UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIÈRE

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de **Master 2**
En Physique
Spécialité : Physique des Matériaux

Par :

Babaali Imed Manaa Ikram

Thème :

Étude de la propagation des faisceaux de Laguerre-Gaussiennes standards et élégants à travers une ouverture complexe.

Soutenue publiquement le : **22/06/2026**, devant le jury composé de :

Nom	**Grade**	**Établissement**	**Rôle**
HOUATIS Djamel	MCA	UYFM	Président
KHEROUBI Boumediene	MCB	UYFM	Examinateur
SEBBAR Djamel	MCA	UYFM	Encadreur

Année universitaire 2025/2026

ملخص

يتناول هذا العمل دراسة نظرية وعددية لخصائص انتشار حزم لاغير-غاوص القياسية (sLG) والأنيقة (eLG) عبر نظام بصري يشتمل على فتحة معقدة تعاني من عيوب المحاذاة الإزاحية والزاوية .(désalignement) وتتميز هذه الحزم بامتلاكها بنية طورية حلزونية تؤدي إلى توليد عزم زاوي مداري ،(OAM) مما يكسبها أهمية بالغة في تطبيقات البصريات الحديثة والتقنيات الليزرية المتقدمة.

في البداية، تم استعراض المفاهيم الأساسية للبصريات القياسية والتقريب شبه المحوري approximation Paraxial وظاهرة الحيود، بالإضافة إلى دراسة الخصائص الرياضية والفيزيائية لحزم لاغير-غاوص، مع إجراء مقارنة هيكلية بين الأنماط القياسية والأنيقة من حيث البنية التحليلية وسلوك الانتشار والتباعد الزاوي.

بعد ذلك، تم تطوير نموذج تحليلي لدراسة انتشار هذه الحزم عبر النظام البصري المذكور بالاعتماد على صيغة تكامل الحيود المعمم integrale généralisé de dffiraction في الإحداثيات الأسطوانية، مما أتاح دراسة التأثير المشترك للفتحات المعقدة وعيوب المحاذاة على التوزيع العرضي لشدة الحزمة الطيفية وتشوّه جبهة الموجة.

وأخيراً، تم إجراء محاكاة عددية باستخدام برنامج Mathematica لتحليل سلوك الحزم تحت ظروف انتشار مختلفة. وقد أظهرت النتائج أن الحزم القياسية تتميز بتركيز طاقة أعلى واستقرارية بنيوية أكبر تجاه أخطاء عدم المحاذاة، في حين تُبدي الحزم الأنيقة تباعداً زاوياً أكبر وحساسية مرتفعة للاضطرابات البنيوية للنظام. وتشير هذه النتائج إلى أن الحزم القياسية تعد الأنسب لتطبيقات النقل البصري واستطارة الطاقة، بينما تمتلك الحزم الأنيقة إمكانيات واعدة في مجالات القياس البصري الدقيق وأجهزة الاستشعار عالية الحساسية.

الكلمات المفتاحية: حزم لاغير-غاوص، الأنماط القياسية (sLG)، الأنماط الأنيقة (eLG)، الحيود، الفتحة المعقدة، عيوب المحاذاة البصرية، الانتشار شبه المحوري، العزم الزاوي المداري ،(OAM) برنامج Mathematica.

Résumé

Ce travail présente une étude théorique et numérique de la propagation des faisceaux de Laguerre-Gauss standards (sLG) et élégants (eLG) à travers un système optique contenant une ouverture complexe légèrement désalignée. Grâce à leur structure de phase hélicoïdale et à leur moment angulaire orbital, ces faisceaux jouent un rôle important dans l'optique moderne et les technologies laser.

Dans un premier temps, les concepts fondamentaux de l'optique scalaire, l'approximation paraxiale et la théorie de la diffraction sont présentés. Les propriétés mathématiques et physiques des faisceaux de Laguerre-Gauss sont ensuite étudiées, en mettant l'accent sur les différences entre les modes standards et élégants en termes de structure, de propagation et de divergence.

Ensuite, un modèle analytique basé sur l'intégrale de diffraction généralisée en coordonnées cylindriques est développé pour décrire la propagation de ces faisceaux à travers un système optique légèrement désaligné. Cette formulation permet d'évaluer l'influence des ouvertures complexes et des imperfections d'alignement sur le profil transversal du faisceau.

Enfin, des simulations numériques réalisées avec Mathematica sont utilisées pour analyser le comportement des faisceaux sLG et eLG dans différentes conditions de propagation. Les résultats obtenus montrent que les modes standards présentent une concentration d'énergie plus élevée et une meilleure stabilité vis-à-vis des erreurs d'alignement, tandis que les modes élégants présentent une divergence plus grande et une sensibilité accrue aux perturbations géométriques. Ces caractéristiques rendent les faisceaux sLG adaptés aux systèmes de transmission optique, tandis que les faisceaux eLG offrent des applications prometteuses en métrologie optique et dans les technologies de détection haute précision.

Mots-clés : faisceaux de Laguerre-Gauss, modes standards, modes élégants, diffraction, ouverture complexe, désalignement optique, propagation paraxiale, simulation numérique.

Abstract

This work presents a theoretical and numerical study of the propagation of standard Laguerre-Gaussian (sLG) and elegant Laguerre-Gaussian (eLG) beams through an optical system containing a slightly misaligned complex aperture. Owing to their helical phase structure and orbital angular momentum, these beams play an important role in modern optics and laser-based technologies.

First, the fundamental concepts of scalar optics, the paraxial approximation, and diffraction theory are reviewed. The mathematical and physical properties of Laguerre-Gaussian beams are then investigated, with particular emphasis on the differences between standard and elegant modes in terms of structure, propagation, and divergence.

Next, an analytical model based on the generalized diffraction integral in cylindrical coordinates is developed to describe the propagation of these beams through a slightly misaligned optical system. This formulation makes it possible to evaluate the influence of complex apertures and alignment imperfections on the transverse beam profile.

Finally, numerical simulations performed using Mathematica are employed to analyze the behavior of sLG and eLG beams under different propagation conditions. The obtained results show that standard modes exhibit higher energy concentration and better stability against alignment errors, whereas elegant modes present larger divergence and greater sensitivity to geometrical perturbations. These characteristics make sLG beams suitable for optical transmission systems, while eLG beams offer promising applications in optical metrology and high-precision sensing technologies.

Keywords : Laguerre-Gaussian beams, standard modes, elegant modes, diffraction, complex aperture, optical misalignment, paraxial propagation, numerical simulation.

إهداء

الحمد لله الذي وفّقنا لإتمام هذا العمل المتواضع، ثمرة الجهد، السهر، والمثابرة.

أهدي هذا البحث العلمي إلى من كلّلهما الله سبحانه وتعالى بالهيبة والوقار، إلى من أحمل اسمه بكل فخر واعتزاز، والدي العزيز حفظه الله ورعاه وأدام في عمره.

وإلى نبع الحنان والصفاء، من سهرت الليالي الطوال ودعت لي في جوف الليل بالنجاح والتوفيق، أمي الغالية أطال الله في عمرها ورزقها الصحة والعافية.

ويمتد شكري وإهدائي الحار إلى عائلتي الكريمة، إلى إخوتي وأخواتي الأحباء، وإلى كل الأقارب والأصدقاء الذين قدموا لي الدعم المعنوي والتشجيع المستمر طيلة مسيرتي الجامعية.

شكر وعرفان

أتقدم بأسمى آيات الشكر، العرفان، والامتنان العميق إلى زوجتي الغالية ورفيقة دربي، التي كانت لي سنداً وقوة طوال مشواري الدراسي، وشاركتني بكل تفانٍ، صبر، وإخلاص في كتابة وإنجاز هذه المذكرة خطوة بخطوة، فكانت خير عون وشريك في السراء والضراء.

وأتوجه بخالص الشكر والتقدير العميق والامتنان الأكاديمي إلى أستاذي الفاضل والمشرف القدير **الأستاذ جمال صبار** على توجيهاته القيمة، نصائحه السديدة، وصبره الطويل معنا، وحرصه الدائم على توجيهنا طيلة فترة إنجاز المذكرة.

كما نتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى أعضاء لجنة المناقشة الموقرة، **الأستاذ خروبي بومدين والأستاذ هواتيس جمال**، لتفضلهم بقبول تقييم ومناقشة هذا العمل المتواضع، وإثرائه بملاحظاتهم العلمية وتوجيهاتهم القيمة لتصويبه.

عماد باباعلي

إهداء

إلى منارة حياتي وسندي في الوجود، إلى من وهبني الحب والرعاية ودفعني دوماً نحو النجاح، والدي العزيز حفظه الله ورعاه وأطال في عمره.

إلى نبع العطف والحنان، من كانت دعواتها الصادقة تضيء لي عتمة الطريق، أمي الغالية حفظها الله ورزقها الصحة والعافية.

إلى إخوتي وأخواتي، وكل أفراد عائلتي الكريمة الذين كانوا لي نعم السند والمشجع طوال مسيرتي الدراسية، أهديكم ثمرة هذا الجهد المتواضع.

شكر وعرفان

الحمد لله الذي أنار لنا درب العلم ووفقنا لإنهاء هذا العمل. أتقدم بأسمى عبارات الشكر والامتنان النابعة من أعماق قلبي إلى زوجي الغالي، شريك حياتي وبنومي في هذا الدرب، الذي كان لي السند الحقيقي والقوة الداعمة في كل خطوة. شكرًا لك على صبرك، تشجيعك المستمر، وتفانيك طوال فترة إنجاز هذه المذكرة، فكنت نعم الشريك والرفيق في السراء والضراء.

كما أتوجه بخالص شكر وعظيم امتناني إلى أستاذي الفاضل والمشرف القدير **الأستاذ جمال صبار**، الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته النيرة ونصائحه القيمة طيلة فترة إنجاز هذه المذكرة.

ونتقدم كذلك بجزيل الشكر والتقدير إلى أعضاء لجنة المناقشة الموقرين، **الأستاذ خروبي بومدين والأستاذ هواتيس جمال**، لتفضلهم بقبول تقييم هذا البحث وإثرائه بملاحظاتهم العلمية القيمة.

مانع إكرام

Table des matières

Liste des Abréviations **5**

Introduction Générale 6

1 rappels théoriques en optique **8**

1.1 Optique scalaire et approximation paraxiale 9

1.1.1 L'approximation de l'optique scalaire 9

1.1.2 L'approximation paraxiale 9

1.2 Équation de propagation (Équation de Helmholtz) 10

1.2.1 Dérivation de l'équation de Helmholtz 10

1.2.2 L'équation de propagation paraxiale 10

1.3 Approximation de Fresnel et de Fraunhofer 12

1.3.1 La zone de Fresnel (Champ proche) 12

1.3.2 La zone de Fraunhofer (Champ lointain) 13

1.4 Transformée de Fourier en optique 13

1.4.1 Relation entre diffraction et transformée de Fourier Dans l'approximation de Fraunhofer (champ lointain) 13

1.4.2 Importance pour le faisceau gaussien 14

1.5 Notion de diffraction 14

1.5.1 Principe de Huygens-Fresnel 14

1.5.2 Diffraction par des ouvertures simples 14

1.6 Les Faisceaux Gaussiens Fondamentaux 17

1.7 Le Moment Angulaire Orbital (OAM) de la Lumière 17

2 Les Faisceaux de Laguerre-Gauss (LG) **20**

2.1 Définition des modes Laguerre-Gauss 21

2.1.1 Expression mathématique des modes LG 21

2.1.2 Propriétés physiques des modes Laguerre-Gauss 22

2.2 Modes Laguerre-Gauss standards (sLGB) 23

2.3 24

2.4 Comparaison entre les modes LG standards et élégants 24

2.4.1 Différence de structure mathématique 25

2.4.2 Divergence et qualité de faisceau 25
2.4.3 Tableau récapitulatif 26
2.5 Conclusion du Chapitre II 27

3 Modélisation de la propagation des faisceaux de Laguerre-Gauss à travers des ouvertures 28

3.0.1 Contexte Physique et Rôle des Ouvertures dans les Systèmes Optiques 29
3.1 Formule de l'intégrale de diffraction généralisée pour la propagation d'un faisceau à travers un système optique légèrement désaligné en système de coordonnées cylindriques 30
3.2 Propagation d'un faisceau Laguerre-Gaussien à travers un système optique légèrement désaligné 32
3.3 Résultats de Simulation Numérique et Discussions 35
3.3.1 Comparaison Directe des Profils d'Intensité Transverse 35
3.3.2 Analyse Approfondie et Discussion Physique 37
Conclusion Générale 40

Table des figures

1.1 Représentation géométrique de l'approximation paraxiale. 10
1.2 Comparaison entre le front d'onde plan et le front d'onde sphérique. . . 11
1.3 Phénomène de diffraction par une ouverture et profil d'intensité associé. 14
1.4 Tache d'Airy obtenue par diffraction d'une onde plane à travers une ouverture circulaire de rayon a. (a) Distribution d'intensité en niveaux de gris, (b) en fausses couleurs, (c) profil radial I/I_0 en fonction de $ka\sin\theta$. Les tirets rouges indiquent les zéros de J_1. Le disque central contient environ 84% de l'énergie totale. 15
1.5 Modification de la PSF par une ouverture annulaire d'obscuration centrale $\varepsilon = r_{\text{in}}/r_{\text{out}}$. *(Haut)* : Distribution 2D de l'intensité pour différentes valeurs de ε. *(Milieu)* : Zoom sur le pic central montrant l'affinement progressif. *(Bas)* : Profils radiaux comparatifs — l'augmentation de ε affine le pic central au détriment d'un renforcement des lobes latéraux. 16

2.1 Distribution spatiale de l'intensité transversale des modes de Laguerre-Gauss standards pour différentes valeurs de l'ordre radial p et de la charge topologique l. 21
2.2 Évolution du rayon du faisceau $w(z)/w_0$ lors de la propagation en fonction de la distance axiale normalisée z/z_R pour les modes $LG_{1,1}$ standards (sLG) et élégants (eLG). 25
2.3 Profils radiaux d'intensité normalisée des modes LG standards (sLG, trait plein) et élégants (eLG, tirets) pour différentes valeurs de p et l. Pour les ordres élevés, le mode élégant présente un spot plus large et une redistribution différente de l'énergie entre les anneaux. 26

3.1 Schéma de désalignement pour un système bidimensionnel orienté vers l'avant. 30
3.2 Analyse comparative en champ proche ($z = 0.6$ m) de l'intensité transverse entre les faisceaux sLG et eLG sous l'effet de la variation des paramètres de l'ouverture. 36

3.3 Profils d'intensité transversale des faisceaux Laguerre-Gauss standard (sLG) et élégants (eLG) pour différents modes (LG_{11}, LG_{21}, LG_{31}) à une distance de propagation constante $z = 0.06$ m pour deux valeurs du rayon de l'ouverture : (a, b) $a_1 = 0.4$ mm et (c, d) $a_1 = 0.6$ mm. 37

Liste des Abréviations

LASER	Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
LG	Laguerre-Gauss
sLG	Faisceau de Laguerre-Gauss Standard
eLG	Faisceau de Laguerre-Gauss Élégant
OAM	Moment Angulaire Orbital (*Orbital Angular Momentum*)
TF	Transformée de Fourier
TEM	Mode Transverse Électromagnétique
ABCD	Matrice de propagation ABCD
UYFM	Université Yahia Fares de Médéa

Introduction Générale

Depuis l'invention du laser dans les années 1960, la physique des faisceaux optiques a connu une évolution fulgurante, transformant radicalement les domaines de la métrologie, des télécommunications optiques et du traitement des matériaux. Initialement, l'analyse paraxiale se concentrait majoritairement sur le mode fondamental gaussien (TEM_{00}). Cependant, les exigences technologiques modernes ont suscité un intérêt grandissant pour les modes de propagation d'ordre supérieur, notamment les faisceaux possédant un moment angulaire orbital (OAM), communément appelés faisceaux à vortex optiques [1].

Parmi ces structures spatiales complexes, les faisceaux de Laguerre-Gauss (LG) occupent une place prépondérante en raison de leur symétrie circulaire cylindrique intrinsèque. Dans la littérature scientifique, ces faisceaux se déclinent principalement en deux grandes familles distinctes : les faisceaux de Laguerre-Gauss Standards (sLG) et les faisceaux de Laguerre-Gauss Élégants (eLG). Tandis que les modes standards possèdent un argument polynomial purement réel [2], les modes élégants se distinguent par un argument complexe où les variables d'espace et les paramètres de phase sont intimement couplés [3, 4]. Cette divergence mathématique fondamentale se traduit par des comportements physiques distincts, notamment en termes de divergence et de distribution d'énergie lors de la propagation.

Dans les systèmes optiques réels, la propagation libre est une idéalisation. Les faisceaux lasers rencontrent inévitablement des obstacles physiques, des diaphragmes ou des limitations spatiales induites par la taille finie des composants. L'étude de la diffraction à travers des ouvertures devient alors indispensable [5]. De plus, lors de l'alignement mécanique des dispositifs, des défauts géométriques (décentrements, inclinaisons) brisent souvent la symétrie parfaite du montage. Pour modéliser ces imperfections, le concept d'ouverture complexe décentrée, combiné au formalisme des matrices de transfert $ABCD$, s'impose comme l'outil le plus rigoureux [6, 7].

La problématique centrale de ce mémoire de Master réside donc dans l'évaluation de l'impact d'une ouverture complexe décentrée sur la structure transverse et la stabilité des modes sLG et eLG. L'objectif est de comprendre comment les variations géométriques de l'ouverture et les paramètres de désalignement influencent la forme des pics d'intensité, le lissage du vortex central et la divergence globale du champ, aussi bien en champ proche qu'en champ lointain.

Pour répondre à cette problématique, notre travail est structuré en trois chapitres principaux :

- **Le premier chapitre** est consacré aux généralités sur les faisceaux lasers, les modes paraxiaux et les outils de base de l'optique matricielle.
- **Le deuxième chapitre** formalise mathématiquement et physiquement les struc-

tures des faisceaux de Laguerre-Gauss Standards (sLG) et Élégants (eLG), en mettant en relief la différence fondamentale entre leurs rayons de courbure et leurs waists au cours de la propagation.

- **Le troisième chapitre** présente le cœur de notre contribution analytique et numérique. Il introduit la formulation de la diffraction généralisée à travers une ouverture complexe décentrée et expose les résultats de simulation numérique sous `Mathematica`, suivis d'une discussion approfondie des profils comparatifs obtenus.

Chapitre 1

rappels théoriques en optique

1.1 Optique scalaire et approximation paraxiale

1.1.1 L'approximation de l'optique scalaire

L'étude de la propagation de la lumière repose initialement sur les équations de Maxwell, qui traitent la lumière comme une onde électromagnétique vectorielle. Cependant, dans de nombreuses situations pratiques, notamment lorsque les dimensions des ouvertures diffractantes sont largement supérieures à la longueur d'onde λ, il est possible d'utiliser l'optique scalaire. [8] Cette approche consiste à représenter le champ lumineux par une fonction scalaire complexe U(r, t), ignorant ainsi la nature vectorielle (polarisation) de la lumière. Cette simplification permet de réduire la complexité des calculs tout en conservant une précision rigoureuse pour l'analyse des phénomènes de diffraction et d'interférence.

1.1.2 L'approximation paraxiale

L'un des concepts les plus fondamentaux dans l'étude des faisceaux lasers est l'approximation paraxiale. Un faisceau est dit paraxial si ses rayons se propagent selon un angle très faible par rapport à l'axe optique (généralement l'axe z). Mathématiquement, pour une onde se propageant dans la direction z, nous écrivons le champ complexe sous la forme :

$$U(x, y, z) = A(x, y, z)e^{-ikz} \tag{1.1}$$

Où A(x, y, z) est une enveloppe dont la variation selon z est très lente par rapport aux variations transversales. Sous cette approximation, nous considérons que :

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$cos(\theta) \approx 1$$

Cette simplification est cruciale car elle permet de transformer l'équation de Helmholtz en une équation de type parabolique, dont le faisceau gaussien est la solution fondamentale.[9]

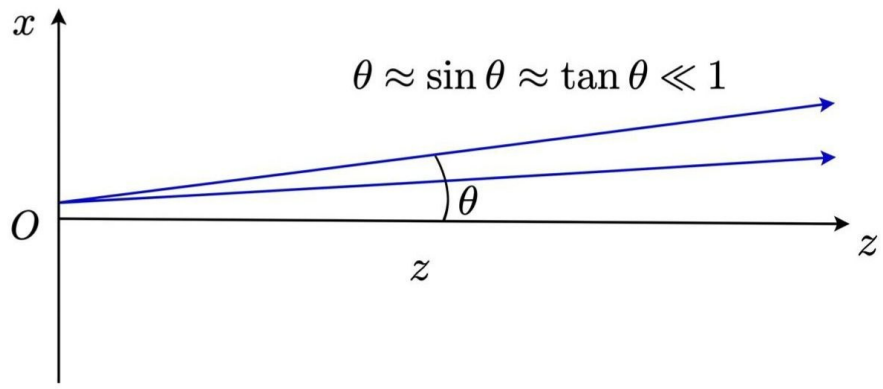


FIG. 1.1 – Représentation géométrique de l'approximation paraxiale.

1.2 Équation de propagation (Équation de Helmholtz)

1.2.1 Dérivation de l'équation de Helmholtz

La propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu homogène, isotrope et non magnétique est régie par l'équation d'onde scalaire issue des équations de Maxwell :

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

Pour une onde monochromatique de fréquence ν, la solution est de la forme :

$$\Psi(r,t) = U(r)e^{i2\pi\nu t} \tag{1.3}$$

. En remplaçant cette forme dans l'équation d'onde, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k^2)U(r) = 0 \tag{1.4}$$

Où $k = /v = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde dans le milieu.[10]

1.2.2 L'équation de propagation paraxiale

Afin de simplifier l'étude de la propagation des ondes lumineuse, on introduit l'approximation paraxiale, valable lorsque la propagation s'effectue principalement selon l'axe optique z et que les variations angulaires restent faibles.

On part de l'équation de Helmholtz qui décrit la propagation d'une onde monochromatique dans un milieu homogène :

$$(\nabla^2 + k^2)U(x,y,z) = 0 \tag{1.5}$$

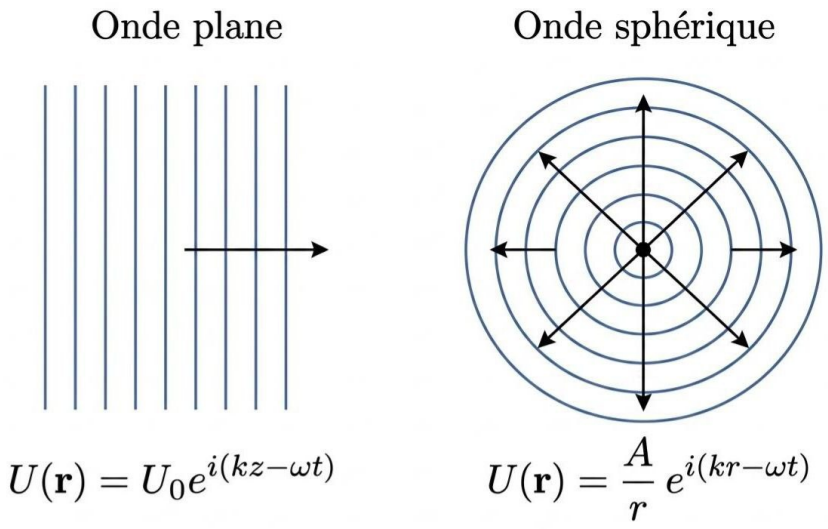


FIG. 1.2 – Comparaison entre le front d'onde plan et le front d'onde sphérique.

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde.

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, le champ optique est exprimé sous la forme :

$$U(x, y, z) = A(x, y, z)e^{-ikz} \tag{1.6}$$

où $A(x, y, z)$ représente l'enveloppe complexe du champ, supposée varier lentement selon la direction de propagation z.

En substituant cette expression dans l'équation de Helmholtz et en développant le Laplacien, on obtient des termes contenant les dérivées secondes et premières de A par rapport à z. Cependant, sous l'hypothèse paraxiale, la variation de A selon z est suffisamment lente pour que le terme en dérivée seconde $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ soit négligeable devant le terme en dérivée première.

Cette approximation conduit à l'équation de propagation paraxiale :

$$\nabla_\perp^2 A - 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \tag{1.7}$$

où $\nabla_\perp^2$ est le Laplacien transverse, défini par :

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.8}$$

En optique paraxiale et dans l'étude des faisceaux laser (tels que les modes de Laguerre-Gauss), l'opérateur Nabla carré ne décrit pas seulement un état stationnaire, il décrit directement la dynamique de la propagation :Le lien direct avec l'évolution spatiale : Dans l'équation d'onde paraxiale, le Laplacien transverse ($\nabla_\perp^2$) est mathématiquement lié à la dérivée première par rapport à l'axe de propagation z (via le terme $2ik\frac{\partial A}{\partial z}$). Cela

signifie physiquement que les variations de la forme du faisceau dans le plan transverse (gérées par $\nabla_\perp^2$) dictent rigoureusement comment le champ global va se propager et évoluer le long de l'axe de propagation. Cette équation décrit l'évolution de l'enveloppe du champ optique dans les directions transverses x et y lors de sa propagation suivant z.

Elle constitue une approximation fondamentale en optique des faisceaux, car elle admet des solutions analytiques importantes telles que les faisceaux gaussiens et les faisceaux de Laguerre-Gauss. Ces solutions permettent de modéliser avec précision la propagation et la diffraction des faisceaux laser dans de nombreuses applications pratiques.

Ainsi, l'équation paraxiale représente un outil central pour l'analyse des phénomènes de diffraction et sera utilisée dans la suite de ce travail pour étudier la propagation des faisceaux à travers différentes ouvertures.

1.3 Approximation de Fresnel et de Fraunhofer

Lorsque le faisceau gaussien rencontre une ouverture, le champ diffracté peut être calculé en utilisant l'intégrale de Huygens-Fresnel. Selon la distance de propagation z après l'ouverture, on distingue deux zones principales [11]

1.3.1 La zone de Fresnel (Champ proche)

La zone de Fresnel correspond à la région située à une distance relativement proche de l'ouverture. Dans cette région, la courbure des fronts d'onde ne peut pas être négligée. L'approximation de Fresnel est valide lorsque la distance z satisfait la condition :

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2_{max} \tag{1.9}$$

Où :

z : Représente la distance de propagation entre le plan de l'ouverture (plan source) et le plan d'observation.

λ : Est la longueur d'onde de la source lumineuse incidente.

(x, y) : Sont les coordonnées cartésiennes d'un point situé dans le plan d'observation (plan de réception).

(ξ, η) : Sont les coordonnées cartésiennes d'un point situé dans le plan de l'ouverture diffractante (plan source).

max : Désigne la valeur maximale que peut prendre la distance transversale entre un point de l'ouverture et un point du plan d'observation.

Le champ électrique dans cette zone est obtenu par une transformation de Fresnel de la fonction de l'ouverture. Cette zone est caractérisée par des figures de diffraction qui ressemblent encore à la forme géométrique de l'ouverture.[11]

1.3.2 La zone de Fraunhofer (Champ lointain)

Lorsque la distance z devient très grande devant les dimensions de l'ouverture

$$z \gg \frac{D^2}{\lambda}$$

, on entre dans la zone de diffraction de Fraunhofer. Ici, les fronts d'onde sont considérés comme des ondes planes. Cette approximation est d'une importance capitale en optique laser car : Elle simplifie mathématiquement l'intégrale de diffraction. Le champ diffracté devient proportionnel à la Transformée de Fourier de la distribution du champ sur l'ouverture.[10] C'est cette approximation (Fraunhofer) que nous utiliserons principalement pour étudier la distribution de l'intensité au foyer d'une lentille ou à grande distance.

1.4 Transformée de Fourier en optique

La transformée de Fourier (TF) est un outil mathématique puissant qui joue un rôle central en optique ondulatoire. Elle permet de passer du domaine spatial (la forme de l'ouverture) au domaine des fréquences spatiales (la figure de diffraction)[8]

1.4.1 Relation entre diffraction et transformée de Fourier Dans l'approximation de Fraunhofer (champ lointain)

on démontre que la distribution de l'amplitude du champ diffracté $U(x, y)$ est directement proportionnelle à la transformée de Fourier de l'amplitude du champ incident $A(\xi, \eta)$ à travers l'ouverture

$$U(x, y) \propto \iint A(\xi, \eta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \tag{1.10}$$

Cette relation signifie que l'optique peut être traitée comme un système de traitement de signal, où l'ouverture agit comme un filtre [12]

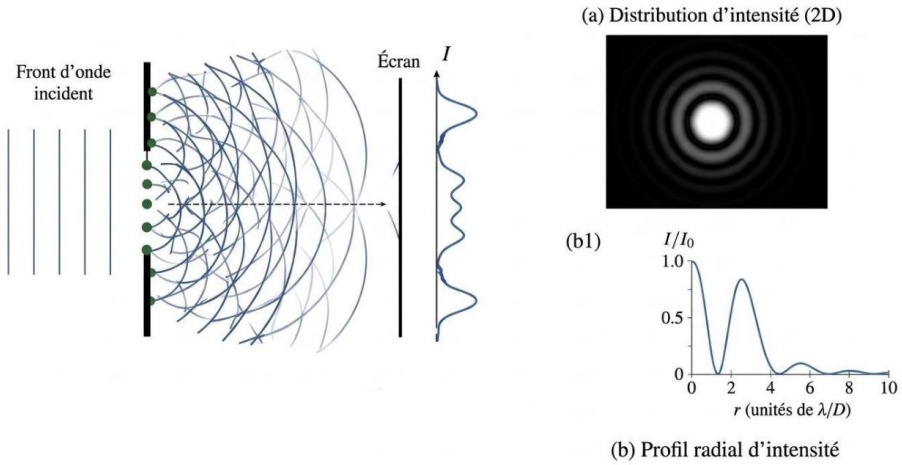


FIG. 1.3 – Phénomène de diffraction par une ouverture et profil d'intensité associé.

1.4.2 Importance pour le faisceau gaussien

Pour un faisceau gaussien, la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est également une fonction gaussienne. Cela explique pourquoi un laser conserve sa forme de "cloche de Gauss" même après s'être propagé sur une longue distance, seule sa largeur (w) change.

1.5 Notion de diffraction

La diffraction est le phénomène de déviation de la lumière lorsqu'elle rencontre un obstacle ou une ouverture. Elle ne peut être expliquée par l'optique géométrique (rayons droits) et nécessite l'approche ondulatoire.

1.5.1 Principe de Huygens-Fresnel

Ce principe stipule que chaque point d'un front d'onde atteint par la lumière se comporte comme une source secondaire d'ondes sphériques. La superposition de ces ondes détermine la figure de diffraction finale.[11]

1.5.2 Diffraction par des ouvertures simples

nous examinons le comportement de la lumière lorsqu'elle traverse des géométries d'ouverture courantes. Le profil d'intensité observé dans le champ lointain (Fraunhofer) est directement lié à la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture.

Ouverture circulaire : La Tache d'Airy

Lorsqu'une onde plane traverse une ouverture circulaire de diamètre D, la figure de diffraction obtenue est une structure concentrique appelée **"Tache d'Airy"**.

- **Description physique :** Elle se compose d'un disque central brillant (contenant environ 84% de l'énergie totale) entouré d'anneaux concentriques de plus faible intensité.
- **Expression mathématique :** L'intensité $I(\theta)$ est donnée par :

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta} \right]^2 \tag{1.11}$$

où J_1 est la fonction de Bessel de premier espèce et a est le rayon de l'ouverture.

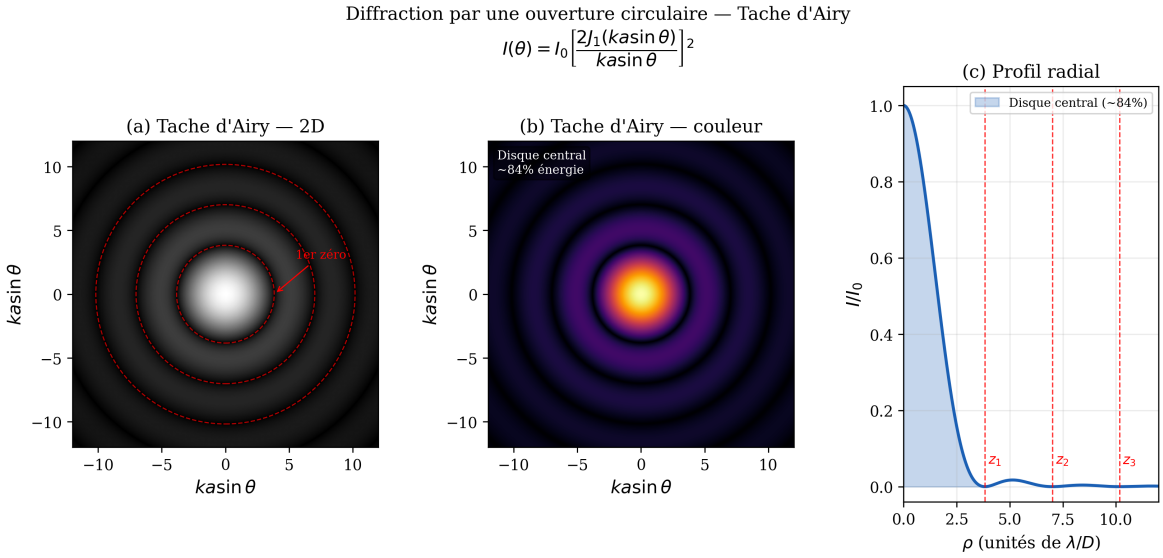


FIG. 1.4 – Tache d'Airy obtenue par diffraction d'une onde plane à travers une ouverture circulaire de rayon a. (a) Distribution d'intensité en niveaux de gris, (b) en fausses couleurs, (c) profil radial I/I_0 en fonction de $ka\sin\theta$. Les tirets rouges indiquent les zéros de J_1. Le disque central contient environ 84% de l'énergie totale.

k : Le vecteur d'onde (ou nombre d'onde)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

θ : L'angle de diffraction (ou angle d'observation)

Ouverture annulaire : Modification de la PSF

L'ouverture annulaire est caractérisée par une obstruction centrale opaque. Cette configuration modifie radicalement la **PSF** (Point Spread Function) :

- **Affinement du pic central :** L'obstruction centrale permet de réduire la largeur du lobe principal, ce qui améliore théoriquement la résolution latérale du système.
- **Redistribution de l'énergie :** Cependant, une partie de l'énergie est transférée du pic central vers les anneaux secondaires, ce qui augmente l'intensité des lobes latéraux et peut réduire le contraste.
- **Application :** C'est une géométrie fondamentale pour les télescopes à miroir secondaire et les systèmes d'imagerie à haute résolution.

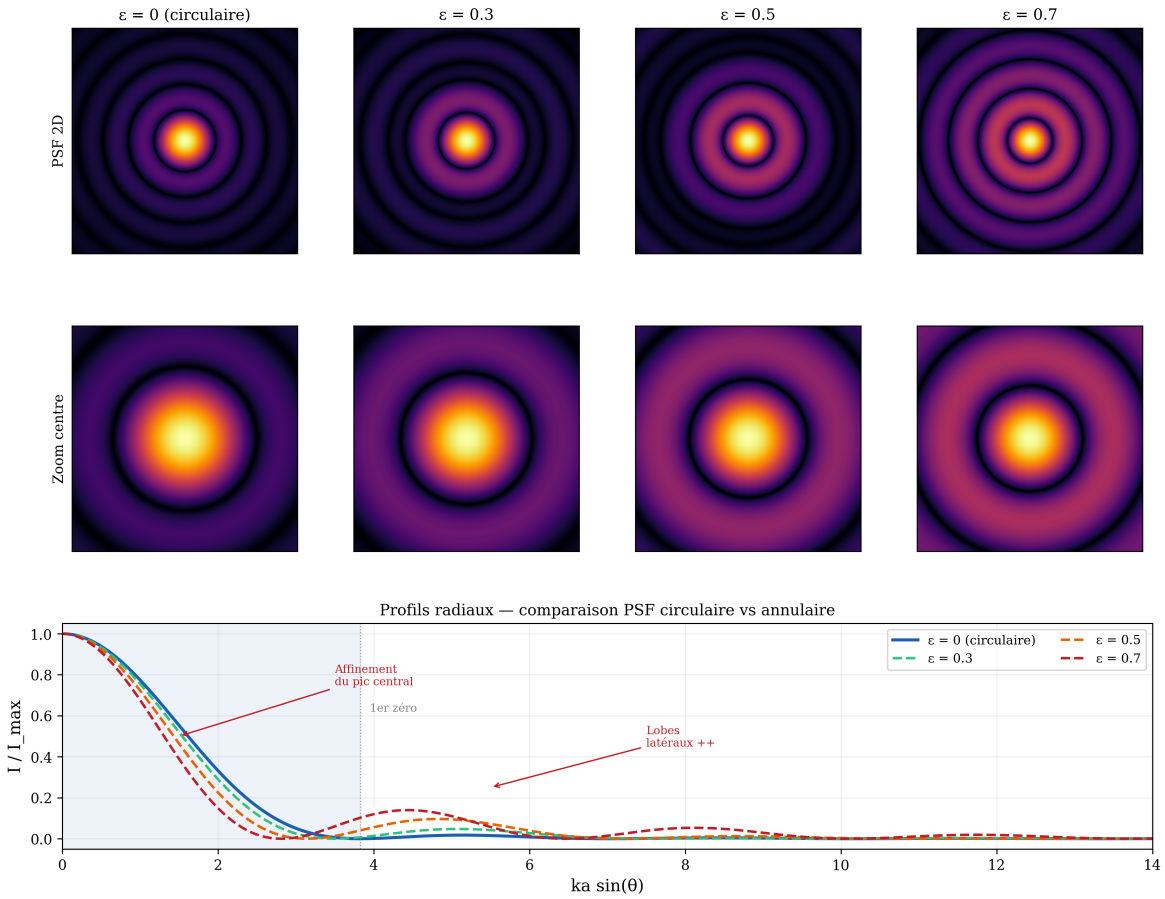


FIG. 1.5 – Modification de la PSF par une ouverture annulaire d'obscuration centrale $\varepsilon = r_{\text{in}}/r_{\text{out}}$. *(Haut)* : Distribution 2D de l'intensité pour différentes valeurs de ε. *(Milieu)* : Zoom sur le pic central montrant l'affinement progressif. *(Bas)* : Profils radiaux comparatifs — l'augmentation de ε affine le pic central au détriment d'un renforcement des lobes latéraux.

1.6 Les Faisceaux Gaussiens Fondamentaux

Le faisceau gaussien, généralement désigné comme le mode transverse fondamental TEM_{00}, constitue la solution de base à l'équation d'onde paraxiale dans un milieu homogène. Il sert de référence absolue en optique laser pour caractériser la propagation des ondes lumineuses cohérentes.

Contrairement à une onde plane, l'intensité transversale d'un faisceau gaussien n'est pas uniforme ; elle décroît de manière symétrique et exponentielle depuis l'axe optique central vers la périphérie, suivant une distribution spatiale régie par une courbe en cloche de Gauss.

La propagation et l'extension spatiale du faisceau le long de l'axe z sont entièrement caractérisées par son rayon local $w(z)$, défini par l'expression suivante :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{1.12}$$

Où w_0 représente le *waist* du faisceau, qui correspond au rayon minimal du spot laser à son point de focalisation maximal ($z = 0$). À cet endroit précis, le front d'onde est parfaitement plan.

Le paramètre z_R désigne la distance de Rayleigh, définie mathématiquement par :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{1.13}$$

Cette distance définit la zone de divergence lente où le faisceau reste confiné avant de s'élargir de façon linéaire dans le champ lointain. En dehors du waist, les fronts d'onde cessent d'être plans et acquièrent une courbure géométrique sphérique caractérisée par un rayon de courbure $R(z)$ qui évolue au cours de la propagation.

1.7 Le Moment Angulaire Orbital (OAM) de la Lumière

Traditionnellement, la rotation de la lumière est associée à son état de polarisation, qualifiée de moment angulaire de spin (SAM), lié à la rotation du vecteur champ électrique. Cependant, il existe une autre forme de moment angulaire indépendante de la polarisation et uniquement liée à la distribution spatiale de la phase du front d'onde : le *Moment Angulaire Orbital* (OAM, *Orbital Angular Momentum*).

Alors qu'un faisceau gaussien classique possède des fronts d'onde plans ou sphériques parallèles, un faisceau transportant de l'OAM se distingue par un front d'onde hélicoïdal en forme de spirale (ou de tire-bouchon) autour de l'axe de propagation.

Cette propriété physique découle directement de la présence d'un terme de phase azimutale dans l'expression du champ, sous la forme :

$$\Phi(\phi) = \exp(il\phi) \tag{1.14}$$

Où ϕ est l'angle azimutal et l désigne la charge topologique (un entier positif ou négatif). L'indice l indique le nombre de fois que la phase tourne de 2π au cours d'un cycle complet autour de l'axe du faisceau. Par conséquent, chaque photon transporté par un tel faisceau possède un moment angulaire orbital quantifié égal à $l\hbar$.

Une conséquence directe de cette structure de phase est l'apparition d'une singularité de phase sur l'axe optique central ($\rho = 0$), où la phase devient indéterminée. Pour résoudre cette indétermination physique, l'intensité lumineuse s'annule obligatoirement au centre du faisceau. C'est ce phénomène de vortex optique qui donne aux faisceaux dotés d'OAM leur forme caractéristique en anneau lumineux avec une zone sombre centrale, structure que l'on retrouve au cœur des modes de Laguerre-Gauss.

Conclusion du Chapitre 1

En guise de conclusion pour ce premier chapitre, nous avons posé les fondements théoriques indispensables à la compréhension des phénomènes de propagation et de diffraction des ondes lumineuses. En partant des équations de Maxwell fondamentales, nous avons introduit l'optique scalaire et justifié l'usage de l'approximation paraxiale, qui permet de simplifier l'équation de Helmholtz pour les faisceaux directifs.

L'étude approfondie de la formulation intégrale de Huygens-Fresnel, complétée par l'approximation de Fresnel en champ proche, nous a permis de modéliser mathématiquement la transformation subie par une onde lorsqu'elle traverse une ouverture. À travers l'analyse de la fonction d'étalement du point (PSF) modifiée par une ouverture annulaire, nous avons mis en évidence le compromis physique incontournable entre l'affinement du pic central (gain en résolution) et l'amplification des lobes latéraux (perte de contraste).

Ces concepts classiques de diffraction et de filtrage spatial constituent le tremplin nécessaire pour aborder, dans le chapitre suivant, une classe de solutions paraxiales plus complexes possédant des propriétés de phase singulières : les faisceaux de Laguerre-Gauss standards et élégants.

Chapitre 2

Les Faisceaux de Laguerre-Gauss (LG)

2.1 Définition des modes Laguerre-Gauss

Les faisceaux de Laguerre-Gauss (LG) constituent une famille de solutions exactes de l'équation d'onde paraxiale en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z). Contrairement aux faisceaux gaussiens simples TEM_{00}, les modes LG sont des modes transverses d'ordre supérieur qui présentent une structure de phase hélicoïdale. Ils sont particulièrement connus pour transporter un moment angulaire orbital (OAM), ce qui leur donne une forme caractéristique en "anneau" ou en "beignet" (Donut shape).[1]

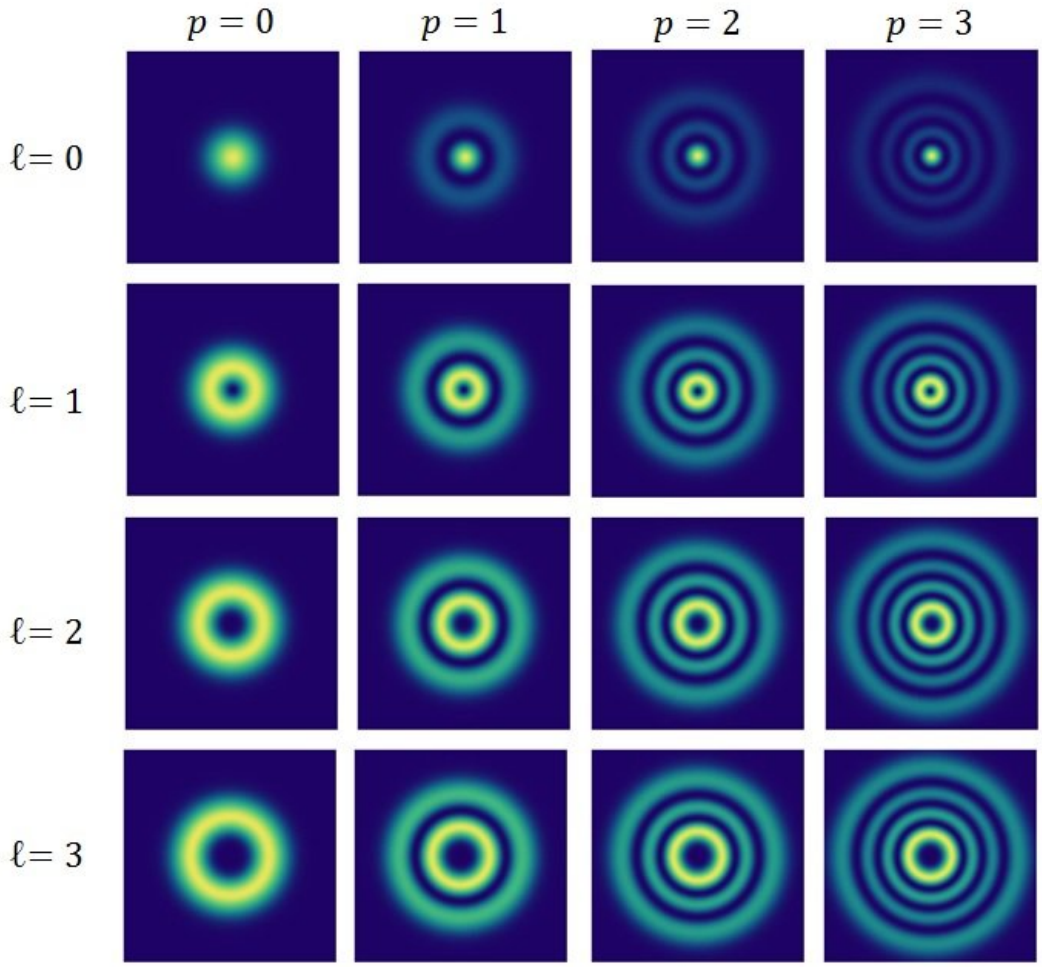


FIG. 2.1 – Distribution spatiale de l'intensité transversale des modes de Laguerre-Gauss standards pour différentes valeurs de l'ordre radial p et de la charge topologique l.

2.1.1 Expression mathématique des modes LG

L'amplitude complexe d'un faisceau de Laguerre-Gauss, notée $u_{p,l}(\rho, \phi, z)$, est définie par deux indices entiers : $p \geq 0$: l'indice radial, qui détermine le nombre d'anneaux concentriques.

l : l'indice azimutal (charge topologique), qui détermine la structure de la phase. L'ex-

pression générale du champ s'écrit :

$$u_{p,l}(\rho,\phi,z) = \frac{C_{pl}}{w(z)}\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(-i\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)\exp(il\phi)\exp(i\psi(z)) \tag{2.1}$$

Où $L_p^{|l|}$ représente les polynômes associés de Laguerre. Cette formule montre que la phase dépend directement de l'angle ϕ via le terme $\exp(il\phi)$, ce qui crée le vortex optique.[9]

2.1.2 Propriétés physiques des modes Laguerre-Gauss

Les faisceaux de Laguerre-Gauss possèdent des caractéristiques physiques singulières qui les distinguent des faisceaux gaussiens classiques, notamment en raison de leur structure de phase.

Moment angulaire orbital (OAM)

Contrairement aux faisceaux de Gauss standards, les modes LG transportent un Moment Angulaire Orbital (OAM). Tandis que le moment angulaire de spin est lié à la polarisation circulaire de la lumière, l'OAM est une conséquence directe de la phase hélicoïdale $\exp(il\phi)$. Chaque photon du faisceau possède un moment angulaire orbital égal à $l\hbar$. Cette propriété permet au faisceau d'exercer un couple de rotation sur des micro-particules, une technique largement utilisée dans les pinces optiques[1]

Structure en vortex et singularité de phase

Le terme de phase $\exp(il\phi)$ introduit une singularité de phase sur l'axe de propagation (r=0). À cet endroit précis, la phase est indéterminée, ce qui entraîne une interférence destructive totale. En conséquence, l'intensité au centre du faisceau est rigoureusement nulle ($I = 0$). Le faisceau prend alors une forme d'anneau lumineux entourant un "trou" central sombre, ce que l'on appelle un vortex optique.[13]

Distribution d'intensité et de phase

Profil d'intensité : La distribution radiale de l'intensité dépend des indices p et l. Le nombre d'anneaux concentriques est défini par p+1. Pour p=0 le faisceau possède un seul anneau principal dont le diamètre augmente avec $|l|$. Profil de phase : La phase du faisceau varie de façon linéaire avec l'angle azimutal ϕ. Pour une rotation complète autour de l'axe (2π) la phase change de $2\pi l$. Cette structure en "escalier hélicoïdal" est responsable de la rotation du front d'onde pendant la propagation.[14]

2.2 Modes Laguerre-Gauss standards (sLGB)

Les modes Laguerre-Gauss standards sont les solutions les plus utilisées pour décrire les modes transverses des cavités laser à symétrie cylindrique. Dans ces modes, l'argument du polynôme de Laguerre dépend du rayon local du faisceau $w(z)$. L'expression du champ électrique est :

$$u_{p,l}(\rho,\phi,z) = \frac{C_{pl}}{w(z)}\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(-i\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)\exp(il\phi)\exp(i\psi(z)) \tag{2.2}$$

Où les différents paramètres physiques fondamentaux sont définis comme suit :

- $u_{p,l}(\rho,\phi,z)$: L'amplitude complexe du mode sLGB exprimée en coordonnées cylindriques, où ρ est le rayon radial, ϕ l'angle azimutal, et z la distance de propagation le long de l'axe optique.
- p **et** l : Les indices du mode. $p \geq 0$ est l'indice radial qui régit le nombre d'anneaux concentriques sombres, et l est l'indice azimutal (charge topologique) lié au moment angulaire orbital (OAM).
- C_{pl} : La constante de normalisation du mode, assurant la conservation de l'énergie totale du faisceau.
- $w(z)$: Le rayon local du faisceau (largeur du profil) à la distance z, définissant l'extension spatiale transversale de la lumière.
- $L_p^{|l|}(X)$: Le polynôme généralisé de Laguerre d'ordre p et d'indice $|l|$, qui structure la distribution d'intensité radiale.
- $\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)$: Le terme d'atténuation gaussienne radiale, qui confine l'énergie autour de l'axe de propagation.
- $\exp\left(-i\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)$: La courbure du front d'onde géométrique, où $R(z)$ est le rayon de courbure et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde.
- $\exp(il\phi)$: La phase azimutale hélicoïdale, responsable de la formation du vortex optique central et du transport du moment angulaire orbital.
- $\exp(i\psi(z))$: La phase de Gouy du mode, qui représente le déphasage axial supplémentaire accumulé par le faisceau lors du passage par son col (waist) par rapport à une onde plane.

Caractéristique : La distribution de l'intensité s'élargit de la même manière que le faisceau gaussien fondamental au fur et à mesure de la propagation [9].

2.3

Modes Laguerre-Gauss élégants (eLGB)

Introduits par Siegman, les modes "élégants" présentent une structure mathématique différente. Ici l'argument du polynôme de Laguerre est lié au waist w_0 et peut être complexe [9]. L'expression simplifiée au waist ($z = 0$) est :

$$u_{p,l}(\rho, \phi, 0) = \left(\frac{\rho}{w_0}\right)^l L_p^l\left(\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2w_0^2}\right) \exp(il\phi) \tag{2.3}$$

Où les différents paramètres de cette expression au waist sont définis comme suit :

- $u_{p,l}(\rho, \phi, 0)$: L'amplitude complexe du mode élégant ($eLGB$) calculée spécifiquement au col du faisceau ($z = 0$) en coordonnées cylindriques.
- w_0 : Le waist du faisceau fondamental, représentant le rayon minimal du spot laser à l'origine ($z = 0$). Notez que contrairement aux modes standards, l'argument du polynôme dépend ici de w_0 constant et non de $w(z)$ local.
- $L_p^l(X)$: Le polynôme généralisé de Laguerre d'ordre p et d'indice l. Dans la formulation élégante de Siegman, l'exposant et l'indice supérieur du polynôme perdent généralement la valeur absolue $|l|$ observée chez les modes standards.
- $\left(\frac{\rho}{w_0}\right)^l$: Le terme d'amplitude radiale associé à la charge topologique, dépendant du waist fixe w_0.
- $\exp\left(-\frac{\rho^2}{2w_0^2}\right)$: Le profil d'atténuation gaussienne au waist. *Remarque physique essentielle :* l'argument sous l'exponentielle est divisé par $2w_0^2$ (au lieu de $w^2(z)$ pour les modes standards), ce qui marque la différence de structure interne lors de la propagation.
- $\exp(il\phi)$: La phase azimutale liée au moment angulaire orbital (OAM) engendré par le vortex optique hélicoïdal.

Caractéristique : Ces modes sont très utiles pour les calculs de diffraction complexe car ils conservent une forme mathématique plus simple lors de l'application de transformations intégrales [15, 2].

2.4 Comparaison entre les modes LG standards et élégants

Bien que les deux familles de modes soient des solutions de l'équation d'onde paraxiale elles présentent des différences fondamentales dans leur structure mathématique et leur comportement physique lors de la propagation.[3, 4, 16].

2.4.1 Différence de structure mathématique

La différence majeure réside dans l'argument du polynôme de Laguerre $L_p^l(X)$:

- **Modes Standards (sLGB) :** L'argument est réel et dépend de la coordonnée radiale normalisée par le rayon local $w(z)$:$X_{std} = \frac{2\rho^2}{w^2(z)}$
- **Modes Élégants (eLGB) :** L'argument est généralement complexe ou lié directement au paramètre de Rayleigh et au waist w_0 :$X_{ele} = \frac{\rho^2}{w_0^2}$

2.4.2 Divergence et qualité de faisceau

Divergence : Pour des ordres élevés $(p, l > 0)$, les modes élégants divergent beaucoup plus rapidement que les modes standards.

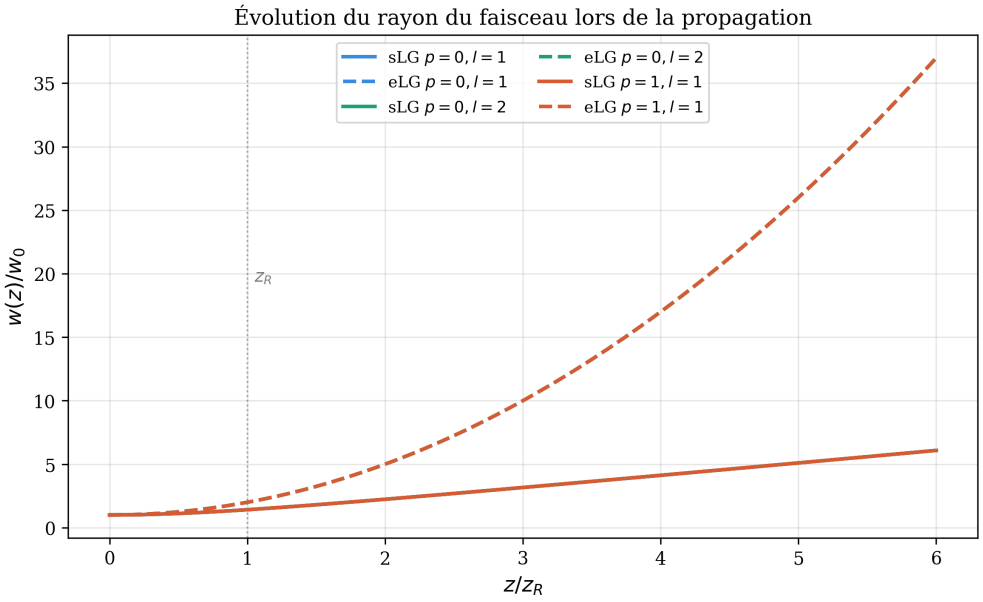


FIG. 2.2 – Évolution du rayon du faisceau $w(z)/w_0$ lors de la propagation en fonction de la distance axiale normalisée z/z_R pour les modes $LG_{1,1}$ standards (sLG) et élégants (eLG).

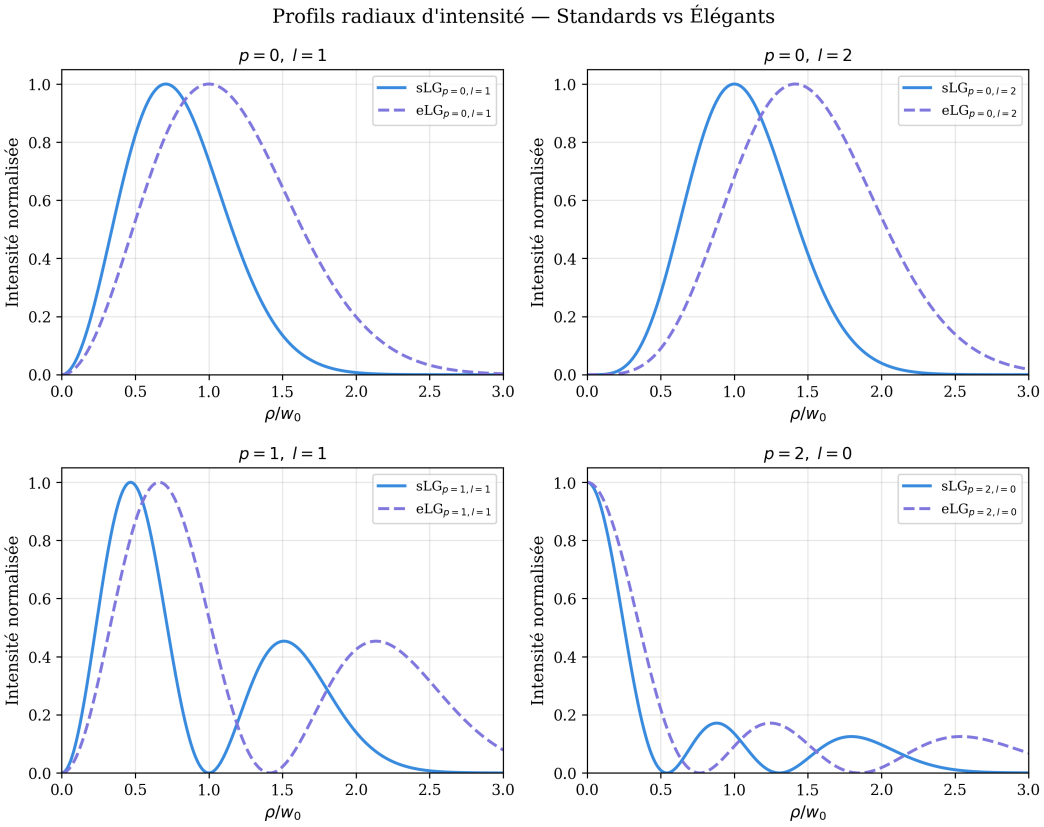


FIG. 2.3 – Profils radiaux d'intensité normalisée des modes LG standards (sLG, trait plein) et élégants (eLG, tirets) pour différentes valeurs de p et l. Pour les ordres élevés, le mode élégant présente un spot plus large et une redistribution différente de l'énergie entre les anneaux.

Taille du spot : À une distance z donnée le spot lumineux d'un mode élégant est plus large que celui d'un mode standard de même ordre.[15]

2.4.3 Tableau récapitulatif

TAB. 2.1 – Comparaison détaillée entre les modes Laguerre-Gauss standards (sLGB) et élégants (eLGB)

Caractéristique	**Modes Standards (sLGB)**	**Modes Élégants (eLGB)**
Argument du polynôme	Réel (dépend de $w(z)$)	Complexe ou fixe (dépend de w_0)
Complexité de calcul	Plus complexe en diffraction	Plus simple pour les systèmes ABCD
Divergence	Faible	Élevée
Modélisation	Cavités laser réelles	Théorie de la diffraction

2.5 Conclusion du Chapitre II

En conclusion, ce deuxième chapitre nous a permis d'explorer en profondeur une famille de faisceaux plus complexe et plus riche que le faisceau gaussien standard : les modes de Laguerre-Gauss (LG). Nous avons d'abord établi le cadre mathématique de ces modes, en soulignant l'importance des indices p (radial) et l (azimutal) qui dictent la structure du faisceau. L'étude des propriétés physiques a révélé deux concepts majeurs : le moment angulaire orbital (OAM) et la présence d'un vortex optique au centre du faisceau, résultant d'une singularité de phase. Enfin, la comparaison entre les modes standards et élégants a mis en évidence que, bien que mathématiquement proches, ils présentent des comportements de propagation et de divergence distincts. Ces connaissances théoriques sont essentielles pour aborder le troisième chapitre, où nous analyserons, à travers des simulations numériques, comment ces faisceaux interagissent avec des ouvertures physiques et comment leurs paramètres influencent la figure de diffraction finale.

Chapitre 3

Modélisation de la propagation des faisceaux de Laguerre-Gauss à travers des ouvertures

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les propriétés fondamentales des faisceaux de Laguerre-Gauss, notamment leur structure spatiale, leur phase hélicoïdale et leur moment angulaire orbital. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à leur propagation en présence d'ouvertures physiques. L'objectif est d'analyser, à l'aide de modèles analytiques et de simulations numériques, comment ces faisceaux interagissent avec différentes géométries d'ouverture et comment leurs paramètres influencent les figures de diffraction obtenues.

3.0.1 Contexte Physique et Rôle des Ouvertures dans les Systèmes Optiques

Dans les applications pratiques des lasers, un faisceau ne se propage presque jamais dans un espace libre infini. En réalité, le champ lumineux rencontre inévitablement des limitations spatiales induites par les dimensions finies des composants optiques, tels que les lentilles, les miroirs, ou des diaphragmes délibérément introduits pour masquer le faisceau [5]. L'étude de la diffraction à travers ces ouvertures est donc cruciale pour prédire le comportement réel du profil d'intensité transverse.

Historiquement, la majorité des études théoriques se sont concentrées sur des ouvertures parfaitement circulaires ou rectangulaires centrées sur l'axe optique. Cependant, lors de l'alignement mécanique des systèmes ou de la propagation à travers des milieux turbulents, le faisceau subit souvent un décentrement par rapport à l'ouverture, introduisant des aberrations géométriques et des ruptures de symétrie [6].

Pour modéliser mathématiquement ces imperfections de manière rigoureuse, on utilise le concept d'ouverture complexe décentrée. Ce formalisme permet non seulement de prendre en compte la troncature du faisceau (effet d'ouverture finie), mais aussi d'intégrer les termes de désalignement spatial via des paramètres complexes [7, 17]. L'analyse de la diffraction des modes de Laguerre-Gauss (Standards et Élégants) à travers ce type d'ouverture complexe s'avère indispensable pour concevoir des systèmes optiques tolérants aux défauts d'alignement ou, à l'inverse, pour développer des capteurs métrologiques de haute sensibilité [18, 19].

3.1 Formule de l'intégrale de diffraction généralisée pour la propagation d'un faisceau à travers un système optique légèrement désaligné en système de coordonnées cylindriques

La Figure 3.1 montre un schéma de désalignement pour un système bidimensionnel orienté vers l'avant. RP_1 et RP_2 sont deux référence pour l'alignement, et RP_{1m} et RP_{2m} sont les plans de référence pour l'alignement, et RP_{1m} et RP_{2m} sont les plans de référence de désalignement correspondants.ε_x, ε'_x, ε_y et ε'_y désignent les paramètres du léger désalignement bidimensionnel : ε_x et ε_y sont respectivement les composantes suivant x et y du déplacement du centre du système optique, et ε'_x (respectivement ε'_y) est l'angle d'inclinaison entre les axes x et x' (respectivement y et y'). a, b, c et d sont les éléments de la matrice de transfert d'un système optique aligné. $\mathbf{r}_1 = (x_1 \quad y_1)$ et $\mathbf{r}_2 = (x_2 \quad y_2)$ sont respectivement les vecteurs de position sur les plans RP_{1m} et RP_{2m}.Dans le cadre de l'approximation paraxiale, la formule de l'intégrale de diffraction généralisée suivante peut être utilisée pour étudier un faisceau à travers un système optique légèrement désaligné dans le système de coordonnées cartésiennes[20]

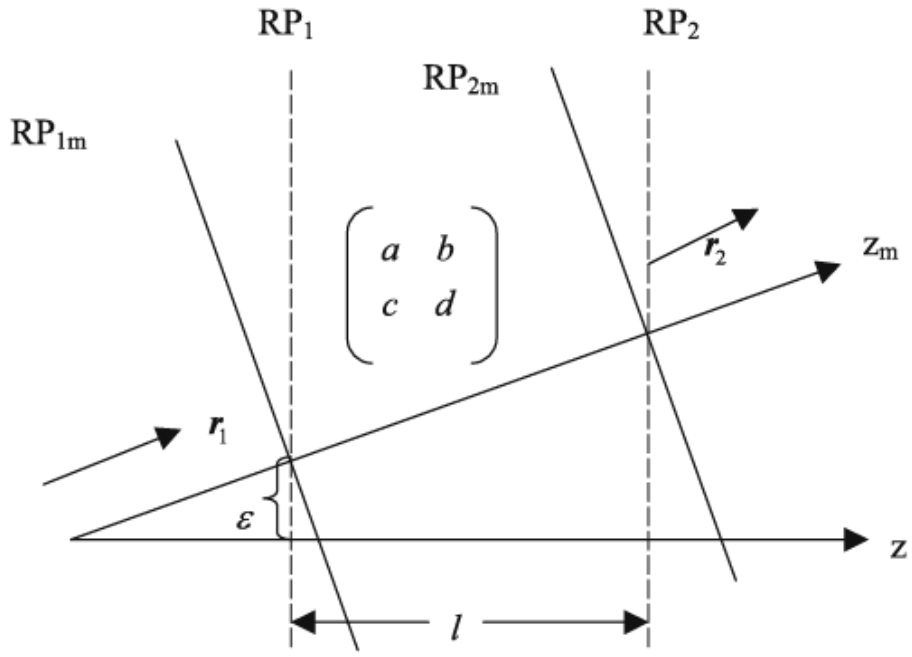


FIG. 3.1 – Schéma de désalignement pour un système bidimensionnel orienté vers l'avant.

$$E_2(x_2,y_2,z)=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi b}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E_1(x_1,y_1,0)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2b}\left[a\left(x_1^2+y_1^2\right)-2(x_1x_2+y_1y_2)\right.\right.$$
$$\left.\left.+d\left(x_2^2+y_2^2\right)+ex_1+fy_1+gx_2+hy_2\right]\right\}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,. \tag{3.0}$$

où $k=2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde, λ est la longueur d'onde et les paramètres e, f, g et h prennent les formes suivantes :

$$e=2\alpha_T\varepsilon_x+\beta_T\varepsilon'_x, \tag{3.1}$$

$$f=2\alpha_T\varepsilon_y+\beta_T\varepsilon'_y, \tag{3.2}$$

$$g=2(b\gamma_T-d\alpha_T)\varepsilon_x+2(b\delta_T-d\beta_T)\varepsilon'_x, \tag{3.3}$$

$$h=2(b\gamma_T-d\alpha_T)\varepsilon_y+2(b\delta_T-d\beta_T)\varepsilon'_y, \tag{3.4}$$

et où α_T, β_T, γ_T et δ_T représentent les éléments de la matrice de désalignement déterminés par :

$$\alpha_T=1-a,\quad \beta_T=l-b,\quad \gamma_T=-c,\quad \delta_T=1-d. \tag{3.5}$$

Ici, l est la distance axiale entre le plan d'entrée et le plan de sortie. Notons que le facteur de phase $\exp(ikl_0)$ le long de l'axe entre les deux plans de référence a été omis dans l'équation (1).

En posant $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, nous pouvons exprimer l'équation (3.0) dans le système de coordonnées cylindriques de la manière suivante :

$$E_2(r_2,\theta_2,z)=$$
$$\frac{ik}{2\pi b}\int_0^{a_1}\int_0^{2\pi}E_1(r_1,\theta_1,0)$$

$$\exp\left\{-\frac{ik}{2b}\left[ar_1^2-2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2-2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+dr_2^2+er_1\cos\theta_1+fr_1\sin\theta_1+gr_2\cos\theta_2+hr_2\sin\theta_2\right]\right\}r_1\,dr_1\,d\theta_1 \tag{3.6}$$

où r_1, θ_1 et r_2, θ_2 sont respectivement les coordonnées radiales et azimutales (angulaires) dans les plans d'entrée et de sortie.

Nous introduisons un nouveau paramètre d'angle φ satisfaisant aux relations suivantes :

$$\cos\varphi=\frac{r_2\cos\theta_2-e/2}{\sqrt{(r_2\cos\theta_2-e/2)^2+(r_2\sin\theta_2-f/2)^2}}\,, \tag{3.7}$$

$$\sin\varphi = \frac{r_2 \sin\theta_2 - f/2}{\sqrt{(r_2\cos\theta_2 - e/2)^2 + (r_2\sin\theta_2 - f/2)^2}}\,. \tag{3.8}$$

Ensuite, l'équation (3.6) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_2(r_2,\theta_2,0) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi b}\int_0^{a1}\int_0^{2\pi} & E_1(r_1,\theta_1,0) \\ & \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2b}\left(dr_2^2 + gr_2\cos\theta_2 + hr_2\sin\theta_2\right)\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}ka}{2b}r_1^2\right] \\ & \exp\left[\frac{\mathrm{i}kr_1}{b}\sqrt{r_2^2 - er_2\cos\theta_2 - fr_2\sin\theta_2 + \frac{e^2+f^2}{4}}\right. \\ & \left.\cos(\theta_1-\varphi)\right] r_1\,\mathrm{d}r_1\,\mathrm{d}\theta_1\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

L'équation (3.9) donne une formule d'intégrale de diffraction généralisée pour un faisceau se propageant à travers un système optique légèrement désaligné dans un système de coordonnées cylindriques.

3.2 Propagation d'un faisceau Laguerre-Gaussien à travers un système optique légèrement désaligné

Le champ optique d'un faisceau Laguerre-Gaussien à $z = 0$ dans le système de coordonnées cylindriques est donné par : [1]

$$\begin{aligned} E(r_1,\theta_1,0) = & \left(\sqrt{2}\frac{r_1}{w_0}\right)^m L_l^m\left(\frac{2r_1^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{r_1^2}{w_0^2}\right) \\ & \exp(-\mathrm{i}m\theta_1)\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où L_l^m désigne le polynôme de Laguerre avec les ordres de mode l et m, et w_0 est la largeur de la taille du faisceau (beam waist).

En substituant l'équation (3.10) dans l'équation (3.9) et en appliquant la formule intégrale suivante :[21]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[\mathrm{i}x\cos(\theta_2-\theta_1)\right]\exp(-\mathrm{i}m\theta_1)\,\mathrm{d}\theta_1 \\ & = \mathrm{i}^m J_m(x)\exp(-\mathrm{i}m\theta_2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

(J_m étant la fonction de Bessel d'ordre m), nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_2(r_2,\theta_2,z) = \frac{\mathrm{i}k}{b}\mathrm{i}^m \exp(-\mathrm{i}m\theta_2) \\ \int_0^{a1} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2b}\left(dr_2^2 + gr_2\cos\theta_2 + hr_2\sin\theta_2\right)\right] \\ \exp\left(-\frac{\mathrm{i}ka}{2b}r_1^2\right)\exp\left(-\frac{r_1^2}{w_0^2}\right)\left(\sqrt{2}\frac{r_1}{w_0}\right)^m L_l^m\left(\frac{2r_1^2}{w_0^2}\right) \\ J_m\left[\frac{kr_1}{b}\sqrt{r_2^2 - er_2\cos\theta_2 - fr_2\sin\theta_2 + \frac{e^2+f^2}{4}}\right] r_1\,\mathrm{d}r_1\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour évaluer l'intégrale de diffraction généralisée, nous introduisons tout d'abord l'expression du champ optique initial du faisceau Laguerre-Gaussien à $z = 0$ donné par :

$$E(r_1,\theta_1,0) = \left(\frac{r_1}{w_0}\right)^m L_n^m\left(\frac{r_1^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{r_1^2}{w_0^2}\right)\exp(-\mathrm{i}m\theta_1)\,. \tag{3.13}$$

L'intégration par rapport à la variable angulaire θ_1 peut être effectuée analytiquement en utilisant l'identité intégrale de Bessel suivante :

$$\int_0^{2\pi}\exp(-\mathrm{i}m\theta_1)\exp\left[\mathrm{i}\frac{kr_1}{b}\Gamma\cos(\theta_1-\varphi)\right]\mathrm{d}\theta_1 = 2\pi\mathrm{i}^m J_m\left(\frac{kr_1}{b}\Gamma\right)\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\,, \tag{3.14}$$

où Γ représente le terme sous la racine carrée lié aux paramètres géométriques et de désalignement du système optique.

En substituant l'équation (3.13) et le résultat de l'intégration angulaire (3.14) dans l'expression globale, et en considérant une expansion en série du faisceau avec les coefficients A_n, le champ diffracté prend la forme intermédiaire suivante :

$$\begin{aligned} E_2(r_2,\theta_2,z) = \frac{\mathrm{i}k}{b}\mathrm{i}^m\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2b}\left(dr_2^2 + gr_2\cos\theta_2 + hr_2\sin\theta_2\right)\right] \\ \sum_{n=1}^{N} A_n\int_0^{a1}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}ka}{2b}r_1^2\right)J_m\left(\frac{kr_1}{b}\Gamma\right)\exp\left(-\frac{\beta_n}{a_n^2}r_1^2\right) \\ \left(\frac{r_1}{w_0}\right)^m L_n^m\left(\frac{r_1^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{r_1^2}{w_0^2}\right)r_1\,\mathrm{d}r_1\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En regroupant les termes exponentiels quadratiques en r_1^2 sous une seule variable complexe B, l'intégrale radiale se simplifie sous la forme :

$$\begin{aligned} E_2(r_2,\theta_2,z) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{i}^m}{bw_0^m}\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\exp(r_2,\theta_2)\sum_{n=1}^{N}A_n \\ \int_0^{a1}\exp\left(-Br_1^2\right)J_m\left(\frac{kr_1}{b}\Gamma\right)L_n^m\left(\frac{r_1^2}{w_0^2}\right)r_1^{m+1}\,\mathrm{d}r_1\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où le paramètre globalisé B est défini par $B = \left[\frac{\mathrm{i}ka}{2b} + \frac{1}{w_0^2} + \frac{\beta_n}{a_n^2}\right]$.

Enfin, l'intégration par rapport à r_1 peut être résolue analytiquement à l'aide des tables d'intégrales d'Erdélyi impliquant les polynômes de Laguerre et les fonctions de Bessel, ce qui donne la solution finale sous la forme suivante :

$$2^{-m-1}B^{-m-n-1}(B-\alpha)^n y^m \exp\left(-\frac{y^2}{4B}\right) L_n^m\left(\frac{\alpha y^2}{4B(\alpha-B)}\right), \tag{3.17}$$

avec les variables de substitution définies par $\alpha = \frac{1}{w_0^2}$ et $y = \frac{k}{b}\Gamma$. Plus précisément, le paramètre Γ introduit dans les relations précédentes représente l'expression de la racine carrée associée aux caractéristiques géométriques et aux défauts de désalignement du système optique :

$$\Gamma = \sqrt{r_2^2 - e r_2 \cos\theta_2 - f r_2 \sin\theta_2 + \frac{e^2+f^2}{4}} \tag{3.18}$$

3.3 Résultats de Simulation Numérique et Discussions

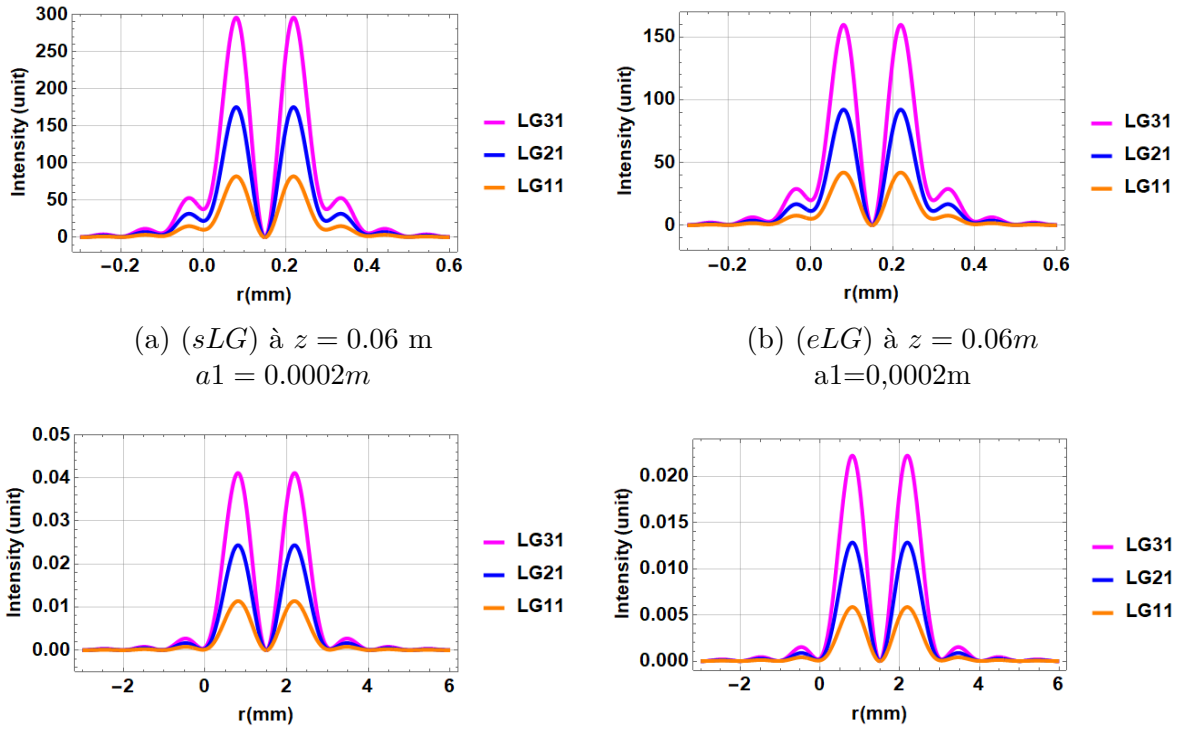
L'objectif fondamental de ce travail est d'établir une étude comparative rigoureuse entre la propagation des faisceaux de Laguerre-Gauss Standards (sLG) et Élégants (eLG) à travers une ouverture complexe décentrée. Pour valider les expressions analytiques établies au chapitre précédent — notamment les solutions finales issues de l'intégration de la formule de diffraction généralisée — nous avons procédé à des simulations numériques sous le logiciel `Mathematica`.

Les paramètres physiques fixes utilisés pour l'ensemble des simulations correspondent aux caractéristiques d'un laser Hélium-Néon standard : $\lambda = 632.810^{-9}$ m et un waist initial $w_0 = 110^{-3}$ m. Nous analysons le comportement de l'intensité transverse pour les trois premiers modes d'ordre supérieur : LG_{11}, LG_{21} et LG_{31}.

—

3.3.1 Comparaison Directe des Profils d'Intensité Transverse

Afin de mettre en évidence les divergences structurelles internes entre les variantes sLG et eLG, nous avons réorganisé nos résultats de simulation de manière à juxtaposer directement les deux types de faisceaux pour des configurations de propagation identiques (Grille comparative côte-à-côte). Afin de comparer les comportements des faisceaux standards et élégants, les profils transverses suivants ont été obtenus par simulation numérique sous Mathematica.



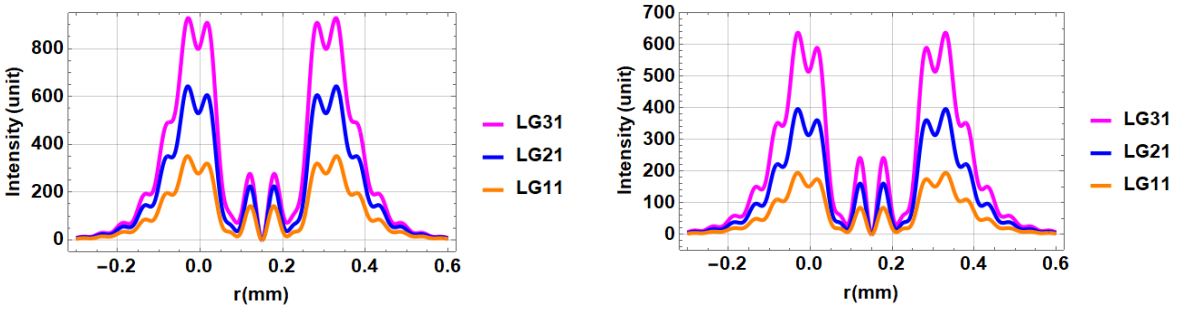
(a) (sLG) à $z = 0.06$ m
$a1 = 0.0002m$

(b) (eLG) à $z = 0.06m$
a1=0,0002m

(c) (sLG) avec $z = 0.6m$
a1=0,0002m

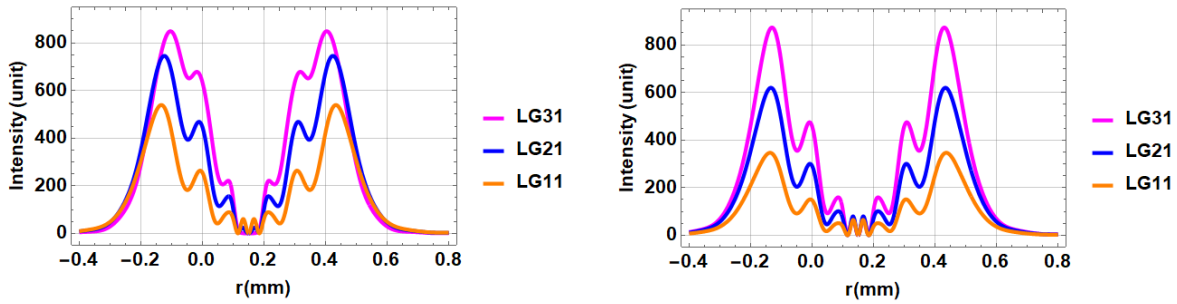
(d) (eLG) avec $z = 0,6$
$a1 = 0.0002m$

FIG. 3.2 – Analyse comparative en champ proche ($z = 0.6$ m) de l'intensité transverse entre les faisceaux sLG et eLG sous l'effet de la variation des paramètres de l'ouverture.



(a) (sLG) à $z = 0.06m$
$a1 = 0,0004m$

(b) (eLG) à $z = 0.06m$
$a1 = 0,0004m$



(c) (sLG) à $z = 0.06m$
$a1 = 0,0006m$

(d) (eLG) à $z = 0.06m$
$a1 = 0,0006m$

FIG. 3.3 – Profils d'intensité transversale des faisceaux Laguerre-Gauss standard (sLG) et élégants (eLG) pour différents modes (LG_{11}, LG_{21}, LG_{31}) à une distance de propagation constante $z = 0.06$ m pour deux valeurs du rayon de l'ouverture : (a, b) $a_1 = 0.4$ mm et (c, d) $a_1 = 0.6$ mm.

3.3.2 Analyse Approfondie et Discussion Physique

L'examen simultané des graphiques de la variante Standard (gauche) et Élégante (droite) permet de dégager plusieurs conclusions physiques majeures, directement corrélées à la nature mathématique des équations de champ établies au Chapitre précédent.

1 Amplitude de l'intensité

On remarque que les modes sLG présentent une intensité maximale plus élevée que les modes eLG dans les mêmes conditions de propagation. Par exemple, pour $z = 0.06$ m, le pic maximal du mode sLG atteint environ 290 unités, contre 160 unités seulement pour le mode eLG, soit presque le double.

2 Largeur du profil radial et interprétation de la divergence

Les modes eLG présentent un profil radial plus élargi que les modes sLG. Ceci est particulièrement visible à grande distance ($z = 0.6$ m), où l'axe r du mode eLG s'étend jusqu'à 6 mm, contre 0.6 mm seulement pour le mode sLG. Cela confirme que le mode

élégant diverge beaucoup plus rapidement, conformément à la relation :

$$w_{el}(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right] \quad \text{contre} \quad w_{std}(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{3.9}$$

Cette divergence nettement plus prononcée du mode élégant (eLG) trouve son origine dans la structure même de ses arguments polynomiaux. Contrairement au mode standard (sLG) où le waist intervient de manière classique sous une racine dans l'enveloppe gaussienne, le mode élégant possède un paramètre d'échelle complexe qui couple la phase et l'amplitude de manière non-linéaire au cours de la propagation. Physiquement, cela se traduit par un transfert d'énergie plus rapide du centre vers les lobes secondaires (étalement spatial), faisant du mode eLG un excellent candidat pour les applications nécessitant un élargissement de faisceau contrôlé sans recours à des lentilles divergentes supplémentaires.

3 Structure des pics et effet de lissage

Dans les deux cas, on observe une structure symétrique à deux pics principaux séparés par un minimum central, caractéristique du vortex optique. Cependant, les pics du mode sLG sont plus étroits et mieux définis, tandis que ceux du mode eLG sont plus larges et plus aplatis.

L'aspect aplati et élargi des pics du mode eLG est une conséquence directe de la nature des polynômes de Laguerre dits "élégants". Dans ce cas, les zéros du polynôme (les points d'annulation d'intensité) subissent un lissage sous l'effet de l'ouverture complexe décentrée. Les interférences induites par l'ouverture ne sont plus purement destructives au voisinage du vortex, ce qui redistribue l'intensité sur une zone transverse plus large, d'où cet aplatissement caractéristique observé graphiquement.

4 Effet du désalignement et potentiel métrologique

En présence d'un désalignement (paramètre $a \neq 0$), les deux modes subissent une déformation et un déplacement latéral des pics. Néanmoins, le mode eLG est plus sensible à ce désalignement : la déformation de son profil est plus prononcée, avec l'apparition de lobes secondaires plus intenses.

Cette sensibilité accrue du mode eLG vis-à-vis du désalignement ($a \neq 0$) montre que ce type de faisceau est hautement sélectif. Bien que cela puisse constituer une contrainte pour les transmissions optiques stables à longue distance, cette propriété devient un avantage majeur dans le domaine des **capteurs optiques de haute précision (Optical Sensing)** et de la métrologie industrielle. En effet, la moindre variation ou déformation du profil transverse du mode eLG permet de détecter des micro-déplacements de l'ouverture ou du système optique avec une résolution bien supérieure

à celle obtenue avec un faisceau sLG classique.

5 Influence de l'ordre du mode

Dans les deux familles, l'intensité maximale augmente avec l'ordre du mode : $LG_{31} > LG_{21} > LG_{11}$. Cet effet est cependant plus marqué pour les modes sLG.

—

Conclusion

Ces résultats numériques confirment les prédictions analytiques : les modes sLG et eLG se comportent de manière similaire en champ proche, mais divergent significativement en champ lointain. De plus, le désalignement du système optique affecte davantage les modes élégants, ce qui souligne l'importance du choix du type de faisceau selon l'application visée.

En somme, le choix entre ces deux familles de modes résultera d'un compromis (trade-off) technique : le mode sLG sera privilégié pour les applications exigeant une forte concentration d'énergie et une stabilité face aux imperfections géométriques, tandis que le mode eLG s'imposera pour les applications métrologiques et les systèmes de détection ultra-sensibles.

Conclusion Générale

Arrivés au terme de ce travail de recherche, nous avons mené une étude théorique et numérique approfondie sur la propagation et la diffraction des faisceaux de Laguerre-Gauss Standards (sLG) et Élégants (eLG) à travers un système optique caractérisé par une ouverture complexe décentrée. Ce travail nous a permis de confronter l'élégance des formulations analytiques paraxiales aux réalités des contraintes physiques d'ouverture et de désalignement.

Les solutions analytiques établies à partir de l'intégrale de diffraction généralisée ont été validées avec succès par des simulations numériques rigoureuses sous `Mathematica`. L'analyse comparative directe, organisée sous forme de grilles de profils juxtaposés, a mis en évidence plusieurs conclusions physiques majeures :

1. **Dynamique de l'intensité et de la forme :** En champ proche ($z = 0.06$ m), les modes standards (sLG) conservent une intensité maximale nettement plus élevée (atteignant près du double de celle des modes eLG), avec des pics plus étroits et mieux définis. À l'inverse, les modes élégants (eLG) se caractérisent par des pics plus larges et aplatis, traduisant un phénomène de lissage induit par la nature complexe de leurs polynômes modulateurs au voisinage du vortex.

2. **Comportement de divergence exponentielle :** En champ lointain ($z = 0.6$ m), l'absence de racine carrée dans l'expression du waist des modes élégants engendre une divergence spatiale extrêmement rapide (s'étalant jusqu'à 6 mm contre seulement 0.6 mm pour le sLG). Ce transfert accéléré d'énergie du centre vers les lobes secondaires confirme la haute sensibilité de l'enveloppe complexe des eLG.

3. **Sélectivité au désalignement :** L'introduction du paramètre de désalignement ($a \neq 0$) rompt la symétrie radiale des profils pour les deux familles de faisceaux, décalant le centre du vortex et créant une asymétrie de hauteur entre les lobes adjacents. Cette déformation est considérablement amplifiée chez les faisceaux élégants, démontrant leur vulnérabilité — mais aussi leur haute sensibilité — face aux perturbations de phase asymétriques.

Sur le plan des perspectives pratiques, cette étude démontre que le choix entre les modes standards et élégants relève d'un arbitrage technique strict dicté par l'application visée. D'une part, la stabilité et la forte concentration énergétique des modes sLG les rendent idéaux pour le transport d'information à longue distance ou l'usinage laser. D'autre part, la réactivité exacerbée et la divergence contrôlée des modes eLG ouvrent des perspectives prometteuses dans le développement de **capteurs optiques de positionnement de haute précision (Optical Sensing)**, la métrologie industrielle fine, ainsi que l'optimisation des pinces et pièges optiques microscopiques [22, 23].

En ouverture à ce travail, il serait particulièrement intéressant d'étendre cette formulation à la propagation de ces mêmes modes dans des milieux turbulents ou non-linéaires, afin d'évaluer la robustesse du moment angulaire orbital face aux fluctuations de l'indice de réfraction du milieu.

Bibliographie

[1] Les Allen, Marco W Beijersbergen, RJC Spreeuw, and JP Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11) :8185, 1992.

[2] AE Siegman. Hermite-gaussian functions of an imaginary argument as optical beam modes. *Journal of the Optical Society of America*, 63(9) :1093–1094, 1973.

[3] Takashi Takenaka, Mitsuhiro Yokota, and Otozo Fukumitsu. Elegant hermite-gaussian beam modes. *JOSA*, 70(11) :1323–1331, 1980.

[4] Miguel A Bandres and Julio C Gutiérrez-Vega. Elegant laguerre–gauss beams as an orthogonal basis for paraxial wave propagation. *Optics Letters*, 29(2) :144–146, 2004.

[5] Herwig Kogelnik and Tingye Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5(10) :1550–1567, 1966.

[6] JBA Faria. Matrix formula for light propagation through a misalignment optical system. *Optical and Quantum Electronics*, 31(7) :577–585, 1999.

[7] Javier Alda. Fresnel diffraction by circular and elliptical apertures. *Optics Express*, 10(12) :502–508, 2002.

[8] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, 1996.

[9] Anthony E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.

[10] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, Cambridge, 7th edition, 1999.

[11] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson Education, Reading, MA, 5th edition, 2017.

[12] Athanasios Papoulis. *Systems and Transforms with Applications in Optics*. McGraw-Hill, New York, 1968.

[13] Miles J Padgett. The orbital angular momentum of light. *Optics Express*, 25(10) :11265–11274, 2017.

[14] Gabriel Molina-Terriza, Juan P Torres, and Lluis Torner. Twisted photons. *Nature Physics*, 3(5) :305–310, 2007.

[15] Yonggen Xu, Zengling Gao, Jun Qu, and Jingsong Ye. Comparative studies of properties of standard and elegant laguerre-gaussian beams. *Optik*, 127(1) :166–170, 2016.

[16] Aaron April. Elegant laguerre-gaussian beams of circular polarization. *Optics Letters*, 35(13) :2115–2117, 2010.

[17] Yangjian Cai and Qiang Lin. Propagation of laguerre-gaussian beams through paraxial optical systems with unshaded apertured. *Optik*, 113(11) :489–494, 2002.

[18] Guoquan Zhou. Propagation of elegant laguerre–gaussian beams through apertured fractional fourier transforming systems. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 6(4) :372, 2004.

[19] Dongmei0 Deng and Hong Guo. Analytical propagation expressions of elegant laguerre–gaussian beams through misaligned optical systems. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 7(9) :482, 2005.

[20] S. Wang and L. Ronchi. Principles and design of optical arrays. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 25. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[21] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G Tricomi. *Tables of Integral Transforms*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1954.

[22] David G Grier. A revolution in optical manipulation. *Nature*, 424(6950) :810–816, 2003.

[23] Miles Padgett and Richard Bowman. Tweezers with a twist. *Nature Photonics*, 5(6) :343–348, 2011.