int 3xz^2 dz = -xz^3 + h(x,y) \tag{4.9}$$

Par remplacement de l'expression de E_p dans les équations (4.4), on détermines les expressions des constantes $f(y,z)$, $g(x,z)$ et $h(x,y)$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial(-x^2y + g(x,z))}{\partial x} = -2xy + \frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = -2xy - z^3 \Rightarrow g(x,z) = -z^3x \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial(-xz^3 + h(x,y))}{\partial x} = -z^3 + \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = -2xy - z^3 \Rightarrow h(x,y) = -x^2y \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial(-x^2y - xz^3 + f(y,z))}{\partial x} = -x^2 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial x} = -x^2 \Rightarrow f(y,z) = 0 \tag{4.12}$$

Donc

$$\boxed{E_p = -x^2y - xz^3} \tag{4.13}$$

Exercise 4.2.

1. Par définition, le travail élémentaire **dw** effectué par $\vec{F}$ pour déplacer une particule de masse **m** d'une distance élémentaire $\vec{dl}$ est donnée par

$$\mathbf{dw} = \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{4.14}$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes $\vec{dl} = \mathbf{dx}\,\vec{i} + \mathbf{dy}\,\vec{j} + \mathbf{dz}\,\vec{k}$. par conséquent

$$\mathbf{dw} = \mathbf{F_x dx} + \mathbf{F_y dy} + \mathbf{F_z dz} \tag{4.15}$$

soit

$$\boxed{\mathbf{dw} = 2xy^2dx + 2x^2ydy} \tag{4.16}$$

2. Le long du segment AB représenté par la figure (4.2), c'est une droite d'équation $y = x \Rightarrow dy = dx$

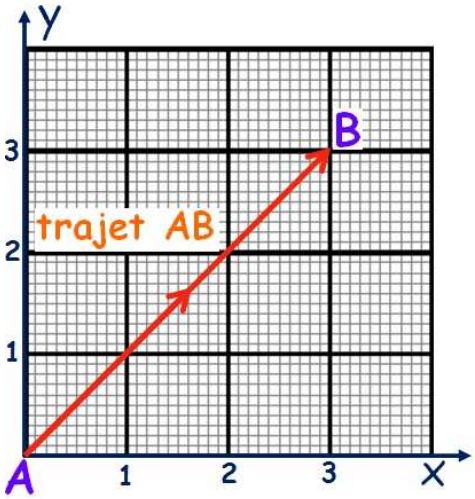


FIGURE 4.2 – Trajet décrit par la particule soumise à une force $\vec{F}$

$$\int_{w_A}^{w_B} dw = 2\int_{x_A}^{x_B} xy^2dx + 2\int_{y_A}^{y_B} x^2ydy \Rightarrow w_B - w_A = 2\int_0^3 x^3dx + 2\int_0^3 y^3dy \Rightarrow w_B - w_A = 81 \text{ (J)} \tag{4.17}$$

3. Le long du segment BA, qui représente aussi la droite d'équation $y = x \Rightarrow dy = dx$, figure (4.3).

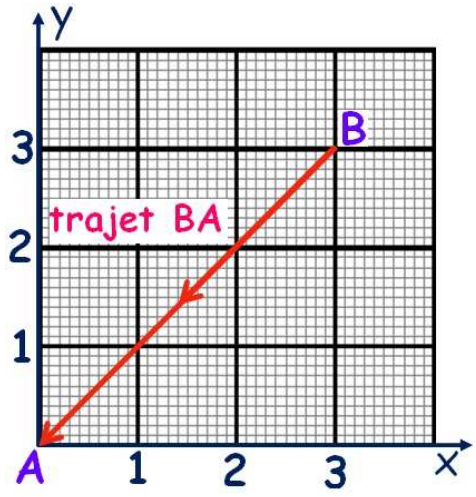


FIGURE 4.3 – Trajet décrit par la particule soumise à une force $\vec{F}$

$$\int_{w_B}^{w_A} dw = 2\int_{x_B}^{x_A} xy^2dx + 2\int_{y_B}^{y_A} x^2ydy \Rightarrow w_A - w_B = 2\int_3^0 x^3dx + 2\int_3^0 y^3dy \Rightarrow w_A - w_B = -81 \text{ (J)} \tag{4.18}$$

4. Le long du contour fermé ABA en parcourant le segment AB de A à B puis de B à A.

$$\int dw = (w_B - w_A) + (w_A - w_B) = 81 - 81 = 0 \text{ (J)} \tag{4.19}$$

5. Le long de l'axe des x de A à C puis parallèlement à l'axe des y jusqu'à B, figure (4.4).

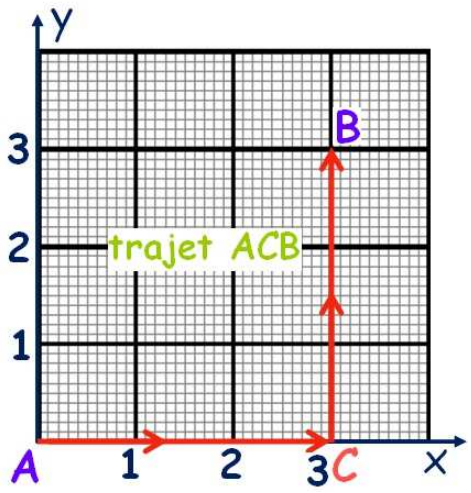


FIGURE 4.4 – Trajet décrit par la particule soumise à une force $\vec{F}$

6. Le long de l'axe des x de A à C, on a

$$0 \le x \le 3 \quad \Rightarrow \quad dx \neq 0 \tag{4.20}$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = 0 \tag{4.21}$$

$$\int_{w_A}^{w_C} dw = 2\int_{x_A}^{x_C} xy^2 dx + 2\int_{y_A}^{y_C} x^2 y dy = 0 \text{ (J)} \tag{4.22}$$

7. Parallèlement à l'axe des y jusqu'à B, on a

$$0 \le y \le 3 \quad \Rightarrow \quad dy \neq 0 \tag{4.23}$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = 0 \tag{4.24}$$

$$\int_{w_C}^{w_B} dw = 2\int_{x_C}^{x_B} xy^2 dx + 2\int_{y_C}^{y_B} x^2 y dy = 2\int_0^3 x^2 y dy = 2(3)^2(\frac{1}{2}3^2) = 81 \text{ (J)} \tag{4.25}$$

Par conséquent, le travail de $\vec{F}$ suivant le parcours de A à C puis de C jusqu'à B est égal à

$$\int_{w_C}^{w_B} dw = (w_C - w_A) + (w_B - w_C) = 0 + 81 = 81 \text{ (J)} \tag{4.26}$$

8. Le long de l'axe des x de B à D puis parallèlement à l'axe des y jusqu'à A, figure (4.5)

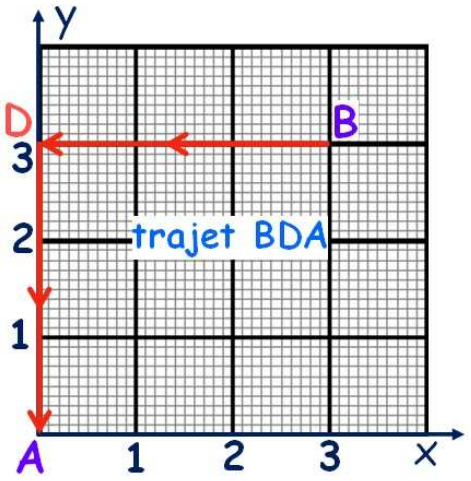


FIGURE 4.5 – Trajet décrit par la particule soumise à une force $\vec{F}$

(a) Le long de l'axe des x de B à D, on a

$$0 \le x \le 3 \quad \Rightarrow \quad dx \neq 0 \tag{4.27}$$
$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad dy = 0 \tag{4.28}$$

$$\int_{w_B}^{w_D} dw = 2\int_{x_B}^{x_D} xy^2\,dx + 2\int_{y_B}^{y_D} x^2 y\,dy = 2\int_3^0 xy^2\,dx = -2(3)^2(\frac{1}{2}3^2) = -81 \text{ (J)} \tag{4.29}$$

(b) Parallèlement à l'axe des y jusqu'à A.

$$0 \le y \le 3 \quad \Rightarrow \quad dy \neq 0 \tag{4.30}$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad dx = 0 \tag{4.31}$$

$$\int_{w_D}^{w_A} dw = 2\int_{x_D}^{x_A} xy^2\,dx + 2\int_{y_D}^{y_A} x^2 y\,dy = 0 \text{ (J)} \tag{4.32}$$

Par conséquent, le travail de $\vec{F}$ suivant le chemin de B à D puis de D jusqu'à A est égal à

$$\int_{w_B}^{w_A} dw = (w_D - w_B) + (w_A - w_D) = -81 + 0 = -81 \text{ (J)} \tag{4.33}$$

9. Le $\vec{rot}\,\vec{F}$ est égal à,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \\ \mathbf{2xy^2} & \mathbf{2x^2y} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \vec{i} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{0} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{2x^2y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{0} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{2xy^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{2x^2y} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{2xy^2}\right)\vec{k} \\
&= (\mathbf{0})\,\vec{i} + (\mathbf{0})\,\vec{j} + (\mathbf{4xy - 4xy})\,\vec{k} = \vec{0}\,.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

10. Le resultat de la question précédente montre que,

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_c \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0}, \tag{4.35}$$

donc, le travail de la force $\vec{F}$ le long du contour ABC fermé est nul et donc indépendant du trajet suivi. Par conséquent, la force $\vec{F}$ est conservative.

Exercise 4.3.

1. Le bilan des forces qui s'exercent sur la bille sont représentées par la figure 4.6.

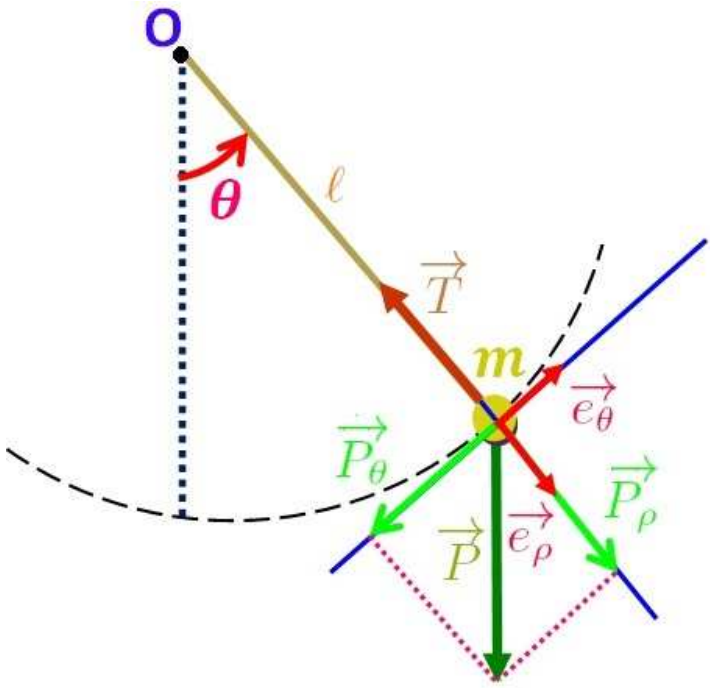


FIGURE 4.6 – Représentation de toutes les forces forces qui s'exercent sur la bille

❶ **La force du poids** $\vec{P}$;

❷ **La tension du fil** $\vec{T}$.

2. Le travail du poids $\vec{P}$ est défini par,

$$\mathbf{dW} = \vec{P} \cdot \vec{d\ell} \tag{4.36}$$

avec $\vec{d\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire.
Dans le sytème de coordonnées polaires (ℓ_ρ, θ), les vecteures $\vec{P}$ et $\vec{d\ell}$ s'écrivent sous la forme,

$$\vec{d\ell} = \vec{d\ell_\rho} + \vec{d\ell_\theta} = \mathbf{d}\ell_\rho \vec{e_\rho} + \mathbf{d}\ell_\theta \vec{e_\theta} \tag{4.37}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\ell_\rho = \mathbf{0} \quad &\text{car} \quad \ell_\rho = \ell = \mathbf{C^{st}} \text{ et} \\ \mathbf{d}\ell_\theta = \ell \mathbf{d}\theta \quad &\text{avec} \quad \mathbf{d}\theta < \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.38}$$

et

$$\vec{P} = \vec{P_\rho} + \vec{P_\theta} = \mathbf{mg}\cos(\theta)\vec{e_\rho} - \mathbf{mg}\sin(\theta)\vec{e_\theta} \tag{4.39}$$

En déduit alors,

$$\mathbf{dW} = (\mathbf{mg}\cos(\theta)\vec{e_\rho} - \mathbf{mg}\sin(\theta)\vec{e_\theta}) \cdot (\ell \mathbf{d}\theta \vec{e_\theta}) = -\mathbf{mg}\ell\sin(\theta)\mathbf{d}\theta. \tag{4.40}$$

soit entre la position initiale et la position verticale,

$$\int_{W_I}^{W_F} \mathbf{dW} = -\mathbf{mg}\ell \int_{\theta_{Max}}^{0} \sin(\theta)\mathbf{d}\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W_I} - \mathbf{W_F} = \mathbf{mg}\ell(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}). \tag{4.41}$$

3. Le travail de la tension du fil $\vec{T}$ est défini par,

$$\mathbf{dW} = \vec{T} \cdot \vec{d\ell} \tag{4.42}$$

avec $\vec{T}$ s'écrit dans le système de cordonnées polaires sous la forme,

$$\vec{T} = -\mathbf{T}\cos(\theta)\vec{e_\rho} \tag{4.43}$$

soit

$$\mathbf{dW} = -\mathbf{T}\cos(\theta)\vec{e_\rho} \cdot \ell \mathbf{d}\theta \vec{e_\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W_I} - \mathbf{W_F} = \mathbf{0}. \tag{4.44}$$

La force $\vec{T}$ est perpendiculaire au mouvement, donc elle ne contribue pas au mouvement, et elle ne s'oppose pas au mouvement non plus. On dit que cette force ne travail pas.

4. Le moment cinétique de la bille par rapport à **O**, $\overrightarrow{L_O}$ est déterminé par,

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{P} = \ell\overrightarrow{e_\rho} \wedge \mathbf{m}(\overrightarrow{v_\rho} + \overrightarrow{v_\theta}) = \ell\overrightarrow{e_\rho} \wedge \mathbf{m}(\mathbf{v}_\rho\overrightarrow{e_\rho} + \mathbf{v}_\theta\overrightarrow{e_\theta}) = \mathbf{m}\ell^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k} = \mathbf{m}\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{k}$$

Exercise 4.4.

1. On appliquant le principe fondamentale de la dynamique à l'équilibre, on obtient :

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0, \overrightarrow{F}_{el} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \tag{4.45}$$

La projection de (4.45) suivant les deux axes // et $\perp$ donne;

$$\text{Suivant la direction}(//) \quad = \quad kx_{M1} - C_{//Max} = 0 \tag{4.46}$$
$$\text{Suivant la direction}(\perp) \quad = \quad -mg + C_\perp = 0 \tag{4.47}$$

De l'équation (4.47), on tire $C_\perp = mg = 3$ N et de l'équation (4.46) $x_{M1} = \frac{C_{//(Max)}}{k}$, or

$$\mu_s = \tan(\varphi_{(Max)}) = \frac{C_{//(Max)}}{C_\perp} \tag{4.48}$$

On en déduit alors

$$x_{M1} = \frac{\mu_s mg}{k} = 4,2\ cm \tag{4.49}$$

2. Les forces appliquées sur le caisse sont :

❶ Le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ avec $\left\|\overrightarrow{P}\right\| = 3$N;

❷ La force élastique du ressort $\overrightarrow{F_{el}} = -k\overrightarrow{\Delta x}$ avec $\left\|\overrightarrow{F_{el}}\right\| = 2,1$ N;

❸ La force de contact du caisse avec le plan $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{C_{//(Max)}} + \overrightarrow{C_\perp}$ avec $\left\|\overrightarrow{C}\right\| = 3,66$ N.

On utilisant une échelle adéquate 1 $cm \rightarrow 1$ N, les vecteurs forces $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{F_{el}}$ et $\overrightarrow{C}$ sont représentées par la fugure (4.7).

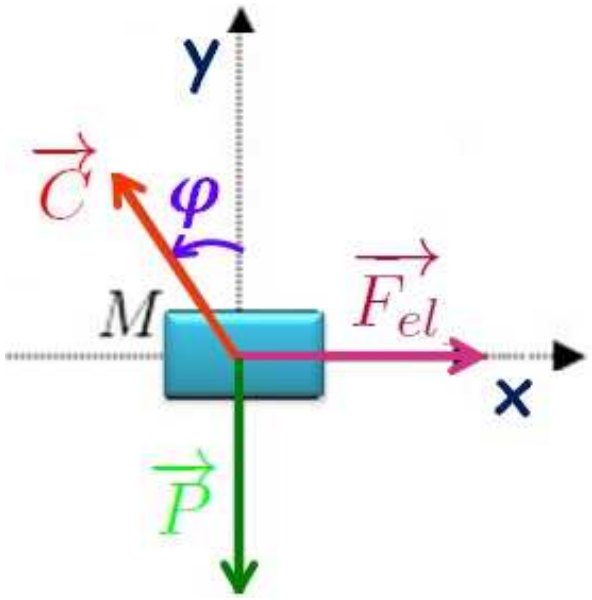


FIGURE 4.7 – Représentation vectorielle de toutes les forces exercées sur le caisse

3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique;
   (a) pour une position quelconque M du caisse, située avant le point P_0.

$$dE_c = dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = -k\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{dx} + \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{dx} + \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{dx} \tag{4.50}$$

La projection suivant la direction de déplacement du caisse donne ;

$$dE_c = kdx - C_{//}dx \tag{4.51}$$

soit

$$\int_{E_{c,0}}^{E_{c,M}} dE_c = k\int_0^x xdx - \mu_g C_\perp \int_0^x dx, \tag{4.52}$$

On trouve $E_{c,M} = \frac{1}{2}kx^2 - \mu_g mgx$.
L'expression de l'énergie cinétique de M au point P_0 est donc égal à

$$E_{c,P_0} = \frac{1}{2}kx_M^2 - \mu_g mgx_M \tag{4.53}$$

(b) Pour une position P_1 du caisse située entre P_0 et B ;

$$dE_c = \vec{C}\cdot\vec{dx} + \vec{P}\cdot\vec{dx} \tag{4.54}$$

$$dE_c = -C_{//}dx \tag{4.55}$$

soit

$$\int_{E_{c,P_0}}^{E_{c,P_1}} dE_c = -\mu_g C_\perp \int_0^x dx \tag{4.56}$$

on trouve

$$E_{c,M} = -\mu_g mgx + E_{c,P_0} \tag{4.57}$$

(c) La valeur de la compression x_M pour que le caisse M arrive au point B avec la vitesse $v_B = 1.5\ (m/s)$ est obtenue par, en écrivant $E_{c,M} = E_{c,B}$, soit

$$E_{c,B} = -\mu_g mg(2l_0) + \frac{1}{2}kx_M^2 - \mu_g mgx_M \tag{4.58}$$

En résoud une équation de second degré en x_M et en retient que la solution physiquement acceptable, en trouve $x_M = 20.62\ (cm)$

(a) Le travail effectué par la force de frottement entre P_0 et B est donné par :

$$dW = \overrightarrow{C_{//}}\cdot\vec{dx} = -\mu_g mgdx \tag{4.59}$$

soit,

$$\int_{W_{P_0}}^{W_B} dW = -\mu_g mg\int_{P_0}^{B} dx \Rightarrow \Delta W = -\mu_g mg(2l_0) = -0,54\ (J) \tag{4.60}$$

(b) Le travail effectué par cette force de frottement entre B et P_0 est égal à

$$dW = \overrightarrow{C_{//}}\cdot\vec{dx} = -\mu_g mgdx \tag{4.61}$$

soit,

$$\int_{W_B}^{W_{P_0}} dW = -\mu_g mg\int_{B}^{P_0} dx \Rightarrow \Delta W = -\mu_g mg(2l_0) = -0,54\ (J) \tag{4.62}$$

(c) Le travail de cette force de frottement le long du contour fermé P_0BP_0 est égal à

$$\int_{W_{P_0}}^{W_B} dW + \int_{W_B}^{W_{P_0}} dW = -\mu_g mg\int_{P_0}^{B} dx - \mu_g mg\int_{B}^{P_0} dx = -1,08\ (J) \tag{4.63}$$

C'est un travail résistant $\oint \overrightarrow{C_{//}}\cdot\vec{dx} \neq 0 \Rightarrow$ la force $\overrightarrow{C_{//}}$ est une force non conservative.

4. Le principe fondamentale de la dynamique appliqué sur le caisse pour une position quelconque P_2 (figure 4.8) est donné :

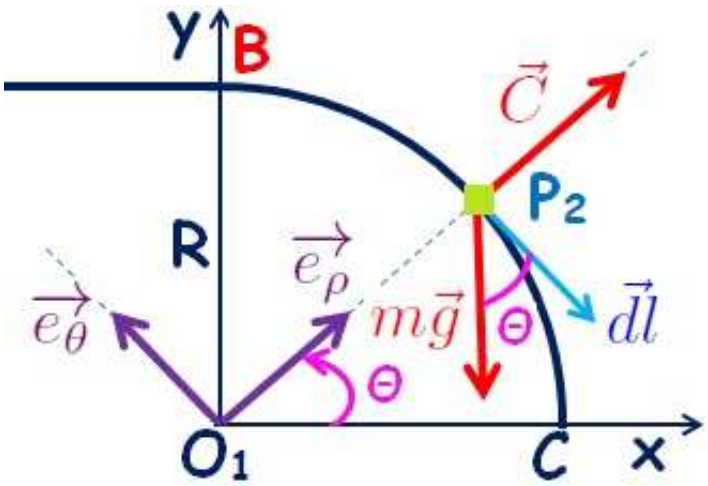


FIGURE 4.8 – Représentation vectorielle de toutes les forces exercées sur le caisse au point P_2

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{C} + \vec{P} = m\vec{a} \tag{4.64}$$

5. En projetant l'équation (4.64) suivant la direction radiale ($\vec{e_\rho}$) et orthoradiale ($\vec{e_\theta}$) dans la base locale associée aux coordonnées polaires, on obtient :

$$-mg\sin(\theta)\vec{e_\rho} + C_\perp\vec{e_\rho} = ma_\rho\vec{e_\rho} \tag{4.65}$$

$$-mg\cos(\theta)\vec{e_\theta} = ma_\theta\vec{e_\theta} \tag{4.66}$$

En utilisant les expression de a_ρ et a_θ établies dans le cours :

$$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{4.67}$$

$$a_\theta = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4.68}$$

car $\rho = C^{st} = R$. Les équations (4.65) et (4.66) deviennent :

$$-mg\sin(\theta) + C_\perp = -mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{4.69}$$

$$-mg\cos(\theta) = mR\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4.70}$$

La relation (4.70) peut être aussi écrite sous la forme

$$2\frac{d\theta}{dt}mg\cos(\theta) = -2\frac{d\theta}{dt}mR\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4.71}$$

En integrant par rapport au temps il vient :

$$2mg\int\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}dt = -mR\int 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}dt \Rightarrow 2mg\sin(\theta) = -mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + C^{st} \tag{4.72}$$

La constante d'intégration C^{st} est déterminée par les conditions initiales, c'est-à-dire quand le caisse est en B. En ce point

$$\theta = \frac{\pi}{2} \;\text{ et }\; \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_B}{R} \tag{4.73}$$

(le signe - signifie que θ décroît lorsque le temps t croît), donc

$$C^{st} = 2mg + m\frac{v_B^2}{R}. \tag{4.74}$$

Maintenant à partir de l'équation (4.69) on tire :

$$C_\perp = mg\sin(\theta) - mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{4.75}$$

or

$$-mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2mg\sin(\theta) - C^{st} = 2mg\sin(\theta) - (2mg + m\frac{v_B^2}{R}) \tag{4.76}$$

soit

$$C_\perp = mg\sin(\theta) + (2mg\sin(\theta) - (2mg + m\frac{v_B^2}{R})) = mg(3\sin(\theta) - 2) - m\frac{v_B^2}{R} \tag{4.77}$$

6. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre B et P_2 s'écrit :

$$dE_c = \vec{C}\cdot\vec{dl} + \vec{P}\cdot\vec{dl} \tag{4.78}$$

or

$$\vec{dl} = R(-d\theta)(-\vec{e_\theta}) = Rd\theta\vec{e_\theta} \quad \text{car } d\theta < 0 \tag{4.79}$$

$$\vec{C} = C\vec{e_\rho} \tag{4.80}$$

et

$$\vec{P} = -mg\sin(\theta)\vec{e_\rho} - mg\cos(\theta)\vec{e_\theta} \tag{4.81}$$

donc, $dE_c = -mgR\cos(\theta)d\theta$. En intégrant entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ et θ, on obtient :

$$-mgR\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos(\theta)d\theta = mgR(1-\sin(\theta)) = \frac{1}{2}mv_{P_2}^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 \tag{4.82}$$

Ce résultat peut être trouvé on appliquant le principe de conservation de l'énergie totale car la seule force qui travail dans ce cas c'est la composante $mg\cos(\theta)$ qui est une force conservative, soit :

$$E_{T,B} = E_{T,P_2} \Rightarrow E_{c,B} + E_{p,B} = E_{c,P_2} + E_{p,P_2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR = \frac{1}{2}mv_{P_2}^2 + mgR\sin(\theta) \tag{4.83}$$

En utilisant la relation (4.69) et on remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par $-\frac{v_{P_2}}{R}$, on trouve :

$$C_\perp = -mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\sin(\theta) = -m\frac{v_{P_2}^2}{R} + mg\sin(\theta) \tag{4.84}$$

En utilisant la relation (4.82) :

$$C_\perp = -(\frac{2}{R})\frac{mv_{P_2}^2}{2} + mg\sin(\theta) = -(\frac{2}{R})\left(mgR(1-\sin(\theta)) + \frac{1}{2}mv_B^2\right) + mg\sin(\theta) \tag{4.85}$$

On retrouve donc l'expression de $C_\perp = mg(3\sin(\theta) - 2) - m\frac{v_B^2}{R}$

7. Quand $C_\perp = 0$, le caisse perd le contact avec la surface $\overset{\frown}{BC}$; on a :

$$mg(3\sin(\theta_q) - 2) - m\frac{v_B^2}{R} = 0 \Rightarrow \theta_q = \arcsin\left(\frac{mv_B^2}{3mRg} + \frac{2}{3}\right) = 66.44° \tag{4.86}$$

8. Dans le cas où $v_B = 0$, on obtient :

$$mg(3\sin(\theta_{q0}) - 2) - m\frac{v_B^2}{R} = 0 \Rightarrow \theta_{q0} = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 41.81° \tag{4.87}$$

9. La vitesse minimale $v_{B,M}$ pour que la caisse M quitte la surface $\overset{\frown}{BC}$, dès son passage en B est déterminée par :

$$mg(3\sin(\frac{\pi}{2}) - 2) - m\frac{v_{B,M}^2}{R} = 0 \Rightarrow v_{B,M} = \sqrt{Rg} = 1,73(m/s) \tag{4.88}$$

10. Durant la chute, la seule fotrce qui agisse sur la caisse est son poids. En un point P_3 queconque de la trajectoire dans le plan xOy on a :

(a) Les composantes cartésiènnes de l'accéaration de la caisse :

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned} \tag{4.89}$$

(b) D'ou en déduit les composantes cartésiennes de sa vitesse en tenant compte des conditions initiales,

$$\begin{aligned} v_x &= v_{B,M} = C^{st} \\ v_y &= -gt \end{aligned} \tag{4.90}$$

(c) Et enfin les équations horaires du mouvement de la caisse, aussi en prenant en compte les conditions initiales du mouvement,

$$x(t) = v_{B,M}\,t + x'_M + 2R \tag{4.91}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + R \tag{4.92}$$

avec x'_M c'est la valeur de la compression du ressort nécéssaire pour que la vitesse de la caisse en B soit égal à $v_{B,M} = \sqrt{Rg}$.
L'équation de la trajectoire décrite par la caisse est donc, en tirant l'expression du paramètre temps t à partir de l'équation (4.91)

$$t = \frac{x - (x'_M + 2R)}{v_{B,M}} \tag{4.93}$$

et on la remplace dans l'équation (4.92) on obtient,

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x - (x'_M + 2R)}{v_{B,M}}\right)^2 + R = \boxed{-\frac{1}{2R}x^2 + \frac{(x'_M + 2R)}{R}x - \frac{(x'_M + 2R)^2}{2R}} \tag{4.94}$$

C'est l'équation d'une parabole.

11. La portée maximale ainsi que le temps de tombé du caisse sur le plan CD sont déterminés par :
Lorsque la caisse touche le sol,

$$y(t_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_s) = x'_M + 2R + \sqrt{\frac{2R}{g}}\,v_{B,M} = x'_M + (2+\sqrt{2})R \tag{4.95}$$

avec x'_M, $y(t_s)$ et t_s sont la compression du ressort nécéssaire pour que la caisse arrive au point B avec la vitesse $v_{B,M}$, la portée maximale et le temps de tombé de la caisse sur le plan CD respectivement.
Pour déterminer x'_M, on utilise la relation(4.58), on a

$$\begin{aligned} E_{c,B} = \frac{1}{2}mv^2_{B,M} = \frac{1}{2}mRg &= -\mu_g mg(2l_0) + \frac{1}{2}kx^2_{M'} - \mu_g mgx'_M \\ &\Rightarrow \quad kx^2_{M'} - 2\mu_g mgx'_M - mRg\left(4\mu_g + 1\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.96}$$

En résoud une équation de second degré en x'_M et en retient que la solution physiquement acceptable, en trouve $x'_M = 21.78\ cm$.
d'ou,

$$\boxed{x(t_s) = x'_M + (2+\sqrt{2})R = 1.6663\ m} \tag{4.97}$$

et

$$\boxed{t_s = \frac{x(t_s) - (x'_M + 2R)}{v_{B,M}} = 0.5\ s} \tag{4.98}$$

12. La vitesse quand la caisse retombe sur le plan CD est alors.

$$\boxed{v(t_s) = \sqrt{(v_x(t_s))^2 + (v_y(t_s))^2} = \sqrt{v^2_{B,M} + (-gt_s)^2} = 5.29\ m.s^{-1}} \tag{4.99}$$

13. La caise est soumise à la seul force de son poids qui est conservative, donc d'après le principe de conservation de l'énergie totale du système, on a,

$$\boxed{E_{tot}(B) = E_{tot}(S)} \tag{4.100}$$

Avec $E_{tot}(B)$ et $E_{tot}(S)$ sont les valeurs de l'énergie totale au point B et en un point S queconque sur la partie horizontale du plan CD. On a,

$$\boxed{E_p(B)+E_c(B)=E_p(S)+E_c(S)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{mgR+\frac{1}{2}mv_{B,M}^2=0+\frac{1}{2}m(v(t_s))^2} \tag{4.101}$$

d'ou on tire

$$\boxed{mgR+\frac{1}{2}mgR=\frac{1}{2}m(v(t_s))^2} \Rightarrow \quad \boxed{v(t_s)=\sqrt{3gR}=5.29\ m.s^{-1}} \tag{4.102}$$

On retrouve le même resultat de la question précédente (équation (4.99)) car,

$$\boxed{v(t_s)=\sqrt{v_{B,M}^2+(-gt_s)^2}=\sqrt{gR+g^2\left(\frac{x(t_s)-(x'_M+2R)}{v_{B,M}}\right)^2}=\sqrt{gR+g^2\left(\frac{x'_M+(2+\sqrt{2})R-(x'_M+2R)}{\sqrt{gR}}\right)^2}=\sqrt{3gR}}$$

Cinquième partie

Examens de Fin de Semestre avec leurs Corrections

CHAPITRE 5

EXAMENS DE FIN DE SEMESTRE AVEC LEURS CORRIGÉS DÉTAILLÉS

« Remember to look up at the stars and not down at your feet. Try to make sense of what you see and wonder about what makes the universe exist. Be curious. And however difficult life may seem, there is always something you can do and succeed at. It matters that you don't just give up. »

Stephen Hawking

Sommaire

5.1 Corrigés détaillés des exercices 76

Exercise 5.1 Soient dans un espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}(\mathbf{O};\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont donnés par,

$$\vec{A}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\quad \vec{B}=2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\quad \text{et}\quad \vec{C}=2\vec{k} \tag{5.1}$$

où les coordonnées (x,y,z) sont exprimées en mètre (m). Calculer :

① Le produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B}$. En déduire l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

② Le produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$. En déduire l'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

③ Le produit mixte $\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$. En déduire le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

■

Exercise 5.2 Les équations paramétriques du mouvement d'un point matériel M dans un repère orthonormé $\mathscr{R}(\mathbf{O};\mathbf{x},\mathbf{y})$ sont données en fonction du temps t par :

$$x = \alpha t \tag{5.2}$$
$$y = \beta t^2+\alpha t+100 \tag{5.3}$$

où les coordonnées x et y sont exprimés en mètre et t en seconde, $\alpha=80$ (M.K.S.A) et $\beta=-5$ (M.K.S.A).

① Donner la dimension, puis l'unité des constantes α et β dans le système international d'unités de

base S.I.(M.K.S.A). Que représentent-elles physiquement?

② Déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes. Quelle est sa nature?

③ Calculer les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à la date t.

④ Tracer les diagrammes des vitesses $v_x(t)$, $v_y(t)$ et les digrammes des accélérations $a_x(t)$, $a_y(t)$ durant l'intervalle de temps $t \in [0,16]$ (s). En déduire alors la nature du mouvement suivant les axes Ox et Oy.

⑤ Calculer les modules des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ à l'instant $t = 5$ s.

⑥ Déterminer les composantes intrinsèques tangentielle $\vec{a_T}$ et normale $\vec{a_N}$ de l'accélération.

⑦ En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire à la date $t = 5$ s.

■

Exercise 5.3 La figure 5.1 montre un bloc **M** d'une masse de 1 kg est suspendu par une corde de longueur $\ell = 1$ m et de masse négligeable. Un opérateur applique sur le bloc une force horizontale $\vec{F_{op}}$, constante en direction, sens et module, afin de maintenir la corde avec un angle de $\theta = \mathbf{30°}$ par rapport à la verticale. On donne $g = 10$ ms^{-2} et le vecteur déplacement élémentaire dans le système de coordonnées polaires $\vec{d\ell} = \mathbf{d}\rho\vec{e_\rho} + \rho\mathbf{d}\theta\vec{e_\theta} = \ell\mathbf{d}\theta\vec{e_\theta}$.

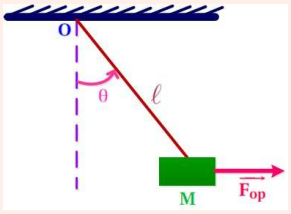


FIGURE 5.1 – La corde est maintenue à $\theta = \mathbf{30°}$ avec la vertical par une force $\vec{F_{op}}$

① Représenter qualitativement toutes les forces appliquées sur le bloc **M**. En déduire la grandeur (module) de la force $\vec{F_{op}}$ que doit exercer l'opérateur sur le bloc **M** pour maintenir la corde à la position $\theta = \mathbf{30°}$?

② Calculer le moment de la force $\vec{F_{op}}$ par rapport au point **O**.

③ Calculer le travail que doit effectuer la force $\vec{F_{op}}$ pour déplacer le bloc à partir de sa position vertical à la position $\theta = \mathbf{30°}$.

■

5.1 Corrigés détaillés des exercices

Exercise 5.1.

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{B} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{C} = 2\vec{k}$$

① Le produit scalaire

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 4}. \tag{5.4}$$

L'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est donné par,

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}\right) = 70.5288°}. \tag{5.5}$$

② Le produit vectoriel

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = 8\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 8\,\vec{k}}. \tag{5.6}$$

L'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est égale à,

$$\boxed{\text{Aire} = \|\overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1}\| = 11.3137\ m^2}. \tag{5.7}$$

③ Le produit mixte

$$\boxed{\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{C} = -16}. \tag{5.8}$$

Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est égal,

$$\boxed{\text{Volume} = \left|\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{C}\right| = 16\ m^3}. \tag{5.9}$$

Exercise 5.2.

① La dimension de α se détermine par,

$$[x] = [\alpha]\,[t] \Rightarrow \boxed{[\alpha] = \mathrm{LT}^{-1}} \tag{5.10}$$

L'unité de α dans le système international d'unités de base S.I. est alors $\boxed{ms^{-1}}$. α représente donc une vitesse. de même, la dimension de β se détermine par,

$$[y] = [\beta]\,[t^2] \Rightarrow \boxed{[\beta] = \mathrm{LT}^{-2}} \tag{5.11}$$

Par conséquent, l'unité de β dans le système S.I. est $\boxed{ms^{-2}}$. La constante β représente donc une accélération.

② A partir de l'équation (5.2) on tire $\boxed{t = \dfrac{x}{\alpha}}$ et on la remplace dans l'équation (5.3), on obtient :

$$\boxed{y = \frac{\beta}{\alpha^2}x^2 + x + 100} \tag{5.12}$$

C'est l'équation d'une parabole qui passe par le point de coordonnées (0,100).

③ Les composantes cartésiennes du vecteur vitesse sont,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha \tag{5.13}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2\beta t + \alpha \tag{5.14}$$

et les composantes cartésiennes du vecteur accélération sont,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{5.15}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2\beta \tag{5.16}$$

④ Les diagrammes des vitesses et accélération de la particule sont représentés respectivement par les figures 5.2 et 5.3

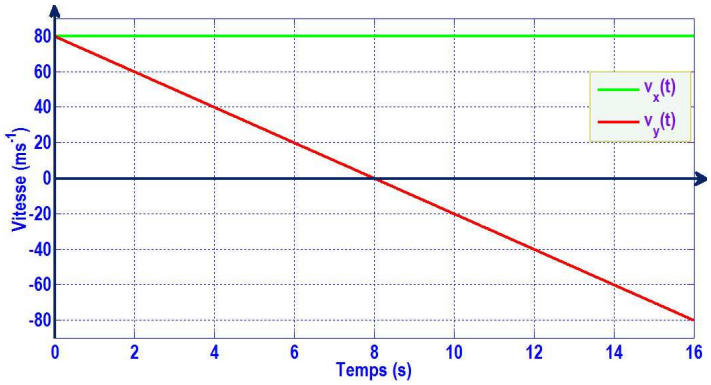


FIGURE 5.2 – Diagramme des vitesses $v_x(t)$ et $v_y(t)$

FIGURE 5.3 – Diagramme des accélérations $a_x(t)$ et $a_y(t)$

A partir des diagrammes des vitesses 5.2 et des accélérations 5.3, on peut déduire la nature du mouvement de la particule suivant les axes Ox et Oy,

⑤ **Suivant l'axe** Ox : $\forall\ t\ \begin{cases} v_x > 0 \\ a_x = 0 \end{cases}$ $a_x v_x = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme ($\|\vec{v}_x\| = \mathrm{C}^{st} \neq 0$)

⑥ **Suivant l'axe** Oy : il existe deux phases de mouvement,

Phase 1 : $t \in [0, 8\ s]$ $\begin{cases} v_y > 0 \\ a_y < 0 \end{cases}$ $a_y v_y < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément ($a_y = \mathrm{C}^{st}$) décéléré.

Phase 2 : $t > 8\ s$ $\begin{cases} v_y < 0 \\ a_y < 0 \end{cases}$ $a_y v_y > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément ($a_y = \mathrm{C}^{st}$) accéléré.

⑦ Les modules des vecteurs vitesses et accélérations à la date $t = 5\ s$ sont donnés par,

$$\|\overrightarrow{v(t=5)}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\alpha)^2 + (2\beta(t=5) + \alpha)^2} = 85.440\ ms^{-1}, \tag{5.17}$$

et

$$\|\overrightarrow{a(t=5)}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2\beta)^2} = 10\ ms^{-2}, \tag{5.18}$$

⑧ les composantes intrinsèques de l'accélération sont données par,

$$a_{\mathrm{T}} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d\sqrt{(80)^2 + (-10t+80)^2}}{dt} = \frac{-10(-10t+80)}{\sqrt{(80)^2 + (-10t+80)^2}}, \tag{5.19}$$

et l'accélération normale peut être déduite à partir de,

$$a_{\mathrm{N}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - a_{\mathrm{T}}^2} = \frac{800}{\sqrt{(80)^2 + (-10t+80)^2}}. \tag{5.20}$$

⑨ A partir des résultats (5.17) et (5.20) on peut déduire le rayon de courbure de la trajectoire en utilisant la relation,

$$\mathrm{R}_c = \frac{v^2}{\mathrm{R}_c} = \frac{\sqrt[3]{(80)^2 + (-10t+80)^2}}{800} = 779.640\ m. \tag{5.21}$$

Exercise 5.3.

① La figure 5.4 montre toutes les forces appliquées sur le bloc ;

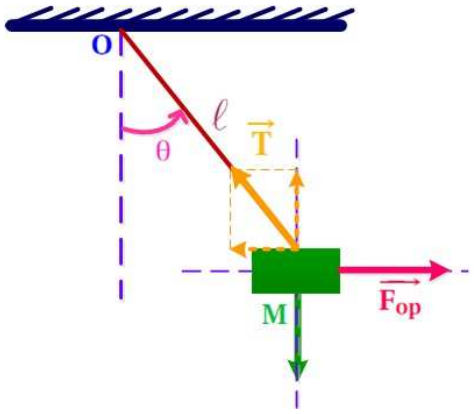


FIGURE 5.4 – Représentation qualitative des forces exercées sur le bloc **M**

❶ Le poids $\vec{P} = \mathbf{m}\vec{g}$;

❷ La force de l'opérateur $\vec{F_{op}}$;

❸ La tension du fil $\vec{T}$.

182 On appliquant le principe fondamental de la dynamique,

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} + \vec{F_{op}} + \vec{P} = \vec{0} \tag{5.22}$$

La projection de (5.22) donne;

② **Suivant l'axe** $x'ox$

$$F_{op} - T\sin(\theta) = 0 \tag{5.23}$$

③ **Suivant l'axe** $y'oy$

$$-mg + T\cos(\theta) = 0 \tag{5.24}$$

On dévise l'équation (5.23) par l'équation (5.25), on obtient,

$$\boxed{T = mg\tan(\theta) = 5.774 \text{ N}} \tag{5.25}$$

④ Le moment de $\vec{F_{op}}$ par rapport à **O** noté $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F_{op}}/O}$ est donné par,

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F_{op}}/O} = \vec{\ell} \wedge \vec{F_{op}} = \ell F_{op}\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\,\vec{k} = \ell F_{op}\cos(\theta)\,\vec{k} = 3.0233\,\vec{k}\,(\text{N}m) \tag{5.26}$$

⑤ Par définition le travail élémentaire effectuer par la force $\vec{\mathbf{F}_{op}}$ pour un déplacement élementaire $\vec{d\ell}$ est donné par $\mathbf{dW} = \vec{\mathbf{F}_{op}} \cdot \vec{d\ell}$. En projetant le vecteur force $\vec{\mathbf{F}_{op}}$ suivant les deux directions $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ comme montré sur la figure 5.5 on obtient,

FIGURE 5.5 – Projection de la force $\vec{\mathbf{F}_{op}}$ suivants les directions $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$

$$\mathbf{dW} = \vec{\mathbf{F}_{op}} \cdot \vec{d\ell} = \left(\mathbf{F}_{op(\rho)}\vec{e_\rho} + \mathbf{F}_{op(\theta)}\vec{e_\theta}\right) \cdot \left(\ell \mathbf{d}\theta \vec{e_\theta}\right) = \mathbf{F}_{op}\ell\sin(\theta)d\theta. \tag{5.27}$$

En intergre l'équation (5.27) pour calculer le travail fourni par l'opérateur pour déplacer le bloc de la position vertical à la position $\theta = \mathbf{30}°$, on obtient,

$$\int_{W_I}^{W_F} \mathbf{dW} = \ell\mathbf{F}_{op}\int_{\theta=0}^{\theta=30°} \sin(\theta)d\theta = -\ell\mathbf{F}_{op}\cos(\theta)\Big|_0^{30°}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{W_F} - \mathbf{W_I} = \ell\mathbf{F}_{op}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0.7736 \text{ J}} \tag{5.28}$$