RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Présenter en vue de l'obtention du diplôme

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par :

OUKRIF Hanan et GHERNAOUTI Khouloud

Thème

Sur les polynômes de Fubini

Composition du jury :

Mr.	LAISSAOUI DIFFALAH,	MCA,	U.Y.F.M,	Président
Mr.	SEBAOUI MADJID,	MCB,	U.Y.F.M,	Encadreur
Mr.	RAHMANI MOURAD,	PROF,	U.S.T.H.B,	Examinateur
Mme.	GUETTAI GHANIA,	MCB,	U.Y.F.M,	Examinateur

Promotion 2022

Remerciements

Avant tout nous remercions le tout puisant ALLAH, qui nous a donné la force et la patience nécessaire en vue d'accomplir ce modeste travail, que tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire, trouvent ici l'expression de notre grand et sincère reconnaissance, et tout particulièrement : Mr.M.Sebaoui notre promoteur de mémoire pour avoir accepté de nous encadrer, pour son suivi et ses orientations enrichissante des le commencement jusqu'à la mise en forme de ce mémoire, nous remercions vont également aux membres du jury Mr.M.Rahmani, professeur à l'USTHB, madame G.Guettai et Mr.D.Laissaoui maitre de conférences à l'université Yahia Farès de Médéa pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de faire de jury. Nous remercions chaleureusement tous les enseignants du département de R.O de l'université YAHIA FARÈS, Médéa. Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

♡

Dédicace

.... Ma dédicace....

Á mes très chers parents : Ma Mère , Mon Père, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant soufré et sacrifiés pour que je suis heureuse, pour leur conseils, leurs affection et leurs encouragements, Maman je t'adore, Papa je t'adore.

j e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi,

Et je le dédie :

Á touts les membres de ma famille, mes frères "Sadik" et "Oussama" .

Á mon fiancé "Mohamed" et tout sa famille, mes tantes et ma cousine, surtout ma grand-Mère .

Á mon binôme Khouloud, qui a partagé avec moi tous les beaux moments.

Á touts mes amies et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces année. Je vous aime tous.

Á l'ensemble des étudiants de la promotion de la deuxième année Master. 2022.

Á tous mes enseignants.

★ ★ ★ *Hanan* ★ ★ ★

Dédicace

J'*ai le grand plaisir de dédier se modeste travail :*

Á celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation et de ses dévouements, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi .

Á ma très chère mère .

Á celui qui s'est changé la nuit en jour pour m'assurer les bonnes conditions , qui m'a élevé avec amour et tendresse, qui a toujours cru en moi .

Á mon très chère père .

Á mon très chère frère "ABD- ELKADER" et mes belles sœurs "SELMA", "MERIEM" et "MALEK" qui ont partagé avec moi toute les moments d'émotion ,ils m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours .

Á "HANAN", chère amie avant d'être binôme pour sa patience et sa compréhension au long de ce travail .

Á tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom "GHERNAOUTI" .

Á touts mes amis de promotion de deuxième année Master "RO", toute personne qui occupe une place dans mon cœur .

Á vous cher lecteur .

★ ★ ★ *KHOULOUD* ★ ★ ★

RÉSUMÉ

Ce travail, s'inscrit dans le domaine de la combinatoire énumérative, il porte sur l'étude des polynômes de Fubini. Tel que dans le premier chapitre, nous introduisons les notions de base nécessaires au développement des autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous définissions les polynômes de Fubini et les polynômes de Fubini à deux variables et leurs dégénérés.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la généralisation des polynômes de Fubini et nous donnons les propriétés de base comme les fonctions génératrices, formules explicites, relations de récurrences. Ainsi que quelques liens avec divers polynômes (polynômes de Bell, polynômes de Frobenius-Euler, polynômes de Fubini, polynômes de Fubini à deux variables, ...).

Mots-Clés : Fonctions génératrices, formules explicites, relations de récurrences, combinatoires énumérative, nombres de Stirling, polynômes de Bell, polynômes de Fubini, polynômes de Fubini à deux variables, la transformation de Fubini, la transformation de Fubini généralisée.

ABSTRACT

This work is part of the field of enumerative combinatorics, it focuses on the study of Fubini polynomials. As in the first chapter, we introduce the basic notions necessary for the development of the other chapters.

In the second chapter, we defined Fubini polynomials and two variables Fubini polynomials and their degenerates.

In the third chapter, we present the generalization of Fubini polynomials and we give the basic properties such as generating functions, explicit formulas, recurrence relations. As well as some links with various polynomials (Bell polynomials, Frobenius-Euler polynomials, Fubini polynomials, Fubini polynomials in two variables, ...).

Keywords : Generating functions, explicit formulas, recurrence relations, enumerative combinatorics, Stirling numbers, Bell polynomials, Fubini polynomials, two variables Fubini polynomials, Fubini transform, generalized Fubini transform.

Notations

$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels.
$[\![n]\!]$	l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
$x^{\bar{n}}$	le produit $x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\bar{0}} = 1$.
$x^{\underline{n}}$	le produit $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\underline{0}} = 1$.
$\binom{n}{k}$	le coefficient binomial.
$s(n,k)$	les nombres de Stirling de première espèce signés.
$\mid s(n,k) \mid$	les nombres de Stirling de premiére espèce non signés.
$\left\{ {n \atop k} \right\}$	les nombres de Stirling de deuxième espèce.
$\delta_{n,k}$	symbole de Kronecker égale à 1 si $n = k$ et 0 sinon.
$\left\{ {n \atop m} \right\}_r$	les nombres r-Stirling de deuxième espèce.
$\left\{ {n \atop m} \right\}_\lambda$	les nombres de Stirling de deuxième espèce dégénéres.
$\omega_n(x)$	les polynômes de Fubini.
$\omega_n(x,y)$	les polynômes de Fubini à deux variables.
$\omega_{n,\lambda}(x)$	les polynômes de Fubini dégénérés.
$:=$	égalité par définition (affectation).
$\Im_n(x,y)$	les polynômes de Fubini généralisés.
$\Im_{n,\lambda}(x,y)$	les polynômes de Fubini généralisés dégénérés.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements i

Dédicace ii

Dédicace iii

Résumé iv

Abstract v

Notations vi

Introduction générale 1

1 Notions de base 2
- 1.1 Factorielle montante . . . 2
- 1.2 Factorielle descendante . . . 2
- 1.3 Coefficients binomiaux . . . 2
- 1.4 Les suites classiques . . . 5
  - 1.4.1 Nombres de Stirling de première espèce . . . 6
  - 1.4.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce . . . 8
- 1.5 Nombres r-Stirling de deuxième espèce . . . 11
- 1.6 Les nombres et polynômes de Bell . . . 13
  - 1.6.1 Nombres de Bell . . . 13
  - 1.6.2 Polynômes de Bell . . . 15
- 1.7 Les nombres et polynômes de Bernoulli . . . 16
  - 1.7.1 Nombres de Bernoulli . . . 16
  - 1.7.2 Polynômes de Bernoulli . . . 17
- 1.8 Les nombres et polynômes Eulériens . . . 19
  - 1.8.1 Nombres Eulériens . . . 19
  - 1.8.2 Polynômes Eulériens . . . 20
- 1.9 Polynômes de Frobenius-Euler . . . 21

2 Polynômes de Fubini et polynômes dégénérés 23
- 2.1 Les nombres et polynômes de Fubini . . . 23
  - 2.1.1 Nombres de Fubini . . . 23
  - 2.1.2 Polynômes de Fubini . . . 24
- 2.2 Polynômes de Fubini à deux variables . . . 26
- 2.3 Les polynômes de Fubini dégénérés . . . 28

2.3.1 Polynômes de Fubini dégénérés 30
2.4 Polynômes de Fubini dégénérés à deux variables 32

3 Sur les polynômes de Fubini **35**
3.1 Transformation de Fubini généralisée 35
3.2 Cas particulier (Polynômes de Fubini généralisés) 40
3.3 Polynômes de Fubini généralisés dégénérés 47

Conclusion et Perspectives **49**

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce 8
1.2 Les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce 10
1.3 Les premières valeurs des nombres 2-Stirling de deuxième espèce 12
1.4 Les premières valeurs des nombres 3-Stirling de deuxième espèce 12
1.5 Les premières valeurs des nombres 4-Stirling de deuxième espèce 13
1.6 Les premières valeurs des nombres 5-Stirling de deuxième espèce 13
1.7 Les premières valeurs des nombres de Bell 15
1.8 Polynômes de Bell 16
1.9 Les premières valeurs des nombres de Bernoulli 16
1.10 Polynômes de Bernoulli 17
1.11 Les premières valeurs des nombres Eulériens 20
1.12 Polynômes Eulériens 21
1.13 Polynômes des Frobenius-Euler 22

2.1 Les premières valeurs des nombres de Fubini 24
2.2 Polynômes des Fubini 27

TABLE DES FIGURES

1.1 Triangle de Pascal 4

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire intitulée "Sur les polynômes de Fubini", nous rassemblons plusieurs méthodes utilisées pour déterminer et étudier ces polynômes à savoir, formules explicites, fonctions génératrices, relations de récurrences. L'objectif de ce mémoire est d'étudier la généralisation des polynômes de Fubini avec deux variables.

Ce projet d'étude contient trois chapitres, où :

Chapitre 01 : Notions de base

Dans la première partie, nous aborderons les objets élémentaires dans la combinatoires énumératives à savoir : la factorielle montante, la factorielle descendante et coefficients binomiaux. Ensuite, nous présentons les suites classiques des nombres et polynômes à savoir : les nombres de Stirling de première espèce singés et non signés, les nombres de Stirling de second espèce, les nombres r-Stirling de second espèce, Bell, Bernoulli, . . .etc.

Chapitre 02 : Polynômes de Fubini et dégénérés

Le deuxième chapitre, est important pour la généralisation des polynômes de Fubini, nous introduisons et étudions quelques propriétés deux types des polynômes de Fubini.
Nous avons vu une autre généralisation est appelée "notion de dégénérée", on commence par les nombres de Stirling de second espèce dégénérés par **L. Carlitz** [5] puis nous présentons les polynômes de Fubini dégénérés et quelques propriétés.

Chapitre 03 : Sur les polynômes de Fubini

La généralisation du deuxième chapitre a fait l'objet du troisième chapitre, nous avons étudier la nouvelle classe des polynômes de Fubini appelée les polynômes de Fubini généralisés, cette classe ont été introduits par **M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai, M. Rahmani** [26], nous avons vu dégénérés de cette classe.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments de base qui seront utiles pour la suite, en commençons de rappelant la factorielle montante et descendante, les coefficients binomiaux, les suites classiques (nombres de Stirling, nombres r-Stirling, Bell, Bernoulli, ...etc), les polynômes de Frobenius-Euler et leur propriétés, cette partie est basés sur la référence [11].

1.1 Factorielle montante

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, la factorielle montante de x d'ordre n notée $x^{\bar{n}}$, est définie par :

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} 1, & si\ n = 0, \\ x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), & si\ n \geq 1. \end{cases}$$

Propriétés 1.1.1. *Pour $x \in \mathbb{C}$ et $n, r \in \mathbb{Z}$, on a*

$$x^{\bar{n}} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!}.$$
$$x^{\bar{r}} = (-1)^{\bar{r}}(1-r-x)^{\bar{r}}.$$
$$x^{\overline{n+r}} = x^{\bar{n}}(x+n)^{\bar{r}}.$$

1.2 Factorielle descendante

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, la factorielle descendante de x d'ordre n notée $x^{\underline{n}}$, est définie par :

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} 1, & si\ n = 0, \\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), & si\ n \geq 1. \end{cases}$$

Propriétés 1.2.1. *Pour $x \in \mathbb{C}$ et $n, r \in \mathbb{N}$, on a*

$$x^{\underline{n+r}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{r}}.$$
$$x^{\underline{-r}} = \frac{1}{(x+r)^{\underline{r}}}.$$

1.3 Coefficients binomiaux

Le coefficient binomial noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de façons de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour tout entiers n et k , le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est donné par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.1}$$

avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Exemple 1. *Dans l'ensemble* $[\![6]\!]$*, il y a* 15 *sous-ensembles à deux éléments :*

$$\{1,2\};\{1,3\};\{1,4\};\{1,5\};\{1,6\};\{2,3\};\{2,4\};\{2,5\};\{2,6\};\{3,4\};\{3,5\};\{3,6\};\{4,5\};\{4,6\};\{5,6\}.$$

Par conséquent, $\binom{6}{2} = 15$.

Propriétés 1.3.1. *Pour tout* $1 \leqslant k \leqslant n$*, les coefficients binomiaux satisfont la relation de récurrence de Pascal*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{1.2}$$

Démonstration. Pour démontrer la formule de Pascal (1.2), on utilise le coefficient binomial (1.1) pour la deuxième membre.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!},$$

comme

$$\begin{aligned} k! &= (k-1)!k, \\ (n-k)! &= (n-k-1)!(n-k). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

A partir de la relation (1.2) nous pouvons construite le triangle de Pascal :

$n=0$						1						
$n=1$					1		1					
$n=2$				1		2		1				
$n=3$			1		3		3		1			
$n=4$		1		4		6		4		1		
$n=5$	1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6	1

FIGURE 1.1 – Triangle de Pascal

Théorème 1. ***(Formule du binôme de Newton)*** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{C}$, les coefficients binomiaux apparaissent dans le développement de la puissance n-ième de $x+y$, alors*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}. \tag{1.3}$$

Démonstration. Pour démontrer la formule du binôme de Newton (1.3), en utilisant la méthode de récurrence sur n.

• Pour $n = 0$.

$$(x+y)^0 = 1, \text{ donc } (x+y)^0 \text{ est vraie.}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(x+y)^n$ est vraie et montrons est vraie pour $n+1$, on a

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}.$$

On a

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n.$$

Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \\ &= x\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} + y\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j}.\end{aligned}$$

On fait un changement d'indice $i = j+1$ dans la première somme, puis renommons i en j, on trouve

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j}.$$

On extrait le terme $j = n+1$ de la première somme et le terme $j = 0$ de la deuxième somme, puis réunissons les deux sommes pour $j \in [\![1; n]\!]$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) x^j y^{n+1-j} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Pascal, on obtient

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}.\end{aligned}$$

Alors $(x+y)^{n+1}$ est vraie. □

Théorème 2. ***(Formule de Vandermonde)*** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$, alors*

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}}. \tag{1.4}$$

Démonstration. Pour démontrer la formule (1.4), en utilisant la méthode de récurrence.

- Pour $n = 1$, la formule est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(x+y)^{\underline{n-1}}$ est vraie et montrons $(x+y)^{\underline{n}}$ est vraie, on a

$$(x+y)^{\underline{n-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{\underline{n-1-j}} y^{\underline{j}}.$$

Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(x+y)^{\underline{n}} &= (x+y-n+1)(x+y)^{\underline{n-1}} \\ &= (x+y-n+1) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{\underline{n-1-j}} y^{\underline{j}},\end{aligned}$$

comme

$$(x+y-n+1)x^{\underline{n-1-j}} y^{\underline{j}} = x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}} + x^{\underline{n-1-j}} y^{\underline{j+1}},$$

on obtient successivement

$$\begin{aligned}(x+y)^{\underline{n}} &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{\underline{n-1-j}} y^{\underline{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}} \\ &= x^{\underline{n}} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right) x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}} + y^{\underline{n}}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Pascal (1.2), on obtient

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{\underline{n-j}} y^{\underline{j}}.$$

Alors $(x+y)^{\underline{n}}$ est vraie. □

1.4 Les suites classiques

Nombres de Stirling

Les nombres de Stirling apparaissent dans plusieurs problème combinatoires, il existe deux types nommés, les nombres de Stirling de première espèce signés et non signés et les nombres de Stirling de deuxième espèce [6, 10, 11, 13, 16].

1.4.1 Nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.4.1. *Les nombres de Stirling de première espèce signés, notés $s(n,k)$, sont les coefficients du développement de la factorielle descendante $x^{\underline{n}}$ dans la base canonique x^k, sont définis par :*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.5}$$

Remarque 1.4.1. *Les nombres de Stirling de première espèce non signés $\mid s(n,k) \mid$, sont les coefficients du développement de la factorielle montante $x^{\bar{n}}$, sont définis par :*

$$\begin{aligned} x^{\bar{n}} &= \sum_{k=0}^{n} \mid s(n,k) \mid x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k). \end{aligned}$$

Formule explicite

La formule explicite des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :

$$s(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \frac{1}{i_1 \cdots i_k}.$$

Fonctions génératrices

Théorème 3. *La fonction génératrice double des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :*

$$\sum_{n,k\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k = (1+t)^u. \tag{1.6}$$

Démonstration. Pour démontrer la fonction génératrice (1.6), en utilisant le binôme de Newton (1.3), on a

$$\begin{aligned} (1+t)^u &= \sum_{n\geqslant 0} \binom{u}{n} t^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} u^{\underline{n}} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

De la formule (1.5), on obtient

$$(1+t)^u = \sum_{n,k\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k.$$

Donc

$$\sum_{n,k\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k = (1+t)^u.$$

□

Théorème 4. *La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce est définie par :*

$$\sum_{n\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}. \tag{1.7}$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n,k\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k &= (1+t)^u \\ &= e^{uln(1+t)} \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{(uln(1+t))^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{u^k(ln(1+t))^k}{k!}.\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k\geqslant 0} u^k\left(\sum_{n\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{k\geqslant 0} u^k\frac{(ln(1+t))^k}{k!}.$$

Par identification, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}.$$

□

Relations de récurrences

Pour $n,k\geqslant 1$, les nombres de Stirling de première espèce signés satisfont la relation de récurrence suivante :

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \tag{1.8}$$

et la relation de récurrence horizontal

$$s(n+1,k+1) = \sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}s(n,k),$$

avec la condition initiale

$$s(n,0) = s(0,n) = 0 \quad sauf \quad s(0,0) = 1.$$

Pour les nombres de Stirling de première espèce non signés satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\mid s(n+1,k)\mid = \mid s(n,k-1)\mid + n\mid s(n,k)\mid, \quad k\geqslant 1.$$

Voici les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce signés de cette table s'obtiennent grâce à la récurrence (1.8) :

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	−1	1							
3	2	−3	1						
4	−6	11	−6	1					
5	24	−50	35	−10	1				
6	−120	274	−225	85	−15	1			
7	720	−1764	1624	−735	175	−21	1		
8	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1	
9	40320	−109584	118124	−67284	22449	−4536	546	−36	1

TABLE 1.1 – Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce

1.4.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

Définition 1.4.2. *Le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *est le nombre de partition de l'ensemble* $[\![n]\!]$ *en* k *sous-ensembles disjoint non vides.*

Les coefficients $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *sont les coefficients du monôme* x^n *dans la base* $x^{\underline{k}}$*, sont définis par :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.$$

Exemple 2. *L'exemple suivant illustre l'interprétation des nombres de Stirling de deuxième espèce par définition.*

• *L'ensemble* $[\![4]\!]$ *possède de* 1 *partition en un sous-ensemble non vide :*

$$\{\{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Par conséquent $\left\{ {4 \atop 1} \right\} = 1$.

• *L'ensemble* $[\![4]\!]$ *possède de* 7 *partitions en deux sous-ensembles non vides :*

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}; \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}; \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}; \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}; \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}; \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}; \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}.$$

Par conséquent $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

• *L'ensemble* $[\![4]\!]$ *possède de* 6 *partitions en trois sous-ensembles non vides :*

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}; \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}; \{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}; \{\{2\}, \{3\}, \{1, 4\}\}; \{\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}\}; \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}.$$

Par conséquent $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6$.

• *L'ensemble* $[\![4]\!]$ *possède de* 1 *partition en quatre sous-ensembles non vides :*

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

Par conséquent $\left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1$.

Formule explicite

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la formule explicite des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n. \tag{1.9}$$

Fonctions génératrices

Théorème 5. *Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice exponentielle associé aux nombres de Stirling de second espèce est donnée par :*

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t-1)^k}{k!}. \tag{1.10}$$

Démonstration. Pour démontrer la fonction génératrice (1.10), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n\geqslant 0} \left\{ n \atop k \right\} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \frac{t^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} \sum_{n\geqslant 0} \left((-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \frac{t^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(jt)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} e^{jt} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (e^t)^j.
\end{aligned}$$

D'après la formule de binôme de Newton (1.3), on obtient

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t-1)^k.$$

Donc le théorème est démontré. □

Théorème 6. *La fonction génératrice ordinaire des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ n \atop k \right\} t^n = \prod_{j\geqslant 0}^{k} \frac{t^k}{(1-jt)}.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule (1.9), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant k} \left\{ n \atop k \right\} t^n &= \sum_{n\geqslant 0} \left\{ n \atop k \right\} t^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n \right) t^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (jt)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n\geqslant 0} (jt)^n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} \frac{1}{(1-jt)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n$ est une somme finie des fonctions rationnelles, s'écrit (par réduction à un même dénominateur commun) sous la forme :

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n = \prod_{j\geqslant 0}^{k} \frac{P_k(t)}{(1-jt)}, \tag{1.11}$$

ou P_k est un polynôme de $\mathbb{Q}[\![t]\!]$, de degré $\leqslant k$. Lorsque x est au voisinage de 0, on a :

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n \sim_0 \left\{ {k \atop k} \right\} t^k = t^k.$$

Grâce à (1.11), on obtient

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n \sim_0 P_k(t),$$

il en résulte que $P_k(t) \sim_0 t^k$, ce qui entraîne que $P_k(t) = t^k$. Alors

$$\sum_{n\geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n = \prod_{j\geqslant 0}^{k} \frac{t^k}{(1-jt)}.$$

Alors le théorème est démontré. □

Relations de récurrences

Les nombres de Stirling de deuxième espèce ont la relation de récurrence triangulaire est donnée par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \tag{1.12}$$

et la relation de récurrence horizontale est donnée par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} r^{\underline{r-k}} \left\{ {n+1 \atop r+1} \right\},$$

avec la condition initiale

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \ \left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop k} \right\} = 0.$$

A partir de la relation (1.12), la table suivante donne les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1	1							
3	1	3	1						
4	1	7	6	1					
5	1	15	25	10	1				
6	1	31	90	65	15	1			
7	1	63	301	350	140	21	1		
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TABLE 1.2 – Les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce

Propriétés combinatoires

Les nombres de Stirling de première espèce s'expriment en termes des nombres de Stirling de deuxième espèce par la relation suivante dite de Schlömilch .

$$s(n,k)=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{2n-k}{n-k-i}\binom{n+i-1}{k-1}\left\{\begin{matrix}n-k+i\\ i\end{matrix}\right\}.$$

Ils vérifient aussi les relations d'orthogonalités suivantes

$$\sum_{k=j}^{n}s(n,k)\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}=\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}|s(k,j)|=\delta_{n,k}.$$

1.5 Nombres r-Stirling de deuxième espèce

A. Z. Broder [4] a donné plusieurs identités des nombres r-Stirling et des interprétations combinatoires.

Définition 1.5.1. *Le nombre r-Stirling de deuxième espèce noté $\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}_r$ compte le nombre de partitions de l'ensemble $[\![n]\!]$ en k sous ensembles non vides telles que les r premiers éléments sont dans des sous-ensemble distincts.*

Les nombres r-Stirling de deuxième espèce apparaissent comme les coefficients des polynômes du monôme $(x+r)^n$ c'est-à-dire :

$$(x+r)^n=\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n+r\\ k+r\end{matrix}\right\}_r x^{\underline{k}},\quad pour\quad n\geqslant 0.$$

Pour $r=0$ et $r=1$, on trouve les nombres de Stirling de deuxième espèce classiques

$$\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}_0=\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}_1=\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\},\quad n>0.$$

Formule explicite

La formule explicite des nombres r-Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\left\{\begin{matrix}n+r\\ k+r\end{matrix}\right\}_r=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(r+j)^n.$$

Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices exponentielle et ordinaire des nombres r-Stirling de deuxième espèce sont données respectivement par :

$$\sum_{n\geqslant k}\left\{\begin{matrix}n+r\\ k+r\end{matrix}\right\}_r\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}e^{rt}(e^t-1)^k$$

et

$$\sum_{n\geqslant k}\left\{\begin{matrix}n+r\\ k+r\end{matrix}\right\}_r\frac{t^n}{n!}=\frac{t^k}{(1-rt)(1-(r+1)t)\cdots(1-(r+k)t)},\quad k\geqslant r\geqslant 0.$$

Relations de récurrences

Les nombres de r-Stirling de deuxième espèce sont vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop k} \right\}_r = 0, & n < r, \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = \delta_{k,r}, & n = r, \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_r + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_r, & n > r. \end{cases} \tag{1.13}$$

On a aussi la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop k} \right\}_r = r^{n-r}, \quad n \geqslant r, \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = \left\{ {n \atop k} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_{r-1}. \end{cases}$$

On donne dans les tables suivantes les premières valeurs de ces nombres pour $r = 2$, $r = 3$, $r = 4$ et $r = 5$, en utilisant la relation (1.13).

$n \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1							
3	2	1						
4	4	5	1					
5	8	19	9	1				
6	16	65	55	14	1			
7	32	211	285	215	20	1		
8	64	655	1351	910	245	27	1	
9	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1

TABLE 1.3 – Les premières valeurs des nombres 2-Stirling de deuxième espèce

$n \backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1							
4	3	1						
5	9	7	1					
6	27	37	12	1				
7	81	175	97	18	1			
8	243	781	660	205	25	1		
9	729	3367	4081	1890	380	33	1	
10	2181	14197	23772	15421	4550	644	42	1

TABLE 1.4 – Les premières valeurs des nombres 3-Stirling de deuxième espèce

$n \diagdown k$	4	5	6	7	8	9	10	11
4	1							
5	4	1						
6	16	9	1					
7	64	61	15	1				
8	256	369	151	22	1			
9	1024	2101	1275	305	30	1		
10	4096	11529	9751	3410	545	39	1	
11	16384	61741	70035	33621	7770	896	49	1

TABLE 1.5 – Les premières valeurs des nombres 4-Stirling de deuxième espèce

$n \diagdown k$	5	5	7	8	9	10	11	12
5	1							
6	5	1						
7	25	11	1					
8	125	91	18	1				
9	625	671	217	26	1			
10	3125	4651	2190	425	35	1		
11	15625	31031	19981	5590	740	45	1	
12	78125	201811	170898	64701	12250	1190	56	1

TABLE 1.6 – Les premières valeurs des nombres 5-Stirling de deuxième espèce

1.6 Les nombres et polynômes de Bell

Dans cette partie, on présente les nombres et les polynômes de Bell [15, 23].

1.6.1 Nombres de Bell

Définition 1.6.1. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, les nombres de Bell, notés Φ_n est les nombres total de partitions de l'ensemble $[\![n]\!]$.*

Aussi ils sont définis comme étant la somme des nombres de Stirling de deuxième espèce

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Exemple 3. *L'exemple suivant illustre la signification des nombres de Bell, on a*

$$\Phi_4 = \left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\}.$$

D'après l'Exemple 2, on obtient

$$\Phi_4 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

Fonctions génératrices

Les fonction génératrice des nombres de Bell sont données par :

- La fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geqslant 0} \Phi_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1}. \tag{1.14}$$

• La fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n\geqslant 0}\Phi_n t^n=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{(1-t)\cdots(1-nt)}.$$

Formule de Dobinski

Le nombre de Φ_n est donné par :

$$\Phi_n=e^{-1}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}.$$

Démonstration. Soit f définie sur $\mathbb{R}$, $f(t)=e^{e^t-1}$, d'après la formule (1.14). La fonction f est dérivable sur cet intervalle, on a

$$\begin{aligned}f'(t)&=e^t\times e^{e^t-1}\\&=\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\Phi_n\frac{t^n}{n!}\right).\end{aligned}$$

Par le produit de Cauchy, alors

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Phi_k\right)\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\Phi_k\right)\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\frac{t^k}{k!}\Phi_k\\&=\sum_{k\geqslant 0}\Phi_k\frac{t^k}{k!}\sum_{n\geqslant k}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\\&=f(t)\times e^t.\end{aligned}$$

Donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $f(t)=Ce^{e^t}$. Alors

$$f(t)=e^{-1}\times e^{e^t}.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}e^{e^t}&=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(e^t)^k}{k!}\\&=\sum_{k\geqslant 0}\frac{e^{kt}}{k!}\\&=\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(kt)^n}{k!n!}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$e^{e^t-1}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}\right)e^{-1}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{n\geqslant 0}\Phi_n\frac{t^n}{n!}=e^{e^t-1}.$$

Alors

$$\sum_{n\geqslant 0}\Phi_n\frac{t^n}{n!}=e^{-1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}\right).$$

Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\Phi_n=e^{-1}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}.$$

□

Relation de récurrence

Les nombres de Bell sont vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\Phi_0=1,\quad \Phi_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Phi_k.$$

Les premières valeurs de Φ_n sont données dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

TABLE 1.7 – Les premières valeurs des nombres de Bell

1.6.2 Polynômes de Bell

Définition 1.6.2. *Pour $n\in\mathbb{N}$, les polynômes de Bell $\Phi_n(x)$ sont définis par :*

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}x^k. \tag{1.15}$$

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bell est donnée par :

$$\sum_{n\geqslant 0}\Phi_n(x)\frac{t^n}{n!}=e^{x(e^t-1)}. \tag{1.16}$$

Formule de Dobinski

Les polynômes $\Phi_n(x)$ sont donnés par :

$$\Phi_n(x)=e^{-x}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}x^k.$$

Relation de récurrence

Les polynômes $\Phi_n(x)$ sont vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\Phi_n(0)=0,\quad \Phi_{n+1}(x)=x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Phi_k(x).$$

Voici les premières polynômes de Bell sont :

n	$\Phi_n(x)$
0	1
1	x
2	$x + x^2$
3	$x + 3x^2 + x^3$
4	$x + 7x^2 + 6x^3 + x^4$

TABLE 1.8 – Polynômes de Bell

1.7 Les nombres et polynômes de Bernoulli

Dans cette partie, nous présentons les nombres de Bernoulli et aussi les polynômes de Bernoulli [2, 9, 26].

1.7.1 Nombres de Bernoulli

Définition 1.7.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres de Bernoulli, notés B_n sont définis par :*

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Les premières valeurs des nombres de Bernoulli sont données dans le table suivant

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	-1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	-1/30	0	5/66

TABLE 1.9 – Les premières valeurs des nombres de Bernoulli

Tout les nombres de Bernoulli sont rationnels.

Formule explicite

La formule explicite des nombres de Bernoulli est donnée par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^k \frac{k!}{k+1}.$$

Fonction génératrice

La fonction génératrice des nombres de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}, \quad |\, t \,| < 2\pi.$$

Relation de récurrence

La relation de récurrence des nombres de Bernoulli est donnée par :

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0. \tag{1.17}$$

1.7.2 Polynômes de Bernoulli

Définition 1.7.2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes de Bernoulli, notés $B_n(x)$ sont définis par :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k},$$

avec $B_n(0) = B_n$.

Pour $0 \leqslant n \leqslant 5$, on donne dans le tableau suivant les premières polynômes de $B_n(x)$.

n	$B_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

TABLE 1.10 – Polynômes de Bernoulli

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}, \quad |\, t \,| < 2\pi. \tag{1.18}$$

Théorème 7. *Pour $n > 0$, on a*

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x).$$

Démonstration. De la fonction génératrice (1.18), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} B_n(x+1)\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{t(x+1)}}{e^t - 1} \\
&= \frac{te^{tx}e^t}{e^t - 1} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}e^t \\
&= \left(\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} B_k(x)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on obtient

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x).$$

□

Proposition 1.7.1. *Pour $n \geqslant 1$,*

1) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

2) $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$.

3) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$.

Démonstration.

1) De la fonction génératrice (1.18), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} B_n(1-x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{t(1-x)}}{e^t-1}\\ &= \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}}\\ &= \frac{-te^{-tx}}{e^{-t}-1}\\ &= \sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{(-t)^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

2) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)dx &= \int_0^1 \frac{te^{tx}}{e^t-1}dx\\ &= \frac{t}{e^t-1}\int_0^1 e^{tx}dx\\ &= \frac{t}{e^t-1}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^1\\ &= \frac{t}{e^t-1}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \left(\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)dx = 1. \tag{1.19}$$

Donc, en résulte l'identité

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 1.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^1 \left(\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right) dx = \int_0^1 B_0(x)dx + \sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.20}$$

De les formules (1.19) et (1.20), on obtient

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 0.$$

D'où la démonstration.

3) On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right) &= \frac{d}{dx}\frac{te^{tx}}{e^t-1}\\ &= \frac{t^2e^{tx}}{e^t-1}\\ &= t\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 1} B_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right) &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{dB_n(x)}{dx}\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0} B_n'(x)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n'(x)}{n}\frac{t^n}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n\geqslant 1} B_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{B_n'(x)}{n}\frac{t^n}{(n-1)!}.$$

Par l'identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{(n-1)!}$, alors

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x).$$

□

1.8 Les nombres et polynômes Eulériens

Dans cette partie, nous présentons les nombres et les polynômes Eulériens [10, 12, 14].

1.8.1 Nombres Eulériens

Définition 1.8.1. *Le nombre Eulérien, noté $A_{n,k}$ compte le nombre des n-permutations qui $k-1$ descentes, en développant x^n en somme de coefficient binomiaux, on obtient la relation suivant :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\binom{x+k-1}{n}, \quad n\geqslant 0.$$

Formule explicite

Les nombres Eulériens $A_{n,k}$, sont définis par la formule explicite suivante :

$$A_{n,k} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

Relation de récurrence

La relation de récurrence des nombres Eulériens est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= 0, && n \leqslant k, \\ A_{n,k} &= (k+1)A_{n-1,k} + (n-k)A_{n-1,k-1}, && 1 \leqslant k \leqslant n-1, \end{aligned}$$

avec $A_{n,0} = A_{n,n-1} = 1$.

Voici les premières valeurs des nombres Eulériens sont.

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

TABLE 1.11 – Les premières valeurs des nombres Eulériens

1.8.2 Polynômes Eulériens

Définition 1.8.2. *Les polynômes Eulériens, notés $A_n(x)$ sont définis par :*

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} x^k.$$

Formule explicite

La formule explicite des polynômes Eulériens est donnée par :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k(x)(x-1)^{n-1-k}.$$

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes Eulériens est donnée par :

$$\sum_{n \geqslant 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{x-1}{x - e^{(x-1)t}}. \tag{1.21}$$

Relation de récurrence

Les polynômes Eulériens satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 1, \\ A_{n+1}(x) &= (1+nx)A_n(x) + x(1-x)A_n'(x), \quad n > 1. \end{aligned}$$

Les premières polynômes Eulériens pour $n \leqslant 6$, sont :

n	$A_n(x)$
0	1
1	1
2	$1+x$
3	$1+4x+x^2$
4	$1+11x+11x^2+x^3$
5	$1+26x+66x^2+26x^3+x^4$
6	$1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5$

TABLE 1.12 – Polynômes Eulériens

Théorème 8. ***(Frobenius)***

$$A_n(x) = x\sum_{k=1}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} (x-1)^{n-k}.$$

Identité

Une identité due à Euler est :

$$\sum_{k\geqslant 0} k^n x^k = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \tag{1.22}$$

1.9 Polynômes de Frobenius-Euler

Dans cette partie, nous définissions les nombres et les polynômes de Frobenius-Euler [1, 7, 19, 29].

Définition 1.9.1. *Soit $u \in \mathbb{C}$ avec $u \neq 1$, les polynômes de Frobenius-Euler sont définis par la fonction génératrice, comme suit :*

$$\sum_{n\geqslant 0} H_n(x;u)\frac{t^n}{n!} = \frac{1-u}{e^t-u}e^{xt}. \tag{1.23}$$

Dans les cas :

(i) Pour $u = -1$ dans (1.23), on obtient la fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Euler $E_n(x)$.

(ii) Pour $x = 0$, $H_n(0;u) = H_n(u)$ sont appelés les nombres de Frobenius-Euler, on obtient

$$H_n(x;u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} H_k(u), \quad \textit{pour} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{1.24}$$

(iii) Pour $u = -1$ et $x = 0$ dans (1.23), on obtient la fonctions génératrices des nombres d'Euler notés E_n.

La relation de récurrence des nombres de Frobenius-Euler, par (1.23) et (1.24), est donnée par :

$$(H(u)+1)^n - uH_n(u) = \begin{cases} 1-u, & n=0, \\ 0, & n>0, \end{cases}$$

avec $H_0(u) = 1$.

Relation de récurrence

Pour $n \geqslant 1$, la relation de récurrence des polynômes de Frobenius-Euler est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x;u) - uH_n(x;u) = (1-u)x^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

avec $H_0(x;u) = 1$.

Les polynômes de Frobenius-Euler sont :

n	$H_n(x;y)$
0	1
1	$x - \frac{1}{1-u}$
2	$x^2 - \frac{2}{1-u}x + \frac{1+u}{(1-u)^2}$
3	$x^3 - \frac{3}{1-u}x^2 + \frac{3(1+u)}{(1-u)^2}x - \frac{u^2+4u+1}{(1-u)^3}$

TABLE 1.13 – Polynômes des Frobenius-Euler

CHAPITRE 2

POLYNÔMES DE FUBINI ET POLYNÔMES DÉGÉNÉRÉS

Le but de ce chapitre est défini les nombres et polynômes de Fubini, les polynômes de Fubini à deux variables, aussi les polynômes de Fubini dégénérés, a donné quelques propriétés et les relations de récurrences pour ces polynômes.

2.1 Les nombres et polynômes de Fubini

Dans cette partie, nous définissons et nous étudions les nombres et polynômes de Fubini [3, 17, 25, 28].

2.1.1 Nombres de Fubini

Définition 2.1.1. *Pour $n \geqslant 0$, les nombres de Fubini sont définis par :*

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} k!.$$

Fonction génératrice

La fonction génératrice des nombres de Fubini est donnée par :

$$\sum_{n\geqslant 0} \omega_n \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2-e^t}.$$

En particulier, pour $x = 0$ et $u = 2$ dans la fonction génératrice (1.23), on obtient la relation entre les nombres de Fubini et les polynômes de Frobenius-Euler

$$\omega_n = H(0;2).$$

Corollaire 1. *Pour $n > 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \omega_k \omega_{n-k} = \begin{cases} 0, & si\ n\, est\, impair, \\ \frac{4}{3}\omega_n, & si\ n\, est\, paire. \end{cases}$$

Relations de récurrences

Les deux relations de récurrences des nombres de Fubini sont données par :

$$2\omega_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_k$$

et

$$2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \omega_k = (-1)^n \omega_n + 1.$$

Les premières valeurs des nombres de Fubini sont donnés dans la table suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ω_n	1	1	3	13	75	541	4683	47293	545835	7087261

TABLE 2.1 – Les premières valeurs des nombres de Fubini

2.1.2 Polynômes de Fubini

Définition 2.1.2. *Pour $n \geqslant 0$, les polynômes de Fubini sont définis par :*

$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} k! x^k, \tag{2.1}$$

avec $\omega_n(1) = \omega_n$, $\omega_n(-2) = (-1)^n 2\omega_n$.

Formule explicite

La formule explicite des polynômes de Fubini est donnée par :

$$\omega_n(x) = x \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n+k} k! (x+1)^{k-1}.$$

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Fubini est donnée par :

$$\sum_{n \geqslant 0} \omega_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1 - x(e^t - 1)}. \tag{2.2}$$

En particulier, pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient les nombres d'Euler E_n.

Proposition 2.1.1. *On a*

$$\omega_{n+1}(x) = x \frac{d}{dx} \left(\omega_n(x) + x\omega_n(x) \right).$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice (2.2), on a

$$\omega_n(x) + x\omega_n(x) = \frac{x+1}{1 - x(e^t - 1)}. \tag{2.3}$$

Pour dérivé la formule (2.3), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(\omega_n(x)+x\omega_n(x)\Big) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{1-x(e^t-1)}\right)\\ &= \frac{e^t}{\Big(1-x(e^t-1)\Big)^2}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}x\frac{d}{dx}\Big(\omega_n(x)+x\omega_n(x)\Big) &= x\frac{e^t}{\Big(1-x(e^t-1)\Big)^2}\\ &= \frac{xe^t}{\Big(1-x(e^t-1)\Big)^2}\\ &= \omega_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\omega_{n+1}(x) = x\frac{d}{dx}\Big(\omega_n(x)+x\omega_n(x)\Big).$$

Alors le résultat. □

Propriétés 2.1.1.

1) La relation entre les polynômes de Fubini et les nombres de Bernoulli est donnée par :

$$\int_{-1}^{0}\omega_n(x)dx = B_n, \quad n>0.$$

2) On a

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geqslant 0}x^k k^n = \frac{1}{1-x}\omega_n\left(\frac{x}{1-x}\right). \tag{2.4}$$

D'après les formules (1.22) et (2.4), on obtient la relation entre les polynômes Eulériens et les polynômes de Fubini est donnée par :

$$A_n(x) = (1-x)^n\omega_n\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

3) Pour $x=\frac{1}{2}$ dans la formule (2.4), on a

$$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{2^k}.$$

Proposition 2.1.2. *La relation entre les polynômes de Fubini et les polynômes de Bell est définie par :*

$$\omega_n(x) = \int_0^{\infty}\Phi_n(x\lambda)e^{-\lambda}d\lambda \tag{2.5}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 0}\omega_n(x)\frac{t^n}{n!} = \int_0^{\infty}e^{-\lambda(1-x(e^t-1))}.$$

Démonstration. D'après la définition (1.15), on a

$$\Phi_n(x\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x\lambda)^k, \tag{2.6}$$

puis en multipliant la formule (2.6) par $e^{-\lambda}$, on trouve

$$e^{-\lambda}\Phi_n(x\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x\lambda)^k,$$

on fait l'intégrale à deux cotés, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda}\Phi_n(x\lambda)d\lambda &= \int_0^\infty \left(e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x\lambda)^k \right) d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k \int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k d\lambda. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k d\lambda = k!.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda}\Phi_n(x\lambda)d\lambda &= \sum_{k\geqslant 0} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k k! \\ &= \omega_n(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\omega_n(x) = \int_0^\infty \Phi_n(x\lambda)e^{-\lambda}d\lambda.$$

□

Relations de récurrences

Les polynômes de Fubini satisfont les deux relations de récurrences suivantes :

$$\omega_n(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$\omega_n(x) = (-1)^{n+1}(1+x)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \omega_k(x) - \frac{1}{x} \right), \quad n \geqslant 0.$$

Voici les premières polynômes de Fubini sont :

2.2 Polynômes de Fubini à deux variables

Dans cette partie, nous définissons les polynômes de Fubini à deux variables, notés $\omega_n(x, y)$, et obtenons quelques propriétés de base [17, 27].

Définition 2.2.1. *La fonction génératrice des polynômes de Fubini à deux variables est donnée par :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \omega_n(x, y)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)}. \tag{2.7}$$

n	$\omega_n(x)$
0	1
1	x
2	$x + 2x^2$
3	$x + 6x^2 + 6x^3$
4	$x + 14x^2 + 36x^3 + 24x^4$

TABLE 2.2 – Polynômes des Fubini

En particulier, pour $x = 0$ dans la fonction génératrice (2.7), on obtient les polynômes de Fubini.

$$\omega_n(0, y) = \omega_n(y)$$

et pour $y = -\frac{1}{2}$ dans la fonction génératrice (2.7), on obtient les polynômes d'Euler notés $E_n(x)$.

Proposition 2.2.1. *La relation entre les polynômes de Fubini à deux variables et les polynôme de Fubini est donnée par :*

$$\omega_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_k(y) x^{n-k}.$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice (2.7), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} \omega_n(x, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{1 - y(e^t - 1)} e^{xt} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \omega_n(y) \frac{t^n}{n!} \sum_{n\geqslant 0} x^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \omega_k(y) x^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\omega_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_k(y) x^{n-k}.$$

□

Propriétés 2.2.1. *Pour $n > 0$, on a*

$$y\omega_n(x + 1, y) = (1 + y)\omega_n(x, y) - x^n.$$

Démonstration. Pour démontrer cette propriétés, on utilise la fonction génératrice (2.7), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} \Big(\omega_n(x + 1, y) - \omega_n(x, y)\Big) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{xt}(e^t - 1)}{1 - y(e^t - 1)} \\
&= \frac{1}{y} \left(\frac{e^{xt} y(e^t - 1) - e^{xt} + e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} \right) \\
&= \frac{1}{y} \left(\frac{e^{xt} - e^{xt}(1 - y(e^t - 1))}{1 - y(e^t - 1)} \right) \\
&= \frac{1}{y} \left(\frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} - e^{xt} \right) \\
&= \frac{1}{y} \sum_{n\geqslant 0} \Big(\omega_n(x, y) - x^n\Big) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$y\Big(\omega_n(x+1,y)-\omega_n(x,y)\Big)=\omega_n(x,y)-x^n.$$

Alors

$$y\omega_n(x+1,y)=(1+y)\omega_n(x,y)-x^n.$$

□

Théorème 9. *Les polynômes de Fubini à deux variables satisfont la relation suivante :*

$$\omega_n(x+z,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega_{n-k}(x,y)z^k.$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, on utilise la fonction génératrice (2.7), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\omega_n(x+z,y)\frac{t^n}{n!}&=\frac{e^{(x+z)t}}{1-y(e^t-1)}\\&=\frac{e^{xt}}{1-y(e^t-1)}e^{zt}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\omega_n(x,y)\frac{t^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}z^n\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega_{n-k}(x,y)z^k\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\omega_n(x+z,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega_{n-k}(x,y)z^k.$$

□

2.3 Les polynômes de Fubini dégénérés

Dans cette partie, en commençant par la fonction exponentielle dégénérés et les nombres de Stirling de deuxième espèce dégénérés, en suite on définit les polynômes de Fubini dégénérés, nous donnons plusieurs propriétés pour ces polynômes. Pour plus détaillées, consulter les références [5, 18, 20, 22, 24].

Définition 2.3.1. *Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction exponentielle dégénérée est définie par :*

$$e_\lambda^t=(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

La fonction génératrice exponentielle dégénérée est donnée par :

$$e_\lambda^{xt}=(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{k\geqslant 0}x^{\underline{n,\lambda}}\frac{t^n}{n!},\tag{2.8}$$

telle que la factorielle descendante dégénérée est définie par :

$$x^{\underline{n,\lambda}}=x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda),\quad n\geqslant 1.$$

Définition 2.3.2. *Pour $n \geqslant 0$, les nombres de Stirling de deuxième espèce dégénérés, notés $\left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda$ sont les coefficients de la factorielle descendante dégénérée, sont définis par :*

$$x^{\underline{n,\lambda}} = \sum_{k \geqslant 0} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda x^{\underline{k}}.$$

Formule explicite : *Pour $n \geq k$, la formule explicite des nombres de Stirling de deuxième espèce dégénérés est donnée par :*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} l^{\underline{n,\lambda}}. \tag{2.9}$$

Fonction génératrice : *Pour $n \geqslant 0$, la fonction génératrice des nombres de Stirling de deuxième espèce dégénérés est donnée par :*

$$\sum_{n,k \geqslant 0} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} ((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1)^k. \tag{2.10}$$

Définition 2.3.3. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les polynômes de Bell dégénérés, notés $\Phi_{n,\lambda}(x)$ sont donnés par :*

$$\Phi_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda. \tag{2.11}$$

Fonction génératrice : *La fonction génératrice des polynômes de Bell dégénérés est définie par :*

$$\sum_{n \geqslant 0} \Phi_{n,\lambda}(x) \frac{t^n}{n!} = (1+\lambda)^{\frac{x}{\lambda}} \left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 \right). \tag{2.12}$$

Propriétés 2.3.1.

1) On a

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda = \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

2) Pour $n, k \geqslant 0$, la formule qui représente la relation entre les nombres de Stirling de deuxième espèce dégénérés et les nombres de Stirling est donnée par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda = \sum_{m=k}^{n} \lambda^{n-m} \left\{ {m \atop k} \right\} s(n,m).$$

Démonstration.

1) Pour démontrer cette propriétés, on utilise la fonction génératrice (2.8), on a

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} e_\lambda^{xt} = \sum_{k \geqslant 0} \left(\lim_{\lambda \longrightarrow 0} x^{\underline{n,\lambda}} \frac{t^n}{n!} \right),$$

comme

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} e_\lambda^{xt} = e^{xt}$$

et

$$\sum_{k \geqslant 0} \left(\lim_{\lambda \longrightarrow 0} x^{\underline{n,\lambda}} \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{k \geqslant 0} x^{\underline{n}} \frac{t^n}{n!}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n,k\geqslant 0}\left(\lim_{\lambda\longrightarrow 0}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}\frac{t^n}{n!}\right) &= \lim_{\lambda\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{k!}((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)^k\right)\\ &= \lim_{\lambda\longrightarrow 0}\left(\frac{(e^{\frac{1}{\lambda}ln(1+\lambda t)}-1)^k}{k!}\right)\\ &= \frac{(e^t-1)^k}{k!}\\ &= \sum_{n,k\geqslant 0}\left\{{n\atop k}\right\}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}=\left\{{n\atop k}\right\}.$$

2) D'après la fonction génératrice (2.10), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n,k\geqslant 0}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)^k\\ &= \frac{1}{k!}(e^{\frac{1}{\lambda}ln(1+\lambda t)}-1)^k\\ &= \sum_{m,k\geqslant 0}\left\{{m\atop k}\right\}\lambda^{-m}\frac{(ln(1+\lambda t))^m}{m!}.\end{aligned}$$

On utilise la fonction génératrice (1.7), on obtient

$$\begin{aligned}&= \sum_{m,k\geqslant 0}\left\{{m\atop k}\right\}\lambda^{-m}\sum_{n,m\geqslant 0}s(n,m)\frac{\lambda^n t^n}{n!}\\ &= \sum_{n,k\geqslant 0}\left(\sum_{m=k}^{n}\left\{{m\atop k}\right\}\lambda^{n-m}s(n,m)\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on trouve

$$\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}=\sum_{m=k}^{n}\lambda^{n-m}\left\{{m\atop k}\right\}s(n,m).$$

□

2.3.1 Polynômes de Fubini dégénérés

Définition 2.3.4. *Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, les polynômes de Fubini dégénérés sont définis par la fonction génératrice suivante :*

$$\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{1-x((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)}. \tag{2.13}$$

Propriétés 2.3.2. *Plusieurs propriétés des polynômes de Fubini dégénérés sont donnés par :*

1) On a

$$\omega_{n,\lambda}(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k k!\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}.$$

2) Pour $n\geqslant 0$, on a

$$\frac{1}{1-x}\omega_{n,\lambda}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\sum_{k\geqslant 0}x^k k^{\underline{n,\lambda}}. \tag{2.14}$$

3) Pour $x = \frac{1}{2}$ dans la formule (2.14), on obtient

$$\omega_{n,\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^{\underline{n,\lambda}}}{2^k}.$$

Démonstration. Pour démontrer les propriétés suivants, en utilisant la fonction génératrice (2.13).

1) D'après la fonction génératrice, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{1-x((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}x^k\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^k\\ &= \sum_{k\geqslant 0}x^k k!\sum_{n,k\geqslant 0}\left\{{n \atop k}\right\}_\lambda\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k\geqslant 0}x^k k!\left\{{n \atop k}\right\}_\lambda\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\omega_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n}x^k k!\left\{{n \atop k}\right\}_\lambda.$$

2) On a

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)}\right), \tag{2.15}$$

comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)}\right) &= \frac{1}{1-x(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}x^k(1+\lambda t)^{\frac{k}{\lambda}}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k\geqslant 0}x^k k^{\underline{n,\lambda}}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1)}\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k\geqslant 0}x^k k^{\underline{n,\lambda}}\right)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.16}$$

Donc

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k\geqslant 0}x^k k^{\underline{n,\lambda}}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\frac{1}{1-x}\omega_{n,\lambda}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sum_{k\geqslant 0}x^k k^{\underline{n,\lambda}}.$$

□

2.4 Polynômes de Fubini dégénérés à deux variables

Définition 2.4.1. *Pour $n > 0$, les polynômes de Fubini dégénérés à deux variables, notés $\omega_{n,\lambda}(x,y)$ sont définis par :*

$$\omega_{n,\lambda}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_{k,\lambda}(y) x^{\underline{n-k,\lambda}}. \tag{2.17}$$

Fonction génératrice : *La fonction génératrice des polynômes de Fubini dégénérés à deux variables est donnée par :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \omega_{n,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!} = \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}}{1-y\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}. \tag{2.18}$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient les polynômes de Fubini dégénérés

$$\omega_{n,\lambda}(0,y) = \omega_{n,\lambda}(y).$$

Proposition 2.4.1. *Pour $n > 0$, on a*

$$y\omega_{n,\lambda}(x+1,y) = (y+1)\omega_{n,\lambda}(x,y) - x^{\underline{n,\lambda}}. \tag{2.19}$$

En particulier, pour $x = 0$ dans la formule (2.19), on obtient

$$y\omega_{n,\lambda}(1,y) = (y+1)\omega_{n,\lambda}(y).$$

Propriétés 2.4.1.

1) Pour $n \geqslant 0$, on a

$$\omega_{n,\lambda}(x,y-1) = (-1)^n \omega_{n,-\lambda}(1-x,-y). \tag{2.20}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$,on a

$$\omega_{n,\lambda}(y) = y\sum_{k=0}^{n} k!(-1)^{n+k}(y+1)^{k-1}\left\{ {n \atop k} \right\}_{-\lambda}.$$

Démonstration.

1) D'après la fonction génératrice (2.18), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}(x,y-1)\frac{t^n}{n!} &= \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}}{1-(y-1)\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}\\
&= \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}}{1-y\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}\\
&= \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}}{-y(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+y+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}\\
&= \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\left(-y+\frac{y}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}+1\right)}\\
&= \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x-1}{\lambda}}}{-y+\frac{y}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}+1}\\
&= \frac{(1+\lambda t)^{\frac{x-1}{\lambda}}}{1+y\left((1+\lambda t)^{\frac{-1}{\lambda}}-1\right)}\\
&= \frac{\Big(1+(-\lambda)(-t)\Big)^{-\frac{x-1}{-\lambda}}}{1+y\left(\Big(1+(-\lambda)(-t)\Big)^{\frac{1}{-\lambda}}-1\right)}\\
&= \frac{\Big(1+(-\lambda)(-t)\Big)^{\frac{1-x}{-\lambda}}}{1-(-y)\left(\Big(1+(-\lambda)(-t)\Big)^{\frac{1}{-\lambda}}-1\right)}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,-\lambda}(1-x,-y)\frac{(-t)^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,-\lambda}(1-x,-y)(-1)^n\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\omega_{n,-\lambda}(1-x,-y)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\omega_{n,\lambda}(x,y-1)=(-1)^n\omega_{n,-\lambda}(1-x,-y).$$

2) Pour $n>0$, si $x=0$ dans la formule (2.20), on obtient

$$\omega_{n,\lambda}(y-1)=(-1)^n\omega_{n,-\lambda}(1,-y)=(-1)^n\left(\frac{y-1}{y}\right)\omega_{n,-\lambda}(-y). \tag{2.21}$$

On remplace y par $y+1$ dans la formule (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}
\omega_{n,\lambda}(y) &= (-1)^n\frac{y}{y+1}\omega_{n,-\lambda}(-1-y)\\
&= (-1)^n\frac{y}{y+1}\sum_{k=0}^{n}k!(-1-y)^k\left\{{n \atop k}\right\}_{-\lambda}\\
&= (-1)^n\frac{y}{y+1}\sum_{k=0}^{n}k!(-1)^k(y+1)^k\left\{{n \atop k}\right\}_{-\lambda}\\
&= y\sum_{k=0}^{n}k!(-1)^{n+k}(y+1)^{k-1}\left\{{n \atop k}\right\}_{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\omega_{n,\lambda}(y) = y \sum_{k=0}^{n} k!(-1)^{n+k}(y+1)^{k-1} \left\{ {n \atop k} \right\}_{-\lambda}.$$

Donc le résultat. □

CHAPITRE 3

SUR LES POLYNÔMES DE FUBINI

Introduction

Le but de ce chapitre "Sur les polynômes de Fubini", on utilise la transformation de Fubini pour généraliser les polynôme de Fubini. L'idée est de construire une matrice infinie $M := (a_{n,m})_{n,m\geqslant 0}$ dont la suite initiale $a_{0,m} := \alpha_m$ est la première ligne de la matrice et la suite finale $a_{n,0} := \beta_n$ est la première colonne.

En 2001, Kwang-Wu Chen [8] a donné un algorithme pour le calcul des nombres de Bernoulli, avec les caractéristique suivantes

$$a_{n+1;m} = -(m+1)a_{n,m+1} + ma_{n,m}, \tag{3.1}$$

avec la condition

$$a_{0,m} = \frac{1}{m+1}.$$

Dans ce chapitre, la généralisation de la transformation de Fubini (3.1), ce qui revient à étudier la relation de récurrence à trois termes

$$a_{n+1,m}(x,y) = x(m+1)a_{n,m+1}(x,y) + yma_{n,m}(x,y). \tag{3.2}$$

Pour ce qui suit, nous proposons de généraliser la transformation de Fubini en construisant des polynômes formant les colonnes de la matrice M.

3.1 Transformation de Fubini généralisée

Dans cette partie, on va généraliser la transformation de Fubini [26]. Rappelons que la transformation de Fubini d'une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$, définie par la formule suivante :

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} z^k \alpha_k.$$

Sa transformation inverse est donnée par :

$$\alpha_n = \frac{1}{n! z^n} \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\beta_k.$$

Formule explicite

Théorème 10. *Définir la matrice M associée à la suite initiale par la relation de récurrence (3.2), et donné une suite initiale $(a_{0,m})_{m\geqslant 0}$.*
Les éléments de la matrice M sont données par :

$$a_{n,m}(x,y) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m (k+m)! y^{n-k} x^k a_{0,m+k}. \tag{3.3}$$

Démonstration. Pour démontrer cette formule, on utilise la démonstration par récurrence.

- Pour $n = 0$, le résultat est vrai.
- On suppose que la formule (3.3) est vraie pour n et on montre quelle est vraie pour $n+1$. De la relation de récurrence (3.2), on a

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m}(x,y) &= x(m+1)a_{n,m+1}(x,y) + ymaa_{n,m}(x,y) \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m+1 \atop k+m+1} \right\}_{m+1} (k+m+1)! x^{k+1} y^{n-k} a_{0,m+k+1} \\
&+ \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m (k+m)! x^k y^{n-k+1} a_{0,m+k} \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n+m+1 \atop k+m+1} \right\}_{m+1} (k+m+1)! x^{k+1} y^{n-k} a_{0,m+k+1} \\
&+ m\left\{ {n+m \atop m} \right\}_m y^{n+1} a_{0,m} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m (k+m)! x^k y^{n-k+1} a_{0,m+k} \\
&+ \frac{1}{m!}\left\{ {n+m+1 \atop n+m+1} \right\}_{m+1} (n+m+1)! x^{n+1} a_{0,m+n+1} \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n+m+1 \atop k+m} \right\}_{m+1} (k+m)! x^k y^{n-k+1} a_{0,m+k} \\
&+ m\left\{ {n+m \atop m} \right\}_m y^{n+1} a_{0,m} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m (k+m)! x^k y^{n-k+1} a_{0,m+k} \\
&+ \frac{1}{m!}\left\{ {n+m+1 \atop n+m+1} \right\}_{m+1} (n+m+1)! x^{n+1} a_{0,m+n+1}.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
x(m+1)a_{n,m+1} + ymaa_{n,m} &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+m+1 \atop k+m} \right\}_m (k+m)! x^k y^{n-k+1} a_{0,m+k} \\
&= a_{n+1,m}.
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du théorème.

□

Théorème 11. *Définir la matrice M associée à la suite finale, et donné la suite finale $(a_{n,0})_{n\geqslant 0}$, on a*

$$a_{n,m+1}(x,y) = \frac{1}{x(m+1)}(a_{n+1,m}(x,y) - ymaa_{n,m}(x,y)). \tag{3.4}$$

Alors, les éléments de la matrice M sont données par

$$a_{n,m}(x,y) = \frac{y^m}{x^m m!}\sum_{k=0}^{m} y^{-k} s(m,k) a_{n+k,0}. \tag{3.5}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur m .

- Pour $m = 0$, la formule (3.5) est vraie.
- On utilise la formule (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(m+1)}\Big(a_{n+1,m} - yma_{n,m}\Big) &= \frac{y^m}{x^{m+1}(m+1)!}\left(\sum_{k=0}^{m} y^{-k}s(m,k)a_{n+k+1,0} - ym\sum_{k=0}^{m} y^{-k}s(m,k)a_{n+k,0}\right)\\ &= \frac{y^m}{x^{m+1}(m+1)!}\left(y^{-m}s(m,m)a_{n+m+1,0} + \sum_{k=1}^{m} y^{-k+1}s(m,k-1)a_{n+k,0}\right)\\ &- \frac{y^m}{x^{m+1}(m+1)!}\left(m\sum_{k=1}^{m} y^{-k+1}s(m,k)a_{n+k,0} + mys(m,0)a_{n,0}\right).\end{aligned}$$

D'après la formule (1.8) on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(m+1)}\Big(a_{n+1,m} - yma_{n,m}\Big) &= \frac{y^{m+1}}{x^{m+1}(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1} y^{-k}s(m+1,k)a_{n+k,0}\\ &= a_{n,m+1}.\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve.

□

Fonction génératrice

Le lemme suivant est utile dans la démonstration du théorème suivant

Lemme 1. *On a*

$$\frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dT}\right)^s T^{k+s} = \binom{k+s}{s}T^k. \tag{3.6}$$

Théorème 12. *Supposons que la suite initiale $a_{0,m+s}$, a la fonction génératrice ordinaire*

$$A_s(t) = \sum_{k\geqslant 0} a_{0,k+s}t^k. \tag{3.7}$$

Alors la suite $(a_{n,s}(x))_{n\geqslant 0}$ de la s-ième colonne de la matrice M, a une fonction génératrice exponentielle

$$B_s(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_{n,s}\frac{t^n}{n!}, \tag{3.8}$$

donnée par la formule suivante

$$B_s(t;x,y) = \frac{e^{sty}}{s!}\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right]. \tag{3.9}$$

Démonstration. On utilise la formule (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}B_s(t;x,y) &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n+s \atop k+s}\right\}_s (k+s)!x^k y^{n-k}a_{0,s+k}\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+s)!}{s!}\left(\frac{x}{y}\right)^k a_{0,s+k}\sum_{n\geqslant k}\left\{{n+s \atop k+s}\right\}_s \frac{(ty)^n}{n!}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+s)!}{s!}\left(\frac{x}{y}\right)^k a_{0,s+k}\frac{1}{k!}e^{sty}(e^{ty}-1)^k\\ &= e^{sty}\sum_{k\geqslant 0}\binom{k+s}{s}a_{0,s+k}\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)^k.\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.6) président

$$\frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dT}\right)^s T^{k+s} = \binom{k+s}{s} T^k$$

$$\frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dT}\frac{dt}{dt}\right)^s T^{k+s} = \binom{k+s}{s} T^k. \tag{3.10}$$

On suppose que

$$T = \frac{x}{y}\left(e^{ty}-1\right).$$

Alors

$$\frac{dT}{dt} = xe^{ty} \Rightarrow \frac{dt}{dT} = \frac{e^{-ty}}{x}.$$

D'après la formule (3.6), on obtient

$$\frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dt}\frac{e^{-ty}}{x}\right)^s \left[\frac{x}{y}\left(e^{ty}-1\right)\right]^{k+s} = \binom{k+s}{s}\left[\frac{x}{y}\left(e^{ty}-1\right)\right]^k.$$

Alors

$$\frac{1}{s!x^s}\left(\frac{d}{dt}e^{-ty}\right)^s \left[\frac{x}{y}\left(e^{ty}-1\right)\right]^{k+s} = \binom{k+s}{s}\left[\frac{x}{y}\left(e^{ty}-1\right)\right]^k. \tag{3.11}$$

D'après la formule (3.11), on trouve

$$B_s(t;x,y) = \frac{e^{sty}}{s!}\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s \left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right].$$

□

Théorème 13. *Supposons que la suite finale $a_{n+s,0}$, a la fonction génératrice exponentielle*

$$\widehat{B_s}(t) = \sum_{k\geqslant 0} a_{k+s,0}\frac{t^k}{k!}. \tag{3.12}$$

Alors, la suite $(a_{s,m}(x))_{m\geqslant 0}$ de la s-ième ligne de la matrice M, a une fonction génératrice ordinaire

$$\widehat{A_s}(t) = \sum_{m\geqslant 0} a_{s,m}t^m, \tag{3.13}$$

donnée par la formule suivante

$$\widehat{A_s}(t;x,y) = \widehat{B_s}\left(y^{-1}ln\left(1+\frac{ty}{x}\right)\right). \tag{3.14}$$

Démonstration. D'après la formule (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{A_s}(t;x,y) &= \sum_{m\geqslant 0}\left(\frac{y^m}{x^m m!}\sum_{k=0}^{m} y^{-k}s(m,k)a_{s+k,0}\right)t^m \\
&= \sum_{k\geqslant 0} a_{s+k,0}y^{-k}\sum_{m\geqslant k}\frac{y^m}{x^m m!}s(m,k)t^m \\
&= \sum_{k\geqslant 0} a_{s+k,0}y^{-k}\frac{1}{k!}\left(ln\left(1+\frac{ty}{x}\right)\right)^k \\
&= \widehat{B_s}\left(y^{-1}ln\left(1+\frac{ty}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc la conclusion. □

Propriétés 3.1.1.

1) On a

$$B_s(t;x,y)=\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right]. \tag{3.15}$$

Pour démontrer la formule (3.15), on utilise les deux formules suivantes

$$\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s F(t)=e^{-sty}\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}F(t), \tag{3.16}$$

avec

$$F(t)=\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right). \tag{3.17}$$

Démonstration. On a

$$\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s F(t)=e^{-sty}\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}F(t)$$

De la formule (3.17), on trouve

$$\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right]=e^{-sty}\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right].$$

Donc

$$e^{sty}\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right]=\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right]$$

D'après la formule (3.15), on obtient

$$s!B_s(t;x,y)=\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right).$$

Alors

$$B_s(t;x,y)=\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s A_s\left(\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)\right].$$

□

Corollaire 2. *Pour $n,m\geqslant 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{{n+m\atop k+m}\right\}_m(k+m)!x^k y^{n-k}a_{0,m+k}=\sum_{k=0}^{m}s(m,k)x^{-m}y^{m-k}a_{n+k,0}. \tag{3.18}$$

Remarque 3.1.1. *On peut avoir la formule (3.18) comme la transformation de Fubini pour $m=0$ de la suite α_n, et la transformation de Fubini inverse pour $n=0$ de la suite β_m.*

L'étude d'un Exemple

Exemple 4. *On prendre la suite initiale* $a_{0,m} = 1$. *Alors la formule (3.18) donne la matrice* M *suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ x & y+2x & 2y+3x & 3y+4x & \cdots \\ 2x^2+yx & 6x^2+6yx+y^2 & 12x^2+15xy+4y^2 & \vdots & \\ 6x^3+6x^2y+xy^2 & 24x^3+36x^2y+14xy^2+y^3 & \vdots & & \\ 24x^4+36x^3y+14x^2y^2+xy^3 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

D'après la Théorème 12, la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale est

$$\begin{aligned} A_s(t) &= \sum_{k\geqslant 0} a_{0,k+s}t^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0} t^k \\ &= \frac{1}{1-t}. \end{aligned}$$

Donc

$$A_s(t) = \frac{1}{1-t}.$$

On remplace $A_s(t)$ avec $t = \frac{x}{y}(e^{ty}-1)$ dans les deux formules (3.9) et (3.15), on obtient

$$B_s(t;x,y) = \frac{e^{sty}}{s!}\left(e^{-ty}\frac{d}{dt}\right)^s \left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s \frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\right]. \tag{3.19}$$

$$B_s(t;x,y) = \frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s} s(s,k)\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{e^{ty}-1}{y}\right)^s \frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\right].$$

3.2 Cas particulier (Polynômes de Fubini généralisés)

Dans cette partie, nous étudions les polynômes de Fubini généralisés et leur dégénérés [26].
En particulier, pour $s = 0$ dans (3.19), on obtient

$$B_0(t;x,y) = \frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}.$$

Définition 3.2.1. *Les polynômes de Fubini généralisés à deux variables, notés* $\Im_n(x,y)$, *sont définis par la fonction génératrice suivante :*

$$\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}. \tag{3.20}$$

En particulier, pour $y = 1$ *dans (3.20), on obtient les polynômes de Fubini*

$$\Im_n(x,1) = \omega_n(x). \tag{3.21}$$

Formule explicite

La formule explicite des polynômes de Fubini généralisés est donnée par :

$$\Im_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k y^{n-k}. \tag{3.22}$$

Propriétés 3.2.1. *La relation entre $\Im_n(x,y)$ et $\omega_n(x)$ donnée par les deux formules suivante*

$$\Im_n(x,y)=y^n\omega_n\left(\frac{x}{y}\right) \tag{3.23}$$

et

$$\omega_n(x)=y^{-n}\Im_n(xy,y). \tag{3.24}$$

Démonstration. D'après la formule explicite (3.22), on a

$$\begin{aligned}
\Im_n(x,y)&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k y^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k y^n y^{-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k y^n \frac{1}{y^k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!\left(\frac{x}{y}\right)^k y^n\\
&=y^n\omega_n\left(\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\Im_n(x,y)=y^n\omega_n\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pour démontrer la formule (3.24), en utilisant la formule (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\omega_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k\frac{y^n}{y^n}\\
&=y^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^k y^n\frac{y^k}{y^k}\\
&=y^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!(xy)^k y^{n-k}\\
&=y^{-n}\Im_n(xy,y).
\end{aligned}$$

Donc

$$\omega_n(x)=y^{-n}\Im_n(xy,y).$$

D'où la conclusion. □

Théorème 14. *Les polynômes de Fubini généralisés satisfont la relation suivante :*

$$\frac{y}{y-x}\Im_n\left(\frac{xy}{y-x},y\right)=\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k(yk)^n=y^n\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\frac{y}{y-x}. \tag{3.25}$$

Démonstration. De la fonction génératrice (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{y}{y-x}\sum_{n\geqslant 0}\Im_n\left(\frac{xy}{y-x},y\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{y}{y-x}\left(\frac{1}{1-\frac{xy}{y-x}\frac{(e^{ty}-1)}{y}}\right)\\
&= \frac{y}{y-x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{y-x}(e^{ty}-1)}\right)\\
&= \frac{1}{1-\frac{x}{y}e^{ty}}\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k(e^{ty})^k\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k\sum_{n\geqslant 0}(ky)^n\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k(ky)^n\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on trouve

$$\frac{y}{y-x}\Im_n\left(\frac{xy}{y-x},y\right) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k(yk)^n. \tag{3.26}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k(yk)^n &= y^n\sum_{k\geqslant 0}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{x}{y}\right)^k\\
&= y^n\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k\\
&= y^n\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\frac{y}{y-x}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{y}\right)^k(yk)^n = y^n\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\frac{y}{y-x}.$$

□

Remarque 3.2.1. *Pour $y=1$ dans (3.25), on obtient la formule (2.4).*

Relations de récurrences

Les deux relations de récurrences des polynômes de Fubini généralisés sont données par :

Théorème 15. *Pour $n\geqslant 1$, on a*

$$\Im_{n+1}(x,y)+y\Im_n(x,y) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_k(x,y)\Im_{n-k}(x,y).$$

Démonstration. Pour dérivé la fonction génératrice (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{xe^{ty}}{\left(1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)\right)^2}\\
&= \frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\left[\frac{xe^{ty}+x-x+y-y}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\right]\\
&= \frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\left[\frac{x+y}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}-y\right]\\
&= (x+y)\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!}-y\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!}\\
&= (x+y)\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_k(x,y)\Im_{n-k}(x,y)-y\Im_n(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on trouve

$$\Im_{n+1}(x,y)+y\Im_n(x,y)=(x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_k(x,y)\Im_{n-k}(x,y).$$

□

On aura besoin a le lemme suivant

Lemme 2. *Pour tout x et y non nul, on a*

$$\frac{e^{ty}}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}=\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{y}(e^{ty}-1)\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\right). \tag{3.27}$$

Théorème 16. *Pour $n\geqslant 0$, on a*

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Im_{n+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\left(\Im_k(x,y)+\frac{1}{y}\Im_{k+1}(x,y)\right).$$

Démonstration. D'après le lemme (3.27), on a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ty}}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)} &= e^{ty}\frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(ty)^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_k(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{e^{ty}}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_k(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.28}$$

D'autre part, on a

$$\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{y}(e^{ty}-1)\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}\right)=\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{y}(e^{ty}-1)\right]\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{y}(e^{ty}-1)\right]\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}-\frac{1}{y}(e^{ty}-1)\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}-\frac{1}{y}e^{ty}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}\\ &+\frac{1}{y}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}+\frac{1}{y}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}\\ &-\frac{1}{y}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(ty)^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}+\frac{1}{y}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}\\ &-\frac{1}{y}\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_{k+1}(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}-\frac{1}{y}\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_{k+1}(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Im_{n+1}(x,y)-\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_{k+1}(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Alors

$$\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{y}(e^{ty}-1)\right]\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1}(x,y)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Im_{n+1}(x,y)-\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_{k+1}(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.29}$$

D'après les deux formules (3.28) et (3.29), et par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_k(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Im_{n+1}(x,y)-\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\Im_{k+1}(x,y).$$

Donc

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Im_{n+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\left(\Im_k(x,y)+\frac{1}{y}\Im_{k+1}(x,y)\right).$$

□

La relation entre $\Im_n(x,y)$ et $\omega_n(x,y)$ satisfait la propriété suivante

Proposition 3.2.1. *Pour $n\geqslant 0$,*

$$\Im_n(x,y)=y^n\sum_{k=0}^{n}y^k\binom{n}{k}(-1)^k\omega_{n-k}\left(\frac{x}{y},y\right).$$

Démonstration. De la fonction génératrice (3.20), on a

$$\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!}=e^{-ty^2}\frac{e^{ty^2}}{1-\frac{x}{y}(e^{ty}-1)}.$$

En utilisant la fonction génératrice (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!} &= e^{-ty^2}\sum_{n\geqslant 0}\omega_n\left(\frac{x}{y},y\right)\frac{(ty)^n}{n!}\\
&= \left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-ty^2)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\omega_n\left(\frac{x}{y},y\right)\frac{(ty)^n}{n!}\right)\\
&= \left(\sum_{n\geqslant 0}(-y^2)^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\omega_n\left(\frac{x}{y},y\right)y^n\frac{t^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-y^2)^k\omega_{n-k}\left(\frac{x}{y},y\right)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k y^{2k}\omega_{n-k}\left(\frac{x}{y},y\right)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(y^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k y^k\omega_{n-k}\left(\frac{x}{y},y\right)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on trouve

$$\Im_n(x,y) = y^n\sum_{k=0}^{n}y^k\binom{n}{k}(-1)^k\omega_{n-k}\left(\frac{x}{y},y\right).$$

□

Les relations entre les polynômes de Fubini généralisés et quelques polynômes.

Propriétés 3.2.2. *Pour $n\geqslant 0$, on a les propriétés suivantes*

1) *La relation entre les polynômes de Fubini généralisés et les polynômes de Frobenius-Euler est donnée par :*
$$\Im_n(x,y) = y^n\sum_{k=0}^{n}y^k\binom{n}{k}(-1)^k H_{n-k}\left(1+\frac{y}{x},y\right).$$

2) *La relation entre les polynômes de Fubini généralisés et les polynômes Eulériens est donnée par :*
$$\Im_n(x,y) = x^n A_n\left(1+\frac{y}{x}\right).$$

3) *La relation entre les polynômes de Fubini généralisés et les polynômes de Bell est donnée par :*
$$\Im_n(x,y) = y^n\int_0^{\infty}\Phi\left(\frac{x}{y}\lambda\right)e^{-\lambda}d\lambda.$$

Démonstration. 1) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!} &= e^{-ty^2}\frac{\left(1-(1+\frac{y}{x})\right)}{e^{ty}-\left(1+\frac{y}{x}\right)}e^{ty^2}\\
&= e^{-ty^2}\sum_{n\geqslant 0}H_n\left(1+\frac{y}{x},y\right)\frac{(ty)^n}{n!}\\
&= \left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-ty^2)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}H_n\left(1+\frac{y}{x},y\right)\frac{(ty)^n}{n!}\right)\\
&= \left(\sum_{n\geqslant 0}(-y^2)^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}H_n\left(1+\frac{y}{x},y\right)y^n\frac{t^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-y^2)^kH_{n-k}\left(1+\tfrac{y}{x},y\right)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(y^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^ky^kH_{n-k}\left(1+\tfrac{y}{x},y\right)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on trouve le résultat.

2) De la fonction génératrice (3.20), on a

$$\frac{-x}{y}\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{e^{ty}-\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

et d'après la fonction génératrice (1.21), on a

$$-\sum_{n\geqslant 0}\frac{A_n(x)}{(x-1)^{n+1}}\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{e^t-x},\quad x\neq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{y}\sum_{n\geqslant 0}\Im_n(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{e^{ty}-\left(1+\frac{y}{x}\right)}\\
&= -y^n\sum_{n\geqslant 0}\frac{A_n\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\left(1+\frac{y}{x}-1\right)^{n+1}}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on trouve

$$\frac{-x}{y}\Im_n(x,y)=-y^n\frac{A_n\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}}.$$

Alors

$$\Im_n(x,y)=x^nA_n\left(1+\tfrac{y}{x}\right).$$

3) D'après la formule (3.22), on a

$$\begin{aligned}
\Im_n(x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!x^ky^{n-k}\\
&= y^n\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}k!\left(\frac{x}{y}\right)^k\\
&= y^n\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}\left(\frac{x}{y}\right)^k\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k d\lambda\\
&= y^n\int_0^\infty\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}\left(\frac{x}{y}\lambda\right)^k e^{-\lambda}d\lambda.
\end{aligned}$$

D'après la formule (1.15), on obtient

$$\Im_n(x,y) = y^n \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{y}\lambda\right)^k e^{-\lambda} d\lambda.$$

Donc le résultat.

□

3.3 Polynômes de Fubini généralisés dégénérés

Dans cette partie, nous étudiant les polynômes de Fubini généralisés dégénérés [21].

Définition 3.3.1. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les polynômes de Fubini généralisés dégénérés sont définis par la formule suivante :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \Im_{n,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}. \tag{3.30}$$

Formule explicite

Pour $n \geqslant 0$, la formule explicite des polynômes de Fubini généralisés dégénérés est donnée par :

$$\Im_{n,\lambda}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_{\lambda} k! x^k y^{n-k}.$$

Propriétés 3.3.1.

1) Pour $n \geqslant 0$, on a

$$\frac{y}{y-x}\Im_{n,\lambda}\left(\frac{xy}{y-x}, y\right) = \sum_{k\geqslant 0} k^{\underline{n,\lambda}} x^k y^{n-k} = y^n \left(x\frac{d}{dx}\right)_{n,\lambda}\left(\frac{y}{y-x}\right).$$

2) La relation entre les polynômes de Fubini généralisés dégénérés et les polynômes de Fubini dégénérés est donnée par :

$$\Im_{n,\lambda}(x,y) = y^n \omega_{n,\lambda}\left(\frac{x}{y}\right).$$

3) Pour $n \geqslant 0$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \neq x_2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Im_{k,\lambda}(x_1,y)\Im_{n-k,\lambda}(x_2,y) = \frac{x_2\Im_{n,\lambda}(x_2,y) - x_1\Im_{n,\lambda}(x_1,y)}{x_2-x_1}.$$

4) La relation entre les polynômes de Fubini généralisés dégénérés et les polynômes de Bell dégénérés est donnée par la formule suivante :

$$\Im_{n,\lambda}(x,y) = y^n \int_0^\infty \Phi_{n,\lambda}\left(\frac{x}{y}t\right) e^{-t} dt.$$

La relation entre les polynômes de Fubini généralisés dégénérés et les polynômes de Fubini à deux variables dégénérés par les deux théorèmes suivantes

Théorème 17. *Pour $n \geqslant 0$, on a*

$$\Im_{n,\lambda}(x,y) = y^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y^{\underline{k,\lambda}} \omega_{n-k,\lambda}\left(y, \tfrac{x}{y}\right).$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice (3.30), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}\\ &= (1+\lambda ty)^{\frac{-y}{\lambda}}\frac{1}{1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}(1+\lambda ty)^{\frac{y}{\lambda}}.\end{aligned}$$

D'après la formule (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= (1+\lambda ty)^{\frac{-y}{\lambda}}\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}\left(y,\tfrac{x}{y}\right)\frac{y^n t^n}{n!}\\ &= \sum_{k\geqslant 0} y^k(-y)^{\underline{k,\lambda}}\frac{t^k}{k!}\sum_{m\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}\left(y,\tfrac{x}{y}\right)y^m\frac{t^m}{m!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(y^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(-y)^{\underline{k,\lambda}}\omega_{n-k,\lambda}\left(y,\tfrac{x}{y}\right)\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\Im_{n,\lambda}(x,y) = y^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k y^{\underline{k,\lambda}}\omega_{n-k,\lambda}\left(y,\tfrac{x}{y}\right).$$

□

Théorème 18. *Pour $n\geqslant 0$, on a*

$$\Im_{n+1,\lambda}(x,y)+y^{n+1}\omega_{n,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_{k,\lambda}(x,y)\omega_{n-k,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^{n-k}.$$

Démonstration. Pour dérivé la fonction génératrice (3.30), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}\right)\\ &= \frac{x(1+\lambda ty)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}{\left(1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)\right)^2}\\ &= \left(\frac{x+y}{1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}-y\right)\frac{(1+\lambda ty)^{-1}}{1-\frac{x}{y}\left((1+\lambda ty)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}\\ &= (x+y)\sum_{k\geqslant 0}\Im_{k,\lambda}(x,y)\frac{t^k}{k!}\sum_{m\geqslant 0}\omega_{m,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^m\frac{t^m}{m!}-y\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^n\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n\geqslant 0}\Im_{n+1,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!}+y\sum_{n\geqslant 0}\omega_{n,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^n\frac{t^n}{n!} = (x+y)\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_{k,\lambda}(x,y)\omega_{n-k,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\Im_{n+1,\lambda}(x,y)+y^{n+1}\omega_{n,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)\right)\frac{t^n}{n!} = (x+y)\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_{k,\lambda}(x,y)\omega_{n-k,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$\Im_{n+1,\lambda}(x,y)+y^{n+1}\omega_{n,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Im_{k,\lambda}(x,y)\omega_{n-k,\lambda}\left(-\lambda,\tfrac{x}{y}\right)y^{n-k}. \tag{3.31}$$

□

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons pu pénétrer le domaine de la combinatoire énumérative, à travers en reconnaissant de nombreuses suites de nombres et polynômes et ses propriétés combinatoires et analytiques, en particulier la généralisation de polynômes de Fubini avec deux variables, ce qui est différentes de ses généralisations existes récemment.
Nous espérons à l'avenir pouvoir continuer à approfondir nos connaissances dans ce domaine très agréable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Agoh and M. Yamanaka. A study of Frobenius-Euler numbers and polynomials. *Ann. Sci. Math. Québec*, 34 :1–14, 2010.

[2] G. Bisson and D. Zagier. Autour des nombres et des polynômes de Bernoulli.

[3] K. N. Boyadzhiev. A series transformation formula and related polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(23) :3849–3866, 2005.

[4] A. Z. Broder. The r-Stirling numbers. *Discrete Mathematics*, 49(3) :241–259, 1984.

[5] L. Carlitz. Degenerate Stirling. *Bernoulli and Eulerian numbers. Util. Math*, 15(1) :51–88, 1979.

[6] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second kind–ii. *Fibonacci Quart*, 18(3) :242–257, 1980.

[7] L. Carlitz and M. Sholander. The product of two Eulerian polynomials. *Mathematics Magazine*, 36(1) :37–41, 1963.

[8] K.-W. Chen. Algorithms for Bernoulli numbers and Euler numbers. *Journal of Integer Sequences*, 4(2) :3, 2001.

[9] G.-S. Cheon. A note on the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 16(3) :365–368, 2003.

[10] L. Comtet. Advanced combinatorics : the art of finite and infinite expansions. dordrecht, holland-boston, usa : D. *Reidel Publishing Company. X*, 1 :974, 1974.

[11] S. Edition and K. H. Rosen. Discrete mathematics and its applications.

[12] D. Foata. Eulerian polynomials : from Euler's time to the present. In *The legacy of Alladi Ramakrishnan in the mathematical sciences*, pages 253–273. Springer, 2010.

[13] K. D. Graham, R. L and O. Patashnik. Concrete mathematics, 1994.

[14] F. Hirzebruch. Eulerian polynomials. *Münster Journal of Mathematics*, 1(1) :9–14, 2008.

[15] A. Junod. *Congruences par l'analyse p-adique et le calcul symbolique*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, 2003.

[16] M. Kaneko. Poly-Bernoulli numbers. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 9(1) :221–228, 1997.

[17] L. Kargın. Some formulae for products of geometric polynomials with applications. *J. Integer Seq*, 20(17.4) :4, 2017.

[18] D. S. K. Kim, Kim and G.-W. Jang. A note on degenerate Fubini polynomials. In *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, volume 20, pages 521–531, 2017.

[19] T. Kim. Identities involving Frobenius–Euler polynomials arising from non-linear differential equations. *Journal of Number Theory*, 132(12) :2854–2865, 2012.

[20] T. Kim, D. S. Kim, H. K. Kim, and H. Lee. Some properties on degenerate Fubini polynomials. *Applied Mathematics in Science and Engineering*, 30(1) :235–248, 2022.

[21] T. Kim, D. S. Kim, H. Lee, and J. Kwon. On degenerate generalized Fubini polynomials. *AIMS Mathematics*, 7(7) :12227–12240, 2022.

[22] T. Kim and D. San Kim. Degenerate polyexponential functions and degenerate Bell polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 487(2) :124017, 2020.

[23] I. Mezo. The r-Bell numbers. *J. Integer Seq*, 14(1) :A11, 2011.

[24] S.-S. Pyo. Some identities of degenerate Fubini polynomials arising from differential equations. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 11(3), 2018.

[25] F. Qi. Determinantal expressions and recurrence relations for Fubini and Eulerian polynomials. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 22(3) :317–335, 2019.

[26] M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai, and M. Rahmani. Generalized Fubini transform with two variables. *arXiv preprint arXiv :2202.11166*, 2022.

[27] D.-D. Su and Y. He. Some identities for the two variables Fubini polynomials. *Mathematics*, 7(2) :115, 2019.

[28] S. M. Tanny. On some numbers related to the Bell numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(5) :733–738, 1975.

[29] G. Tomaz and H. R. Malonek. Matrix approach to Frobenius-Euler polynomials. In *International Conference on Computational Science and Its Applications*, pages 75–86. Springer, 2014.