République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère De L'enseignement Supérieure Et De La Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farés De Medea

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



MÈMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

Par
Nacira Mebrouki

Titre : Dynamique collective dans les systèmes biologique – Modèle de Winfree

Soutenu publiquement le 10 septembre 2018

devant le jury composé de,

Président	: N. benaichouche	M.A.A U.Y.F.M
Examinateur	: F. Boulariah	M.A.A U.Y.F.M
Examinateur	: N. Mekdache	M.A.A U.Y.F.M
Encadreur	: OUKIL WALID	M.C.B U.Y.F.M

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2017-2018

Dédicace

Je dédie ce travail á mes très chers parents, dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience, le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret de ma réussite. Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui. Je dédie ce travail également á ,,,,,,,,

Et á tous mes amis

Remerciements

Dynamique collective dans les systemes biologiques – Modèle de Winfree

Titre : Dynamique collective dans les systémes biologiques – Modèle de Winfree

Résumé : Ce travail est une brève présentation d'un utile mathématiques qui permet l'étude de la dynamique d'une population biologique. Essentiellement basé sur le Modèle de Winfree, on va voir comment ce type de modèle couplé permet la prévision de la dynamique d'une population. Le modèle est un système différentiel couplé.

Mots clés : Équation différentielle, modèle de Winfree, nombre de rotation

Faculté des Sciences. Département de Mathématiques et Informatique.

Université Dr. Yahia Farès Médéa - Pôle urbain – 26000. Médéa. Algérie.

Table des matières

Résumé **6**

1 Modèle de Winfree **11**

1.1 Introduction 11

1.2 Propriété de la fréquence temporelle 14

1.3 Synchronisation numériquement 16

1.4 Approximation au Modèle de Kuramoto 17

2 Modèle de Kuramoto **20**

2.1 Modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs 21

2.2 Synchronisation dans Kuramoto 23

3 Etat de mort d'un point de vu physique **26**

3.1 Exemple avec une distribution uniforme 29

3.2 Exponentielle stabilité de l'état de mort 30

4 Diagramme de Phase **34**

4.1 Partiel-mort 35

4.2 Incohérence 36

4.3 Partiel-verrouillage 37

Conclusion générale **39**

Bibliographie 41

Chapitre 1

Modèle de Winfree

1.1 Introduction

En 1967 Winfree propose un modèle de champ moyen pour la synchronisation de populations d'oscillateurs biologiques. Le système dépend de deux paramètres : force de couplage et la propagation des fréquences naturelles ou force du bruit. Pour de petites valeur le système de Winfree peut être réduit au modèle de Kuramoto, dont plusieurs études ont été réalisées. Le modèle de Winfree et de Kuramoto sont des modèles influencés par le comportement de toutes les solutions (oscillateurs) de l'équation différentielle associée, cette influence est connue par le "champs moyen" (Mean-Field). Comprendre le comportement à long terme de ce champs-moyen permet d'avoir toutes les informations sur le comportement collectif de tout les oscillateurs, toute la complexité de l'étude du système, réside donc, dans l'étude du champs-moyen présent dans l'évolution de chaque oscillateur. On réfère à [18], [19],[20], [21] pour les différentes applications de ce modèle dans les populations biologiques.

Le comportement collectif des oscillateurs a été d'abord étudié numériquement par Winfree [8]. Plus précisément, lors d'une certaine force de couplage avec de petite valeur de propagation des fréquences naturelles tout les oscillateurs se synchronisent sur une fréquence commune.

Le modèle de Winfree est donné par l'équation différentielle de N-dimension

$$\dot{x}_i = \omega_i - k\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_j)R(x_i) \tag{1.1}$$

où P et R sont deux fonctions périodiques. $x_i(t)$ est la phase du i^{eme} oscillateur au temps t. N est le nombre d'oscillateurs. Les fréquences naturelles ω_i vérifient

$$\omega_1 = 1 - \gamma < ... < \omega_N = 1 + \gamma$$

où la force du bruit γ est un réel positif dans $[0, 1]$. Le paramètre positif $k \in [0, 1]$ est la force du couplage. La fonction commune $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_j)$ est le champs-moyen.

On va s'intéresser dans la suite à la forme solvable du modèle de Winfree suivante, proposée dans [3] :

$$\dot{x}_i = \omega_i - k\sigma(X(t))\sin(x_i), \quad X(t) = (x_1(t), ..., x_N(t)) \tag{1.2}$$

Et le champs-moyen $\sigma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est définit pour tout $Y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^N$ par :

$$\sigma(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}[1 + \cos(y_j)]$$

qui est une fonction positive bornée.

Le système (1.1) est autonome et globalement lipschitzien, et par le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz, à chaque condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^N$ au temps $t = 0$, il existe une unique solution $X(t)$ définie sur tout $\mathbb{R}$. Pour simplifier létude, on prendra que des conditions initiales $X_0 = (x_1(0), ..., x_N(0))$ vérifiant $x_1(0) \leq ... \leq x_N(0)$. Dans la suit on va se concentrer sur la demi-droite réelle des temps positifs $\mathbb{R}_+$, plus précisément au comportement de la fréquence temporelles

$$\rho_i(t) = \frac{x_i(t)}{t}$$

a l'infini, et de voir le lien entre $\rho_i(t)$ et $\rho_j(t)$ pour $i \neq j$.

Sous certaines conditions de stabilité la limite $\lim_{t\to\infty} \rho_i(t)$ existe pour tout i.

Tout dépend du paramètre de couplage k et de γ, le système est en état mort si cette limite vaut zéro pour tout i. Deux oscillateurs x_i et x_j sont dit en verrouillage si $\lim_{t\to\infty} \rho_i(t) - \rho_j(t) = 0$ avec $\lim_{t\to\infty} \rho_i(t) \neq 0$, Si le système n'est pas en état mort et $\lim_{t\to\infty} \rho_i(t) - \rho_j(t) = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ alors on dit que le système (1.2) est en verrouillage, cette dernière définition peut être vu indépendamment de l'existence de la limite de la fréquence temporelle.

Strogatz et Ariaratnam [3], on pu donner un diagramme de phase de ce modèle, ou ils montrent l'existence de plusieurs états autre que l'état mort et l'état verrouillage, a savoir état partiel-mort, partiel-verrouillage et incohérence. Giannuzzi et all [6] donnent des résultats analogues pour un modèle plus généralisé.

Pour k et γ au voisinage de zéro, le système de Winfree peut être confondu avec le

modèlel du champs-moyen de Kuramoto définit par

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N} H(x_i - x_j) \tag{1.3}$$

avec H périodique, ω_i et k joue le même rôle que ceux du Modèle de Winfree.

1.2 Propriété de la fréquence temporelle

Croissance des fréquences temporelles par rapport aux fréquences naturelles

Pour voir la croisance des fréquences temporelles par rapport à une distribution croissante des fréquences naturelles ω_i, on prolonge par continuité le modèle de Winfree 1.2 comme suit :

$$\frac{d}{dt}x(t,\omega) = \omega - k\sigma(X(t))\sin(x(t,\omega)) \tag{1.4}$$

Où on considère que $\sigma(X(t))$ est une fonction prédéfinit, telle que $X(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))$ soit une solution du Modèle de Winfree 1.2 à une condition initiale choisit $x_1(0) < ... < x_N(0)$, avec

$$\sigma(X(t)) = \sum_{j=1}^{N} 1 + \cos(x_j(t))$$

Remarquons que pour tout $\omega \in [1-\gamma, 1+\gamma]$ le nouveau système 1.4 est uniformément lipschitzien, par suite le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz, implique que pour toute condition initiale $x(0,w) = x_{0,\omega}$ il existe une unique solution définit sur

$\mathbb{R}_+$. Cela entraine donc que si $x_{0,\omega_i} = x_i(0)$, alors

$$x(t, \omega_i) = x_i(t), \quad \forall t \geq 0$$

La fonction continue, par rapport à ω, des fréquences temporelles $\rho(t, \omega)$ à un instant t définit par

$$\rho(t, \omega) = \frac{x(t, \omega)}{t}$$

Passe par les points $\rho_i(t)$ lorsque $\omega = \omega_i$.

Donc si $\rho(t, \omega)$ est croissante par rapport à ω (à un instant fixé t), alors, $\rho_i(t)$ l'est aussi par rapport à ω_i, pour cela il suffit de calculer la dérivée de $x(t, \omega)$ par rapport à ω, soit :

$$\frac{d}{d\omega}\dot{x}(t, \omega) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{d\omega}x(t, \omega)) = 1 - k\sigma(X(t))\cos(x(t, \omega))\frac{d}{d\omega}x(t, \omega) \tag{1.5}$$

qui est une équation linéaire par rapport à $\frac{d}{d\omega}x(t, \omega)$, comme $x_1(0) < ... < x_N(0)$ alors on peut choisir des conditions initialles $x(0, \omega)$ croissante par rapport à ω, donc $\frac{d}{d\omega}x(0, \omega) > 0$ qui implique par intégration de léquation 1.5

$$\frac{d}{d\omega}x(t, \omega) = e^{-\int_0^t k\sigma(X(s))\cos(x(s,\omega))ds}\Big[\frac{d}{d\omega}x(0, \omega) + \int_0^t e^{\int_0^s k\sigma(X(\zeta))\cos(x(\zeta,\omega))d\zeta}ds\Big]$$

qui est une fonction postive, d'où la croissance des fréquences temporelles par rapport à une distribution croissante des fréquences naturelles.

1.3 Synchronisation numériquement

Numériquement, pour de petites valeurs de γ on remarque généralement la figure (1.1) qui illustre les fréquences temporelles $\rho_i(t)$, à un instant t, au fonction des fréquences naturelles ω_i : cela est tout près de remarquer que les fréquences temporelles sont alignées, c'est à dire en verrouillage, cela est du au fait que la largeur de l'axe des fréquences temporelles vaut 15 fois la largeur de l'axe des fréquences naturelles, par contre si on refait l'échelle de la figure (1.1) en gardant les même paramètres du modèle on aura la figure(1.2), on remarque que que le graphe est une droite d'une pente strictement positive ce qui n'est pas le cas du verrouillage.

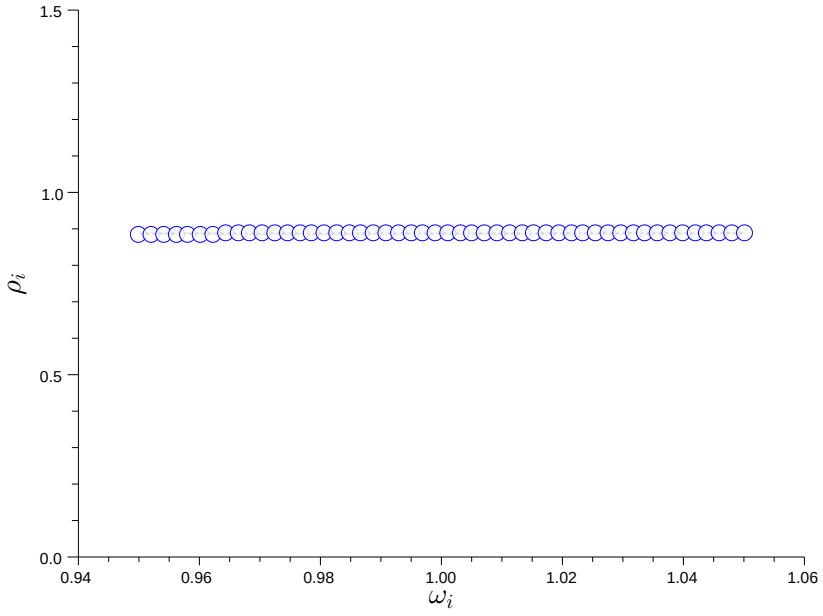


FIGURE 1.1 – Graphe des fréquences temporelles $\rho_i(t)$, à un instant t, au fonction des fréquences naturelles ω_i, avec $t = 500$, $N = 50$, $k = 0.4$ et les fréquences naturelles uniformément distribués sur $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$ avec $\gamma = 0.05$

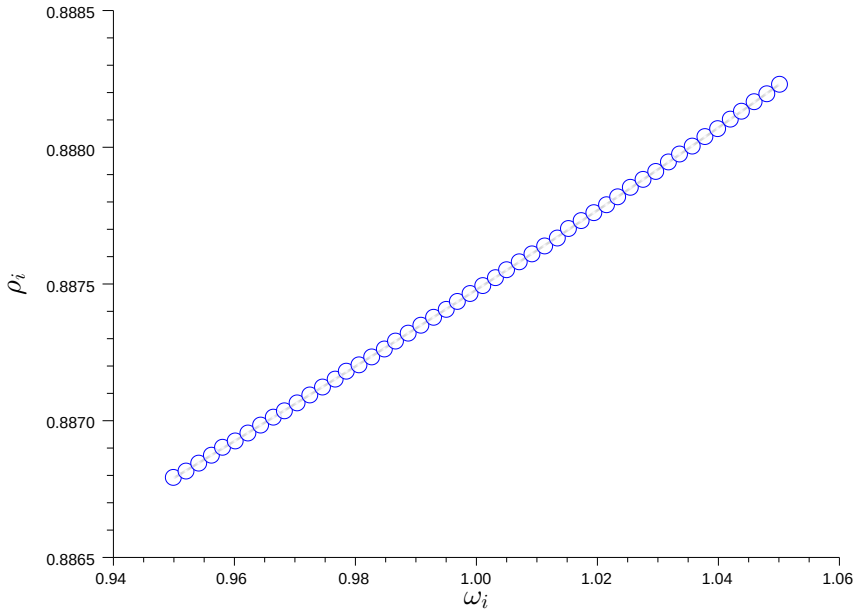


FIGURE 1.2 – Graphe des fréquences temporelles $\rho_i(t)$, à un instant t, au fonction des fréquences naturelles ω_i, avec $t = 500$, $N = 50$, $k = 0.4$ et les fréquences naturelles uniformément distribués sur $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$ avec $\gamma = 0.05$

1.4 Approximation au Modèle de Kuramoto

Pour de petites valeur des paramètres de couplage et de la force du bruit, le Modèle de Winfree est équivalent au Modèle de Kuramoto voir [2] ; cela est du au fait que toute les solution s'écrivent sous forme $x_i = t + O^i(\epsilon)$, et de même pour la dérivé $\dot{x}_i = 1 + O^i(\epsilon)$, plus précisément : Pour de petites valeurs $\gamma = \epsilon$ et $k = \epsilon$ avec $\epsilon << 1$, le model 1.1 devient :

$$\dot{x}_i = 1 + \epsilon\big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_j)R(x_i)\big]$$

donc a un temps fini $x_i = t + O^i(\epsilon)$ et $\dot{x}_i = 1 + \frac{dO^i}{dt}(\epsilon)$: Ce qui donne

$$\dot{x}_i = 1 + \epsilon\big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(t + O^j(\epsilon))R(t + O^i(\epsilon))\big]$$

$$1 + \frac{dO^i}{dt}(\epsilon) = 1 + \epsilon\big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt}\int_0^t P(s + O^j(\epsilon))R(s + O^i(\epsilon))ds\big]$$

Par un chanement de variable $s = z - O^i(\epsilon)$ donc $ds = dz + \frac{dO^i}{ds}(\epsilon)$ le model devient

$$1 + \frac{dO^i}{dt}(\epsilon) = 1 + \epsilon\big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt}\int_{O^i(\epsilon)}^{t+O^i(\epsilon)} P(z + O^j(\epsilon) - O^i(\epsilon))R(z)dz\big] + \frac{dO^i}{ds}(\epsilon^2)$$

D'un autre côté,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(t + O^i(\epsilon))}\frac{d(t + O^i(\epsilon)}{dt} = [1 + \frac{d}{dt}O^i(\epsilon)]\frac{d}{d(t + O^i(\epsilon))}$$

Donc,

$$1 + \frac{dO^i}{dt}(\epsilon) = 1 + \epsilon\big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} [1 + \frac{d}{dt}O^i(\epsilon)]\frac{d}{d(t + O^i(\epsilon))}$$

$$\int_{O^i(\epsilon)}^{t+O^i(\epsilon)} P(z + O^j(\epsilon) - O^i(\epsilon))R(z)dz\big] + \frac{dO^i}{ds}(\epsilon^2)$$

Par le theoreme d'acroissemennt finie appliquer a

$$\int_0^{O^i(\epsilon)} P(z + O^j(\epsilon) - O^i(\epsilon))R(z)dz$$

$$1 + \frac{dO^i}{dt}(\epsilon) = 1 + \epsilon\big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{d}{d(t + O^i(\epsilon))}$$

$$\int_0^{t+O^i(\epsilon)} P(z + O^j(\epsilon) - O^i(\epsilon))R(z)dz\Big] + O^*(\epsilon^2)$$

On aura donc finalement une approximation a $O(\epsilon^2)$ de

$$1 + \frac{dO^i}{dt}(\epsilon) =$$

$$1 + \epsilon\Big[v_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(t + O^j(\epsilon) - O^i(\epsilon))R(t)dz\Big] + O^*(\epsilon^2)$$

Revenant au notation initiale, on deduit

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N} P(t + x_i - x_j)R(t) + O^*(\epsilon^2)$$

qui est une approximation du model de Kuramoto 2.1 avec

$$H(x_i - x_j) = P(t + x_i - x_j)R(t)$$

Cette approximation n'est pas efficace si l'on veut approximer les solution, vu qu'on a pas assez d'information pour metriser l'integrale de $O^*(\epsilon)$, par contre on peut approximer la fonction

$$\rho_i(t) = \frac{x_i(t)}{t}$$

C'est a dire $\rho(t)$ est $\epsilon^2 = k^2 = \gamma^2$ proche entre le Model du Winfree et celui du Kuramoto.

Chapitre 2

Modèle de Kuramoto

En 1975, Kuramoto dans son premier article lié a l'etude de la synchronisation [1] annonce quelques exactes résultat sur ce qu'on appelle le modèle de Kuramoto.

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(x_j - x_i) \tag{2.1}$$

Plusieur reformulations de ce modèle ont été rafiné par plusieur auteurs voir par exemple [16], [17] en générale le modèle de kuramoto est donné par léquation différentielle de N-dimension :

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N}H(x_j - x_i) \tag{2.2}$$

où H est une fonction périodique. Dans la littérature, on trouve ce qu'on appelle le "paramètre d'ordre" qui est un changement de variable, soit :

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{ix_j}$$

ce changement de variable illustre la rotation des oscillateurs sur le cercle vu comme étant un objet unique en les unifiant.

2.1 Modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs

On trouve dans [5], une étude détaillée sur le modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs, comme cité précédemment la synchronisation forte dans ce modèle peut être démontré grâce aux point stationnaires, cela est du à la symétrie du système. Suivant une distribution uniforme Le modèle (2.1) devient alors,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2\Omega + \omega - \frac{k}{3}\big[\sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_1)\big] \\
\dot{x}_2 &= \Omega + \omega - \frac{k}{3}\big[\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_3 - x_2)\big] \\
\dot{x}_3 &= \omega - \frac{k}{3}\big[\sin(x_1 - x_3) + \sin(x_2 - x_3)\big]
\end{aligned}$$

Pour voir le comportement de la différence de phase entre chaque oscillateur, soit $y_1 = x_2 - x_1$ et $y_2 = x_3 - x_2$. Par ce changement de variable le système se réduit en deux dimension, soit :

$$\dot{y}_1 = \Omega + \frac{k}{3}(-2\sin y_1 + \sin y_2 - \sin(y_1 + y_2))) \tag{2.3}$$

$$\dot{y}_2 = \Omega + \frac{k}{3}(-2\sin y_2 + \sin y_1 - \sin(y_1 + y_2))) \tag{2.4}$$

l'existence de points stationnaires $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ implique que la différence de phase est bornée en tout temps positif, ce qui entraine donc un état de verrouillage en choisissant une constante positive $\omega > k$, cela signifie que la limite des frquences temporelles ne

vaut pas 0 (le système ne sera pas en état mort). A partir des deux dérnière égalité le point fixe existe si et seulement si

$$\sin y_1 = \sin y_2$$

Donc $y_1 = y_2$ ou $y_1 = y_2 + \pi$. Or,

$$(-2\sin x + \sin(x+\pi) - \sin(2x+\pi))(-2\sin(x+\pi) + \sin x - \sin(2x+\pi)) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et sachant que

$$-(-2\sin y_2 + \sin y_1 - \sin(y_1+y_2))) = (-2\sin y_1 + \sin y_2 - \sin(y_1+y_2))) = \frac{3\Omega}{k} > 0$$

Alors, $y_1 = y_2$. En remarquant aussi que $y_1 \neq \pi$, posons $z = \tan\frac{y_1}{2}$, alors

$$\frac{3\Omega}{k} = \frac{2z}{1+z^2}[\frac{3-z^2}{1+z^2}]$$

de plus ladérivé du membre droit vaut

$$\frac{2(3-12z^2+z^4)}{(1+z^2)^3}$$

ce qui implique que le maximum global vaut α avec

$$\alpha = \frac{2\sqrt{6-\sqrt{33}}(\sqrt{33}-3)}{(7-\sqrt{33})^2}$$

et la fonction $\frac{2z}{1+z^2}[\frac{3-z^2}{1+z^2}]$ est surjéctive de $\mathbb{R} \to [0,\alpha]$ donc finalement un point station-

naire du système des deux équation (2.3) et (2.4) aura lieu si et seulement si

$$\frac{\Omega}{k} < \alpha$$

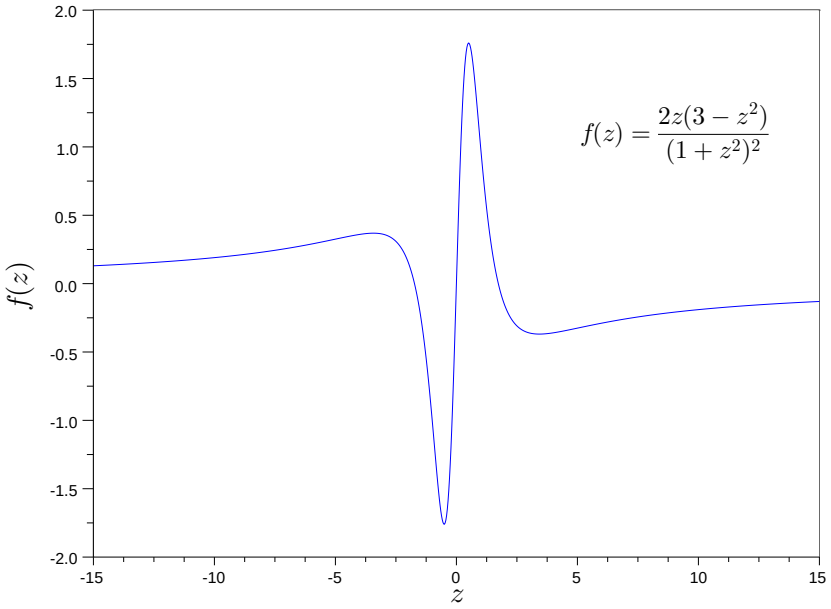


FIGURE 2.1 – Graphe de ...

2.2 Synchronisation dans Kuramoto

Définition 2.1. *On définit la synchronisation par*

$$\lim_{t\to\infty} |\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t)| = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \tag{2.5}$$

C'est ce que Chopra et Spong utilise dans [4] pour montrer une condition necessaire exigé sur le parameter de la force du couplage k pour avoir une telle synchronisation

pour le modèle de Kuramoto.

A partire du modele (2.1), ils considère la difference

$$\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t) = \omega_i - \omega_j + \frac{k}{N}\big[-2\sin(x_i - x_j) + \sum_{k=1,k\neq i,j}^{N} (\sin(x_k - x_i) + \sin(x_j - x_k))\big]$$

La définition introduite dans l'equation (2.5) equivalente a l'existence d'un unique point fixe dans cette derniere egalité, ainsi ce point fix donne une majoration du terme

$$-2\sin(x_i - x_j) + \sum_{k=1,k\neq i,j}^{N} (\sin(x_k - x_i) + \sin(x_j - x_k)) \leq E_{max}$$

ou

$$E_{max} = 2\sin(C) + 2(N-2)sin(\frac{C}{2})$$

avec

$$C = 2\arccos(\frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 + 32}}{8})$$

Il trouve donc que ce type de synchronisation n'aura pas lieu si

$$k < \frac{2N\gamma}{E_{max}} = K_2$$

Dans [7] on trouve une condition nessaire pour avoir la synchronisation, le paraemtre k dois verifier

$$k < \frac{2N\gamma}{2(N-1)} = k_1$$

En combinant [4] et [7] cette synchronisation n'aura pas lieu si

$$k_1 \leq k < k_2$$

L'existence de la synchronisation s'obtient en supposant au premier lieu que pour tout $t \geq T$ la difference de phase $|x_i(t) - x_j(t)| < \frac{\pi}{2} + \epsilon$ avec $\epsilon < \frac{\pi}{2}$, dans ce cas on aura une synchronisation de type expenontielle :

$$|\dot{x}_i - \Omega| \leq \sigma_T e^{-k \sin(\epsilon)(t-T)}, \quad \sigma_T > 0, \forall i = 1, ..., N$$

ou $\Omega = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j$

L'hypothese imposée sur la difference de phase est non vide vu l'existence d'un ensemble invariant par le le flot du systeme sous une certaine force de couplage k.

Chapitre 3

Etat de mort d'un point de vu physique

Ariartnam and Strogatz, remarque que l'état de mort des oscillateurs correspond a une convergence des oscillateur vu sur le cercle vers un point fixe, donc ils définissent l'état de mort par l'existence d'un point fixe du système. Mathématiquement, on peut avoir l'état de mort des oscillateurs sans l'existence d'un point fixe, exemple d'avoir juste des solutions périodiques ou bien d'un comportement logarithmique, la non-existence de ce genre de solutions, reste un problème ouvert, et pose problème a la définition mathématique de la frontière de l'état de mort et celle définit par Strogatz et Ariartnam. Donc d'un point de vu physique l'état de mort correspond au point fixe :

$$\omega_i - k\sigma(X^*)\sin(x_i^*) = 0 \tag{3.1}$$

x_i^* étant solution constante alors $\sigma^* = \sigma(X^*)$ est constante ; Cela n'est vrai que si le rapport

$$\frac{\omega_i}{k\sigma^*} \leq 1$$

en prenant le max sur les ω_i et sachant que σ^* est postive on aura donc une condition

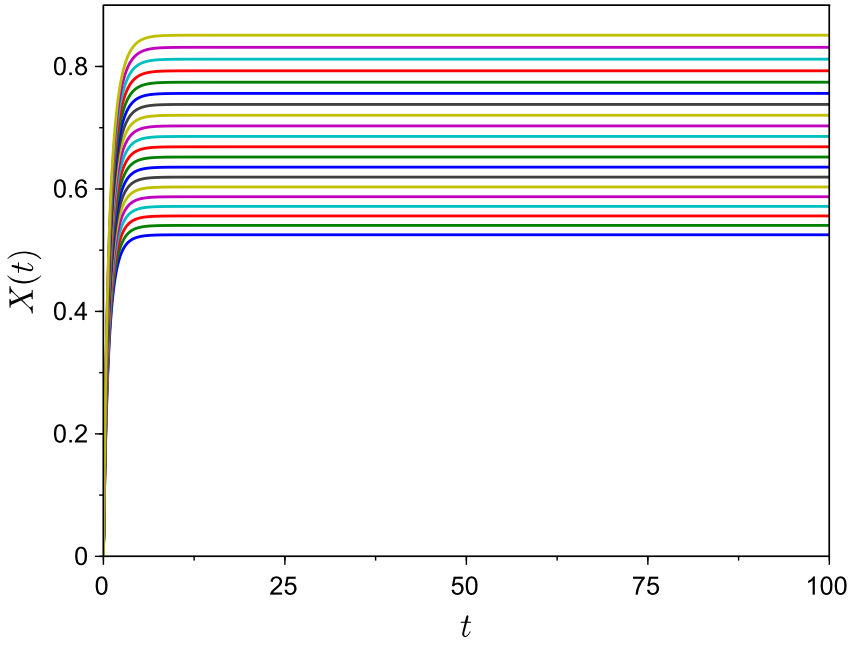


FIGURE 3.1 – Graphe des solutions x_i $X(0) = 0_{\mathbb{R}^N}$

nécessaire pour l'existence de l'état mort ; soit :

$$\frac{1+\gamma}{k\sigma^*} \leq 1 \tag{3.2}$$

la solution x_i^* est donne par

$$x_i^* = \arcsin(\frac{\omega_i}{k\sigma^*})$$

Strogatz et Ariartnam remarquent numériquement que les points x_i^* se trouvent dans l'arc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On applique σ au vecteur X^* on aura

$$\sigma^* = \frac{1}{N}\sum_1^N 1 + \cos(\arcsin(\frac{\omega_i}{k\sigma^*})) = \frac{1}{N}\sum_1^N 1 + \sqrt{1-(\frac{\omega_i}{k\sigma^*})^2}$$

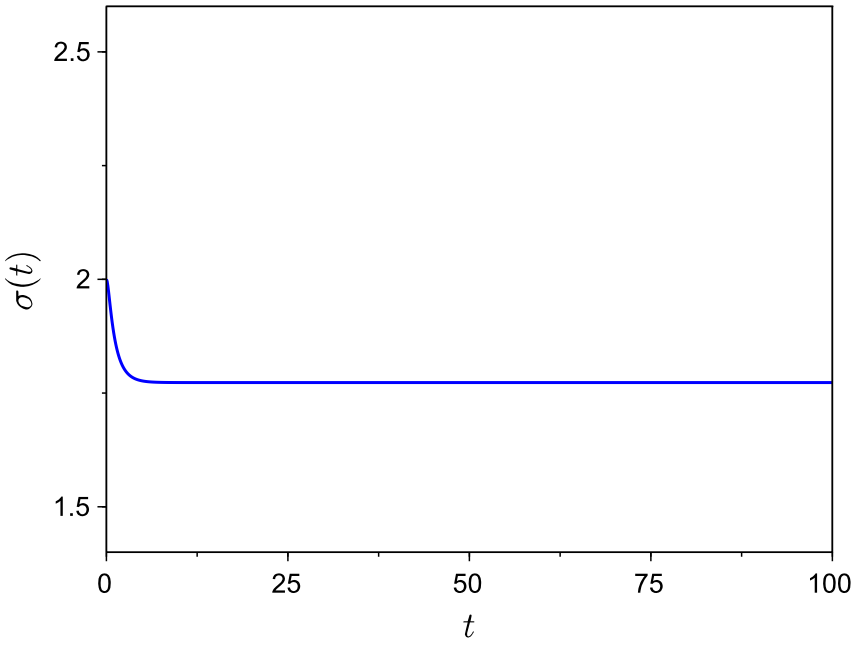


FIGURE 3.2 – graphe de σ

Qui est une somme de Reimman. Donc le point fixe définit par Strogatz et Ariartnam existe si et seulement si cette dernière équation admet une solution en σ^* (avec σ^* vu autant qu'une variable réelle).

Si la distribution des ω_i suit une densité g et en passant a l'infini sur N cette somme de Reimman devient

$$\sigma^* = \int_{1-\gamma}^{1+\gamma} 1 + \sqrt{1 - (\frac{\omega}{k\sigma^*})^2} g(\omega) d\omega \tag{3.3}$$

De ce point de vu, la région de l'état mort pour une infinité d'oscillateurs est donnée par l'existence des solution de cette dernière egualité.

3.1 Exemple avec une distribution uniforme

L'equation (3.3) avec une distribution uniforme g donne

$$\sigma^* = \frac{1}{2\gamma}\int_{1-\gamma}^{1+\gamma} 1 + \sqrt{1 - (\frac{\omega}{k\sigma^*})^2}d\omega$$

En definissons deux fonction H et G par $H(x) = \frac{x}{k}$ et

$$G(x) = \frac{1}{2\gamma}\int_{1-\gamma}^{1+\gamma} 1 + \sqrt{1 - (\frac{\omega}{x})^2}d\omega$$

D'apres l'equation (3.2) la fonction G est donc definie sur $[1+\gamma, \infty[$, la region de l'état mort est donc donnée par l'intersecion de $H(x)$ et $G(x)$.
Strogatz et Ariartnam remarque que G est convex, et geomtriquement donc la frontiére est donnée par le point ou

$$h(x) = G(x)$$

et

$$\frac{1}{k} = h'(x) = G'(x)$$

Sachant que G est explicite, car on peut integrer, et l'indépendance des ces deux dernïreéquations nous permet donc de déduire la fronctière volue.

Strogatz et Ariartnam trouve explicitement la fonction k au fonction de γ foronitère de l'état de mort, cette fonction est donnée par :

$$\frac{1}{k} = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_d(\gamma)} + \frac{1}{4\gamma}\left[\arcsin(\frac{1+\gamma}{\sigma_d(\gamma)}) - \arcsin(\frac{1-\gamma}{\sigma_d(\gamma)})\right] & \text{si } \gamma \leq \gamma_0 \\ \\ \frac{1}{4\gamma}\left[2 + \frac{\pi}{2} - \Delta(2 + \sqrt{1-\Delta^2} - \arcsin\Delta)\right] & \text{si } \gamma \geq \gamma_0 \end{cases}$$

ou

$$\sigma_d(\gamma) = \frac{2(1+\gamma^2)}{\sqrt{(1-\gamma^2)(3+\gamma^2)}} \text{ et } \Delta = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

et γ_0 verifie l'equtaion :

$$1 + \gamma_0 = \sigma_d(\gamma_0)$$

3.2 Exponentielle stabilité de l'état de mort

Soit F une fonction globalement lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

Considérant le système

$$\dot{X} = F(X) \tag{3.4}$$

Et notons $\phi^t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ le flot de ce systeme

Définition 3.1. *(Stabilité)*

Suposons que X_* est un point fixe de 3.4, X_* est dit positivement exponentiellement stable si :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall Y \in \mathbb{R}^N,$$

$$||X_* - Y|| < \delta \implies ||X_* - \phi^t(Y)|| < e^{-\alpha t + \beta}||X_* - Y|| \quad \forall t \geq 0$$

ou $||.||$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$

Proposition 3.1. *Soit $J_F(X_*)$ la jacobienne de F au point fixe X_*, Si toute les valeurs propres de $J_F(X_*)$ sont strictement négatives alors le point fixe X_* du système 3.4 est positivement exponentiellement stable.*

En gardant les mêmes notations de la section précédente, soit $J(X^*)$ la jacobienne du systeme 1.2 au point fixe $X^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$ définit précédemment.
Les éléments de $J(X^*)$ sont donnés par :

$$a_{ii}(t) = -k\sigma^* \cos(x_i^*) + \frac{k}{N} \sin^2(x_i^*)$$

$$a_{ij}(t) = \frac{k}{N} \sin(x_i^*) \sin(x_j^*)$$

ψ est une valeur propre de $J(X^*)$ si et seulement si il existe un vecteur non nul $V = (v_1, ..., v_N) \in \mathbb{R}^N$ Tel que :

$$J(X^*)V = \psi V$$

Equivalente a :

$$sin(x_i^*) \frac{k}{N} \sum_j \sin(x_j^*) v_j = (\psi + k\sigma^* \cos(x_i^*)) v_i \tag{3.5}$$

Posons $\phi = \frac{1}{N} \sum_j \sin(x_j^*) v_j$

Si $\psi \neq -\sigma^* \cos(x_i^*)$ pour tout $1 \leq i \leq N$ alors $\phi \neq 0$, de plus

$$\frac{k \sin^2(x_i^*)}{\psi + k\sigma^* \cos(x_i^*)} \phi = \sin(x_i^*) v_i \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

La somme donne :

$$[\frac{k}{N} \sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{\psi + \sigma^* \cos(x_i^*)}] \phi = \phi$$

par hypothese $\phi \neq 0$ donc :

$$\frac{k}{N}\sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{\psi + \sigma^* \cos(x_i^*)} = 1 \tag{3.6}$$

Supposons que $\psi = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ alors d'après la dérnière équation ;

$$\frac{k}{N}\sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{\alpha + i\beta + \sigma^* \cos(x_i^*)} = 1$$

ce qui donne

$$\frac{k}{N}\sum_i \frac{(\alpha + \sigma^* \cos(x_i^*))\sin^2(x_i^*)}{(\alpha + \sigma^* \cos(x_i^*))^2 + \beta^2} + i\beta\frac{k}{N}\sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{(\alpha + \sigma^* \cos(x_i^*))^2 + \beta^2} = 1$$

Or,

$$\frac{k}{N}\sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{(\alpha + \sigma^* \cos(x_i^*))^2 + \beta^2} > 0$$

On déduit que $\beta = 0$ et que $\psi \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que pour tout i : $\psi > -\sigma^* \cos(x_i^*)$ (dans le cas contraire $\psi \leq 0$), alors $\phi \neq 0$, et comme ce qui précéde

$$\frac{k}{N}\sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{\psi + \sigma^* \cos(x_i^*)} = 1 \tag{3.7}$$

Géométriquement dans [2], la valeur σ^* vérifie l'inégalité :

$$\frac{k}{N}\sum_1^N \frac{(\frac{\omega_i}{k\sigma^*})^2}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_i}{k\sigma^*})^2}} < \sigma^*$$

équivalente à

$$\frac{k}{N}\sum_{1}^{N}\frac{\sin^2(x_i^*)}{\sigma^*\cos(x_i^*)} < 1 \tag{3.8}$$

en combinant avec l'équation (3.7), on aura

$$\psi\frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin^2(x_j^*)\frac{1}{\sigma^*\cos(x_i^*)}\frac{1}{\psi+\sigma^*\cos(x_i^*)} < 0$$

par hypothèse $\psi > -\sigma\cos(x_i)$ pour tout i, ce qui implique que $\psi < 0$, et d'après la proposition 3.1 le point fixe de l'état mort est positivement exponentiellement stable au sens de la déinition 3.1.

Chapitre 4

Diagramme de Phase

Dans la thése non publiée de Ariartnam [2], on voit un diagramme de phase de paramètre de couplage et de la force du bruit, il illustre cinq régions différentes outre le verouliage et l'etat mort, l'existence et la frontière de transition du verrouillage a était faite numériquement.

Il définissent l'état Partiel mort et le partiel verrouillage par un mélange d'états, incohérence si on est dans aucune région citée précedement.

L'etude a était faite dans le cas d'un nombre infini d'oscillateurs, en passant au cas continue et en notant $p(x,t,\omega)$ la densitée d'oscillateur, plus précesement ils considèrent l'équation

$$\frac{d}{dt}x(\omega,t) = \omega - k\sigma_c(t)\sin(x(\omega,t)) \tag{4.1}$$

ou

$$\sigma_c(t) = \int_0^{2\pi}\int_{1-\gamma}^{1+\gamma} p(x,t,\omega)(1+cos(x))g(\omega)d\omega dx$$

d'un point de vu physique la denstitée $p(x,t,\omega)$ vérifie l'équation de conservation d'energie

$$\frac{db}{dt} + \frac{d(pv)}{dx} = 0$$

ou

$$v = \omega - k\sigma_c(t)\sin(x(\omega,t))$$

4.1 Partiel-mort

L'état Partiel-mort se présente sous forme d'un mélange d'état : un pourcentage d'oscillateurs sont en état de mort, et l'autre pourcentage ne l'est pas et ne possède pas d'oscillateurs verrouillés, d'après les propriétés des fréquences temporelles, introduite au début de ce chapitre, cela entraîne qu'il existe $1 < i_0 < N$ tel que l'ensemble d'oscillateurs

$$\{x_i, 1 \leq i \leq i_0\}$$

est en état de mort, et le reste d'oscillateurs vérifie

$$0 < \rho_i < \rho_j, \quad \forall i_0 < i < j \leq N$$

Ce état s'obtient en générale pour de grande valeur de la force du bruit γ. Dans [2], il donne explicitent la frontière de létat partiel-mort, par exemple, pour $k = 0.4$ et $\gamma = 0.8$ le partiel-mort aura lieu, et pressente donc d'après ce qui précéde la figure (4.1) suivante

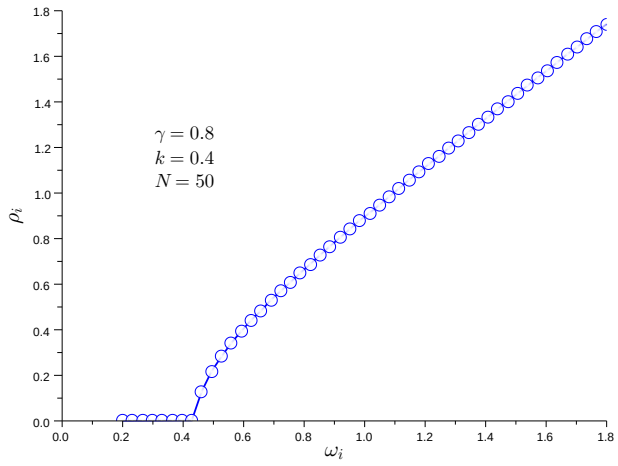


FIGURE 4.1 – Graphe des fréquences temporelles à $t = 500$ au fonction des fréquences naturelles uniformément distribués , pour $N = 50$, $k = 0.4$ et $\gamma = 0.8$

4.2 Incohérence

L'incohérence est létat où chaque deux oscillateurs ne présentent ni létat mort ni létat verrouillage, elle s'obtient pour des valeurs intermédiaires de la force de couplage et de la force du bruit. Par continuité, cet état ne peut pas avoir donc de frentière avec l'état mort. Toute les limites des fréquences temporelles vérifient :

$$0 < \rho_i < \rho_j, \quad \forall 1 \leq i < j \leq N$$

Exemple numérique : Pour une distribution uniforme des fréquences naturelles avec $k = 0.4$ et $\gamma = 0.5$ le l'incohérence aura lieu, et pressente donc d'après ce qui précéde la figure (4.2) suivante

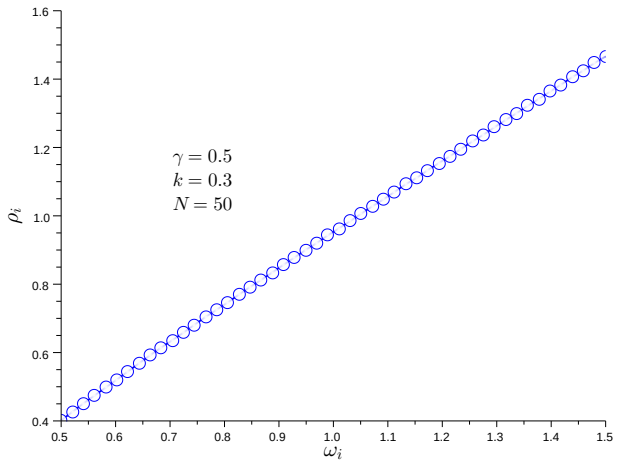


FIGURE 4.2 – Graphe des fréquences temporelles à $t = 500$ au fonction des fréquences naturelles uniformément distribués , pour $N = 50$, $k = 0.3$ et $\gamma = 0.5$

4.3 Partiel-verrouillage

L'état Partiel-verrouillage, qui est aussi un mélange d'état, est définit par léxistence d'au moins de deux oscillateur en verrouillage et de deux autre non verrouillé.

Les oscillateurs vérifient :

$$\exists 1 \leq i \neq j \leq N, \rho_i = \rho_j$$

et

$$\exists 1 \leq p \neq q \leq N, \rho_q \neq \rho_p$$

Dans le diagramme de phase élaboré dans [2], et pour une distribution uniforme, l'incohérence est la région intermédiaire entre le partiel-mort et le partiel-verrouillage, la figure (4.3) suivante illustre un exemple de partiel-verrouillage :

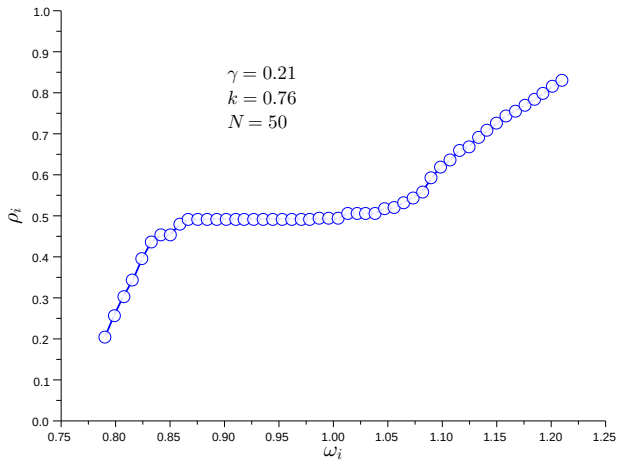


FIGURE 4.3 – Graphe des fréquences temporelles à $t = 500$ au fonction des fréquences naturelles uniformément distribués , pour $N = 50$, $k = 0.76$ et $\gamma = 0.21$

Conclusion générale

Ce travail est une présentation d'un système couplé qui permet l'étude d'une population biologique. Le modèle s'appelle "Modèle de Winfree", on a vu qu'en variant les paramètre, le modèle présente plusieurs états. Ce modèle permet l'étude d'une population d'individu qui pressente un même comportement périodique. On a vu également, le modèle de Kuramoto qui est un raffinement du modèle de Winfree. On a détaillé ,dans ce travail, l'étude de la stabilité du point fixe du modèle de Winfree qui est connu sous la terminologie "l'état mort" vu la vitesse est égale à zéro..

Bibliographie

[1] Y. Kuramoto, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Lecture Notes in Physics, Vol. 39, Springer, New York, 1975, p. 420.

[2] J. Ariaratnam COLLECTIVE DYNAMICS OF THE WINFREE MODEL OF COUPLED NONLINEAR OSCILLATORS. Cornell University 2002, thèse non publiée.

[3] J.T. Ariaratnam and S.H. Strogatz, Phase Diagram for the Winfree Model of Coupled Nonlinear Oscillators, Phys. Rev. Lett. 86, 4278 (2001).

[4] N. Chopra and M. W. Spong, On exponential synchronization of Kuramoto oscillators, IEEE Transactions on Automatic Control, 54 (2009), pp. 353-357

[5] Gerald Cooray. Department of Mathematics. Uppsala University. U.U.D.M. Project Report 2008 :23

[6] F. Giannuzzi, D. Marinazzo, G. Nardulli, M. Pellicoro, S. Stramaglia, Phase diagram of a generalized Winfree model, Phys. Rev. E 75 (2007) 051104.

[7] A. Jadbabaie, N. Motee, and M. Barahona, On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators, Proceedings of the American Control Conference, pp. 4296-4301, 2004.

[8] A. T. Winfree, J. Theor. Biol. 16, 15 (1967).

[9] D.D. Quinn, R.H. Rand, and S.H. Strogatz, Singular unlocking transition in the Winfree model of coupled oscillators. Physical Review E 75, 036218 (2007).

[10] G.Nardulli, D. Marinazzo, M. Pellicoro, S. Stramaglia, Phase shifts between synchronized oscillators in the Winfree and Kuramoto models (2004)

[11] Diego Pazó and Ernest Montbrió, Low-Dimensional Dynamics of Populations of Pulse-Coupled Oscillators Phys. Rev. X 4, 011009, 29 January 2014

[12] Popovych, O. V. ; Maistrenko, Y. L. and Tass, P. A. Phase chaos in coupled oscillators. Phys. Rev. E 71, 065201(R) (2005)

[13] Louca, S, Atay, F. M. Spatially structured networks of pulse-coupled phase oscillators on metric spaces AIMS Journal of Discrete and Continuous Dynamical Systems - A, vol. 34 (2014)

[14] A.M. Fink, Almost Periodic Functions, L.N.M. Vol. 377, Springer (1974).

[15] T. Saito, On dynamical systems in n-dimensional torus, Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 206 (1971), 18–19.

[16] J.A. Acebron, L.L. Bonilla, C.J. Pérez Vicente, F. Ritort, R. Spigler, The Kuramoto model : a simple paradigm for synchronization phenomena. Rev. Mod. Phys. 77, 137-185 (2005).

[17] Y.-P. Choi, S.-Y. Ha and S.-B. Yun, Complete synchronization of Kuramoto oscillators with finite inertia, Physica D., 240 (2011), 32-44.

[18] T. J. Walker, Science 166, 891 (1969) ; E. Sismondo, ibid., 249, 55 (1990).

[19] J. Buck, Quart. Rev. Biol. 63, 265 (1988).

[20] C. S. Peskin, Mathematical Aspects of Heart Physiology (Courant Inst. Math. Sci., New York, 1975) ; D. C. Michaels, E. P. Matyas and J. Jalife, Circ. Res. 61, 704 (1987).

[21] L. Angelini et al., Phys. Rev. E 69, 061923 (2004).