Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université. Yahia Fares de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option : Recherche Opérationnelle

par **TELDJOUNE Mohamed**

Thème

Étude des alliances puissantes globales et alliances puissantes globales fortes dans certaines classes de graphes

Composition du Jury :

Kamel TABLENNEHAS	M.C.B à l'Université de Médéa Président
Mohamed BOUZEFRANE	M.C.B à l'Université de Médéa Directeur de mémoire
Mohamed ZAMIME	M.C.A à l'Université de Médéa Examinateur
Rachid LEMDANI	M.C.B à l'Université de Médéa Examinateur

Date de soutenance : *26/06/2024*

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2023-2024

Résumé

Dans ce mémoire nous intéressons essentiellement au concept des alliances puissantes globales fortes dans les graphes.

Soit $G = (V; E)$ un graphe simple, d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arête E. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent au moins un sommet de S . Un ensemble dominant$S$ est une alliance offensive globale si pour tout sommet v dans $V - S$, $v \in (V - S)$,$|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. ; et il est une alliance offensive globale forte si inégalité est stricte.

S est une alliance défensive globale si pour tout sommet $v$dans S, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$.,et il est une alliance défensive globale forte si inégalité est stricte.

On dit que S est une alliance puissante globale s'il est a la fois une défensive globale et une offensive globale.

On dit que S est une alliance puissante globale forte s'il est a la fois une défensive globale forte et une offensive globale forte.

Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_d(G)$ est le cardinal minimumd'une alliance d

Le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{d}}(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale forte . le nombre d'alliance offensive globale, noté $\gamma_o(T)$ égal à le cardinal minimum d'une alliance offensive globale dans G . le nombre d'alliances global offensive forte, noté $\gamma_{\hat{o}}(G)$, est dLe nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ est le cardinal minimum d'une d'alliance puissante globale de G.,l enombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}(G)$ est le cardinal minimum d'une d'alliance puissante globale forte de G.

L'étude de ce mémoire comprend trois chapitre : e premier chapitre introductif vise à présenter notions générales sur les graphes de quelques structures combinatoires dans la première partie, les notions et les définitions fondamentaux de les graphes

Dans la deuxième partie, nous commençons par donner une brève présentation sur

les définition d'alliances , par la suite nous calculons les nombres d'alliances défensives globale (forte), offensives globale (forte),puissant globale sur les graphes.

Dans la troisième partie, nous avons établis quelques relations entre ces paramétrés d'alliances puissant globale forte et nous terminons par une conclusion général et quelques perspectives.

Abstract

In this thesis, we are primarily interested in the concept of strong global powerful alliances in graphs.

Let $G = (V; E)$ be a simple graph with vertex set V and edge set$E$. A subset $S \subseteq V$is a dominating set of G if every vertex in $V - S$ is adjacent to at least one vertex in S . A dominating set S is a global offensive alliance if for every vertex v in $V - S$, $v \in (V - S)$,$|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. ;and it is a strong global offensive alliance if the inequality is strict.

S is a global defensive alliance if for every vertex v in S , $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$, and it is a strong global defensive alliance if the inequality is strict.

We say that S is a global powerful alliance if it is both a global defensive alliance and a global offensive alliance.

We say that S is a strong global powerful alliance if it is both a strong global defensive alliance and a strong global offensive alliance.

The domination number $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set of G , The global defensive alliance number $\gamma_d(G)$ is the minimum cardinality of a global defensive alliance $\gamma_{\hat{d}}(G)$ is the minimum cardinality of a strong global defensive alliance. The global offensive alliance number, denoted $\gamma_o(T)$ is the minimum cardinality of a global offensive alliance in G . The strong global offensive alliance number, denoted $\gamma_{\hat{o}}(G)$, is the minimum cardinality of a strong global offensive alliance in G. The global powerful alliance number $\gamma_{ap}(G)$ is the minimum cardinality of a global powerful alliance in G , The strong global powerful alliance number $\gamma_{\hat{ap}}(G)$ is the minimum cardinality of a strong global powerful alliance in G.

The study of this thesis comprises three chapters : The first introductory chapter aims to present general concepts on graphs and some combinatorial structures in the first part, as well as fundamental notions and definitions of graphs.

In the second part , we begin by giving a brief presentation on the definition of alliances. Subsequently, we calculate the numbers of global defensive alliances (strong), global offensive alliances (strong), and global powerful alliances on graphs.

In the third part , we establish some relationships between these parameters of strong global powerful alliances , and we conclude with a general conclusion and some perspectives.

Remerciements

Tout d'abord, nous voudrions exprimer nos vifs remerciements et notre profonde reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.. Leur soutien inestimable et leurs précieuses contributions ont été essentiels à la réalisation de ce travail. Parmi ces personnes, nous souhaitons exprimer une reconnaissance toute particulière envers notre encadreur, ***Mohamed BOUZEFRANE****. Sa présence et son expertise ont été déterminantes tout au long de ce parcours. Sa disponibilité, sa bienveillance et ses conseils éclairés ont été d'une aide précieuse qui nous a permis de mener à bien ce travail.*

Nous tenons à remercier tous ces distingués professeurs qui nous ont enseigné durant notre parcours académique, depuis nos premières années de licence jusqu'à la réalisation de ce mémoire. Nous leur adressons nos plus chaleureux remerciements pour leur contribution essentielle à notre réussite académique. Nous remercions également Monsieur ***KAMEL. TABLENNEHAS*** *, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médéa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.*

Nous remercions également Monsieur ***ZAMIME MOHAMED****, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médéa pour avoir accepté d'être examinateur.*

Nous remercions également Monsieur ***LEMDANI RACHID****, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médéa pour avoir accepté d'être examinateur.*

Enfin, nous tenons à remercier l'ensemble de notre entourage qui nous a soutenus et encouragés tout au long de cette études universitaire.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma famille adorée

En particulier

Mes chers parents

Qui me présidez en tout et me conseillez avant que quoi que ce soit n'arrive, qui donnez sans attente, pardonnez sans excuse et êtes à mes cotés en tout. je vous offre les plus belles expressions de remerciement et de gratitude d'un cœur débordant d'amour, d'affection, de respect et d'appréciation pour vous.

A mes chers frères et mes chères sœurs :

A toutes la famille "Teldjoune"

A ceux qui ont partage avec moi le bien et le mal durant ma vie :
A mes collègues de classe 2 ème année mathématique.
A toutes les personnes qui mont aidé par leur soutien et leurs encouragements.

Et enfin, je n'oublie pas de me remercier, pour tous les efforts que j'ai faits.

TELDJOUNE MOHAMED

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **iii**

Remerciements **v**

Dédicace **vi**

1 Notions générales sur les graphes **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Définitions et notations 3

1.2.1 Définition d'un graphe 3

1.2.2 Définition d'un graphe simple 4

1.2.3 Degré d'un sommet 4

1.2.4 Voisinages 4

1.2.5 Graphe connexe 6

1.2.6 Graphe complémentaire d'un graphe 6

1.2.7 Graphe régulier 7

1.2.8 Graphe discret, et stable 7

1.2.9 Graphe complet, et clique 8

1.2.10 Chaîne et cycle 8

1.2.11 Graphe partiel 9

1.2.12 Sous-graphe, sous-graphe induit 9

1.2.13 La grille 10

1.2.14 Graphe biparti 10

1.2.15 Graphe biparti complet 10

1.2.16 Graphe cactus 11

1.2.17 Arbres, étoile, double étoile d'un graphe 11
1.2.18 Le graphe total 12
1.2.19 Graphe milieu 12
1.2.20 Le roue 13
1.3 Domination dans Les graphes 14
1.3.1 Quelques Types de domination 14

2 ÉTAT DE L'ART SUR LES ALLIANCES DANS LES GRAPHES 17
2.1 Vue historique alliance 17
2.2 Types Alliances 18
2.2.1 Alliances défensives 18
2.2.2 Bornes sur γ_d et $\gamma_{\hat{d}}$ 19
2.2.3 Alliances offensives 21
2.2.4 Alliances offensives globale fortes 21
2.2.5 Bornes sur γ_o et $\gamma_{\hat{o}}$ 22
2.2.6 Alliances puissantes 23
2.2.7 Bornes sur γ_{ap} 23
2.3 Résultats existants entres $\gamma_d, \gamma_o, \gamma_{\hat{d}}, \gamma_{\hat{o}}$ et γ_{ap} dans quelques des graphes particuliers 25
2.3.1 Les chaînes 25
2.3.2 Les cycles 25
2.3.3 Graphes complets 27
2.3.4 Graphe biparti complet 28
2.3.5 Étoile 28
2.3.6 Double étoile 30
2.3.7 Le graphe roue 31
2.3.8 Graphe total 31
2.3.9 Le graphe milieu d'une chaîne 33
2.3.10 Le graphe milieu d'un cycle 34
2.3.11 Le graphe milieu d'une étoile 35

3 Calcul des nombres d'alliances puissantes globales fortes dans quelques classe des graphes 36
3.1 Alliance puissante globale forte 36

3.1.1 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour les chaînes 37
3.1.2 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour les cycles 37
3.1.3 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour d'un graphe complet 38
3.1.4 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour un graphe biparti complet 38
3.1.5 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour les étoiles 40
3.1.6 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ les double étoile 40
3.1.7 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour Le graphe total 41
3.1.8 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour Le graphe roue 42
3.1.9 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour le graphe milieu 42
3.2 Conclusion 46

Table des figures

FIGURE 1.1 Un graphe simple d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 8$ 4
FIGURE 1.2 Un graphe G avec $\Delta(G) = 4$ et $\delta(G) = 0$ 5
FIGURE 1.3 Un graphe Gavec$N_G(u)$ et $N_G[u]$ 5
FIGURE 1.4 Un graphe connexe 6
FIGURE 1.5 Un graphe non connexe 6
FIGURE 1.6 Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$ 7
FIGURE 1.7 Un graphe 4− régulier 7
FIGURE 1.8 Un graphe discret 7
FIGURE 1.9 Un graphe K_6 8
FIGURE 1.10 Un cycle C_6 et une chaîne P_6 8
FIGURE 1.11 Un graphe partiel$\acute{G}$ de G 9
FGURE 1.12 H :sous -Graphe de G 9
FIGURE 1.13 Un graphe$(P_2 \square P_5)$ 10
FIGURE 1.14 Un graphe biparti 10
FIGURE 1.15 Un graphe biparti complet$K_{3,4}$. 11
FIGURE 1.16 Un graphe cactus 11
FIGURE 1.17 Un arbre T dordre $n = 14$,$|L(T)| = 7$,$|S(T)| = 4$. 12
FIGURE 1.18 Une étoile $S_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,3}$ 12
FIGURE 1.19 Un graphe milieu$(M(C_4).)$ 13
FIGURE 1.20 Un graphe milieux ($M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$) 13
FIGURE 1.21 Le roue (W_4) et (W_7) 14
FIGURE 1.1 Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 6$ 15
FIGURE 2.1 Un graphe G avec $\gamma_d(G) = 3$. 19
FIGURE 2.2 Un graphe G $\gamma_{\hat{d}}(G) = 4$ 19
FIGURE 2.3 Un graphe (G) avec $\gamma_o(G) = 2$ 21

FIGURE 2.4 Un graphe (G) avec $\gamma_{\hat{o}}(G) = 4$ 22
FIGURE 2.5 Un graphe (G) avec $\gamma_{ap}(G) = 3$ 23
FIGURE 2.1 Une Chaîne p_3 avec $\gamma_{ap}(p_3) = \gamma_{ap}(p_3) = 2$ 25
FIGURE 2.2 Une chaîne p_4 avec $\gamma_{ap}(p_4) = \gamma_{ap}(p_4) = 2)$ 25
FIGURE 2.3 Un cycle C_3 avec $\gamma_d(C_3) = \gamma_{ap}(C_3) = \gamma_o(C_3) = \gamma_{\hat{d}}(C_3) = \gamma_{\hat{o}}(C_3) = 2$ 26
FIGURE 2.4 Un cycle C_4 avec $\gamma_{ap}(C_4) = 3; \gamma_d(C_4) = \gamma_{\hat{d}}(C_4) = \gamma_{\hat{o}}(C_4) = \gamma_o(C_4) = 2$ . . . 26
FIGURE 2.5 Un graphe complet k_5 avec $\gamma_d(k_5) = 3$ 27
FIGURE 2.6 Un graphe complet k_6 avec $\gamma_d(k_6) = 3$ 27
FIGURE 2.7 Un graphe complet k_6 avec $\gamma_{\hat{d}}(k_6) = 4$ 28
FIGURE 2.8 Un graphe biparti $k_{3,4}$ avec $\gamma_d(k_{3,4}) = 4, \gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = 4et\gamma_{\hat{o}}(k_{3,4}) = 3$ 29
FIGURE 2.9 Une étoile $S_{1,3}$ avec $\gamma_o(S_{1,3}) = 1$,$\gamma_{ap}(S_{1,3}) = 2$, $\gamma_{\hat{d}}(S_{1,3}) = 3$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,3}) = 3$. 30
FIGURE 2.10 Une double étoile $S_{2,2}$ avec : $\gamma_{ap}(S_{2,2}) = \gamma_d(S_{2,2}) = \gamma_o(S_{2,2})$, $\gamma_{\hat{d}}(S_{2,2}) = 4$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{2,2}) = 4$. 31
FIGURE 2.11 Un graphe roue (W_4) , W_7 avec $\gamma_{\hat{ap}}(W_4) = 3$, $\gamma_{\hat{ap}}(W_7) = 4$ 32
FIGURE 2.12 Un graphe milieu avec $\gamma_{ap}M(P_5) = \gamma_dM(P_5) = \gamma_oM(P_5) = 4$ et $\gamma_{ap}M(P_6) = \gamma_dM(P_6) = \gamma_oM(P_6) = 5$ 34
FIGURE 2.13 Un graphe milieu$(M(C_3))$ avec $\gamma_{ap}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{d}}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{o}}M(C_3) = 3$ 34

FIGURE 3.1 Un graphe (G) avec $\gamma_{\hat{ap}}(G) = 4$. 37
FIGURE 3.2 Une chaîne p_4 avec ($\gamma_{\hat{ap}}(p_4) = \gamma_{ap}(p_4) = 2)$ 37
FIGURE 3.3 Un Cycle C_5 et C_6 avec $\gamma_{\hat{ap}}(C_5) = \gamma_{\hat{ap}}(C_6) = 4$ 38
FIGURE 3.4 Un graphe complet (k_7) avec $\gamma_{\hat{ap}}(k_7) = 4$ 38
FIGURE 3.5 Un graphe biparti complet $k_{3,4}$ avec $\gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = \gamma_{\hat{ap}}(k_{3,4}) = 4$ 39
FIGURE 3.6 Un graphe biparti complet $k_{3,3}$ avec $\gamma_{\hat{ap}}(k_{3,3}) = 4$ 39
FIGURE 3.7 Une Étoile $(S_{1,3})$ avec $\gamma_{\hat{ap}}(S_{1,3}) = 4$ 40
FIGURE 3.8 Une double étoile avec $\gamma_{\hat{ap}}(s_{2,3}) = 7\gamma_{\hat{ap}}(s_{2,3}) = 7$ 41
FIGURE 3.9 Une Roue W_4 et W_7 avec $\gamma_{\hat{ap}}(W_4) = 3$ et $\gamma_{\hat{ap}}(W_7) = 4$ 42
FIGURE 3.10 Un graphe milieu $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec($\gamma_{\hat{ap}}M(P_2)$,$\gamma_{\hat{ap}}M(P_3)$ et $\gamma_{\hat{ap}}M(P_4)$) 43
FIGURE 3.11 Un graphe milieu $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec $(\gamma_{\hat{ap}}M(P_5)$ et $\gamma_{\hat{ap}}M(P_6))$ 43
FIGURE 3.12 Un graphe milieu $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec$(M(C_4))$ 44
FIGURE 3.13 Un graphe milieu$\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,3}) = 6$ 45

.

Introduction

La recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la deuxième guerre mondiale, ces techniques sont basées sur des concepts et outils mathématiques.La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires, l'optimisation dans les réseaux, la théorie des jeux, les d'attentes, etc... sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle. Elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles, des liens et relations entre les objets. On considéré généralement que le problème des ponts de konigsberg, résolu par Euler, est le premier résultat formel de la théorie des graphes "comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Konigsberg".

La théorie des graphes est devenue très utile comme modèle mathématique. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma. Ce schéma est appelé graphe. Un graphe est une structure trés simple puisqu'il est constitué d'un ensemble de sommets et d'une famille de liens (orientés ou non), appelés arêtes ou arcs, entre certains couples de sommets.

Un graphe non orienté peut-être utilisé pour mobiliser des relations de conflits entre individus ou objet. Un graphe orienté représente typiquement un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc. Parmi les problèmes les plus connus en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes.De nombreuses recherches, au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie. La technique de domination est devenue donc un outil pour la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions.

Nous étudions dans ce mémoire la notion des alliances dans les graphes.

Les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par Kristiansen, Hedetniemi, et Hedetniemi dans [3].

Dans ce mémoire, trois chapitres fondamentaux sont développés. Nous nous intéressons principalement à la notion des alliances globales fortes dans les graphes.

Dans le chapitre un, nous présentons les les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le thème étudié et nous donnons un état de l'art sur les alliances dans les graphes, en rappelant les principaux résultats existants entres $\gamma_d, \gamma_o, \gamma_{\hat{d}}, \gamma_{\hat{o}}$ et γ_{ap} dans quelques des graphes particuliers . Une borne inférieure sur le nombre d'alliance dans quelques classe des graphes,borne inférieure . pour lesquels le nombre de domination et le nombre d'alliance sont égaux. Résultats existants entres $\gamma_d, \gamma_o, \gamma_{\hat{d}}, \gamma_{\hat{o}}$ et γ_{ap} dans quelques des graphes particuliers.

Notre contribution se situe dans le troisième chapitre. Nous définissions un nouveau paramétré $\gamma_{\hat{ap}}(G)$ et nous calculons les nombres d'alliances globales fortes dans les graphes particules.

On termine par une conclusion générale sur nos travaux réalisés, et comme perspective, nous proposons quelques questions pour les recherches futures.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

1.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les notions générales de théorie des graphes ainsi les notations usuelles dont nous aurons besoin durant la réalisation de ce travail, la deuxième partie est destinée pour définir quelques classes des graphes et dans la dernière partie nous définissons la domination dans les graphes.[3].

1.2 Définitions et notations

1.2.1 Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est définit par le couple (V, E) telle que :

V : est fini et dit l'ensemble des sommets.

E : c'est l'ensemble d'arêtes. Une arête de G étant une paire de sommets de G. Chaque graphe a un ordre et une taille tel que

Le cardinal de V , appelé ordre de G , est noté n.

Le cardinal de E, appelé taille de G ,est noté m.

Deux sommets u et v sont adjacents ou voisins si arête $(u; v) \in E$.

Un non voisin u d'un sommet v d'une graphe G est un sommet non adjacent a v.

Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune.

Une arête e est incidente a un sommet v, si v est l'une de ses extrémités, dans ce cas v sera dit incident arête e.

Une boucle est une arête dont ses extrémités sont confondues.

1.2.2 Définition d'un graphe simple

Un graphe simple est un graphe sans boucle et sans arête multiple (c'est-à-dire toute paire de sommet sont reliée par au plus une arête). Un graphe d'ordre n est de taille m est noté par $(n;m)$- graphe.

Pour l'exemple de La Figure 1.1, on a un graphe simple $G = (V;E)$ avec $V(G) = \{s;t;u;v;x;y;w;z\}$ et $E(G) = \{su;tv;xu;vz;uv;vy;wu\}$ est $n = 8$ et $m = 7$.

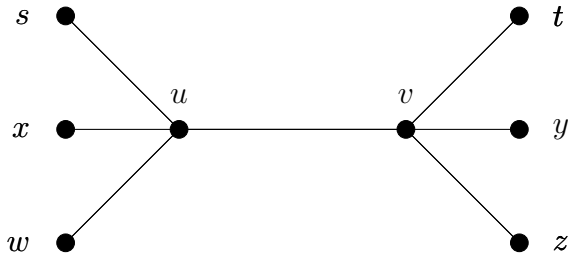


FIGURE 1.1: Un graphe simple d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 8$

.

1.2.3 Degré d'un sommet

On appelle degré d'un sommet v et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Une boucle sur un sommet compte double. Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage). Le **degré** d'un sommet $v \in V$ dans un graphe G, noté $d_G(v)$ (ou simplement $d(v)$), est le nombre d'arêtes incidentes à v.

Un sommet **isolé** est un sommet de degré nul. Un sommet de degré égal à un sera dit **pendant (ou feuille)** et un sommet adjacent à un sommet pendant est dit **support** .

Nous noterons $\delta(G)$ et $\Delta(G)$, les **degrés minimum** et **maximum** sur graphe G.respectivement

Pour l'exemple le graphe G de la figure 1.2, $\{x\}$ est un sommet isolé, et $\{s;t;y;w;z\}$ sont des sommets pendants. $d(t) = 1$; $d(x) = 0$ et $d(v) = 4$. Le degré minimum du G est $\delta(G) = 0$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

1.2.4 Voisinages

1.2.4.1 Le voisinage ouvert

Pour un sommet v de G, **le voisinage ouvert** de u c'est l'ensemble des sommets adjacents à u, et défini par est $N_G(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$.

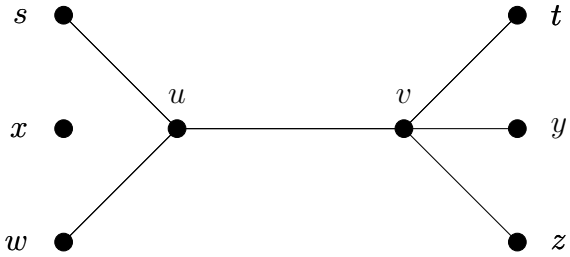


FIGURE 1.2: Un graphe G avec $\Delta(G) = 4$ et $\delta(G) = 0$

.

1.2.4.2 Le voisinage fermé

Le voisinage fermé de u c'est le voisinage ouvert de u union u, et défini par : $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

1.2.4.3 Voisinage d'un sous-ensemble

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, **le voisinage ouvert** de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et **le voisinage fermé** de S est $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[v]$. Parfois pour alléger les notations les voisinages ouverts et fermés d'un sommet v seront notés simplement par($N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$, respectivement). De même pour ($N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement).

Pour l'exemple de la figure 1.3 :

Le voisinage ouvert du sommet u est $N_G(u) = \{s, x, w, v\}$ et le voisinage fermé est $N_G[u] = \{u, s, x, w, v\}$.

L'ensemble $S = \{s, x, w, v\}$, le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \{t; u; y; z\}$; et le voisinage fermé de S est $N_G[S] = \{s; t; u; v; x; y; w; z\} = V$.

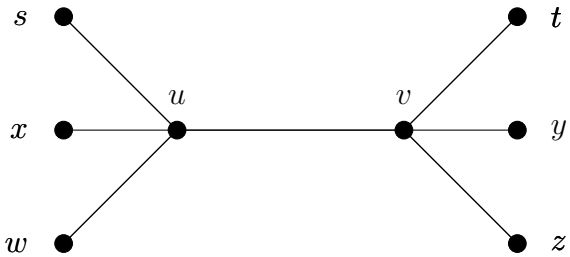


FIGURE 1.3: Un graphe Gavec$N_G(u)$ et $N_G[u]$

.

Graphes particuliers

1.2.5 Graphe connexe

On dit qu' un graphe G est connexe s'il existe un chemin entre chaque paire des sommets.

Un graphe qui n'est pas connexe est dit disconnexe (non connexe).

Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Pour le graphe G de la figure 1.4 , G est connexe.

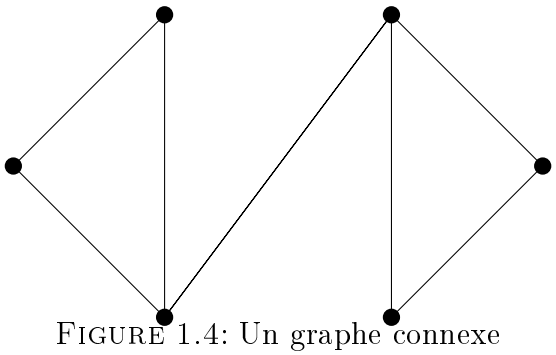


FIGURE 1.4: Un graphe connexe

.

Pour le graphe G de la figure 1.5 : G est non connexe.

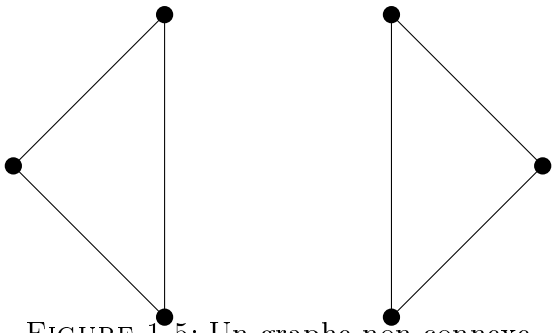


FIGURE 1.5: Un graphe non connexe

.

1.2.6 Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire $\overline{G}$ d'un graphe G est un graphe pour lequel $V(\overline{G}) = V(G)$ et $uv \in E(G)$ si et seulement si $uv \notin E(\overline{G})$. Pour le graphe G de la figure 1.6 : $\bar{G}$ complémentairede G.

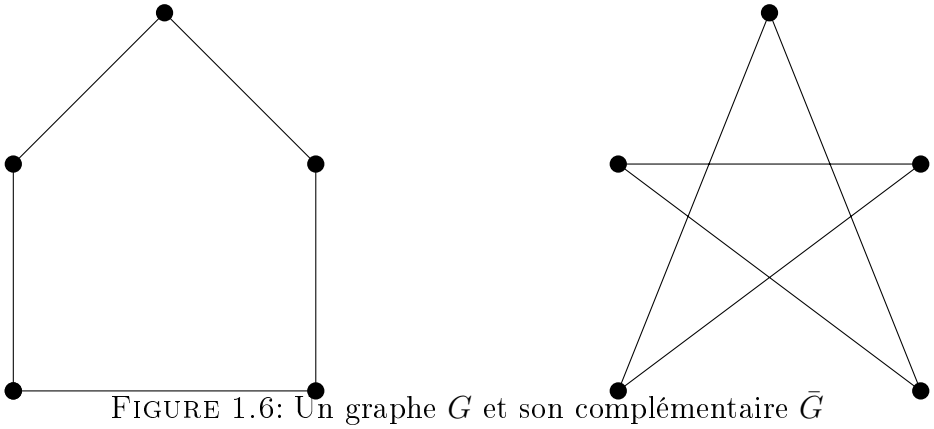


FIGURE 1.6: Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$

1.2.7 Graphe régulier

Un graphe G est dit $r-$ régulier si chaque sommet de G a un degré r.

La Figure 1 :7. représente un graphe $4-$ régulier.

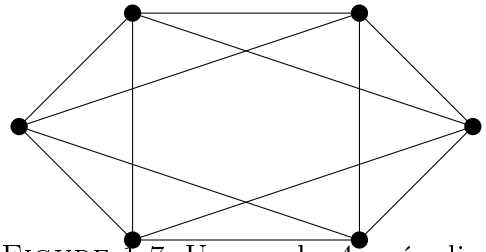


FIGURE 1.7: Un graphe $4-$ régulier

.

1.2.8 Graphe discret, et stable

Un graphe discret G d'ordre n, est un graphe dont tous les sommets sont non adjacents.

Un graphe discret G est un graphe 0-régulier.

Comme illustration du graphe discret d'ordre 6, est représente dans la Figure1 :8.

Un stable d'ordre p noté par S_6 dans un graphe $G = (V; E)$, appelé aussi, ensemble indépendant, est un sous graphe sans arête.

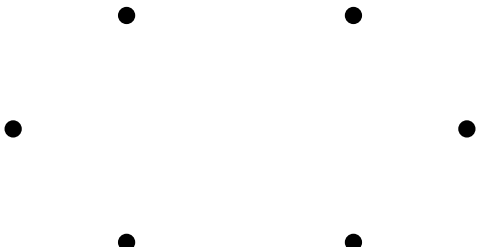


FIGURE 1.8: Un graphe discret

.

1.2.9 Graphe complet, et clique

Un graphe complet d'ordre n est noté K_n, est un graphe oú chaque sommet reliés tous les autres.

Un graphe complet G est un graphe $(n-1)-$ régulier. Comme illustration des graphes complets d'ordre 6, sont représentés dans la Figure1.9 .

Une clique d'ordre p notée par K_p dans un graphe $G = (V; E)$, est un sous graphe complet.

Exemple de la Figure 1 :9. Il ya plusieurs clique K_2 ; K_3...

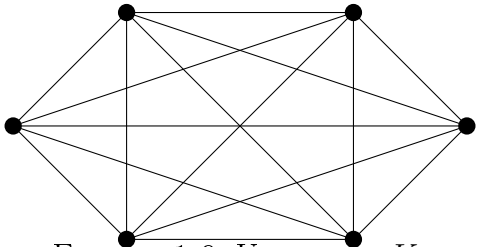


FIGURE 1.9: Un graphe K_6

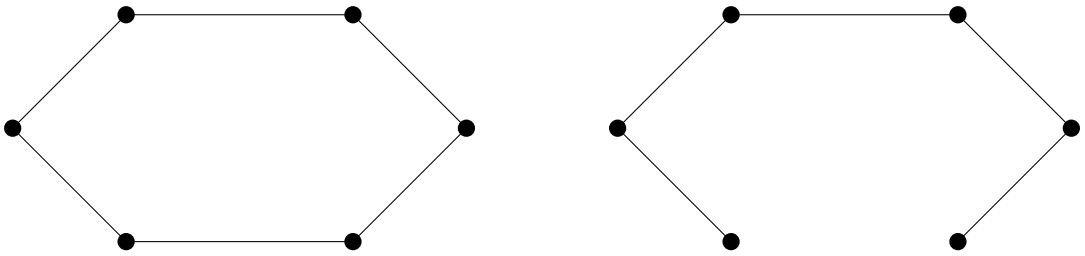
.

1.2.10 Chaîne et cycle

Soit u et v deux sommets d'un graphe G.

On appelle **distance** entre u et v, notée $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

L'excentricité d'un sommet v dans G est $exc(v) = \max\{d_G(v, w) : w \in V(G)\}$ et le **diamètre** de G, noté $diam(G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V(G)\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé un **centre**.



$G = C_6$ $H = P_6$

FIGURE 1.10: Un cycle C_6 et une chaîne P_6

1.2.11 Graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe, Le graphe $\acute{G} = (V, \acute{E})$ est un graphe partiel de G, si $\acute{E}$ est inclus dans E . Autrement dit, on obtient $\acute{G}$ en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G. La Figure 1 :11. représente un graphe graphe partiel$\acute{G}$ de G.

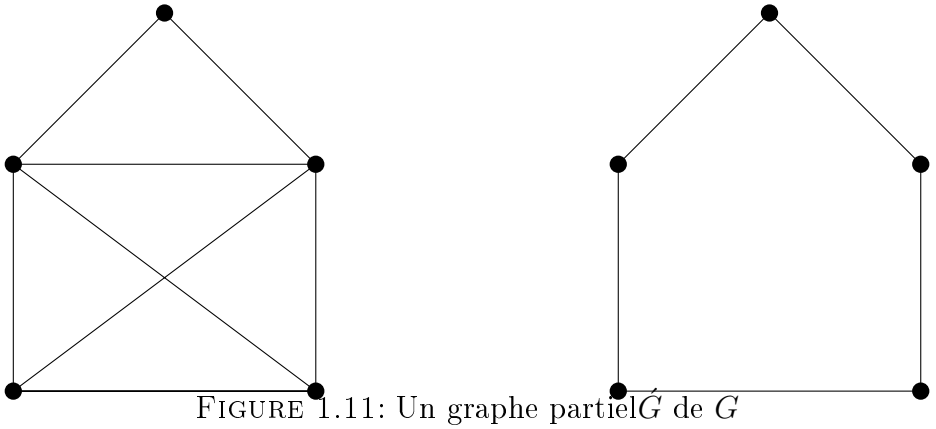


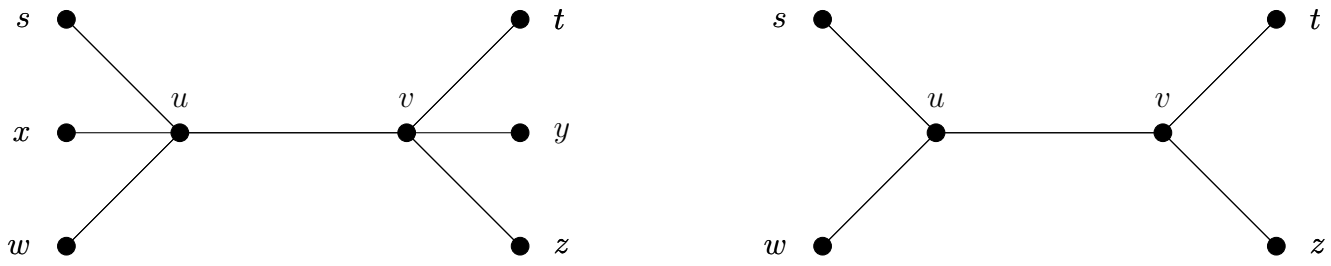
FIGURE 1.11: Un graphe partiel$\acute{G}$ de G

1.2.12 Sous-graphe, sous-graphe induit

Soient G et H deux graphes. Si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ alors est appelé **sous-graphe** de G et on écrit $H \subseteq G$. Si de plus $H \neq G$, alors H est un **sous-graphe propre** de G et on écrit $H \subset G$.

Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le sous-graphe de G **induit** par S, note $\langle S \rangle$, est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S.

Pour le graphe G illustre dans la figure. 1.12, le sous-graphe induit par $S = \{s, t, w, z, u, v\}$ est illustre dans la figure



Graphe G Graphe H

FIGURE 1.12: H :sous -Graphe de G

.

1.2.13 La grille

Soit P_n le chaine de n sommet . Un graphe grille est le produit cartésien de deux chaîne . La Figure 1 :13. représente un graphe $(P_2 \square P_5)$.

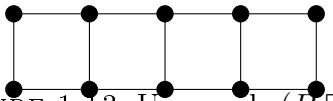


FIGURE 1.13: Un graphe$(P_2 \square P_5)$

1.2.14 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** s'il existe une partition de son ensemble des sommets en deux stables disjoints V_1 et V_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 : $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

La Figure 1 :14. représente un graphe biparti .

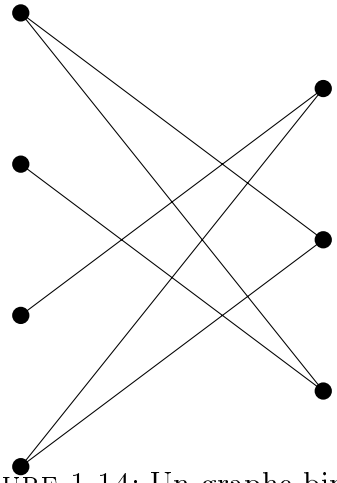


FIGURE 1.14: Un graphe biparti

.

1.2.15 Graphe biparti complet

Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes.

Ainsi, le graphe biparti complet $K_{n,m}$ a pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ avec $|V_1| = n$ et $|V_2| = m$, et pour ensemble d'arêtes $\{xy | x \in V_1, y \in V_2\}$.

Chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2 et réciproquement.

Remarque 1.1. *Le graphe biparti complet $K_{1,n}$ est appelé étoile.*

La Figure 1 :15. représente un graphe biparti complet$K_{3,4}$.

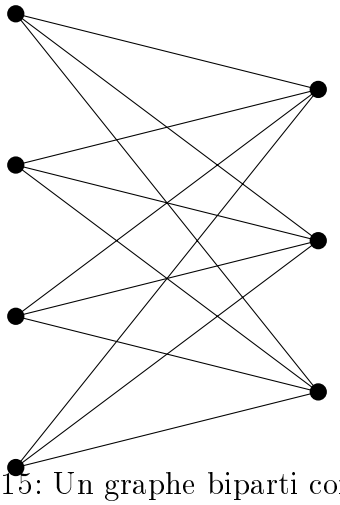
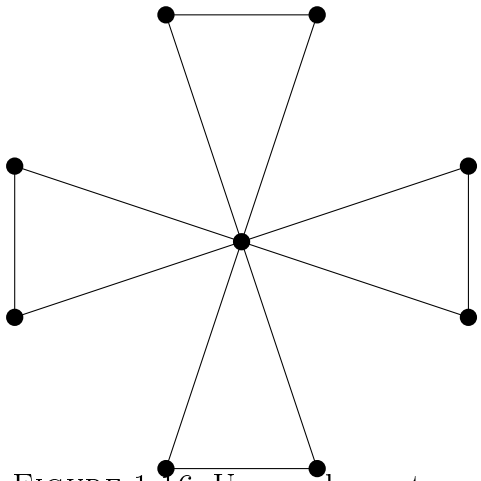


FIGURE 1.15: Un graphe biparti complet$K_{3,4}$.

.

1.2.16 Graphe cactus

Un **graphe cactus** G est un graphe connexe dans lequel deux cycles simples ont au plus un sommet en commun. De manière équivalente, il s'agit d'un graphe connexe dans lequel chaque arête appartient à au plus un cycle simple. La Figure 1 :16. représente un graphe cactus.



. FIGURE 1.16: Un graphe cactus

1.2.17 Arbres, étoile, double étoile d'un graphe

On appelle **arbre** n sommets et on note par T un arbre est un graphe connexe sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes .

Un arbre est dit trivial(resp.Non trivial)s'il contient un seul sommet(resp.Au moins deux sommets).

On appelle feuille d'un arbre un sommet de degré 1 . La Figure 1 :17. représente un

arbre T ordre $n = 14, |L(T)| = 7, |S(T)| = 4$.

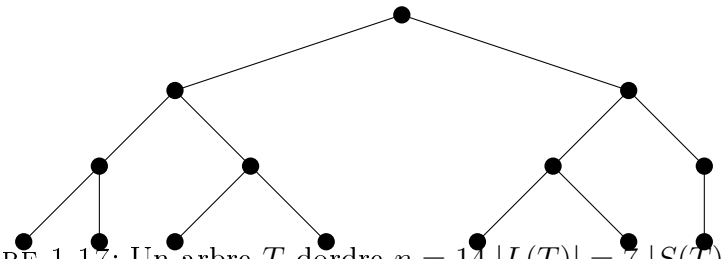
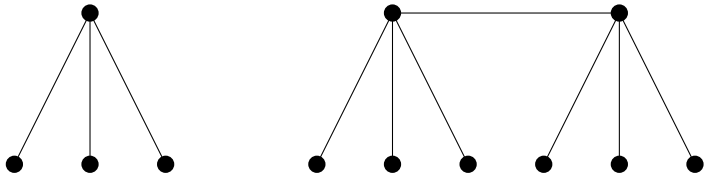


FIGURE 1.17: Un arbre T dordre $n = 14, |L(T)| = 7, |S(T)| = 4$.

On appelle **étoile**, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles.est un cas particulier d'un graphe biparti complet .

Une **double étoile** notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$, en ajoutant une arête reliant les deux centres. La Figure 1 :18. représente une étoile $S_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,3}$.



Une étoile ($S_{1,3}$) Une double étoile ($S_{3,3}$)

FIGURE 1.18: Une étoile $S_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,3}$

.

1.2.18 Le graphe total

Le graphe total de G, noté $T(G)$ est défini comme suit : L'ensembles de sommets de $T(G)$ est$V(G) \cup E(G)$. Deux sommets x,y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :

*$x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.

*$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à $y$dans G.

* $x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

1.2.19 Graphe milieu

Soit $G = (V(G); E(G))$ un graphe simple, le graphe milieu de G noté $M(G)$ est défini comme suit : l'ensemble des sommets de M(G) est $V(G) \cup E(G)$: Deux sommet x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :

$x, y \in E(G)$et x est adjacent à y dans G.

$x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G

1.2.19.1 Graphe milieu d'un cycle

pour tout graphe milieu d'un cycle C_n ,ona$|V(G)| = 2n$ Voir la figure suivant La Figure 1 :19. représente graphe milieu($M(C_4)$.)

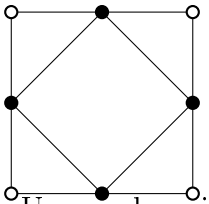
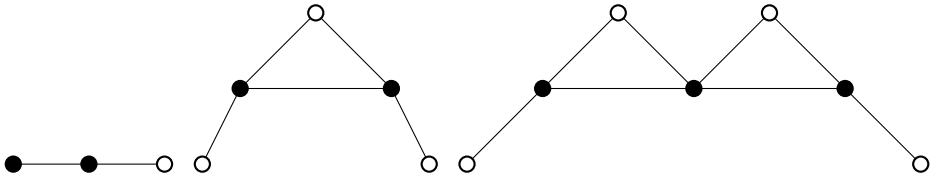


FIGURE 1.19: Un graphe milieu($M(C_4)$.)

Graphe milieu d'une chaîne

Pour un graphe milieu d'une chaîne P_n , ona $|V(G)| = 2n - 1$.

La Figure 1 :20. représente graphe milieu$M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$).



$M(P_2)$ $M(P_3)$ $M(P_4)$

FIGURE 1.20: Un graphe milieux ($M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$)

1.2.20 Le roue

La roue W_n est un graphe d'ordre $n \succ 3$ obtenu à partir l'union disjointe d'un cycle d'ordre $n - 1$ et un sommet en reliant ce sommet à tous les sommets de cycle [11] . La Figure 1 :21. représente Le roue (W_4) et (W_7).

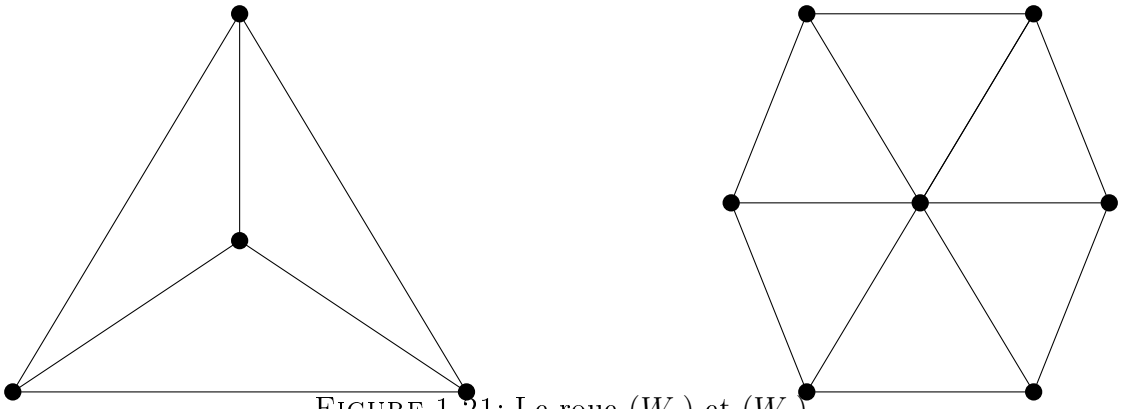


FIGURE 1.21: Le roue (W_4) et (W_7)

1.3 Domination dans Les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble des sommets $S \subseteq V$ sont dominant de G si tout sommets de $V - S$ sont adjacents à au moins un sommet de S, c'est-à-dire si $N[S] = V$.

Dans la littérature, il existe des autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V : |N[v] \cap S| \geq 1$.

Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommets $v \in V : |N[v] \cap S| \neq \emptyset$.

Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

Le **nombre de domination** $\gamma(G)$ et le **nombre de domination supérieur** $\Gamma(G)$ de G sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur G. Un ensemble dominant minimal de G de cardinal minimum est appelé γ-**ensemble**, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé Γ-**ensemble**.

$\gamma(G) = \min_{D \in \Im}(|D|)$: nombre de domination inférieur.

$\Gamma(G) = \max_{D \in \Im}(|D|)$: nombre de domination supérieur.

Le nombre de domination et le nombre de domination supérieur du graphe illustré dans figure 1.12 valent respectivement $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 6$. L'ensemble $S = u, v$ est un γ-ensemble et l'ensemble $S' = w, x, y, s, t, z$ est une Γ-ensemble.

1.3.1 Quelques Types de domination

Soit $G = (V; E)$ un graphe simple.On définit le nombre de domination inférieur conditionné $(G : P)$ comme étant la taille minimum d'un ensemble dominant $S \subseteq V$ tel que le

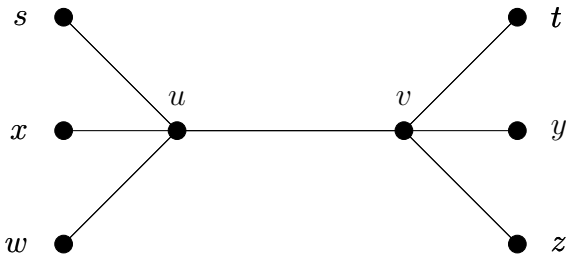


FIGURE 1.1: Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 6$

sous-graphe induit par S satisfait la propriété P.

Remarque 1.2. *: $\gamma(G) \leq \gamma_(G : P)$ pour toute propriété P. De nombreux paramètres de domination peuvent être défini en imposant une ou plusieurs conditions à l'ensemble dominant , par exemple imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant :*

1. $< D >$ soit connexe, produit la domination connexe.
2. $< D >$ soit sans sommets isolés,produit la domination totale.
3. $< D >$ soit une clique, produit la domination clique.
4. $< D >$ soit sans arêtes, produit la domination stable.
5. $< D >$ soit un cycle,produit la domination cycle.
6. $< D >$ possède un couplage parfait produit la domination couplée.

. On peut de même imposer des conditions extérieures, sur la façon de dominer, par exemple ,chaque sommet extérieur à D possédé au moins k voisins dans D, produit la k-domination :

Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, un dominant double D est un dominant sans sommet isolé et chaque sommet extérieur à D est dominé par au moins 2 sommets de D. Les invariants de domination sont nombreux .A titre d'exemple, nous pouvons citer :

La domination multiple : Un sous ensemble S de V est dit dominant multiple(ou k-dominant)de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans D.

Le nombre de domination multiple (ou nombre de k-domination), noté par $\gamma_k(G)$, est la tail le minimum d'un ensemble dominant multiple de G .

La domination connexe : Un sous ensemble$S$ de $V(G)$ est dit dominant connexe de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S est connexe.Le nombre de domination connexe , noté par $\gamma_c(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G.

La domination stable : Un sous ensemble S de $V(G)$ est dit dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête.

Le cardinal minimum (resp.maximum) d'un stable maximal de G ; noté $i(G)$ (resp. $0(G)$), est appelé le nombre de domination stable (resp.$B_o(G)$ le nombre de stabilité) de G :

La domination totale : Un sous ensemble S de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans S , i.e, $N(S) = V$. Le nombre de domination totale noté, $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G.

Chapitre 2

ÉTAT DE L'ART SUR LES ALLIANCES DANS LES GRAPHES

Nous concentrons dans ce chapitre sur quelques problèmes avec temps de préparation. Dans un premier lieu nous étudions ces différents propriétés et restrictions. Ensuite nous étudions quelques problèmes difficiles avec temps de préparation.

2.1 Vue historique alliance

Le mot alliance signifie un lien ou un rapport entre des individus, des familles, des États ou des parties. Dans le monde réel, les alliances sont trouvées dans beaucoup des variétés, chacune a des propriétés différentes, par exemple :

- alliances entre des nations pour l' appui mutuel dans la guerre, dans l' économie, ou pour des autres intérêts communs.
- alliances entre différentes parties politiques.
- alliances entre des personnes qui s'unissent par l'amitie ou par des obligations.
- alliances entre des compagnies pour des intérêt économiques communs.

Inspire par les alliances entre les nations en guerre, les alliances dans les graphes sont été présentées la première fois par Kristiansen, et al [3].

Une riche littérature sur les différentes paramètres d'alliances peut être trouvée dans les surveys [16],[17] et [18].

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents types d'alliances et leurs variantes avec les paramètres associés en rappelant quelques résultats connus.

2.2 Types Alliances

Considérons un graphe simple $G = (V; E)$

2.2.1 Alliances défensives

Définition 2.1. *:*

Une alliance défensive globale dans un graphe $G = (V(G), E(G))$ *est un ensemble dominant* S *vérifiant la condition que pour tout sommet* $v \in S, |N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$.

Si l'inégalité est stricte alors, l'alliance défensive et dite forte.

Utilisons les problèmes de la sécurité nationale pour illustrer ces concepts.

On peut penser à un sommet dans une alliance S *pouvant se défendre lui-même et ses voisins contre des attaques possibles par des sommets de* $V - S$*. Puisque chaque sommet dans une alliance défensive* S *a au moins autant des sommets de son voisinage fermé dans* S *que dans* $V - S$*, nous dirons que chaque sommet dans* S *peut être défendu contre une attaque possible par des sommets de* $V - S$*.*

Définition 2.2. *Le nombre d' alliance défensive* $d(G)$ *est le cardinal minimum d'une alliance défensive*

Le nombre d'alliance défensive $\hat{d}(G)$ *est le cardinal minimum d'une alliance défensive forte .*

Définition 2.3. *Une alliance défensive* S *est dite globale si* S *est un ensemble dominant.*

Définition 2.4. *Le nombre d'alliance défensive globale* $\gamma_d(G)$ *est le cardinal minimum d'une alliance défensive*

Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_{\hat{d}}(G)$ *est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale .*

pour exemple : Le graphe de la Figure 2.2

L'ensemble $S = \{a, c, d\}$ est une alliance défensive globale du graphe G, d'ou $\gamma_d(G) = 3$

Pour exemple : Le graphe de la Figure 2.2

L'ensemble $S = \{a, c, b, z\}$ est une alliance défensive globale forte du graphe G , d'ou $\gamma_{\hat{d}}(G) = 4$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats relatifs aux paramétres $\gamma_d(G)$ et $\gamma_{\hat{d}}(G)$.

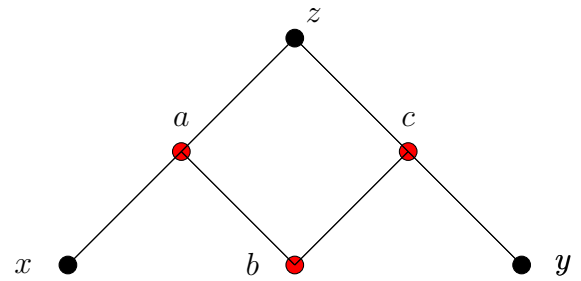


FIGURE 2.1: Un graphe G avec $\gamma_d(G) = 3$.

.

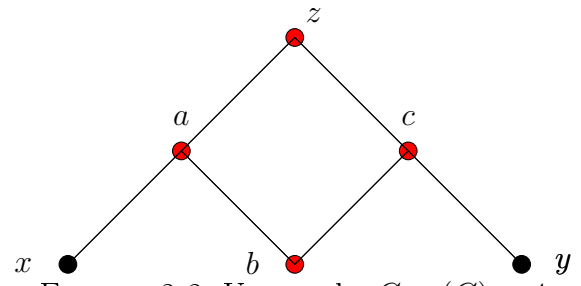


FIGURE 2.2: Un graphe G $\gamma_{\hat{d}}(G) = 4$

[Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003].

Pour tout graphe G, d'ordre n,

(i) $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_d(G) \leq \gamma_{\hat{d}}(G) \leq n.$

(ii) $1 \leq d(G) \leq \gamma_d(G) \leq n.$

(iii) $1 \leq d(G) \leq \hat{d}(G) \leq \gamma_{\hat{d}}(G) \leq n.$

Les mêmes auteurs (TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2] (2003)).

Ont donné les valeurs exactes de γ_d et $\gamma_{\hat{d}}$ pour quelques classes de graphes.

2.2.2 Bornes sur γ_d et $\gamma_{\hat{d}}$

Théorème 2.1. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2], (2003).)*

Pour tout graphe G sans sommets isolés et degré minimum δ ona :

1. $\gamma_d(G) \leq \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor$
2. $\gamma_{\hat{d}}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$

Corollaire 2.1. *: (TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2], (2003).)*

Pour tout graphe G : $\gamma_d(G) = n$ si et seulement si $G = \bar{K_n}$.

Théorème 2.2. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2] (2003).)*

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$: alors $\gamma_d(T) \leq \frac{3n}{5}$.

Théorème 2.3. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2] (2003).)*

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors : $\gamma_d(T) \leq \frac{3n}{4}$.

Théorème 2.4. *(J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta & Odile Favaron (Communicated by) Global alliances in planar graphs.[1](2007))*

Soit G un graphe simple d'ordre n ; et de degré maximum Δ, Alors :

1. $\gamma_d(G) \geq \lceil \frac{2n}{\Delta+3} \rceil$
2. $\gamma_{\hat{d}}(G) \geq \lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \rceil$

Théorème 2.5. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin.,[2], (2003)).*

Si G est un graphe simple d'ordre n, alors :

1. $\gamma_d(G) \geq \sqrt{4n+1} - 1$.
2. $\gamma_{\hat{d}}(G) \geq \sqrt{n}$.

Théorème 2.6. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin.,[2], (2003)).*

Si T est un arbre d'ordre n, alors :

1. $\gamma_d(G) \geq \frac{n+2}{4}$
2. $\gamma_{\hat{d}}(G) \geq \frac{n+2}{3}$.

Théorème 2.7. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin.,[2], (2003)).*

Soit G un graphe biparti d'ordre n, et de degré maximum Δ, alors :

1. $\gamma_d(G) \geq \frac{2n}{\Delta+3}$.
2. $\gamma_{\hat{d}}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$.

2.2.3 Alliances offensives

Définition 2.5. *La frontière d'un ensemble $S \subseteq V$ est définie comme $\partial(S) := \cup_{v \in S} N_{v-s}(v)$.*

Définition 2.6. *Un ensemble des sommets $S \subseteq V$ est appelé alliance offensive si et seulement si pour tout $v \in \partial(S), |N_S(v)| \geq |N_{V \setminus S}(v)| + 1$. .*

Définition 2.7. *Un ensemble non vide des sommets $S \subseteq V$ est dit une alliance offensive si et seulement si pour chaque $v \in (V - S), |N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. Une alliance offensive S est dite global si S est un ensemble dominant.*

Définition 2.8. *$v \in V \setminus S, |N_S(v)| \geq |N_{V \setminus S}(v)| + 1$. Ainsi, les alliances offensives mondiales dominent également ensembles, et on peut définir le nombre d'alliances offensives globales, noté $\gamma_o(T)$ égal à la cardinalité minimale d'une alliance offensive globale dans graphe G .*

Pour exemple : Le graphe G de la Figure 2.3.

L'ensemble $S = \{a, c\}$ est une alliance défensive globale du graphe G, d'ou $\gamma_o(G) = 2$

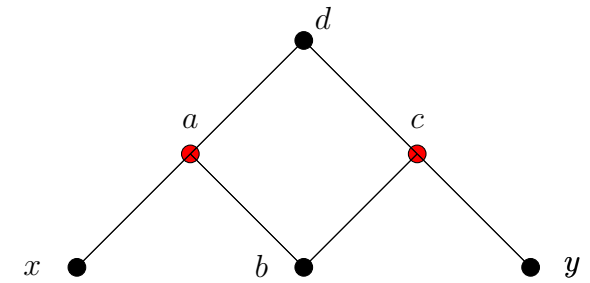


FIGURE 2.3: Un graphe (G) avec $\gamma_o(G) = 2$

Théorème 2.8. *(M. Bouzefrane, M.chellali, on the global offensive alliance number of a tree, Opuscula math.29(3)[7](2009)) .*

Soit T un arbre, alors on a : $\gamma_{\hat{o}}(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T = K_1$ ou bien $T \in F$

Théorème 2.9. *Pour un graphe cubique $(3 - rgulier)$ on a :$\frac{2n}{5} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$*

2.2.4 Alliances offensives globale fortes

Définition 2.9. *Un ensemble non vide des sommets $S \subseteq V$est une alliance offensive globale forte si pour chaque sommet $v \in (V - S), |N[v] \cap S| > |N(v) \cap (V - S)|$.*

Définition 2.10. *De manière analogue, $S \subset V$ est un alliance offensive forte globale si pour tout sommet $v \in V \backslash S$, $|N_S(v)| \geq |N_{V\backslash S}(v)| + 2$, et le nombre d'alliances global offensives fortes, noté $\gamma_{\hat{o}}(G)$, est défini comme le minimum cardinalité d'une alliance offensive globale forte en G.*

par exampel : le graphe G de la Figure 2.4. L'ensemble $S = \{a, c, z, d\}$ est une alliance offensive globale forte du graphe G, d'ou $\gamma_{\hat{o}}(G) = 4$.

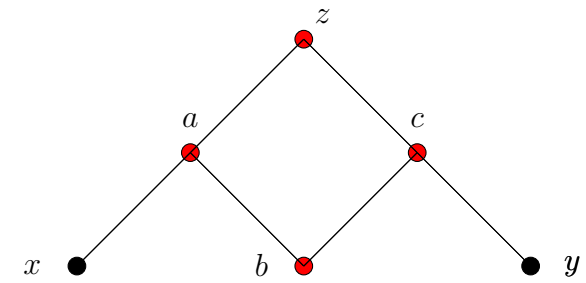


FIGURE 2.4: Un graphe (G) avec $\gamma_{\hat{o}}(G) = 4$

Théorème 2.10. *:(J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta & Odile Favaron (Communicated by) Global alliances in planar graphs[1].(2007)) Soit graphe d'ordre n, $n \geq 2$ ona :*

1. $\frac{n}{2} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{3n}{4}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{n}{2}$ *si seulement si G est un graphe biparti.*
3. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{3n}{4}$ *si seulement si G est un graphe isomorphe au graphe complet (K_4) .*

2.2.5 Bornes sur γ_o et $\gamma_{\hat{o}}$

Théorème 2.11. *(M. chelleli, Offensive alliances in bipartits graphs, J. combin. Math. Combin. Comput. Accepté.[15])*

Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés : $\gamma_o(G) \leq \frac{n-r+s}{2}$

Théorème 2.12. *(M. chelleli, Offensive alliances in bipartits graphs, J. combin. Math. Combin. Comput. Accepté.[15])*

Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés : $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq \frac{n+r}{2}$.

2.2.6 Alliances puissantes

Définition 2.11. *Une alliance est dite puissante si elle est a la fois défensive et offensive . Elle peut s'exprimée par la condition suivante : pour tout sommet .*

$v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.

Une alliance puissante globale de G est une alliance puissante qui domine G. Si de plus l'inégalité est stricte, alors S est dite alliance puissante forte.

Définition 2.12. *Le nombre d'alliance puissante ap (respectivement, d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'une alliance puissante globale).*

par exampel : le graphe G de la Figure 2.5.

L'ensemble $S = \{a, c, d\}$ est une alliance puissante globale , d'ou $\gamma_{ap}(G) = 3$

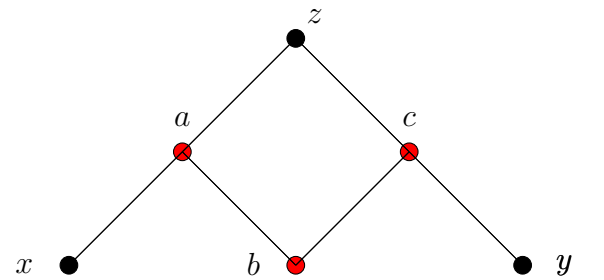


FIGURE 2.5: Un graphe (G) avec $\gamma_{ap}(G) = 3$

2.2.7 Bornes sur γ_{ap}

Théorème 2.13. *(M. Bouzefrane, M.chellali, on the global offensive alliance number of a tree, Opuscula math.29(3),[7](2009).)*

Soit T un arbre d'ordre n ayant l feuilles et s sommets supports. Alors :

$\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5}$

Corollaire 2.2 (Birgham et al.)**.** *Si G est un graphe régulier d'ordre n, alors : $n \leq 2\gamma_{ap}(G)$.*

Proposition 2.1 (Birgham et al)**.** *Pour tout graphe G d'ordre n : $n \leq \frac{\Delta+\delta+2}{\delta+1}\gamma_{ap}(G)$.*

Voici quelques valeurs exactes de $d_p\,(G)$ et $\gamma_{ap}\,(G)$ dans des familles de graphes spécifiques (TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2],(2003).)

1. Pour toute chaine P_n avec $n \geq 2$, $d_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \lfloor 2n/3 \rfloor$, et
2. Pour tout cycle C_n, $d_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$
3. Pour le graphe complet K_n, $d_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \lceil n/2 \rceil$

2.3 Résultats existants entres $\gamma_d, \gamma_o, \gamma_{\hat{d}}, \gamma_{\hat{o}}$ et γ_{ap} dans quelques des graphes particuliers

2.3.1 Les chaînes

Théorème 2.14. *(Haynes et al).*

Pour toute chaîne p_n d'ordre n avec $n \geq 3$, on a :

1. $\gamma_d(p_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
2. $\gamma_{ap}(p_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.
3. $\gamma_{\hat{d}}(p_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Théorème 2.15. *(R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math[5]).*

Pour toute chaîne p_n d'ordre n avec $n \geq 3$, on a :

1. $\gamma_o(p_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(p_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Exemple :



graphe $\gamma_d(p_3) = 2)$ graphe $\gamma_{ap}(p_3) = 2)$
FIGURE 2.1: Une Chaîne p_3 avec $\gamma_{ap}(p_3) = \gamma_{ap}(p_3) = 2$



graphe $\gamma_d(p_4) = 2)$ graphe $\gamma_{ap}(p_4) = 2)$
FIGURE 2.2: Une chaîne p_4 avec $\gamma_{ap}(p_4) = \gamma_{ap}(p_4) = 2)$

2.3.2 Les cycles

Théorème 2.16. *(Haynes et al)*

Soit un cycle C_n d'ordre n avec $n > 3$, alors :

$\gamma_d(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Théorème 2.17. *(R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math .[5]).*

Soit un cycle C_n d'ordre n avec $n > 3$, alors :

$\gamma_{\hat{o}}(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Théorème 2.18. *(Haynes et al)*

Pour tout cycle C_n d'ordre n ona : $\gamma_{ap}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$.

Théorème 2.19. *(Haynes et al).*

Soit un cycle C_n d'ordre d'ordre n avec $n > 3$, alors :

$$\gamma_d(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n \equiv 0[4] \\ \frac{n+1}{2} & si\ n \equiv 1,3[4] \\ \frac{n+2}{2} & si\ n \equiv 2[4] \end{cases}$$

Remarque 2.1. *Soit un cycle C_n d'ordre n avec $n > 3$, alors :*

1. $\gamma_d(C_n) = \gamma_{\hat{d}}(C_n)$.
2. $\gamma_{ap}(C_n) = \begin{cases} \frac{2n}{3} & si\ n \equiv 0[3] \\ \frac{2n+1}{3} & si\ n \equiv 1[3] \\ \frac{2n+2}{3} & si\ n \equiv 2[3] \end{cases}$

Proposition 2.2. $>$

pour tout cycle $(_n)$: $\gamma_d(C_n) = \gamma_{ap}(C_n)$ si $n = 3$ ou $n = 6$

La figure suivante représente

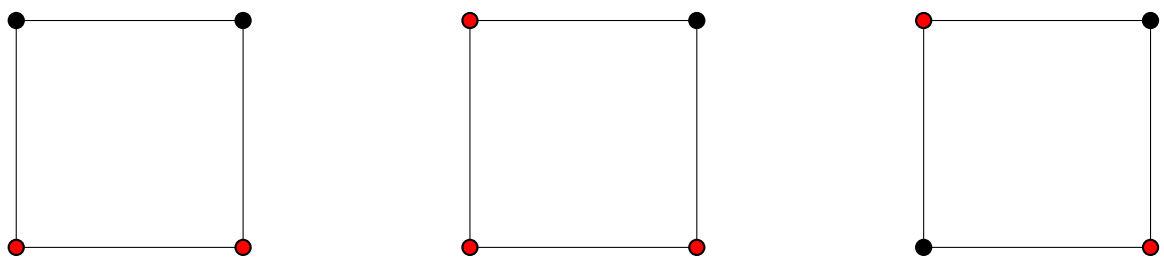
$\gamma_{ap}(C_3) = \gamma_d(C_3) = \gamma_o(C_3) = \gamma_{\hat{d}}(C_3) = \gamma_{\hat{o}}(C_3) = 2$



$\gamma_d(c_3) = 2$ $\gamma_{\hat{d}}(C_3) = 2$

FIGURE 2.3: Un cycle C_3 avec $\gamma_d(C_3) = \gamma_{ap}(C_3) = \gamma_o(C_3) = \gamma_{\hat{d}}(C_3) = \gamma_{\hat{o}}(C_3) = 2$.

La figure suivante représente un graphe avec : $\gamma_{ap}(C_4) = 3; \gamma_d(C_4) = \gamma_{\hat{d}}(C_4) = \gamma_{\hat{o}}(C_4) = \gamma_o(C_4) = 2$.



$\gamma_{\hat{d}}(C_4) = \gamma_d(C_4) = 2$ $\gamma_{ap}(C_4) = 3$ $\gamma_{\hat{o}}(C_4) = \gamma_o(C_4) = 2$

FIGURE 2.4: Un cycle C_4 avec $\gamma_{ap}(C_4) = 3; \gamma_d(C_4) = \gamma_{\hat{d}}(C_4) = \gamma_{\hat{o}}(C_4) = \gamma_o(C_4) = 2$

2.3.3 Graphes complets

Théorème 2.20. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., [2] (2003).)*

Soit graphe complet K_n d'ordre n , alors :

1. $\gamma_d(k_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.
2. $\gamma_{\hat{d}}(k_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.
5. $\gamma_{ap}(k_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Théorème 2.21. *(R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math . [5].)*

Soit graphe complet K_n d'ordre n , alors :

1. $\gamma_o(k_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(k_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Remarque 2.2. *Soit graphe complet K_n d'ordre n , alors :*

1. $\gamma_d(K_n) = \gamma_o(K_n) = \gamma_{ap}(K_n)$.
2. $\gamma_{\hat{d}}(K_n) = \gamma_{\hat{o}}(K_n)$.
3. $\gamma_{ap}(G) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n : \quad est\ pair \\ \frac{n+1}{2} & si\ n : \quad est\ impair \end{cases}$

La figure suivante représente un graphe avec $\gamma_d(k_5) = 3$

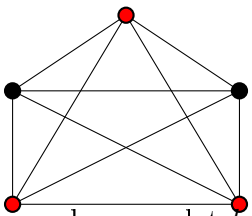


FIGURE 2.5: Un graphe complet k_5 avec $\gamma_d(k_5) = 3$

De la figure 2.6 , on remarque que $\gamma_{ap}(k_5) = \gamma_d(k_5) = \gamma_o(k_5) = \gamma_{\hat{d}}(k_5) = \gamma_{\hat{o}}(k_5) = 3$.

La figure suivante représente graphe complet k_6 avec $\gamma_d(k_6) = 3$

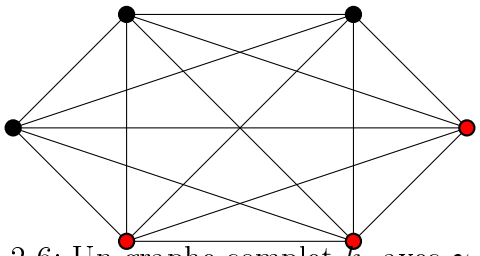


FIGURE 2.6: Un graphe complet k_6 avec $\gamma_d(k_6) = 3$

De la figure 2.11 , on remarque que $\gamma_d(k_6) = \gamma_{ap}(k_6) = \gamma_o(k_6) = 3$.

La figure suivante représente un graphe complet k_6 avec avec $\gamma_{\hat{d}}(k_6) = 4$

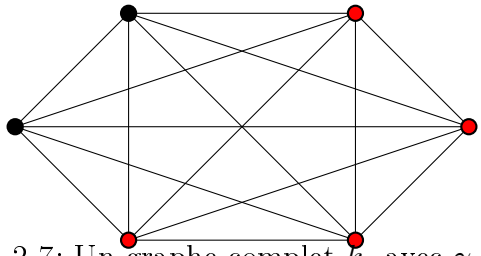


FIGURE 2.7: Un graphe complet k_6 avec $\gamma_{\hat{d}}(k_6) = 4$

De la figure 2.12 , on remarque que $\gamma_{\hat{d}}(k_6) = \gamma_{\hat{o}}(k_6) = 4$

2.3.4 Graphe biparti complet

Proposition 2.3. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [1] 2003).*

Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$ d'ordre n , si $r, s > 2$ ona :

1. $\gamma_d(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$.
2. $\gamma_d(K_{r,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$.
3. $\gamma_{\hat{d}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$
4. *si* $1 \leq r \leq s$,$\gamma_{ap}(K_{r,s}) = \min\{r + \lfloor s/2 \rfloor, \lceil (r+1)/2 \rceil + \lceil (s+1)/2 \rceil\}$

Théorème 2.22. *(R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math . [5].)*

Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$, d'ordre n ona :

1. $\gamma_o(k_{r,s}) = \min\left\{\lceil \frac{r+1}{2} \rceil, \lceil \frac{s+1}{2} \rceil\right\}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(k_{r,s}) = \min\{s, r\}$

La figure suivante représente un graphe avec $\gamma_d(k_{3,3}) = 4, \gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = 4$,$\gamma_{apd}(k_{3,4}) = 5$ et $\gamma_{\hat{o}}(k_{3,4}) = 3$

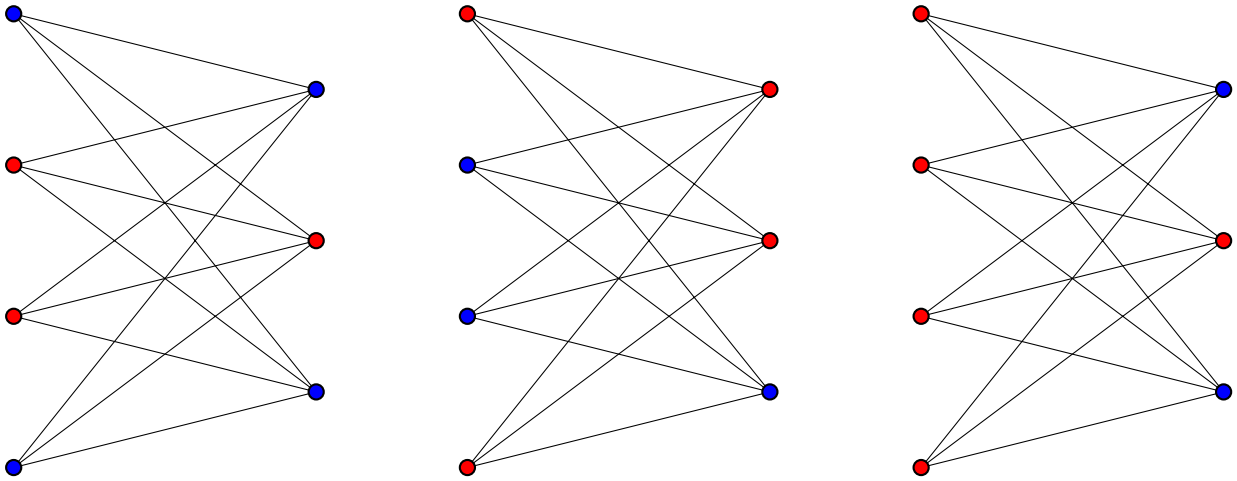
2.3.5 Étoile

Le théorème suivant nous donne la valeur exacte du nombre d'alliance puissante globale pour étoile d'un graphe.

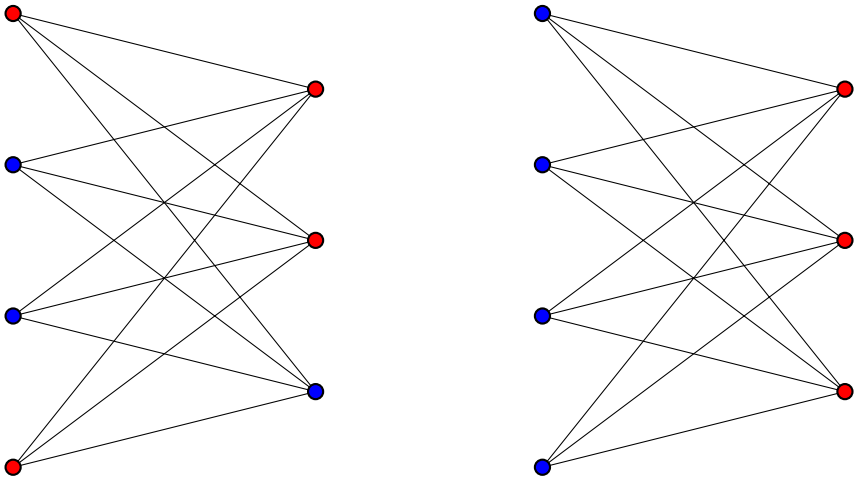
Théorème 2.23. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [1] 2003).*

Pour tout étoile $S_{1,n}$ avec $n > 1$ ona :

1. $\gamma_d(S_{1,n}) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.



$\gamma_d(k_{3,4}) = 3$ $\gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = 4$ $\gamma_{ap}(k_{3,4}) = 5$



$\gamma_o(k_{3,4}) = 4$ $\gamma_{\hat{o}}(k_{3,4}) = 3$

FIGURE 2.8: Un graphe biparti $k_{3,4}$ avec $\gamma_d(k_{3,4}) = 4, \gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = 4 et \gamma_{\hat{o}}(k_{3,4}) = 3$

2. $\gamma_{\hat{d}}(S_{1,n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Remarque 2.3. *:*

Pour tout étoile $S_{1,n}$ avec $n > 1$ ona :

$\gamma_{ap}(S_{1,n}) = \gamma_d(S_{1,n})$.

Théorème 2.24. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [1] 2003).*

Pour tout étoile $S_{1,n}$ avec $n > 1$ ona :

1. $\gamma_o(S_{1,n}) = 1$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,n}) = n$.

Théorème 2.25. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [1] 2003).*

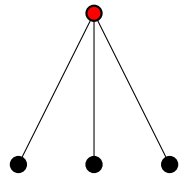
Pour tout étoile $S_{1,n}$ avec $n > 1$ ona :

1. $\gamma_{\hat{d}}(S_{1,n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

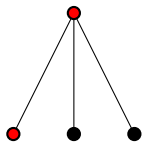
Proposition 2.4. *Pour tout étoile $S_{1,n}$ avec $n \succ 1$ ona :*

$$\gamma_{\hat{o}}(S_{1,n}) = \begin{cases} 2\gamma_{\hat{d}}(S_{1,n}) - 2 & si\ n \equiv 0[2] \\ 2\gamma_{\hat{d}}(S_{1,n}) - 3 & si\ n \equiv 1[2] \end{cases}$$

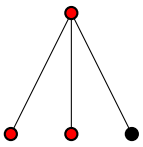
La figure suivante représente : étoile $S_{1,3}$ avec
$\gamma_o(S_{1,3}) = 1$, $\gamma_{ap}(S_{1,3})$=2 , $\gamma_{\hat{d}}(S_{1,3})$=3 et $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,3}) = 3$



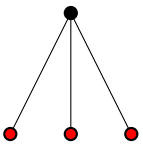
$\gamma_o(S_{1,3}) = 1$



$\gamma_d(S_{1,3}) = \gamma_{ap}(S_{1,3}) = 2$



$\gamma_{\hat{d}}(S_{1,3}) = 3$



$\gamma_{\hat{o}}(S_{1,3}) = 3$

FIGURE 2.9: Une étoile $S_{1,3}$ avec $\gamma_o(S_{1,3}) = 1$,$\gamma_{ap}(S_{1,3}) = 2$, $\gamma_{\hat{d}}(S_{1,3}) = 3$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,3}) = 3$;

2.3.6 Double étoile

Proposition 2.5. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin , [2](2003)).*

Pour toute double étoile $S_{r,s}$ si $r, s \geqslant 2$

1. $\gamma_d(p_{r,s}) = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + 2$.
2. $\gamma_{\hat{d}}(p_{r,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2$.

Proposition 2.6. *(TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin , [2](2003)).*

Pour toute double étoile $S_{r,s}$ si $r, s \geqslant 2$:

1. $\gamma_o(p_{r,s}) = 2$.
2. $\gamma_{\hat{0}}(p_{r,s}) = r + s$.

Remarque 2.4. *Pour une double étoile $S_{r,s}$:*

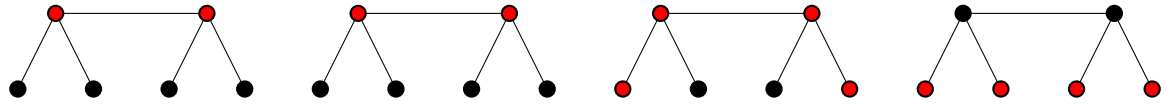
$\gamma_d(S_{r,s}) = \gamma_{ap}(S_{r,s})$.

Théorème 2.26. *Pour toute double étoile $S_{r,s}$ si $r, s \geqslant 3$ ona :*

$$\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = \begin{cases} 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 4 & si\ r, s \equiv 0[2] \\ 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 2 & si\ r, s \equiv 1[2] \\ 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 3 & si\ r \equiv 1[2] ous \equiv 1[2] \end{cases}$$

La figure suivante représente une double étoile $S_{2,2}$ avec :

$\gamma_{ap}(S_{2,2}) = \gamma_d(S_{2,2}) = \gamma_o(S_{2,2})$, $\gamma_{\hat{d}}(S_{2,2}) = 4$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{2,2}) = 4$.



$\gamma_o(S_{2,2}) = 2$ $\gamma_d(S_{2,2}) = 2$ $\gamma_{\hat{d}}(S_{2,2}) = 4$ $\gamma_{\hat{o}}(S_{2,2}) = 4$

FIGURE 2.10: Une double étoile $S_{2,2}$ avec : $\gamma_{ap}(S_{2,2}) = \gamma_d(S_{2,2}) = \gamma_o(S_{2,2})$, $\gamma_{\hat{d}}(S_{2,2}) = 4$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{2,2}) = 4$.

2.3.7 Le graphe roue

Théorème 2.27. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.[10],(2017)).*

Soit le roue W_n d'ordre n, ona :

1. $\gamma_d(W_n) = 1 + \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$
2. $\gamma_{\hat{d}}(W_n) = 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$

Théorème 2.28. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.[10],(2017)).*

Soit le roue W_n d'ordre n, ona :

1. $\gamma_o(W_n) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil & si\ n \equiv 1[3] \\ 2 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil & si\ n \equiv 0, 2[3] \end{cases}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(W_n) = 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$

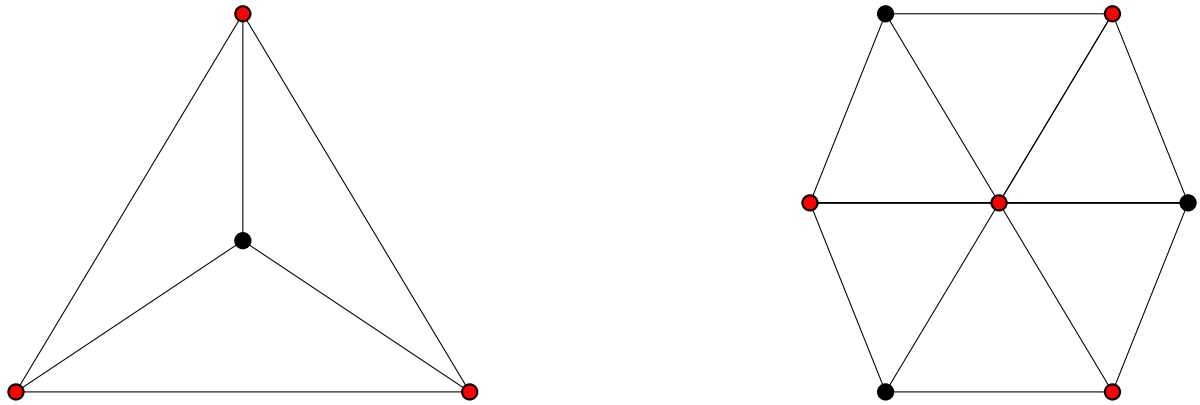
La figure suivante représente :

$\gamma_{ap}(W_4) = 3$ et $\gamma_{ap}(W_7) = 4$

2.3.8 Graphe total

2.3.8.1 Graphe total d'une chaîne

Théorème 2.29. *(J. A. Rodríguez-Velázquez et J. M. Sigarreta, Global defensive k-alliances in graphs. Disc Applied Math .[6]) :*



Le graphe roue (W_3) Le graphe roue (W_7)

FIGURE 2.11: Un graphe roue (W_4) , W_7 avec $\gamma_{\hat{ap}}(W_4) = 3$, $\gamma_{\hat{ap}}(W_7) = 4$

Pour tout graphe total G d'une chaîne p_n d'ordre n , $n > 1$ ona :

1. $\gamma_{\hat{d}}(G) = \begin{cases} 3 & si\ n = 4 \\ n & sinon \end{cases}$
2. $\gamma_{d}(G) = \begin{cases} 2 & si\ n = 2 \\ n & si\ n > 2 \end{cases}$

Théorème 2.30. *(J. A. Rodríguez-Velázquez et J. M. Sigarreta, Global defensive k-alliances in graphs. Disc Applied Math .[6]) :*

Pour tout graphe total G d'une chaîne p_n d'ordre n ona : $\gamma_o(p_n) = \gamma_{\hat{o}}(p_n) = n$

Théorème 2.31. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.[10],(2017)).*

Pour tout graphe total G d'une chaîne p_n d'ordre n $\gamma_{ap}(G) = n$

2.3.8.2 Graphe total d'un cycle

Théorème 2.32. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.[10],(2017)).*

Pour tout graphe total G d'un cycle C_n d'ordre n, $n > 1$ ona :

1. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \gamma_o(G) = \begin{cases} n & si\ n \equiv 0[2] \\ n+1 & si\ n \equiv 1[2] \end{cases}$

Théorème 2.33. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.[10],(2017)).*

Pour tout graphe total G d'un cycle C_n d'ordre n :

$\gamma_d(G) = \gamma_{\hat{d}}(G) = n$.

Théorème 2.34. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.[10],(2017)).*

Pour tout graphe total G d'un cycle C_n d'ordre n :

$\gamma_{ap}(G) = n$.

2.3.9 Le graphe milieu d'une chaîne

La proposition suivante donne une relation entre $\gamma_{ap}M(P_n)$, $\gamma_d M(P_n)$ et$\gamma_o M(P_n)$ dans un graphe milieu d'une chaîne.

Proposition 2.7. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea. [10],(2017)).*

Dans un graphe milieu d'une chaîne $\gamma_o M(P_n)$ pour $n \succ 3$ on a :

$\gamma_{ap}M(P_n) = \gamma_d M(P_n) = \gamma_o M(P_n) = n - 1$.

Le théorème suivant nous donne la valeur exacte du nombre d'alliance puissante globale pour le graphe milieu d'une chaîne

Théorème 2.35. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea. [10],(2017)).*

Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre n avec $n \geq 2$, ona : $\gamma_{\hat{d}}(G) = \begin{cases} n \quad si\ n = 2; 3 \\ n+1 \quad si\ n \geq 4 \end{cases}$

Théorème 2.36. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea. [10],(2017).*

Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :

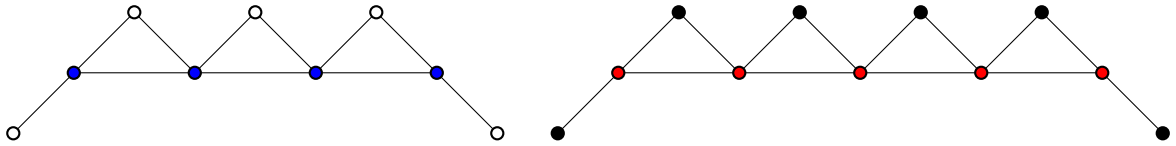
$$\gamma_{\hat{o}}(G) = \begin{cases} n \quad si\ n = 2 \\ n+1 \quad si\ n \geq 3 \end{cases}$$

Théorème 2.37. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes, Mémoire de master math universié de Medea. [10],(2017).*

Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :

$$\gamma_{\hat{o}}(G) = \begin{cases} \gamma_{\hat{d}}(G) + 1 \quad si\ n = 3 \\ \gamma_{\hat{d}}(G) \quad sinon \end{cases}$$

La figure 2.12 représente un graphe avec $\gamma_{ap}M(P_5) = \gamma_d M(P_5) = \gamma_o M(P_5) = 4$ et $\gamma_{ap}M(P_6) = \gamma_d M(P_6) = \gamma_o M(P_6) = 5$



$\gamma_{ap}M(P_5) = 4$ $\gamma_{ap}M(P_6) = 5$

FIGURE 2.12: Un graphe milieu avec $\gamma_{ap}M(P_5) = \gamma_dM(P_5) = \gamma_oM(P_5) = 4$ et $\gamma_{ap}M(P_6) = \gamma_dM(P_6) = \gamma_oM(P_6) = 5$

2.3.10 Le graphe milieu d'un cycle

Théorème 2.38. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.(2017), [10]).*

Pour tout graphe milieu G d'un cycle d'ordre n avec $n \geq 3$, on a :

$\gamma_{ap}M(C_n)$=$\gamma_dM(C_n)$=$\gamma_oM(C_n) = n$.

Le théorème suivant nous donne la valeur exacte du nombre d'alliance puissante globale pour le graphe millieu d'un cycle

Théorème 2.39. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.(2017), [10]).*

Pour tout graphe milieu G d'un cycle d'ordre n avec $n \geq 3$, on a :

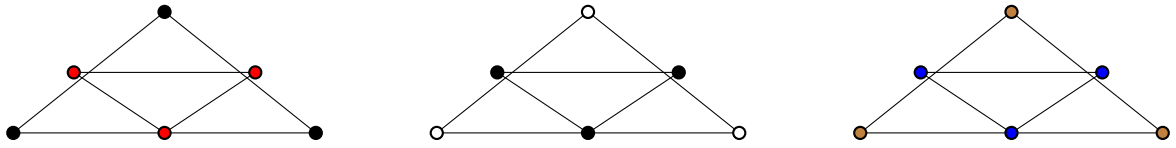
$\gamma_dM(C_n)$=$\gamma_{\hat{d}}M(C_n) = n$.

Corollaire 2.3. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.(2017), [10]).*

Pour tout graphe milieu G d'un cycle d'ordre n avec $n \geq 3$, on a :

$\gamma_oM(C_n)$=$\gamma_{\hat{o}}M(C_n) = n$.

La figure suivante représente un graphe avec : $\gamma_{ap}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{d}}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{o}}M(C_3) = 3$



$\gamma_{ap}M(C_3) = 3$ $\gamma_{\hat{d}}M(C_3) = 3$ $\gamma_{\hat{o}}M(C_3) = 3$

$\gamma_{ap}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{d}}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{o}}M(C_3) = 3$

FIGURE 2.13: Un graphe milieu($M(C_3)$) avec $\gamma_{ap}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{d}}M(C_3)$=$\gamma_{\hat{o}}M(C_3) = 3$

2.3.11 Le graphe milieu d'une étoile

Théorème 2.40. *(F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea. [10],(2017)).*

Pour tout graphe milieu d'une étoile $S_{1,n}$ avec $n > 1$:

$$\gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \begin{cases} 2 \quad \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 1 \quad si\ n = 2 \\ \frac{3}{2} \quad \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 1 \quad si\ n \equiv 0[2] \quad et\ n > 2 \\ \frac{3}{2} \quad \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + \frac{1}{2} \quad si\ n \equiv 1[2] \quad et\ n > 2 \end{cases}$$

Chapitre 3

Calcul des nombres d'alliances puissantes globales fortes dans quelques classe des graphes

Dans ce chapitre nous définissions un nouveau paramétré $\gamma_{\hat{ap}}(G)$.

nous calculons les nombres d'alliances globales fortes dans les graphes particules.

3.1 Alliance puissante globale forte

Définition 3.1. *Une alliance est dite puissante globale forte si elle est a la fois défensive global forte et offensive globale forte .*

Elle peut s'exprimée par la condition suivante : pour tout sommet .

$v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| > |N[v] - S|$.

Définition 3.2. *Le nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale forte .*

Exemple 3.1.1. *Le graphe G de la Figure* 3.1 *L'ensemble $S = \{a, c, z, d\}$ est globale d'une alliance puissante globale forte du graphe G, d'ou $\gamma_{\hat{ap}}(G) = 4$.*

Dans ce chapitre, nous étudions certains paramétrés d'alliances puissantes globales fortes.

Dans la premier partie de ce chapitre, nous calculons les nombres d'alliances globales fortes dans les graphes particules.

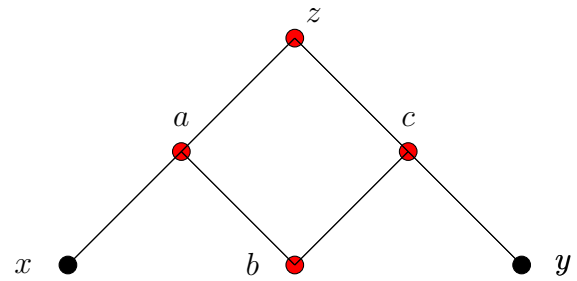


FIGURE 3.1: Un graphe (G) avec $\gamma_{a\hat{p}}(G) = 4$.

3.1.1 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour les chaînes

Nous avons calculer pour les chaînes et on a trouver que

Remarque 3.1. *Si G est une chaîne p_n d'ordre n, ou $n > 3$, alors :*

$$\gamma_{a\hat{p}}(p_n) = \begin{cases} \frac{2n+3}{3} \\ si\ n \equiv 0[3] \\ \frac{2n+4}{3} \\ si\ n \equiv 1[3] \\ \frac{2n+2}{3} \\ si\ n \equiv 2[3] \end{cases}$$

on remarque que : $\gamma_{a\hat{p}}(p_n) = \gamma_{\hat{d}}(p_n) = \gamma_{\hat{o}}(p_n)$ dans les cas ou $n = \{5, 6, 7, 8\}$.

Exemple 3.1. *La figure 3.2 représente chaîne p_4 avec $\gamma_{a\hat{p}}(p_4) = 2$*



graphe $\gamma_{ap}(p_4) = 2$ graphe $\gamma_{a\hat{p}}(p_4) = 2$

FIGURE 3.2: Une chaîne p_4 avec ($\gamma_{a\hat{p}}(p_4) = \gamma_{ap}(p_4) = 2$)

3.1.2 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{a\hat{p}}$ pour les cycles

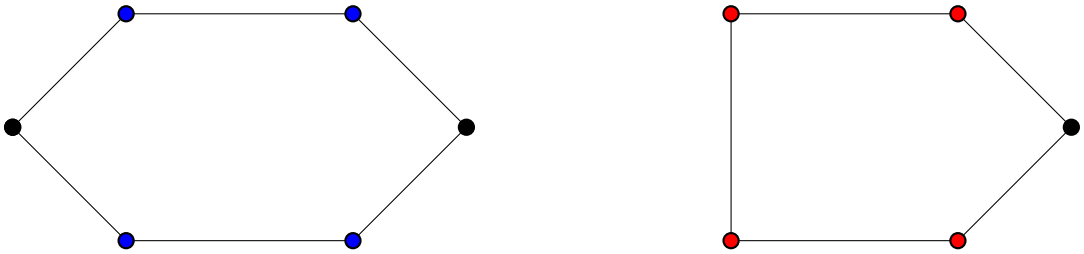
Après les calculs du $\gamma_{a\hat{p}}$ des les cycles C_n nous avons observe que :

Remarque 3.2. *Si G est une cycle C_n d'ordre n, ou $n > 3$, alors :*

$\gamma_{a\hat{p}}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$.

Exemple 3.1.2. *La figure 3.3 représente :une cycle C_5 et C_6 avec*

$\gamma_{a\hat{p}}(C_5) = \gamma_{a\hat{p}}(C_6) = 4$



$\gamma_{\hat{ap}}(C_5) = 4$

$\gamma_{\hat{ap}}(C_6) = 4$

FIGURE 3.3: Un Cycle C_5 et C_6 avec $\gamma_{\hat{ap}}(C_5) = \gamma_{\hat{ap}}(C_6) = 4$

3.1.3 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ pour d'un graphe complet

Remarque 3.3. *Si G est un graphe complet K_n , alors :* $\gamma_{\hat{ap}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Exemple 3.1.3. *La figure 3.4 représente un graphe complet (K_7) avec* $\gamma_{\hat{ap}}(k_7) = 4$

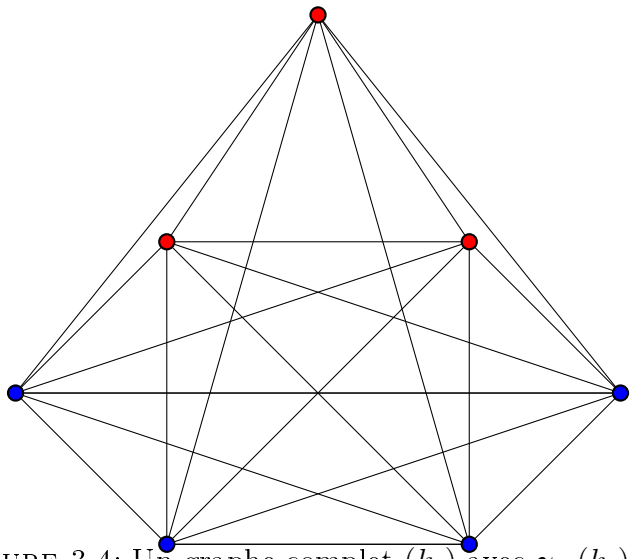


FIGURE 3.4: Un graphe complet (k_7) avec $\gamma_{\hat{ap}}(k_7) = 4$

Remarque 3.4. *Si G est un graphe complet K_n , alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}(K_n) = \gamma_{ap}(K_n)$.

3.1.4 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ pour un graphe biparti complet

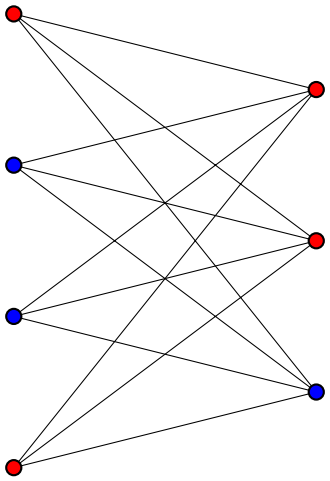
Remarque 3.5. *Si G est un graphe biparti complet $K_{r,s}$ si $r, s > 2$ alors :*

1. $\gamma_{\hat{ap}}(K_{r,s}) = \max\{r, s\}$
2. $\gamma_{\hat{ap}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$

Remarque 3.6. *Soit $K_{r,s}$ est un graphe biparti complet si $r, s > 2$ alors :*

1. $\gamma_{\hat{a}p}(K_{r,s}) = \gamma_{\hat{d}}(K_{r,s})$.

Exemple 3.1.4. *La figure 3.5 représente un graphe biparti complet $k_{3,4}$ avec $\gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = \gamma_{\hat{a}p}(k_{3,4}) = 4$*



$\gamma_{\hat{a}p}(k_{3,4}) = 4$

FIGURE 3.5: Un graphe biparti complet $k_{3,4}$ avec $\gamma_{\hat{d}}(k_{3,4}) = \gamma_{\hat{a}p}(k_{3,4}) = 4$

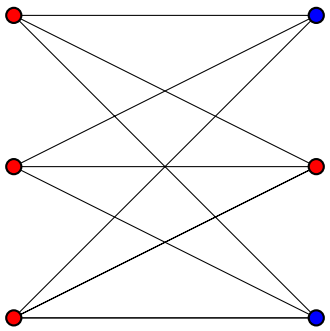
Corollaire 3.1. *Soit $K_{r,s}$ est un graphe biparti complet ou $r = 1, s > 2$ alors :*

1. $\gamma_{\hat{a}p}(K_{1,s}) = s + 1$.

Corollaire 3.2. *Soit $K_{r,s}$ est un graphe biparti complet ou $r = s \succ 2$ alors :*

1. $\gamma_{\hat{a}p}(K_{r,s}) = s + 1$.

Exemple 3.1.5. *La figure 3.6 représente un graphe biparti complet $k_{3,3}$ avec $\gamma_{\hat{a}p}(k_{3,3}) = 4$*



$\gamma_{\hat{a}p}(k_{3,3}) = 4$

FIGURE 3.6: Un graphe biparti complet $k_{3,3}$ avec $\gamma_{\hat{a}p}(k_{3,3}) = 4$

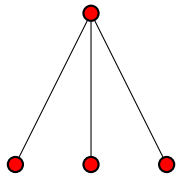
.

3.1.5 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ pour les étoiles

Remarque 3.7. *Si T est une étoile $S_{1,n}$ alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}(S_{1,n}) = n + 1.$

Exemple 3.1.6. *La figure 3.7 représente une étoile $(S_{1,3})$ avec $\gamma_{\hat{ap}}(S_{1,3}) = 4$*



Une étoile $(S_{1,3})$
FIGURE 3.7: Une Étoile $(S_{1,3})$ avec $\gamma_{\hat{ap}}(S_{1,3}) = 4$

Proposition 3.1. *Si T est une étoile $S_{1,n}$ alors :*

(1) $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = \gamma_{\hat{o}}(S_n) + 1.$

(2) $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = \begin{cases} 2\gamma_{\hat{d}}(S_n) - 1 si\ n \equiv 0[2] \\ 2\gamma_{\hat{d}}(S_n) - 2 si\ n \equiv 1[2] \end{cases}$

Preuve 3.1. *Soit T étoile d'ordre n , alors :*

Si n est pair : $\gamma_{\hat{d}}(S_n) = 1 + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\gamma_{\hat{o}}(S_n)) + 1$

donc : $\gamma_{\hat{o}}(S_n) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_n) - 2$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = 1 + \gamma_{\hat{o}}(S_n) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_n) - 1.$

Si n est impair : $\gamma_{\hat{d}}(S_n) = 1 + \frac{n+1}{2} = \frac{3}{2} + (\frac{1}{2})\gamma_{\hat{o}}(S_n))$

donc : $\gamma_{\hat{o}}(S_n) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_n) - 3$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = 1 + \gamma_{\hat{o}}(S_n) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_n) - 2.$

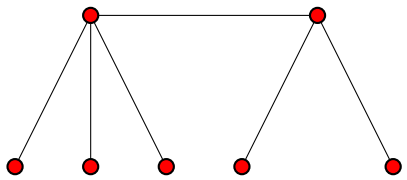
3.1.6 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ les double étoile

Proposition 3.2. *Si T est une double étoile $S_{r,s}$ ou $r, s \geqslant 3$ alors :*

(1)$\gamma_{\hat{ap}}(p_{r,s}) = r + s + 2$

Preuve 3.2. *Soit T est une double étoile $S_{r,s}$ et soit D un -ensemble puisque D est une alliance offensive globale foret alors D contient tous les feuille de D et puis que D est une alliance défensive globale forte alors it contient tous les support d'ou* $\gamma_{\hat{ap}}(p_{r,s}) = |D| = r + s + 2.$

Exemple 3.1.7. *La figure 3.8 représente T double étoile avec* $\gamma_{\hat{ap}}(s_{2,3}) = 7$



Une double étoile $(S_{2,3})$
FIGURE 3.8: Une double étoile avec $\gamma_{\hat{ap}}(s_{2,3}) = 7\gamma_{\hat{ap}}(s_{2,3}) = 7$

Remarque 3.8. *Si T est une double étoile* $S_{r,s}$ *ou* $r = 2$:

$\gamma_{\hat{ap}}(S_{r,s}) = \gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) + 1$

Remarque 3.9. *Si G graphe simple de taille n (G :une double étoile)*

$\gamma_{\hat{ap}}(S_{r,s}) = n$

Proposition 3.3. *Si T est une double étoile* $S_{r,s}$ *ou* $r, s \geqslant 3$ *alors :*

(1) $\gamma_{\hat{ap}}(S_{r,s}) = \gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) + 2.$

(2) $\gamma_{\hat{ap}}(S_{r,s}) = \begin{cases} 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 2 si\ r, s \equiv 0[2] \\ 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) si\ r, s \equiv 1[2] \\ 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 1 si\ r \equiv 1[2] ous \equiv 1[2] \end{cases}$

Preuve 3.3. *Si T une double étoile* $S_{r,s}$ *si* $r, s \geqslant 3$, *alors :*

Par la théorème 2.33. la théorème 2.34. on distingue les cas suivants :

pour r, s sont pairs : $\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) = 2 + \frac{r}{2} + \frac{s}{2} + = \frac{1}{2}\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s})) + 2$

donc : $\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 4$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = 2 + \gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 2.$

pour r, s sont impair : $\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) = 2 + \frac{r-1}{2}\frac{s-1}{2} + = \frac{r+s}{2} + 1 = \frac{1}{2}\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s})) + 1$

donc : $\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 2$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = 2 + \gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}).$

pour rous est impair :

on pose que r est impair $\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) = 2 + \frac{r-1}{2}\frac{s}{2} + = \frac{r+s}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s})) + \frac{3}{2}$

donc : $\gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 3$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}(S_n) = 2 + \gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) = 2\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) - 1.$

3.1.7 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ pour Le graphe total

3.1.7.1 Le graphe total d'une chaîne

Remarque 3.10. *Si G graphe total d'une chaîne* p_n *d'ordre n alors :* $\gamma_{\hat{ap}}(G) = n$

3.1.7.2 Le graphe total d'une cycle

Remarque 3.11. *Si G graphe total d'une cycle C_n d'ordre n alors : $\gamma_{\hat{ap}}(G) = n$*

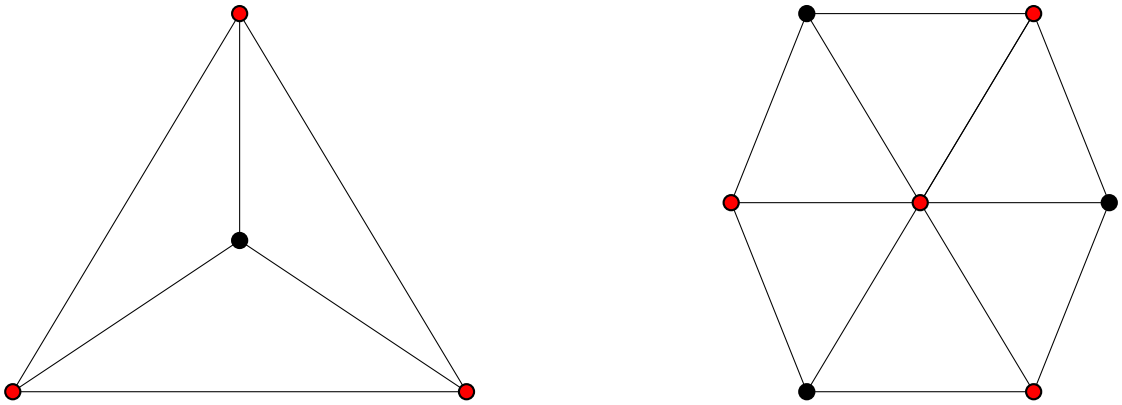
3.1.8 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ pour Le graphe roue

Remarque 3.12. *Si G la roue W_n d'ordre n , alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}(W_n) = 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$

Remarque 3.13. *Si G la roue W_n d'ordre n , alors : $\gamma_{\hat{ap}}(W_n) = \gamma_{\hat{d}}(W_n) = \gamma_{\hat{o}}(W_n) = 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.*

Exemple 3.1.8. *La figure 3.9 représente Roue W_4 et W_7 avec $\gamma_{\hat{ap}}(W_4) = 3$ et $\gamma_{\hat{ap}}(W_7) = 4$*



la roue (W_3) La roue (W_7)

FIGURE 3.9: Une Roue W_4 et W_7 avec $\gamma_{\hat{ap}}(W_4) = 3$ et $\gamma_{\hat{ap}}(W_7) = 4$

3.1.9 Calcul du nombre d'alliance puissante globale forte $\gamma_{\hat{ap}}$ pour le graphe milieu

3.1.9.1 Le graphe milieu d'une chaîne :

Remarque 3.14. *Si G graphe milieu d'une chaîne $M(p_n)$ d'ordre n ou $n \geq 4$, alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}M(p_n) = n + 1$.

Preuve 3.4. *Pour $n = 2$ on a le graphe milieu d'une chaîne associé à (p_2) est :*

On obtient $\gamma_{\hat{ap}}M(p_2) = 3$

Pour $n = 3$ on a le graphe milieu associé à (p_3) est : On obtient$\gamma_{a\hat{p}}M(p_3) = 4$ Pour $n = 4$ on a le graphe milieu associé à (p_4) est : On obtient $\gamma_{a\hat{p}}M(p_4) = 5$

Pour $n = 5$, le graphe milieu associé à (p_5) est : On obtient $\gamma_{a\hat{p}}M(p_5) = 6$

Pour $n = 6$, le graphe milieu associé à (p_6) est : On obtient $\gamma_{a\hat{p}}M(p_6) = 7$

D'ou : $\forall n \geqslant 3$: $\gamma_{a\hat{p}}M(p_n) = n + 1$

Remarque 3.15. *: Si G graphe milieu d'une chaîne $M(p_n$ d'ordre n ou $n \geq 4$, alors :*

$\gamma_{a\hat{p}}M(p_n) = \gamma_{\hat{d}}M(p_n) = \gamma_{\hat{o}}M(p_n) = \gamma_{ap}M(p_n) = \gamma_d M(p_n) = \gamma_o M(p_n) = n.$

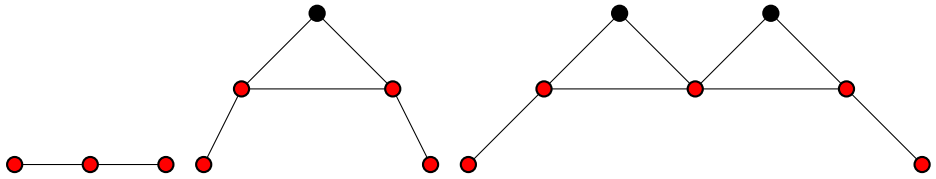
Remarque 3.16. *: Si G graphe milieu d'une chaîne $M(p_n$ d'ordre n ou $n = 2$, alors :*

$\gamma_{a\hat{p}}M(p_n) = \gamma_{\hat{d}}M(p_n) = \gamma_{\hat{o}}M(p_n) = \gamma_{ap}M(p_n) = \gamma_d M(p_n) = \gamma_o M(p_n) = n = 3.$

Remarque 3.17. *: Si G graphe milieu d'une chaîne $M(p_n$ d'ordre n ou $n = 3$, alors :*

$\gamma_{a\hat{p}}M(p_n) = \gamma_{\hat{o}}M(p_n) = \gamma_{\hat{d}}M(p_n) + 1 = n = 3.$

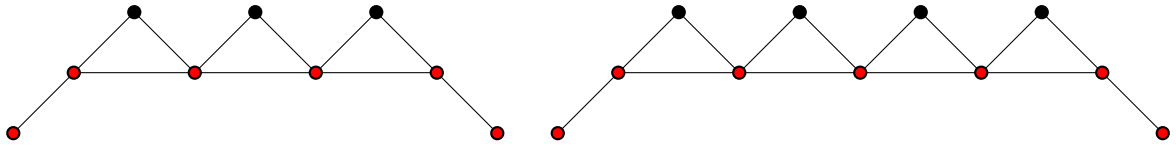
Exemple 3.1.9. *La figure 3.10 représente graphe milieu d'une chaîne avec $\gamma_{a\hat{p}}M(P_2) = 3$,$\gamma_{a\hat{p}}M(P_3) = 4$ et $\gamma_{a\hat{p}}M(P_4) = 5$.*



$\gamma_{a\hat{p}}M(P_2) = 3$ $\gamma_{a\hat{p}}M(P_3) = 4$ $\gamma_{a\hat{p}}M(P_4) = 5$

FIGURE 3.10: Un graphe milieu $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec($\gamma_{a\hat{p}}M(P_2)$,$\gamma_{a\hat{p}}M(P_3)$ et $\gamma_{a\hat{p}}M(P_4)$)

Exemple 3.1.10. *La figure 3.11 représente graphe milieu d'une chaîne $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec $\gamma_{a\hat{p}}M(P_5) = 6$ et $\gamma_{a\hat{p}}M(P_6) = 7$*



$\gamma_{a\hat{p}}M(P_5) = 6$ $\gamma_{a\hat{p}}M(P_6) = 7$

FIGURE 3.11: Un graphe milieu $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec ($\gamma_{a\hat{p}}M(P_5)$ et $\gamma_{a\hat{p}}M(P_6)$)

3.1.9.2 Le graphe milieu d'une cycle

Remarque 3.18. *Si G graphe milieu d'une cycle* $M(C_n$ *d'ordre n ou* $n \geq 3$ *, alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}M(C_n) = n.$

Preuve 3.5. *Pour* $n = 3$ *on a le graphe milieu associé à* (C_3) *est :*

On obtient$\gamma_{\hat{ap}}M(C_3) = 3$

Pour $n = 4$ *on a le graphe milieu associé à* (C_4) *est : On obtient* $\gamma_{\hat{ap}}M(C_4) = 4$

Pour $n = 5$*, le graphe milieu associé à* (C_5) *est : On obtient* $\gamma_{\hat{ap}}M(C_5) = 5$

Pour $n = 5$*, le graphe milieu associé à* (C_6) *est : On obtient* $\gamma_{\hat{ap}}M(C_6) = 6$

D'ou : $\forall n \geqslant 3$ *:* $\gamma_{\hat{ap}}M(C_n) = n$

Corollaire 3.3. *Si G graphe milieu d'une cycle* $M(C_n$ *d'ordre n ou* $n \geq 3$ *, alors :*

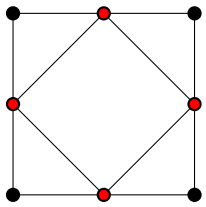
$\gamma_{\hat{ap}}M(C_n) = \gamma_{\hat{d}}M(C_n) = \gamma_{\hat{o}}M(C_n) = \gamma_{ap}M(C_n) = \gamma_d M(C_n) = \gamma_o M(C_n) = n.$

Remarque 3.19. *Si G graphe milieu d'une cycle* $M(C_n$ *d'ordre n ou* $n = 2$ *, alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}M(C_2) = 3.$

Exemple 3.1.11. *La figure 3.12 représente graphe* $M(C_4)$ *avec :*

$\gamma_{\hat{ap}}M(C_4) = 4$



$\gamma_{ap}M(C_4) = 4$

FIGURE 3.12: Un graphe milieu $M(P_5)$ et $M(P_6)$ avec$(M(C_4))$

3.1.9.3 Le graphe milieu d'une étoile

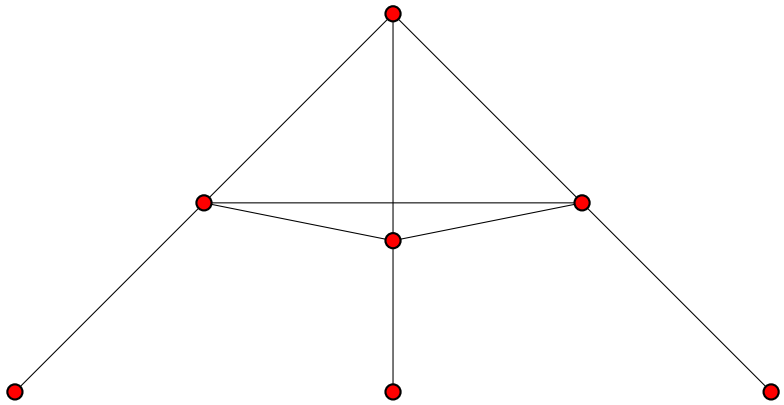
Remarque 3.20. *Si G graphe milieu d'une étoile* $S_{1,n}$ *ou* $n > 1$ *alors :*

$\gamma_{\hat{ap}}(S_{1,n}) = 2n.$

La figure 3.13 représente Le graphe milieu d'une étoile $M(S_{1,3})$:

$\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,3}) = 6$

Remarque 3.21. *Si G graphe milieu d'une étoile* $S_{1,n}$ *ou* $n > 1$ *alors :*



$\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,3}) = 6$

FIGURE 3.13: Un graphe milieu$\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,3}) = 6$

(1) $\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,n}) = \gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) + 2.$

(2) $\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,n}) = \begin{cases} 2\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 3 si\ n = 2 \\ \frac{3}{2}\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 3 si\ n \equiv 0[2] et n \succ 2 \\ \frac{3}{2}\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + \frac{5}{2} si\ n \equiv 1[2] et n \succ 2 \end{cases}$

Preuve 3.6. *Si G graphe milieu d'une étoile* $S_{1,n}$ *ou* $n > 1$ *alors :*

Par la théorème 2.22. la théorème 2.23. et la théorème 2.24. on distingue les cas suivants :

pour $n = 2$ *:* $\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) = 3, \gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = 4$

donc : $\gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 1$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,n}) = \gamma_{\hat{o}}(S_{r,s}) + 2 = \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 3.$

pour $n > 2$ *et pair :* $\gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = 1 + \frac{3n}{2} et \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) = n$

donc :

$\gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \frac{3}{2}\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 1$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,n}) = 2 + \gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \frac{3}{2}\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + 3.$

pour $n > 2$ *et impair :* $\gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \frac{1}{2} + \frac{3n}{2} et \gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) = n$

donc :

$\gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \frac{3}{2}\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + \frac{1}{2}$ *D'ou* $\gamma_{\hat{ap}}M(S_{1,n}) = 2 + \gamma_{\hat{o}}M(S_{1,n}) = \frac{3}{2}\gamma_{\hat{d}}M(S_{1,n}) + \frac{5}{2}.$

3.2 Conclusion

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude des alliances puissants globales dans les graphes et calcul des alliances puissants globales fortes dans les graphes.

D'abord, nous avons établi une nouvelle définition du paramètre d'alliances puissants globales forts $\gamma_{\hat{ap}}$.

Dans un second lieu nous avons calcul des valeurs exacts pour ce nouveau paramètre dans des classes de graphes bien spécifique telque les chaînes, les cycles, les graphes complet, les graphes bipartis complets, étoile, double étoile ,la roue, graphe milieu d'une chaîne et cycles et graphe total.

Comme perspectives à notre travail, qui nous semblent intéressantes, nous proposons notament :

- Trouver des relations entre les différents paramétras d'alliances globales.
- E'tudre les résultats obtenus dans d'autres classes de graphes.
- Caractériser les graphes pour lesquels $\gamma_{\hat{ap}}(G) = \gamma_{ap}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) = \gamma_{\hat{d}}(G)$.

Bibliographie

[1] J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta & Odile Favaron (Communicated by) (2007) Global alliances in planar graphs.

[2] TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., 10 (2003), # R47.

[3] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Vol. 48 (2004), 157-177.

[3] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Vol. 48 (2004), 157-177.

[5] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math .

[6] J. A. Rodríguez-Velázquez et J. M. Sigarreta, Global defensive k-alliances in graphs. *Disc Applied Math* 157 (2009) 211-218.

[7] M. Bouzefrane, M.chellali, on the global offensive alliance number of a tree, Opuscula math.29(3)(2009) 223-228.

[8] M. chelleli, Offensive alliances in bipartits graphs, J. combin. Math. Combin. Comput. Accepté.

[9] TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., 10 (2003), # R47.

[10] F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.(2017).

[11] [T. Hamada, I. Yoshimura, Traversabilitiy and connectivitiy of the middle graphe of a graph, Discrete Math. 14 : 247-256, 1976]

[12] K.S. Booth et J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs. SIAM J. Comput, 11(1982) 191-199.

[13] R. Laskar et K. Peters, Domination and irredundance in graphs. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[14] R. Laskar, J. Pfa currency , S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi, On the algorithmic complexity of total domination. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, No 3, september 1984.

[15] M. chelleli, Offensive alliances in bipartits graphs, J. combin. Math. Combin. Comput. Accepté.

[16] I.G.YeroandJ.A.Rodríguez-Velázquez,Defensive alliances in graphs :asurvey, Utilitas Mathematica 105(2017)

[17] H.FernauaandJ.A.Rodriguez-Velazquez,Electronic Journal of Graphs Theory and Applications 2 (1)(2014), 70 - 86

[18] K.Ouazine,H.Slimani and A.Tari.Alliances in graphs : parameters, properties and applications -asurvey.AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 15(2018)115 - 154.