République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

ZERROUATI LINDA MANARE

intitulé

Problème elliptique non linéaire avec condition aux limites de Robin

Soutenu le 1 juil 2020, devant le jury composé de :

Président :	H. Ayadi	M.A.A	Université de Médéa
Examinateur 1 :	M. Benchaa	M.A.A	Université de Médéa
Examinateur 2 :	K. Maaloum	M.A.A	Université de Médéa
Directeur de Mémoire :	N. BENAICHOUCHE	M.A.A	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019/2020

Problème elliptique non linéaire avec conditions aux limites de Robin

Dédicace

Gloire soit rendu au Dieu tout puissant le très miséricordieux pour tous ses bienfaits dont il m'a comblé et de m'avoir donné le courage et la force pour réaliser ce modeste travail que je dédie à :

Celui qui m'a indiqué la bonne voie et qui a toujours été là pour moi, dans ma vie et mes études. et pour ses précieux conseils, son immense amour...

Mon père

celle qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, ses prières, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie...

Ma mère

Mes très chères sœurs, neveux et mon amie ***B.Manel*** *pour leur amour, leur présence, leur soutien sans faille. ainsi que mes amis et tout la famille* ***"ZERROUATI"*** *sans exception.*

A tous les enseignants qui m'ont guidée tout au long de mon parcours universitaire.

A tous mes amis de la promotion de la deuxième année Master 2019/2020.

ZERROUATI LINDA MANARE

Remerciements

Après avoir rendu grâce à dieu le tout puissant et le miséricordieux.
Je remercie mes très chers parents pour leur encouragement, leur patience et leur soutien moral et financier.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à ***Monsieur BENAICHOUCHE NOUREDDINE****, de m'avoir encadré dans mon mémoire, pour son aide, sa patience, ainsi que sa gentillesse.*

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.

Un gros merci également à ma famille pour leur soutien aussi bien moral que financier et pour leur sacrifice.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Titre : Problème elliptique non linéaire avec conditions aux limites de Robin

Résumé : Les travaux présentés dans ce mémoire, portant sur l'étude de problème elliptique non linéaire avec condition aux limites de Robin, La résolutions de ce problème dans ce travail consiste sur le théorème de la surjectivité. Après un bref exposé de quelques définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail, nous établissons dans le chapitre 3 un résultat d'existence et de régularité de solutions pour ce type de problème.

Mots clés : Problème elliptique, problème aux limites, conditions de robin, opérateur monotone.

Faculté des Sciences. Département de Mathématiques et Informatique.

Université Dr. Yahia Farès Médéa - Pôle urbain – 26000. Médéa. Algérie.

Abstract : The work presented in this thesis, is on the study of nonlinear elliptic problem with Robin bondary condition, The resolution of this problem in this work consists of the surjectivity theorem. then After a brief presentation of some necessary definitions and results for the continuation of this work, we establish in chapter 3 a result of existence and regularity of solutions for this type of problem.

Mots clés : Elliptic problem, boundary value problem, Robin conditions, monotone operator.

NOTATIONS

Voici quelques notations que nous utiliserons dans ce travail :

$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension N, N un nombre naturel non nul.
x	vecteur de $\mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$.
dx	mesure de Lebesgue N-dimensionnelle.
Ω	ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω.
$\bar{\Omega}$	l'adhérence topologique de Ω.
E'	le dual topologique.
$u\|_{\partial\Omega}$	la restriction de u sur $\partial\Omega$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$	le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique.
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}$	le gradient.
∂^β	la dérivée d'ordre β, où β est un est un multi-indice.
$\mathrm{div} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}$	la divergence.

$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$	le laplacien.
$\int_\Omega f(x)dx$	intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue.
p.p.	presque partout.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } \left(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p\right) dx < +\infty \ : \ 1 \leq p < \infty\right\}$, l'espace de Lebesgue.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $\exists M > 0$ tel que $\lvert u(x)\rvert \leq M$ p.p. $\}$.
$W^{k,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev.
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \{u \in L^p(\Omega) \lvert \nabla u \in L^p(\Omega)\}$.
$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions α-höldérienne, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\hookrightarrow$	l'injection.
$\mu(E)$	mesure de E.
$f_n \to f$	dénote que la suite f_n converge vers f.
$f_n \rightharpoonup f$	dénote que la suite f_n converge faiblement vers f.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé **i**

Abstract **ii**

I Rappels et Définitions **1**

I.1 Notions préliminaires de l'analyse réelle 1

I.1.1 Espaces de Lebesgue 1

I.1.2 Estimations 4

I.1.3 Espaces de fonctions höldériennes 4

I.1.4 Espaces de Sobolev 5

I.1.5 Ensembles Lipschitzien 6

I.1.6 Opérateurs de Nemytskii 9

I.2 Théorème de point fixe 13

I.2.1 Théorème de Brouwer 13

II Théorème du surjectivité **16**

II.1 Opérateurs Pseudo-monotones 16

II.2 Théorème du surjectivité 18

III Étude d'un problème elliptique non linéaire avec conditions aux limites de Robin **22**

III.1 Existence de solutions aux problèmes de Neumann. 23

III.2 Dépendance continue 28

III.3 Existence de solutions aux problèmes de Robin. 30

III.4 Régularité de Hölder 35

III.5 Application 43

Conclusion générale **48**

Bibliographie **49**

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : C'est la modélisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations.

Les EDPs sont probablement apparues pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDPs s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagné-

tisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDPs de la théorie de la relativité.

L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité).

Ce travail s'appuie essentiellement sur l'article [7], dans ce travail nous nous intéressons aux problèmes elliptiques non linéaire avec condition aux limites de Robin. Généralement il y a plusieurs méthodes de résolution de problèmes aux limites : Numériquement comme la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finis. Ou bien théoriquement comme la méthode du point fixes, la méthode variationnelle ou la méthode des opérateurs monotones. Nous nous appuyons sur l'opérateur pseudo-monotone et le théorème du surjectivité qui est très important pour donnée l'existence de solution du problème traité, cette méthode située dans un cadre théorique ayant plusieurs applications dans l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. Pour la régularité et en ce qui concerne la régularité à la frontière, classiquement, les domaines sont supposés être lisses. Plus récemment, cependant, la classe des domaines Lipschitz a suscité beaucoup d'intérêt. L'un des principaux objectifs de cet mémoire est d'établir la régularité jusqu'à la frontière pour les conditions aux limites de Robin, et même pour le cas particulier des conditions aux limites de Neumann s'il s'agit d'un domaine de Lipschitz. Plus précisément, nous voulons montrer que chaque solution est Hölder continue jusqu'à la frontière. Nous étudions d'abord la régularité des problèmes de Neumann, puis généralisons les résultats aux problèmes de Robin.

L'objectif de ce mémoire est donc l'étude de l'existence et la régularité de solution pour un problème elliptique non linéaire avec condition aux limites de Robin.

Ce travail est constitué de trois chapitres principaux :

Le premier est consacré aux rappels fondamentaux et outils nécessaires pour réaliser ce travail. Ils concernent les injections canoniques de Sobolev, l'opérateur de Nemytskii et le théorème de point fixe et quelque définitions et inégalités principales.

Dans le seconde chapitre, on donnera quelques définitions d'opérateur monotone et pseudo-monotone pour énoncer une théorème qui est nécessaires pour la résolution des problèmes traités dans ce travail, le théorème de la surjectivité.

Dans le dernier chapitre, nous allons nous intéresser aux problèmes elliptique non linéaire avec condition aux limites de Robin, on montre l'existence et la régularité de solution de ce type de problème, en donnant quelques théorèmes et en appliquant ces théorèmes sur quelques exemple.

CHAPITRE

I

RAPPELS ET DÉFINITIONS

I.1 Notions préliminaires de l'analyse réelle

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

I.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition I.1. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $E \subset \mathbb{R}$ *un ensemble Lebesgue mesurable. On définit*

$$L^p(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} < +\infty \right\}$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p dx\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{supess}_{x \in E} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \lambda(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

dans ce qui suit E est un sous-ensemble mesurable de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Soit $1 < p < \infty$.

Théorème I.1 (Inégalité de Hölder). *Soient $f \in L^p(E)$ et $g \in L^{p'}(E)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On a*

$$\int_E fg \leq \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^{p'}(E)}.$$

Preuve. *Voir [6] p.*128-129. ■

Théorème I.2 (Inégalité de Hölder généralisée). *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{E})$. Alors, $fg \in \mathrm{L}^r(\mathrm{E})$ et*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve. *Voir [6] p.*136-137. ■

Théorème I.3 (Inégalité de Minkowski). *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions $f, g \in L^p(E)$. Alors*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,,$$

c'est-à-dire

$$\left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve. *Voir [6] p.*129. ■

Théorème I.4 (Convergence dominée de Lebesgue). *Soit f_n une suite de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ quand } n \to +\infty \text{ presque partout dans } E,$$

et telle qu'il existe une fonction g sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, intégrable, telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ presque partout dans } E.$$

Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En particulier,

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Le théorème de convergence dominée existe aussi en version L^p.

Preuve. *Voir [6] p.*130. ■

Théorème I.5 (La réciproque partielle du théorème de convergence dominée)**.** *Soient $p \in [1, +\infty[$, f_n une suite de fonctions de $L^p(E, d\mu)$ et f une fonction de $L^p(E, d\mu)$, telles que $|f_n - f|_{L^p(E,d\mu)} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Alors on peut extraire une sous-suite n_m telle qu'il existe $g \in L^p(E, d\mu)$ avec*

$$f_{n_m}(x) \to f(x) \text{ quand } q \to +\infty \text{ presque partout dans } X,$$

et

$$|f_{n_m}(x)| \leq g(x) \text{ presque partout dans } X.$$

Preuve. *Voir [6] p.*131. ■

Théorème I.6 (Convergence faible dans L^p)**.** *Une suite de fonctions f_n de $L^p(E)$ converge faiblement vers f dans $L^p(E)$ si :*

1. *Pour $1 < p < \infty$, $\int_E (f_n - f)g \to 0$ pour tout $g \in L^{p'}(E)$.*
2. *Pour $p = 1$, $\int_E (f_n - f)g \to 0$ pour tout pour tout $g \in L^\infty(E)$.*

Preuve. *Voir [6] p.*162. ■

Théorème I.7. *Soit $1 < p < \infty$. Toute suite bornée f_n de $L^p(E)$ admet une sou-suite convergeant faiblement vers certains f dans $f \in L^p(E)$.*

Définition I.2 (Convergence en mesure)**.** *On dit que f_n converge vers f en mesure sur E si*

$$\mu(\{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

I.1.2 Estimations

Théorème I.8 (Inégalité de Young). *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$|ab| \leq \frac{(a)^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve. *Voir [6] p.*128. ■

Lemme I.1. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $m \in [2, \infty)$. il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$(a - b) \cdot \left(|a|^{m-2}a - |b|^{m-2}b\right) \geq \gamma |a - b|^m$$

pour tout a et b dans $\mathbb{R}^N$.

Preuve. *Voir [3] p.14.* ■

Lemme I.2. *Pour tout $p \in (0, \infty)$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe des constantes positives α et β telles que*

$$\alpha \sum_{j=1}^{N} a_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \right)^p \leq \beta \sum_{j=1}^{N} a_j^p$$

pour tout $a_j \geq 0, j = 1, \ldots, N$.

Preuve. *Voir [7] p.*12. ■

I.1.3 Espaces de fonctions höldériennes

Nous aurons besoin plus tard la définition des espaces de fonctions höldériennes. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on dit que u est höldérienne d'exposant α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$) s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout couple de points (x, y) dans $\bar{\Omega}$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

On note que u est continue et l'on pose

$$|u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

et, dans le cas où $\bar{\Omega}$ est borné,

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + |u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Cette dernière quantité est une norme sur l'espace des fonctions α-höldérienne. $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ qui en fait un espace de Banach. L'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constitué des fonctions de classe C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. On le munit de la norme

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \max_{|\gamma|=k} |\partial^\gamma u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

pour laquelle il est complet.

I.1.4 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. Une autre partie se déroule dans les espaces de Hölder, ainsi que dans plusieurs autres espaces fonctionnels plus sophistiqués dont nous ne parlerons pas ici.

Il en existe plusieurs caractérisations. Dans le cas des espaces de Sobolev d'ordre entier positif $k \in \mathbb{N}$, on retiendra que

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

pour $p \in [1, +\infty[$ et

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

pour $p = +\infty$. On utilise parfois la notation $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ pour désigner ces normes. Les dérivées partielles écrites ci-dessus sont naturellement prises au sens des distributions.

I.1.5 Ensembles Lipschitzien

Définition I.3. *On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est lipschitzien s'il est borné et si l'on peut recouvrir sa frontière $\partial\Omega$ par un nombre fini d'hypercubes ouverts C_j, chacun associé à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, $y^j = (y_1^j, y_2^j, ..., y_N^j)$, de telle sorte que*

$$C_j = \{y \in \mathbb{R}^N; |y_i^j| < a_j \text{ pour } i = 1, ..., N\},$$

et qu'il existe une fonction $\varphi_j : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que l'on ait

$$\Omega \cap C_j = \{y \in C_j; y_N^j < \varphi_j((y^j)')\},$$

avec la notation $\mathbb{R}^{N-1} \ni (y^j)' = (y_1^j, y_2^j, ..., y_{N-1}^j)$.

Définition I.4 (Injection canonique)**.** *Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme duale $\|f\| = \underset{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}}{\mathrm{Sup}} |\langle f, x\rangle|$) et soit E'' son bidual, i.e. le dual de E', muni de la norme*

$$\|\xi\| = \underset{\substack{f\in E'\\ \|f\|\leqslant 1}}{\mathrm{Sup}} |\langle \xi, f\rangle|$$

On a une injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé, l'application $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E' i.e. un élément de E'' noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

Définition I.5. *Soit F un espace vectorielle normé, et E un sous espace vectoriel de F. On dit que l'injection canonique de E dans F est continue si pour l'application identité $i : E \mapsto F$ il existe $C > 0$*

$$\|i(x)\|_F \leq \|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

si de plus

$$\forall B \subset E \text{ bornée } : i(B) \text{ est relativement compact.}$$

alors l'injection est compact.

Mentionnons maintenant un résultat de première importance : les injections de Sobolev pour $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou bien Ω ouvert régulier.

Théorème I.9. *Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors*

i) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$

ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, +\infty[$ (mais pas pour $r = +\infty$ si $p > 1$),

iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Dans ce dernier cas, si $k - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas un entier, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\bar{\Omega})$ où $l = \left[k - \frac{N}{P}\right]$ et $\beta = k - \frac{N}{P} - l$ sont respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de $k - \frac{N}{P}$.

Toutes ces injections sont continues.

La partie $iii)$ du théorème est aussi connue sous le nom de théorème de Morrey. Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections de Sobolev restent vraies localement, i.e. dans tout ouvert compactement inclus dans Ω. En d'autres termes, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r_{loc}(\Omega)$, etc. Elles restent vraies globalement si l'on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W^{k,p}_0(\Omega)$. Il est utile de réécrire ce théorème dans le cas $k = 1$ et Ω borné, régulier.

Preuve. *Voir [1] p.*168. ■

Théorème I.10. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors*

i) Si $1 \leq p < N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, ou encore $p^* = \frac{Np}{N-p}$

ii) Si $p = N$, on a $W^{1.N}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$

iii) Si $p > N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ où $\beta = 1 - \frac{N}{p}$

Le nombre p^* s'appelle l'exposant (critique) de Sobolev. Notons que si Ω borné régulier, alors $W^{1,\infty}(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à l'espace $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ des fonctions lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$

On peut également exploiter les injections de Sobolev ci-dessus pour obtenir par exemple que pour $p < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega)$, et ainsi de suite. L'intérêt bien sûr, est que $p^* > p$. Un autre résultat de première importance est un résultat de compacité que l'on regroupe sous le terme générique de théorème de Rellich-Kondrašov.

Preuve. *Voir [1] p.*169. ■

Théorème I.11. *Soient Ω ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, et $p \in [1, +\infty[$. Alors les injections*

i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *avec* $1 \leq r < p^*$, *si* $1 \leq p < N$,

ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *avec* $1 \leq r < +\infty$, *si* $p = N$,

iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ *avec* $0 \leq \gamma < 1 - \frac{N}{p}$, *si* $p > N$,

sont des injections compactes.

Preuve. *Voir [1] p.*169. ■

Théorème I.12 (Application trace, [5] p.133-134)**.** *Soient* Ω *un ouvert lipschitzien et* $p \in [1, \infty]$. *Il existe une unique application linéaire continue* $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *appelée application trace, qui prolonge l'application de restriction* $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ *et tel que*

$$\gamma u = u \, p \cdot p. \text{ sur } \partial\Omega \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

Théorème I.13. *Soit* Ω *un ouvert borné lipschitzien, et soit* $p \in (1, \infty)$. *l'application trace est continue de* $W^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^{(N-1)p/(N-p)}(\partial\Omega)$ *si* $p < N$, *dans* $L^r(\partial\Omega)$ *pour tout* $r < \infty$ *si* $p = N$, *et dans* $\mathrm{C}(\partial\Omega)$ *si* $p > N$. *l'application est compacte dans les deux derniers cas. Pour* $p < N$, *l'application est compact de* $W^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^r(\partial\Omega)$ *pour tout* $r < \frac{(N-1)p}{N-p}$.

Lemme I.3. *Soit* X *un espace de Banach réflexif, soient* Y *et* Z *deux espaces de Banach tels que* X *s'injecte continument dans* Z. *De plus, soit* $T : X \to Y$ *une application linéaire compacte. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c_\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\|Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + c_\varepsilon \|x\|_Z$$

pour tout $x \in X$.

Preuve. *Supposons par contradiction qu'il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* n *on peut trouver* $x_n \in X$ *satisfaisant*

$$\|Tx_n\|_Y > \varepsilon_0 \|x_n\|_X + n \|x_n\|_Z \tag{I.1.1}$$

Redimensionnement x_n, *on peut sans perte de généralité supposer que* $\|x_n\|_X = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Par réflexivité, après passage à une sous-suite on peut supposer que* $x_n \rightharpoonup x$ *dans* X *pour certains* $x \in X$, *et donc en particulier* $x_n \rightharpoonup x$ *dans* Z. *Alors par compacité de* T *on obtient que* $Tx_n \to Tx$ *dans* Y, *et en particulier que* (Tx_n) *est borné en* Y. *Donc par* (I.1.1)

on obtient

$$\|x_n\|_Z < \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$ *dans* Z, *Cela implique que* $x = 0$. *Par conséquent* $Tx_n \to 0$ *dans* Y, *contredisant le fait que par* (I.1.1) *on a* $\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\|_Y \geq \varepsilon_0 > 0$. ■

Nous aurons besoins du cas spécial suivant du Lemme I.3

Exemple I.1. *Soient* $\Omega \subset \mathrm{R}^N$ *un ouvert lipschitzien,* $m \in (1, \infty)$, *et* $r \in (1, \infty)$. *Si* $m < N$, *supposons de plus que* $1 < r < \frac{(N-1)m}{N-m}$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c_\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq \varepsilon\|\nabla u\|_{L^m(\Omega)} + c_\varepsilon\|u\|_{L^m(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{1,m}(\Omega)$.

I.1.6 Opérateurs de Nemytskii

Dans cette section nous définissons l'opérateur de Nemytskii (opérateur de composition) dans l'espace L^p. Cet opérateur est intimement lié à la fonction de Carathéodory. Ce résultat établit la continuité d'un opérateur défini entre deux espaces de Lebesgue, à travers la composition à fonction réelle.

Nous avons besoin des concepts suivants pour prouver le théorème de Nemytskii, dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
Le théorème suivant nous donne quelque conditions suffisantes pour la convergence dans $L^p(\Omega)$.

Théorème I.14 (Vitali). *Soient* $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$, *on suppose que*

1) $f_n \to f$ *presque partout dans* Ω.

2) $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f_n|^p = 0$, *uniformément par rapport à* n; *Si* E *est une partie mesurable de* Ω. *Alors* $f_n \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$.

Preuve. *Voir [2] p.*14-15. ■

Le résultat suivant est un corollaire du théorème de Vitali.

Théorème I.15. *soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions et f une fonction de $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Alors $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si*

1) *$f_n \to f$ en mesure ;*

2) $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f_n|^p = 0$ *uniformément par rapport à n, tels que E est une partie mesurable de Ω.*

Preuve. *Nous diviserons la preuve en deux étapes.*

Étape I : supposons que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Il est clair que $f_n \to f$ en mesure. De plus, si E est une partie mesurable de Ω, on a

$$\int_E |f_n|^p = \int_E |f_n - f + f|^p \leq 2^{p-1} \int_E |f_n - f|^p + 2^{p-1} \int_E |f|^p.$$

Fixons $\varepsilon > 0$; comme $f \in L^p(\Omega)$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, si $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ alors

$$\left[\int_E |f|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{I.1.2}$$

D'autre part, comme $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, il existe $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\int_E |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \tag{I.1.3}$$

Cela implique que $\forall n > \nu_\varepsilon$, si $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ alors

$$\left(\int_E |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon$$

par (I.1.2). comme $f_1, \ldots, f_{\nu_\varepsilon} \in L^p(\Omega)$, il existe $\delta_1(\varepsilon)$ tel que si $\mu(E) < \delta_1(\varepsilon)$ alors

$$\int_E |f_j|^p < \varepsilon, \quad \forall j = 1, \ldots, \nu_\varepsilon$$

Cela prouve le résultat.

Étape II : prouvons que les hypothèses (1) et (2) impliquent que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Comme $f_n \to f$ en mesure, on peut extraire une sous-suite telle que $f_{n_k} \to f$ p.p. dans Ω. Le Théorème de Vitali I.14 implique que $f_{n_k} \to f$ dans $L^p(\Omega)$. En effet, toute la suite f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$. S'il existe une sous-suite f_{n_j} et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$\left\|f_{n_j} - f\right\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon_0, \tag{I.1.4}$$

en utilisant l'argument précédent, nous pourrions extraire de f_{n_j} une sous-suite convergeant vers f dans$L^p(\Omega)$. Ceci est en contradiction avec (I.1.4). ■

Définition I.6 (Fonction de Carathéodory)**.** *une fonction* $g = g(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory si :*

1) g *est continue par rapport à* ξ*, pour presque tout* x *dans* Ω *.*

2) g *est mesurable par rapport à* x *pour* $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$ *.*

Lemme I.4. *soit* $f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory, soient* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions et* u_0 *une fonction mesurable telles que* $u_n \to u_0$ *en mesure. Alors* $f(x,u_n) \to f(x,u_0)$ *en mesure.*

Preuve. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et soit* u *une fonction mesurable quelconque. On pose pour* $k > 0$

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |u_0(x) - u(x)| < \frac{1}{k} \Rightarrow |f(x,u_0(x)) - f(x,u(x))| < \varepsilon\}\,.$$

Comme f *est continue par rapport à la deuxième variable, on a* $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$*. De plus on a* $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(\Omega_k) = \mu(\Omega)$*, comme* $\Omega_i \subset \Omega_j$ *avec* $i < j$*. Donc, pour tout* $\eta > 0$ *fixe, il existe* k_0 *tel que*

$$\mu(\Omega) - \mu(\Omega_{k_0}) < \frac{\eta}{2}\,.$$

Posons

$$A_n = \{x \in \Omega : |u_n(x) - u_0(x)| < \frac{1}{k_0}\};$$

comme $u_n \to u_0$ *en mesure, il existe* n_0 *tel que*

$$\mu(\Omega) - \mu(A_n) < \frac{\eta}{2}$$

pour tout $n > n_0$*. On pose*

$$D_n = \{x \in \Omega : |f(x,u_n(x)) - f(x,u_0(x))| < \varepsilon\}\,.$$

Par définition, on a $A_n \bigcap \Omega_{k_0} \subset D_n$ *et cela donne*

$$\mu(\Omega) - \mu(D_n) < [\mu(\Omega) - \mu(A_n)] + [\mu(\Omega) - \mu(\Omega_{k_0})] < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Ce qu'il faut démontrer. ■

Théorème I.16 (Opérateur de Nemytskii)**.** *Soient* $p, q \geq 1$ *et soit* $f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory. Supposons qu'il existe une fonction positive* $a \in L^q(\Omega)$ *et une constante* $b \geq 0$ *telles que :*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}. \tag{I.1.5}$$

Alors, l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} N_f & : & L^p(\Omega) & \to & L^q(\Omega) \\ & & u(x) & \mapsto & f(x,u(x)) \end{array}$$

est appelé opérateur de Nemytskii et il est continu et borné.

Preuve. *Supposons que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et montrons que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ dans $L^q(\Omega)$. D'abord on va montrer que $N_f(u_n)$ satisfait aux hypothèses (1) et (2) de Théorème I.15. Il est claire que $u_n \to u$ en mesure et alors d'après le Lemme I.4 on trouve que $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ en mesure, donc $N_f(u_n) \to N_f(u)$ en mesure. Montrons maintenant que*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |N_f(u_n)|^q = 0$$

uniformément par rapport à n. Si E est une partie mesurable de Ω et d'après (I.1.5) on trouve

$$\int_E |f(x,u_n(x))|^q \leq 2^{q-1} \int_E a(x)^q + 2^{q-1} b \int_E |u_n(x)|^p,$$

on passe à la limite quand $\mu(E) \to 0$, uniformément par rapport à n. Comme $a^q \in L^1(\Omega)$ alors $\int_E a(x)^q \to 0$; appliquons le Théorème I.15 sur la suite u_n on obtient $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |u_n|^p = 0$ et alors $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f(x,u_n(x)|^q = 0$. Appliquons maintenant le Théorème I.15 sur la suite $f(x,u_n(x))$, on trouve donc $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ dans $L^q(\Omega)$, on conclut donc que N_f est continue. ■

Nous aurons besoin du lemme suivant dans le chapitre 3

Lemme I.5. *Soit (Ω,μ) un espace mesurable, Soient $p,q \in [1,\infty)$, et soit $k \geq 0$. Supposons que $\frac{1}{q} - \frac{k}{p} \in (0,1)$ et soit $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable qui est continue par rapport à la deuxième variable et satisfait*

$$|h(\omega,u)| \leq \varphi(\omega)|u|^k + \psi(\omega)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$ avec des fonctions positives $\varphi \in L^{pq/(p-qk)}(\Omega)$ et $\psi \in L^q(\Omega)$. Alors

l'opérateur de Nemytskii $u \mapsto h(\cdot, u(\cdot))$ est bien défini et continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Preuve. *On définit $H(u) := h(\cdot, u(\cdot))$ pour $u \in L^p(\Omega)$. Alors $H(u)$ est mesurable étant une composition de fonctions mesurables. De plus,*

$$\|H(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^{pq/(p-qk)}(\Omega)} \left\||u|^k\right\|_{L^{p/k}(\Omega)} + \|\psi\|_{L^q(\Omega)} = c_1\|u\|^k_{L^p(\Omega)} + c_2 \tag{I.1.6}$$

pour certaines constantes positives c_1 et c_2 par les inégalités de Minkowski et Hölder. Donc $H(u) \in L^q(\Omega)$ pour $u \in L^p(\Omega)$, prouvant que l'opérateur de Nemytskii est bien défini.
Soit maintenant (u_n) une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge en norme dans $L^p(\Omega)$ vers $u \in L^p(\Omega)$. En passant à une sous-suite, on peut supposer que (u_n) converge presque partout vers u et qu'il existe $v \in L^p(\Omega)$ tel que $|u_n| \leq v$ presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, par continuité de h, les fonctions $H(u_n)$ convergent presque partout vers $H(u)$, et $|H(u_n)| \leq \varphi v^k + \psi$, avec le côté droit étant en $L^q(\Omega)$ par (I.1.6). D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient que $H(u_n)$ converge vers $H(u)$ dans $L^q(\Omega)$. De cette façon, on vois que chaque sous-suite de $H(u_n)$ a une sous-suite qui converge vers $H(u)$ dans $L^q(\Omega)$. Donc $H(u_n)$ converge vers $H(u)$, prouvant que H est continu. ■

I.2 Théorème de point fixe

Dans cette section, nous présentons le théorème de point fixe, a savoir le théorème de Brouwer. En suite, on s'intéressera à une certaine application de cet théorème pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaire qui peuvent être formulées sous forme de problème d'existence d'un point fixe.

I.2.1 Théorème de Brouwer

Le théorème de point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe.

Théorème I.17. *Soient K un convexe, fermé et borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : K \to K$ une fonction continue, alors f admet un point fixe.*

Pour démontrer le théorème de Brouwer on à besoin le théorème suivant.

Notons par $B(0,r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$, pour tout $r > 0$.

Théorème I.18. *Soit $F : \overline{B(0,1)} \to \partial B(0,1)$ une fonction continue, alors il existe $x \in \partial B(0,1)$ tel que $F(x) \neq x$.*

Preuve. *Voir [2] Théorème 2.6 p.6-8.* ■

Montrons maintenant le théorème de Brouwer.

Preuve. Nous divisons la preuve en deux étapes.

Étape I : Prouvons le résultat dans le cas où $K = \overline{B(0,1)}$. Par contradiction, supposons que $f(x) \neq x$, pour tout $x \in \overline{B(0,1)}$. On définit $F(x)$, pour tout $x \in \overline{B(0,1)}$, comme point d'intersection entre la demi-ligne $f(x) + \lambda(x - f(x)), \lambda \geq 0$, et $\partial B(0,1)$.

Montrons que F est continu. On a, pour certains $t(x) \in (0,1]$

$$x = t(x)F(x) + (1 - t(x))f(x). \tag{I.2.1}$$

Cela donne

$$F(x) = s(x)x + (1 - s(x))f(x),$$

où $s(x) = \frac{1}{t(x)} \geq 1$ est tel que $|F(x)| = 1$. on va prouver que $s(x)$ est continue ; cela impliquera que F est continue. On a, comme $F(x) \in \partial B(0,1)$

$$1 = |F(x)|^2 = s^2(x)|x - f(x)|^2 + |f(x)|^2 + 2s(x)(x - f(x)|f(x)),$$

alors

$$s^2(x)|x - f(x)|^2 + 2s(x)(x - f(x)|f(x)) + |f(x)|^2 - 1 = 0.$$

Maintenant, pour un x fixe,

$$\psi(s) = s^2|x - f(x)|^2 + 2s(x - f(x)|f(x)) + |f(x)|^2 - 1$$

est un polynôme de second degré, et donc il a au plus deux racines. Comme $\psi(1) \leq 0$ et $\lim_{s\to\infty} \psi(s) = +\infty, \psi$ n'a qu'une seule racine dans $[1, +\infty)$. Cela implique que $s(x)$ est bien définie. De plus, s est continue, car c'est une racine d'un polynôme de second degré à coefficients continus.

Prouvons que $F(x) = x$, pour $|x| = 1$. d'après (I.2.1) on doit prouver que $t(x) = 1$.

Si $t(x) \neq 1$, on met (I.2.1) au carré, on obtient

$$t^2(x) + (1-t(x))^2|f(x)|^2 + 2t(x)(1-t(x))(F(x)|f(x)) = 1,$$

alors

$$(1-t(x))^2|f(x)|^2 + 2t(x)(1-t(x))(F(x)|f(x)) = (1-t(x))(1+t(x))$$

En divisant par $1-t(x)$, on obtient

$$t(x)\left[2(F(x)|f(x)) - 1 - |f(x)|^2\right] = 1 - |f(x)|^2,$$

alors

$$t(x)|F(x) - f(x)|^2 = -1 + |f(x)|^2.$$

Ceci est une contradiction, comme $|f|^2 - 1 < 0$. donc $t(x) = 1$ et $x = F(x)$. on a donc défini une application continue $F : \overline{B(0,1)} \to \partial B(0,1)$ et tous les points de $\partial B(0,1)$ sont des points fixes : cela est en contradiction avec le Théorème I.18.

Étape II : Étudions le cas où K est un ensemble compact convexe. Comme K est borné, il existe $R > 0$ tel que $K \subset \overline{B(0,R)}$. Soient P_K la projection sur K et

$$\tilde{f} : \overline{B(0,R)} \to K \subset \overline{B(0,R)}$$

$$x \mapsto f\left(P_K(x)\right).$$

En raison de l'Étape I, $\tilde{f}$ a un point fixe $x \in \overline{B(0,R)}$; l'image de $\tilde{f}$ appartient à K, donc $x \in K$. ■

CHAPITRE

II

THÉORÈME DU SURJECTIVITÉ

Dans ce chapitre, nous introduisons le cadre fonctionnel qui permet la résolution d'un problème aux limites non linéaire. le point principal de ce chapitre est le théorème de la surjectivité qui joue un rôle important dans l'existence de solutions à certains problèmes elliptiques non linéaires.

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable.

II.1 Opérateurs Pseudo-monotones

Pour résoudre des équations non linéaires, seules quelques techniques de base sont connues, notamment en ce qui concerne les espaces de dimension infinie. en particulier la notion abstraite d'opérateur monotone, et plus généralement d'opérateur pseudo-

monotone, permet d'aller plus loin que le calcul des variations dans le cas convexe. Nous introduisons les notions nécessaires dans cette section. Beaucoup plus d'informations peuvent être trouvées dans le livre de Showalter [8].

Définition II.1 (Opérateurs monotones)**.** *Un opérateur $A : V \to V'$ est monotone sur V si*

$$\forall u, v \in V, \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0.$$

Si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = 0$ implique $u = v$, alors on dit que A est strictement monotone.

Définition II.2 (Opérateurs hémicontinus)**.** *Un opérateur $A : V \to V'$ est hémicontinu si pour tout $u, v \in V$, l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition II.3 (Opérateurs pseudo-monotones)**.** *Un opérateur $A : V \to V'$ est pseudo-monotone si*

1. *A est borné, c-à-d, l'mage de toute partie bornée de V est une partie bornée de V';*
2. *si $u_j \rightharpoonup u$ dans V et $\limsup_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \leq 0$, alors,*

$$\liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle$$

pour tout $v \in V$.

Proposition II.1. *Si $A : V \to V'$ est monotone et hémicontinu alors A est pseudo-monotone.*

Preuve. *Voir [8], Proposition II.2.3.* ■

Théorème II.1. *Soient $A : V \to V'$ opérateur pseudo-monotone et $B : V \to V'$ un opérateur complètement continu i.e., supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans V implique que $B(u_n) \to B(u)$ dans V'. Alors $A + B$ est pseudo-monotone.*

Preuve. *Soit (u_n) une suite de V telle que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n) + B(u_n), u_n - u\rangle_{V',V} \leq 0.$$

Alors $B(u_n) \to B(u)$, *on a* $\langle B(u_n), u_n - u\rangle \to 0$ *et donc*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle_{V',V} \leq 0$$

Par hypothèse, cela implique

$$\langle A(u), u - v\rangle_{V',V} \leq \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - v\rangle_{V',V} \text{ pour tout } v \in V.$$

Mais comme $\langle B(u_n), u_n - v\rangle \to \langle B(u), u - v\rangle$ *pour tout* $v \in V$, *car* $B(u_n) \to B(u)$, *cela montre que*

$$\langle A(u) + B(u), u - v\rangle_{V',V} \leq \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n) + B(u_n), u_n - v\rangle_{V',V} \text{ pour tout } v \in V$$

Donc $A + B$ *est pseudo-monotone.* ■

II.2 Théorème du surjectivité

Définition II.4 (Opérateurs coercifs)**.** *Un opérateur* $A : V \to V'$ *est coercif si* $\dfrac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|} \to +\infty$ *quand* $\|v\| \to +\infty$.

Théorème II.2 (Théorème du surjectivité)**.** *Soit* $A : V \to V'$ *un opérateur borné pseudo-monotone et coercif, alors* A *est surjectif, c-à-d, pour tout* $f \in V'$ *il existe* $u \in V$ *tel que* $A(u) = f$.

Pour démontrer le théorème de la surjectivité on à besoin le lemme suivant :

Lemme II.1. *Soit* $T :\to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *une application continue avec* $m \geq 1$. *Supposons qu'il existe* $\rho > 0$ *tel que* $T(\xi).\xi \geq 0$, *pour tout* ξ *avec* $|\xi| = \rho$. *Alors il existe* ξ_0 *avec* $|\xi_0| \leq \rho$ *tel que* $T(\xi_0) = 0$.

Preuve. *Par contradiction, supposons que* $T(\xi) \neq 0$ *dans* $\overline{B(0,\rho)} = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi| \leq \rho\}$, *en d'autres termes que pour tout* $\|\xi\| \leq \rho, \|T(\xi)\| > 0$. *Par conséquent, la fonction* $g : \bar{B}(0,\rho) \to \partial\bar{B}(0,\rho)$ *définie par*

$$g(\xi) = -\frac{\rho}{\|T(\xi)\|}T(\xi)$$

est continue. Par le Théorème de Brouwer I.17, cette application admet un point fixe ξ^* *qui*

est donc tel que

$$g\left(\xi^*\right)=\xi^*=-\frac{\rho}{\|T\left(\xi^*\right)\|}T\left(\xi^*\right)$$

On en déduit d'une part que $\|\xi^*\|=\rho$ *et d'autre part que*

$$\rho^2=\|\xi^*\|^2=g\left(\xi^*\right)\cdot\xi^*=-\frac{\rho}{\|T\left(\xi^*\right)\|}T\left(\xi^*\right)\cdot\xi^*\leq 0$$

ce qui contredit les hypothèses $\rho>0$ *et* $T(\xi).\xi\geq 0$. ■

Montrons maintenant le théorème de la surjectivité.

Preuve. Nous diviserons la preuve en plusieurs étapes.

Étape I : Soit $\{w_1,...,w_n,...\}$ un sous ensemble dénombrable et dense dans V, on note par V_n le sous espace de V généré par $\{w_1,...,w_n\}$, on définit

$$\begin{aligned}T:\quad & V_n\to V_n\\ & v\mapsto\langle A(v)-f,v\rangle v.\end{aligned}$$

On va montrer que T est continue, il suffit de montrer que $v\mapsto\langle A(v),v\rangle$ est continue dans V_n. Supposons que $w_m\to w$: montrons que $A(w_m)$ converge faiblement vers $A(w)$ dans V'. Comme A est borné, $\|A(w_m)\|_{V'}$ est uniformément borné. Ce qui implique que

$$\lim_{m\to+\infty}\langle A(w_m),w_m-w\rangle=0.$$

De plus, il existe une sous-suite telle que $A(w_{m_k})\rightharpoonup g$ dans V' car V' est réflexif. Et comme A est pseudo-monotone, alors

$$\liminf_{m_k}\langle A(w_{m_k}),w_{m_k}-v\rangle=\langle g,w-v\rangle\geq\langle A(w),w-v\rangle$$

Pour tout $v\in V$. Ensuite, on a $g=A(w)$ et donc $A(w_{m_k})\rightharpoonup A(w)$ dans V'.

Supposons maintenant que $A(w_m)$ ne converge pas faiblement vers $A(w)$ dans V' : l'argument précédent implique une contradiction. Comme $A(w_m)\rightharpoonup A(w)$ dans V' et $w_m\to w$ dans V, alors $\langle A(w_m),w_m\rangle\to\langle A(w),w\rangle$, cela implique la continuité de T.

Étape II : On va montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $u_n\in V_n$ tel que

$$\langle A\left(u_n\right),w_j\rangle=\langle f,w_j\rangle,\quad 1\leq j\leq n. \tag{II.2.1}$$

Prétendant que T satisfait $T(v)\cdot v\geq 0$ pour tout v avec $\|v\|=\rho$, pour un certain $\rho>0$. Puisque T est continu par l'étape précédente, le Lemme II.1 impliquera l'existence de

u_n.

On a $T(v) \cdot v \geq 0$, car

$$\langle A(v), v\rangle - \langle f, v\rangle \geq \langle A(v), v\rangle - \|f\|_{V'}\|v\| \geq 0,$$

si $\|v\| = \rho$, pour ρ assez grand et à cause de la coercivité de A.

Étape III : D'après (II.2.1), on conclut que

$$\langle A\left(u_n\right), u_n\rangle = \langle f, u_n\rangle \leq \|f\|_{V'}\left\|u_n\right\|.$$

En utilisant la coercivité de A, on a constaté que $\|u_n\|$ est uniformément bornée. Puisque A est borné, $\|A(u_n)\|_{V'}$ est également uniformément bornée. Par conséquent, il existe une sous-suite u_{n_k} telle que

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup u & \text{dans} \quad V, \\ A\left(u_{n_k}\right) \rightharpoonup \chi & \text{dans} \quad V'. \end{cases} \tag{II.2.2}$$

Passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (II.2.1), (avec j fixe) on a pour tout j

$$\langle \chi, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle.$$

Comme $\{w_1, ..., w_n, ...\}$ est dense dans V, $\chi = f$. Prouvons que

$$\chi = A(u).$$

On montre que

$$\limsup_{n_k \to \infty} \langle A\left(u_{n_k}\right), u_{n_k} - u\rangle \leq 0. \tag{II.2.3}$$

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $u_0 \in \bigcup_m V_m$ tel que $\|u - u_0\| \leq \varepsilon$. On a

$$\langle A\left(u_{n_k}\right), u_{n_k} - u\rangle = \langle f, u_{n_k}\rangle - \langle A\left(u_{n_k}\right), u - u_0\rangle - \langle A\left(u_{n_k}\right), u_0\rangle.$$

D'après II.2.2 on a

$$\langle f, u_{n_k}\rangle \to \langle f, u\rangle$$

et

$$\langle A(u_{n_k}), u_0\rangle \to \langle \chi, u_0\rangle,$$

et $\langle A(u_{n_k}), u - u_0\rangle$ peut être estimé par C_ε, pour certains $C > 0$, puisque A est borné.

En utilisant $\|u - u_0\| \leq \varepsilon$ on obtient (II.2.3). La pseudomonotonicité de A implique que

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \liminf_{n_k \to \infty} \langle A\left(u_{n_k}\right), u_{n_k} - v\rangle \leq \langle \chi, u - v\rangle$$

pour tout $v \in V$. on conclut donc que $\chi = A(u)$, i.e., $f = A(u)$. ■

CHAPITRE

III

ÉTUDE D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE NON LINÉAIRE AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE ROBIN

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et la régularité des solutions aux problèmes de Robin. Pour les résultats d'existence de la solution, nous utilisons le théorème de surjectivité mentionné dans le chapitre précédent. Nous jetons les bases en étudiant le problème de Neumann pour prouver les résultats de régularité des problèmes de Robin, la stratégie ici est de réduise plutôt la question au problème correspondant pour une équation de Neumann. Pour cela, nous exigeons que le problème de Neumann correspondant se comporte bien.

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

III.1 Existence de solutions aux problèmes de Neumann.

Dans cette section, nous rappelons comment la théorie des opérateurs monotones ou plus généralement pseudo-monotones est utilisée pour prouver l'existence de solutions au problème de Neumann (quasi-linéaire) qui est un cas particulier du problème de Robin, suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) + a(x,u,\nabla u) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{N} D_j f_j(x) & \text{dans } \Omega \\ A(z,u,\nabla u)\cdot\nu(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{N} f_j(z)\nu_j(z) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{III.1.1}$$

à condition qu'en dehors des conditions de croissance, le terme principal satisfasse également une hypothèse de monotonie. Pour cela, il sera utile de considérer l'opérateur différentiel comme une application de $W^{1,p}(\Omega)$ dans son espace dual, c'est-à-dire,

$$\mathcal{A} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)', \langle \mathcal{A}(u), v\rangle := \int_\Omega \nabla v A(x,u,\nabla u) + \int_\Omega v a(x,u,\nabla u), \tag{III.1.2}$$

à condition bien sûr que pour u fixe cela définisse en effet une fonction linéaire bornée sur $W^{1,p}(\Omega)$.

Hypothèse III.1. *Soit $p \in (1,\infty)$ fixe, et que les fonctions A et a soient mesurables. Supposons qu'il existe des constantes positives ν et μ et des fonctions ψ_k telles que*

$$lA(x,u,l) \geq \nu|l|^p - \psi_1|u|^p - \psi_2, \tag{III.1.3}$$

$$|A(x,u,l)| \leq \mu|l|^{p-1} + \psi_3|u|^{p-1} + \psi_4, \tag{III.1.4}$$

$$|a(x,u,l)| \leq \psi_5|l|^{p-1} + \psi_6|u|^{p-1} + \psi_7 \tag{III.1.5}$$

pour presque tout $x \in \Omega$, tout $l \in \mathbb{R}^N$ et tout $u \in \mathbb{R}$. Si $p \leq N$ on suppose que

$$\psi_1,\psi_2,\psi_6,\psi_7 \in L^{\frac{N}{p}+\varepsilon}(\Omega), \psi_3,\psi_4 \in L^{\frac{N}{p-1}+\varepsilon}(\Omega), \text{ et } \psi_5 \in L^{N+\varepsilon}(\Omega)$$

pour un certain $\varepsilon \in (0, p-1)$. Si $p > N$, on suppose que

$$\psi_1,\psi_2,\psi_6,\psi_7 \in L^1(\Omega), \psi_3,\psi_4 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega), \text{ et } \psi_5 \in L^p(\Omega).$$

Le lemme suivant énonce la relation assez évidente entre l'opérateur A et l'équation différentielle (III.1.1).

Lemme III.1. *Soit $p \in (1, \infty)$, soit Ω un ouvert borné lipschitzien, et que l'Hypothèse III.1 soit vérifie. Soient f_0 et f_j des fonctions définies sur Ω avec $1 \leq j \leq N$ et g une fonction définie sur $\partial\Omega$ telles que $f_j \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$ et*

- *si $p < N$, alors $f_0 \in L^{pN/(pN+p-N)}(\Omega)$ et $g \in L^{p(N-1)/(pN-N)}(\partial\Omega)$;*
- *si $p = N$, alors $f_0 \in L^r(\Omega)$ et $g \in L^r(\partial\Omega)$ pour un certain $r > 1$;*
- *si $p > N$, alors $f_0 \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$.*

Alors

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto \int_\Omega v f_0 + \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega D_j v f_j + \int_{\partial\Omega} v g \end{aligned}$$

définit une fonction linéaire bornée sur $W^{1,p}(\Omega)$. De plus, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible de (III.1.1) si et seulement si $\mathcal{A}(u) = \varphi$.

Preuve. *Voir [7] Lemme 3.2.3.* ■

Hypothèse III.2. *Soit $p \in (1, \infty)$. Soient A et a deux fonctions mesurables, supposons que A et a sont continues par rapport à u et l. Supposons qu'il existe $\nu, \mu > 0$ et des fonctions positives $\psi_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, et $\psi_2 \in L^1(\Omega)$ telles que*

$$\begin{aligned} & |A(x,u,l)| \leq \mu|l|^{p-1} + \mu|u|^{p-1} + \psi_1, \quad |a(x,u,l)| \leq \mu|l|^{p-1} + \mu|u|^{p-1} + \psi_1, \\ & lA(x,u,l) \geq \nu|l|^p - \mu|u|^p - \psi_2 \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega, u \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}^N$. De plus, supposons que

$$(l - \tilde{l})(A(x,u,l) - A(x,u,\tilde{l})) > 0 \tag{III.1.6}$$

pour tout $x \in \Omega, u \in \mathbb{R}$, et $l \neq \tilde{l} \in \mathbb{R}^N$.

Théorème III.1 (Leray-Lions, [[8], Théorème II.6.1]). *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Sous l'Hypothèse III.2, l'opérateur $\mathcal{A}$ défini comme dans (III.1.2) est bien défini et pseudo-monotone.*

considérons la version modifiée de (III.1.1)

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) + a(x,u,\nabla u) + \omega|u|^{p-2}u = f_0(x) - \sum_{j=1}^{N} D_j f_j(x) & \text{sur } \Omega \\ A(z,u,\nabla u)\cdot\nu(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{N} f_j(z)\nu_j(z) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{III.1.7}$$

pour certains $\omega \in \mathbb{R}$ donnés.

Théorème III.2. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien, et soit $p \in (1,\infty)$. sous l'Hypothèse III.2, il existe $\omega_0 \geq 0$ tel que pour tout $\omega > \omega_0$ l'équation (III.1.7) admet une solution faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ quand f_0, f_j, et g sont des fonctions comme dans le Lemme III.1. De plus, il existe $c \geq 0$ ne dépend pas de u, f_0, f_j, et g tels que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c\Big((\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N}\|f_j\| + \|g\|)^{1/(p-1)} + 1\Big). \tag{III.1.8}$$

Ici, les normes doivent être prises dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1.

Preuve. *Soit $\mathcal{A}$ comme dans (III.1.2), et définissons pour $\omega \geq 0$*

$$\langle \mathcal{A}^\omega(u), v\rangle := \langle \mathcal{A}(u), v\rangle + \omega \int_\Omega |u|^{p-2}uv \tag{III.1.9}$$

pour $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, qui est l'opérateur appartenant à l'équation (III.1.7) au sens du Lemme III.1.

D'après l'Hypothèse III.2 et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}^\omega(u), v\rangle| &\leq \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^{p-1} + \mu|u|^{p-1} + \psi_1\right)|\nabla v| \\ &\quad + \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^{p-1} + (\mu+\omega)|u|^{p-1} + \psi_1\right)|v| \\ &\leq \left(\mu\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + (\mu+\omega)\|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\psi_1\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega)}\right) \\ &\quad \cdot \left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

ce qui implique que A^ω est borné.

L'opérateur A^ω est pseudo-monotone pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par le Théorème III.1 puisque ses

coefficients remplissent l'Hypothèse III.2. D'après l'Hypothèse III.2

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(u), u\rangle &= \int_\Omega \nabla u A(x,u,l)dx + \int_\Omega ua(x,u,l)dx \\ &\geq \nu \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \mu \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega \psi_2 dx - \mu \int_\Omega |u||\nabla u|^{p-1}dx \\ &\quad - \mu \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega \psi_1 |u| dx.\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Young I.8, alors on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u||\nabla u|^{p-1}dx &= \int_\Omega \left|\frac{1}{\varepsilon}u\right| \left(\varepsilon|\nabla u|^{p-1}\right) dx \\ &\leq \frac{1}{p\varepsilon^p}\int_\Omega |u|^p + \frac{p-1}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon|\nabla u|^{p-1}\right)^{p'} \\ &= \frac{1}{p\varepsilon^p}\int_\Omega |u|^p + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}\int_\Omega |\nabla u|^p \\ \int_\Omega \psi_1|u|dx &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{p-1}{p}\int_\Omega \psi_1^{\frac{p}{p-1}}\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq \left(\nu - \frac{p-1}{p}\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}\mu\right)\int_\Omega |\nabla u|^p - \left(2\mu + \frac{1}{p\varepsilon^p} + \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |u|^p \\ - \frac{p-1}{p}\int_\Omega v_1^{\frac{p}{p-1}} - \int_\Omega \psi_2 dx\end{aligned}$$

Donc si on choisit ε assez petit, on trouve $\nu' > 0,\ \omega_0 = 2\mu + \frac{1}{p\varepsilon^p} + \frac{1}{p} \geq 0,\ d = \frac{p-1}{p}\int_\Omega \psi_1^{\frac{p}{p-1}}$ $+ \int_\Omega \nu_2 dx \geq 0$. D'où on conclut que

$$\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq \nu' \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \omega_0 \|u\|^p_{L^p(\Omega)} - d \tag{III.1.10}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Donc $\mathcal{A}^\omega$ est coercif pour $\omega > \omega_0$.

Nous avons vérifié que $\mathcal{A}^\omega_R$ satisfait aux hypothèses du Théorème II.2 pour $\omega \geq \omega_0$, donc $\mathcal{A}^\omega_R$ est surjectif. Soit φ une fonction linaire définie sur $W^{1,p}(\Omega)$ comme dans le Lemme III.1. Alors il existe $u \in W^{1,p}$ tel que $\mathcal{A}^\omega_R(u) = \varphi$, i.e., u est une solution faible de (III.1.7) par le Lemme III.1. De plus

$$\begin{aligned}\nu'\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - d \leq \langle \mathcal{A}^\omega(u), u\rangle = \langle \varphi, u\rangle &\leq \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)'}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \frac{p-1}{p\varepsilon^{p/(p-1)}}\|\varphi\|^{p/(p-1)}_{W^{1,p}(\Omega)'} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

pour tous $\varepsilon > 0$. en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit, on trouve des constantes $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$

ne dépendant pas de u ou φ tels que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \left(c_1 + c_2\|\varphi\|^{p/(p-1)}_{W^{1,p}(\Omega)'}\right)^{1/p}.$$

D'après le Lemme I.2 et comme $\|\varphi\|_{W1,m(\Omega)'}$ peut être estimé en fonction des normes de f_0 f_j, et g, cela implique (III.1.8). ■

Dans certaines situations, la condition de monotonie (III.1.6) garantit déjà l'unicité des solutions. Nous couvrons un cas particulier important avec le corollaire suivant.

Corollaire III.1. *Sous les hypothèses de Théorème III.2 supposons en outre que A ne dépend pas de u lui-même, i.e., $A(x,u,\nabla u) = A(x,\nabla u)$, et que $a(x,u,\nabla u) = 0$. Alors pour tout $\omega > 0$, il existe une solution unique de* (III.1.7).

Preuve. *L'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone par* (III.1.6). *En effet*

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v\rangle = \int_\Omega (\nabla u - \nabla v)(A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v)) \geq 0$$

pour tout u et v dans $W^{1,p}(\Omega)$. par conséquent $\mathcal{A}^\omega$ est strictement monotone pour tout $\omega > 0$. En effet, on peut facilement vérifier que

$$\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)(u - v) \geq 0$$

pour tout u et v dans $L^p(\Omega)$ avec égalité si et seulement si $u = v$ presque partout, comparer le Lemme III.5.1. Il est maintenant clair que nous pouvons choisir $\omega_0 = 0$ dans la preuve du Théorème III.2, i.e., qu'en effet il existe une solution de (III.1.7) *pour tout $\omega > 0$. Supposons qu'il existe $\omega > 0$ tel que l'on puisse trouver deux solutions faibles différentes u et v de* (III.1.7). *Alors $\mathcal{A}^\omega(u) = \mathcal{A}^\omega(v)$ par le Lemme III.1. Comme $\mathcal{A}^\omega$ est strictement monotone, cela implique que*

$$0 = \langle \mathcal{A}^\omega(u) - \mathcal{A}^\omega(v), u - v\rangle > 0,$$

une contradiction. ■

III.2 Dépendance continue

Pour la transition des conditions aux limites de Neumann aux conditions aux limites générales de Robin, nous aurons besoin que la solution dépende continuellement du côté droit. Plus précisément, nous exigeons même que le résolvant soit localement α-höldérienne en tant qu'opérateur en $W^{1,p}(\Omega)$. Nous présentons une classe d'équations différentielles pour lesquelles nous avons une dépendance continue, qui est la classe d'équations uniformément monotones.
On ne sait pas grand-chose sur la dépendance continue, en particulier si $p < 2$. Nous posons donc le théorème suivant lorsque $p \geq 2$.

Les résultats sur l'existence de solutions dans la section III.1 étaient basés sur la condition de monotonie plutôt légère (III.1.6). Si en plus nous supposons qu'une condition de structure plus forte que (III.1.6) est remplie, nous avons même une dépendance continue du côté droit.

Hypothèse III.3. *Soit $p \in [2, \infty)$. Soient A et a deux fonctions mesurables, et supposons qu'ils sont continus par rapport à u et l. Soient A et a de la forme $A(x, u, l) = A(x, l)$ et $a(x, u, l) = a(x, u)$. Supposons qu'il existe $\nu, \mu > 0$ et fonctions positives $\psi_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$ et $\psi_2 \in L^1(\Omega)$ tels que*

$$|A(x,l)| \leq \mu|l|^{p-1} + \psi_1, \quad |a(x,u)| \leq \mu|u|^{p-1} + \psi_1, \quad \text{et} \quad lA(x,l) \geq \nu|l|^p - \psi_2$$

pour tout $x \in \Omega, u \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}^N$. Supposons de plus que

$$(l - \tilde{l})(A(x,l) - A(x,\tilde{l})) \geq \nu|l - \tilde{l}|^p \tag{III.2.1}$$

et

$$(u - \tilde{u})(a(x,u) - a(x,\tilde{u})) \geq \nu|u - \tilde{u}|^p \tag{III.2.2}$$

pour tout $x \in \Omega$, l et $\tilde{l}$ dans $\mathbb{R}^N$, et u et $\tilde{u}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème III.3. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Sous l'Hypothèse III.3 l'équation (III.1.1) admet une solution faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour chaque côté droit dans les espaces*

indiqués dans le Lemme III.1. De plus, il existe une constante $c \geq 0$ avec la propriété suivante. Si u et $\tilde{u}$ sont des solutions de (III.1.1) pour les côtés droit (f_0, f_j, g) et $\left(\tilde{f}_0, \tilde{f}_j, \tilde{g}\right)$, alors

$$\|u - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \left(\left\| f_0 - \tilde{f}_0 \right\| + \sum_{j=1}^{N} \left\| f_j - \tilde{f}_j \right\| + \|g - \tilde{g}\| \right)^{1/(p-1)}, \tag{III.2.3}$$

où les normes doivent être prises dans les espaces indiqués au Lemme III.1. En particulier, la solution pour un côté droit donné est unique.

Preuve. *Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur défini dans (III.1.2). On utilise le Théorème II.2 pour conclure que $\mathcal{A}$ est surjectif. En dehors de la propriété*

$$\lim_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \infty} \frac{\langle \mathcal{A}(u), u \rangle}{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = \infty, \tag{III.2.4}$$

les hypothèses du Théorème II.2 peuvent être vérifiées pour $\mathcal{A}$ comme dans la preuve du Théorème III.2 puisque l'Hypothèse III.2 est satisfaite. Il ne reste donc plus qu'à prouver (III.2.4). Par hypothèse et inégalité de Young,

$$\begin{aligned} \nabla u A(x, \nabla u) &= (\nabla u - 0)(A(x, \nabla u) - A(x, 0)) + \nabla u A(x, 0) \geq \nu |\nabla u|^p - \psi_1 |\nabla u| \\ &\geq \left(\nu - \frac{\varepsilon^p}{p} \right) |\nabla u|^p - \frac{p-1}{p \varepsilon^{p/(p-1)}} \psi_1^{p/(p-1)} \end{aligned}$$

et de même

$$u a(x, u) \geq \left(\nu - \frac{\varepsilon^p}{p} \right) |u|^p - \frac{p-1}{p \varepsilon^{p/(p-1)}} \psi_1^{p/(p-1)}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, i.e.,

$$\langle \mathcal{A}(u), u \rangle \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p + \alpha \int_\Omega |u|^p - \int_\Omega c \psi_1^{p/(p-1)} = \alpha \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - c \, \|\psi_1\|^{p/(p-1)}_{L^{p/(p-1)}(\Omega)} \tag{III.2.5}$$

pour certains $\alpha > 0$ et une constante $c \geq 0$, si on prend $\varepsilon > 0$ assez petit. Comme $p > 1$, cela prouve (III.2.4) et donc l'existence de solutions.

Soient maintenant u et $\tilde{u}$ des solutions pour les côtés droit (f_0, f_j, g) et $\left(\tilde{f}_0, \tilde{f}_j, \tilde{g}\right)$, et soient φ et $\tilde{\varphi}$ désignent les fonctions correspondantes comme dans le Lemme III.1. Alors $\mathcal{A}(u) = \varphi$ et $\mathcal{A}(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}$. Donc

$$\begin{aligned} &\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \|u - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq \langle \varphi - \tilde{\varphi}, u - \tilde{u} \rangle = \langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(\tilde{u}), u - \tilde{u} \rangle \\ &= \textstyle\int_\Omega (\nabla u - \nabla \tilde{u})(A(x, \nabla u) - A(x, \nabla \tilde{u})) + \int_\Omega (u - \tilde{u})(a(x, u) - a(x, \tilde{u})) \\ &\geq \nu \textstyle\int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^p + \nu \int_\Omega |u - \tilde{u}|^p = \nu \|u - \tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u-\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \nu^{-1/(p-1)}\|\varphi-\tilde{\varphi}\|^{1/(p-1)}.$$

Puisque $\varphi-\tilde{\varphi}$ correspond à la différence des côtés droits et que l'injection des espaces L^p dans $W^{1,p}(\Omega)'$ qui est décrite par le Lemme III.1 est continue, cela prouve (III.2.3). ■

III.3 Existence de solutions aux problèmes de Robin.

la stratégie pour prouver l'existence de solutions sera de montrer que l'opérateur correspondant satisfait aux hypothèses du Théorème II.2. Pour garantir que l'opérateur est coercif, nous imposons soit des conditions de structure au terme de Robin h, soit nous devons changer l'équation et ajoutons un terme d'ordre inférieur assez grand, c'est-à-dire considérer

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,u,\nabla u)+a(x,u,\nabla u)+\omega|u|^{p-2}u = f_0-\sum_{j=1}^{N} D_j f_j & \text{dans } \Omega, \\ A(z,u,\nabla u)\cdot\nu+h(z,u) = g+\sum_{j=1}^{N} f_j v_j & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{III.3.1}$$

pour ω assez grand.

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve du Théorème III.4.

Lemme III.2. *Soit V un sous espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$, supposons que $u_n \rightharpoonup u$ et $w_n \rightharpoonup w$ dans V, et soit $\limsup_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(u_n,u), u_n-u\rangle \leq 0$. Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(u_n,u_n), u_n-u\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(u_n,u), u_n-u\rangle = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(u_n,v), w_n\rangle = \langle \mathcal{A}(u,v), w\rangle\,, \qquad v\in V\,.$$

Pour simplifier, nous énonçons le théorème uniquement pour $p<N$. Les arguments pour les cas $p=N$ et $p>N$ sont similaires, mais les exposants pour les plongements de Sobolev sont différents.

Théorème III.4. *Soient Ω un ouvert lipschitzien et $p \in (1, N)$. En plus de l'Hypothèse III.2, soit*

$$|h(z,u)| \leq \psi_8(z)|u|^{p-1} + \psi_9(z) \tag{III.3.2}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $z \in \partial\Omega$ avec $\psi_8 \in L^{\frac{N-1}{p-1}+\varepsilon}(\partial\Omega)$ et $\psi_9 \in L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour un certains $\varepsilon > 0$. Supposons que h est continue par rapport à la deuxième variable. Alors il existe ω_0 tel que pour tout $\omega > \omega_0$ l'équation (III.3.1) admet une solution faible dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour chaque côté droit dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1.

Preuve. *Pour $\omega \geq 0$, on définit l'opérateur $\mathcal{A}^\omega$ et $\mathcal{B}$ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)'$ par*

$$\langle \mathcal{A}^\omega(u), v\rangle := \int_\Omega \nabla v A(x,u,\nabla u) + \int_\Omega v a(x,u,\nabla u) + \omega \int_\Omega v|u|^{p-2}u \tag{III.3.3}$$

et

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle := \int_{\partial\Omega} v h(z,u) \tag{III.3.4}$$

pour $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, et on pose $\mathcal{A}^\omega_R := \mathcal{A}^\omega + \mathcal{B}$. Montrons que A^ω_R satisfait les hypothèses du Théorème II.2.

Montrons d'abord que $\mathcal{A}^\omega_R$ est borné. D'après l'Hypothèse III.2 et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{A}^\omega(u), v\rangle| &\leq \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^{p-1} + \mu|u|^{p-1} + \psi_1\right)|\nabla v| \\
&\quad + \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^{p-1} + (\mu+\omega)|u|^{p-1} + \psi_1\right)|v| \\
&\leq \left(\mu\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + (\mu+\omega)\|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\psi_1\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega)}\right) \\
&\quad \cdot \left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathcal{A}^\omega$ est borné pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. Utilisons (III.3.2) et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Omega} v h(z,u)\right| &\leq \int_{\partial\Omega} |\psi_8|\,|u|^{p-1}|v| + \int_{\partial\Omega} |\psi_9|\,|v| \\
&\leq \|\psi_8\|_{L^{\frac{N-1}{p-1}}(\partial\Omega)} \left\||u|^{p-1}\right\|_{L^{\frac{(N-1)p}{(N-p)(p-1)}}(\partial\Omega)} \|v\|_{L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\Omega)} \\
&\quad + \|\psi_9\|_{L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}}(\partial\Omega)} \|v\|_{L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc d'après le Théorème I.13 on obtient

$$\left|\int_{\partial\Omega} v h(z,u)\right| \leq \left(c_1\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)} + c_2\right)\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour certaines constantes c_1 et c_2 dépendant uniquement des fonctions ψ_8 et ψ_9 et de la norme d'opérateur de l'opérateur trace. Donc $\mathcal{B}$ est borné, on conclus donc que l'opérateur $\mathcal{A}_R^\omega$ est borné.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}_R^\omega$ est pseudo-monotone, en utilisons le Théorème II.1. On a d'après le Théorème III.1, $\mathcal{A}^\omega$ est pseudo-monotone, En effet, on a

$$\langle \mathcal{A}^\omega(u), v\rangle := \int_\Omega \nabla v A(x,u,\nabla u) + \int_\Omega v a(x,u,\nabla u) + \omega \int_\Omega v|u|^{p-2}u$$

on pose $\mathcal{A}^\omega(u) = \mathcal{A}^\omega(u,u)$ avec

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^\omega(u,v), w\rangle &= \langle \mathcal{A}_1^\omega(u,v), w\rangle + \langle \mathcal{A}_0^\omega(u), w\rangle\,,\\
\langle \mathcal{A}_1^\omega(u,v), w\rangle &= \int_\Omega \nabla w A(x,u,\nabla v)dx\,,\\
\langle \mathcal{A}_0^\omega(u), w\rangle &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)w dx + \omega\int_\Omega w|u|^{p-2}u dx\,, \quad u,v,w \in W^{1,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

Soient $u_n \rightharpoonup u$ dans V et $\limsup_{n\to+\infty} \mathcal{A}^\omega(u_n)(u_n-u) \le 0$. Soient $v \in V$, $0<t<1$, posons $v_t = (1-t)u + tv$. Alors d'après (III.1.6) on trouve

$$\langle \mathcal{A}^\omega(u_n,u_n) - \mathcal{A}^\omega(u_n,v_t), u_n - v_t\rangle \ge 0$$

on pose $u_n - v_t = u_n - u + t(u-v)$ on trouve

$$t\langle \mathcal{A}^\omega(u_n) - \mathcal{A}^\omega(u_n,v_t), u-v\rangle \ge \langle \mathcal{A}^\omega(u_n,v_t) - \mathcal{A}^\omega(u_n), u_n-u\rangle$$

et d'après le Lemme III.2 on trouve que Le terme du côté droit converge vers zéro quand $n\to+\infty$. Prenons la $\liminf$, et divisons par $t>0$, et quand $t\to 0$ on obtient

$$\liminf \mathcal{A}^\omega(u_n)(u_n-v) \ge \mathcal{A}^\omega(u)(u-v).$$

Donc $\mathcal{A}^\omega$ est pseudo-monotone. Soit u_n une suite quelconque de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour certains $u \in W^{1,p}(\Omega)$, et on a d'après le Théorème I.13 l'opérateur trace est compact de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^r(\partial\Omega)$ pour tout $r < \frac{(N-1)p}{N-p}$, donc $u_n \to u$ dans $L^r(\partial\Omega)$. On peut choisir r prés de $\frac{(N-1)p}{N-p}$ pour que

$$\frac{r\cdot\frac{(N-1)p}{(p-1)N}}{r-(p-1)\frac{(N-1)p}{(p-1)N}} = \frac{(N-1)p}{(p-1)N-(N-p)(p-1)\frac{(N-1)p}{r(N-p)}} < \frac{N-1}{p-1}+\varepsilon.$$

Alors d'après le Lemme I.5 on obtient que $h(\cdot,u_n(x)) \to h(\cdot,u(x))$ dans $L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}}(\partial\Omega)$.

D'après l'inégalité de Hölder et le Théorème I.13

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{B}(u_n) - \mathcal{B}(u), v\rangle| &= \left|\int_{\partial\Omega} (h(\cdot, u_n(\cdot)) - h(\cdot, u(\cdot))) \cdot v\right| \\ &\leq \|h(\cdot, u_n(\cdot)) - h(\cdot, u(\cdot))\|_{L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}}(\partial\Omega)} \|v\|_{L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\Omega)} \\ &\leq c\|h(\cdot, u_n(\cdot)) - h(\cdot, u(\cdot))\|_{L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c \geq 0$, ce qui implique que $\mathcal{B}(u_n)$ converge vers $\mathcal{B}(u)$ dans $W^{1,p}(\Omega)'$. Par conséquent $\mathcal{B}$ est complètement continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)'$. On conclus donc que A_R^ω est is pseudo-monotone.

Finalement, on montre que A_R^ω est coercif. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, utilisons (III.3.2) et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{B}(u), u\rangle| &\leq \int_{\partial\Omega} |\psi_{\mathbf{8}}| |u|^p + \int_{\partial\Omega} |\psi_9| |u| \\ &\leq \|\psi_{\mathbf{8}}\|_{L^{r/(r-p)}(\partial\Omega)} \|u\|^p_{L^r(\partial\Omega)} + \|\psi_9\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \|u\|_{L^r(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

on prend $p < r < \frac{(N-1)p}{N-p}$ près de $\frac{(N-1)p}{N-p}$ pour que $\psi_8 \in L^{\frac{r}{(r-p)}}(\partial\Omega)$ et $\psi_9 \in L^{r'}(\partial\Omega)$. Donc d'après l'Exemple I.1 on a pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon \geq 0$ tel que

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq \varepsilon\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + c_\varepsilon\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

et donc on a

$$\|u\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{p-1}{p}} C^{\frac{1}{p}}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + c_\varepsilon\|u\|_{L^p(\Omega)},$$

utilisons l'inégalité suivante, pour tout $p \geq 1, a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

alors on obtient

$$\|u\|^p_{L^r(\partial\Omega)} \leq \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{p-1}{p}} c^{\frac{1}{p}}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + c_\varepsilon\|u\|_{L^p(\Omega)}\right)^p \leq \frac{\varepsilon}{C}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + C_\varepsilon\|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

et d'après le Théorème I.13 on a

$$\|u\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq C'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

d'où

$$|\langle \mathcal{B}u, u\rangle| \leq \varepsilon\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + C_\varepsilon\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Par* (III.1.10), *il existe* $\nu > 0$, $w_1 \geq 0$ *et* $d \geq 0$ *tels que*

$$\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq \nu \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \omega_1 \|u\|^p_{L^p(\Omega)} - d \tag{III.3.5}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *on obtient pour* $\varepsilon := \frac{\nu}{2}$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}^\omega_R(u), u\rangle &\geq \frac{\nu}{2}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + (\omega - \omega_1 - C_\varepsilon)\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - d - C'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\geq \frac{\nu}{2}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - d - C'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

pour $\omega > \omega_0 := \omega_1 + C_\varepsilon$. *ce qui prouve que* $\mathcal{A}^\omega_R$ *est coercif pour* $\omega > \omega_0$.

Nous avons vérifié que $\mathcal{A}^\omega_R$ *satisfait aux hypothèses du Théorème* II.2 *pour* $\omega \geq \omega_0$, *donc* $\mathcal{A}^\omega_R$ *est surjectif. Soit* φ *une fonction linaire définie sur* $W^{1,p}(\Omega)$ *comme dans le Lemme* III.1. *Alors il existe* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tel que* $\mathcal{A}^\omega_R(u) = \varphi$, *i.e.,* u *est une solution faible de* (III.3.1) *par le Lemme* III.1. ■

L'observation suivante est une conséquence de la preuve du Théorème III.4

Corollaire III.2. *Dans la situation de Théorème* III.4, *supposons que*

$$\exists M,\, L \geq 0\, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } h(z,u)u \geq -M|u|^{p-\varepsilon} - L \quad \forall z \in \partial\Omega\, \forall u \in \mathbb{R}, \tag{III.3.6}$$

par exemple, $h(z,u)\cdot u \geq 0$ *pour tout* $z \in \partial\Omega$ *et* $u \in \mathbb{R}$. *Si* $\omega_0 \in \mathbb{R}$ *est comme dans* (III.1.10), *alors* (III.3.1) *admet une solution faible pour tout* $\omega \geq \omega_0$.

Preuve. *En utilisant la même notation que dans la preuve du Théorème* III.4. *La condition* (III.3.6) *implique que*

$$\langle \mathcal{B}(u), u\rangle \geq -M\int_{\partial\Omega}|u|^{p-\varepsilon} - \int_{\partial\Omega} L \geq -M'\|u\|^{p-\varepsilon}_{W^{1,p}(\Omega)} - L' \tag{III.3.7}$$

pour certaines constantes $M', L' \geq 0$ *par le Théorème* I.13. *Donc d'après* (III.1.10) *et* (III.3.7) *on a*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}^\omega_R(u), u\rangle &= \langle \mathcal{A}^\omega(u), u\rangle + \langle \mathcal{B}(u), u\rangle \\ &\geq \nu'\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + (\omega - \omega_0)\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - d - M'\|u\|^{p-\varepsilon}_{W^{1,p}(\Omega)} - L'\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}^\omega_R$ *est coercif pour* $\omega \geq \omega_0$. *Puisque la coercivité était le seul point de la preuve du Théorème* III.4 *pour lequel nous avions besoin que* ω *soit grand, on peut conclure comme précédemment que* (III.3.1) *admet une solution faible si* $\omega \geq \omega_0$. ■

III.4 Régularité de Hölder

Dans cette section, nous présentons les conditions dans lesquelles les solutions aux problèmes de Robin sont Hölder continues jusqu'à la frontière. Notre approche est basée sur l'observation clé simple suivante : si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible du problème de Robin (quasi-linéaire)

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) + a(x,u,\nabla u) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{N} D_j f_j(x) & \text{dans } \Omega, \\ A(z,u,\nabla u)\cdot\nu(z) + h(z,u) = g(z) + \sum_{j=1}^{N} f_j(z)\nu_j(z) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{III.4.1}$$

alors pour chaque $\omega \in \mathbb{R}$ c'est aussi une solution faible du problème de Neumann

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) + a(x,u,\nabla u) + \omega|u|^{p-2}u = f_0 - \sum_{j=1}^{N} D_j f_j + \omega|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ A(z,u,\nabla u)\cdot\nu = g + \sum_{j=1}^{N} f_j\nu_j - h(z,u) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{III.4.2}$$

Ainsi, nous pouvons nous attendre à ce que les résultats concernant les problèmes (non homogènes) de Neumann se traduisent par des résultats concernant les problèmes de Robin. La principale difficulté est bien sûr de vérifier que les conditions du Corollaire III.3 sont remplies.

Si h est borné, alors on peut mettre $\omega = 0$ et appliquer le Corollaire III.3. En effet, cela fonctionne toujours si h croît très lentement car u tend vers l'infini. Cependant, dans les conditions de croissance typiques, par exemple si nous voulons autoriser $h(z,u) = |u|^{p-2}u$ dans l'équation p-Laplace, la situation est plus difficile.

Corollaire III.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné lipschitzien, et soit $\varepsilon > 0$. sous l'Hypothèse III.1, il existe $\alpha \in (0,1)$ et une constante $c \geq 0$ avec les propriétés suivantes. Soient f_0 et f_j des fonctions définies sur Ω avec $1 \leq j \leq N$ et g une fonction définie sur $\partial\Omega$. Si $p \leq N$, on suppose que $f_0 \in L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$, $f_j \in L^{N/(p-1)+\varepsilon}(\Omega)$, et $g \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$. Si $p > N$, on suppose que $f_0 \in L^1(\Omega)$, $f_j \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $j = 1,\dots,N$, et $g \in L^1(\partial\Omega)$. Alors toute solution*

faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *de* (III.1.1) *appartient à* $\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ *avec*

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c\Big(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|f_j\| + \|g\|\Big)^{1/(p-1)} + 1\Big) \tag{III.4.3}$$

où les normes de f_0, f_j, *et* g *doivent être prises dans les espaces susmentionnés.*

Preuve. *Voir [7] Corollaire 3.1.6.* ■

Remarque III.1. *Dans le Corollaire III.3, supposons en outre que* $\psi_2 = \psi_4 = \psi_7 = 0$ *dans l'Hypothèse III.1. L'estimation* (III.4.3) *peut ensuite être affinée pour*

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c\Big(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|f_j\| + \|g\|\Big)^{1/(p-1)}\Big).$$

Hypothèse III.4. *Soit* Ω *un ouvert borné lipschitzien et soit* $p \in (1, N)$. *Soient les fonctions* A *et* a *telles que pour certains* $\omega \in \mathbb{R}$ *le problème* (III.1.7) *admet une solution faible dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *quand* (f_0, f_j, g) *sont dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1, et que ce* ω *soit maintenant fixe.*

Supposons qu'il existe $\beta \in (0, 1]$ *et une constante* $c > 0$ *tels que*

$$\|u - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c(\|f_0 - \tilde{f}_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|f_j - \tilde{f}_j\| + \|g - \tilde{g}\|)^{\beta} \tag{III.4.4}$$

quand u *et* $\tilde{u}$ *sont des solution de* (III.1.7) *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *pour les cotés droit* (f_0, f_j, g) *et* $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_j, \tilde{g})$, *respectivement, où les normes se trouvent dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1 ; alors en particulier les solutions du problème* (III.1.7) *sont uniques.*

Finalement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\alpha \in (0, 1)$ *et* $c \geq 0$ *tels que la solution* u *appartient à* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *quand* $f_0 \in L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$, $f_j \in L^{N/(p-1)+\varepsilon}(\Omega)$ *et* $g \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ *et satisfait l'estimation*

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c\Big((\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|f_j\| + \|g\|)^{\beta} + 1\Big) \tag{III.4.5}$$

pour les normes respectives.

Remarque III.2. *C'est une caractéristique essentielle de l'Hypothèse III.4 que nous ayons le même exposant* β *dans* (III.4.4) *et* (III.4.5). *Un cas particulier de l'instance dans laquelle ces exposants diffèrent sera discuté dans la seconde moitie de cette section. Voir Hypothèse III.5.*

Remarque III.3. *Typiquement, on a $\beta = \frac{1}{p-1}$. Donc si $p < 2$, alors l'opérateur qui transfère le côté droit à la solution correspondante de (III.1.7) est constant par (III.4.4), ce qui est absurde. Par conséquent, nous nous attendons à ce que l'Hypothèse III.4 ne se vérifie que pour $p \geq 2$. Le cas où $p \in (1, 2]$ sera traité séparément à la fin de cette section.*

Lemme III.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné lipschitzien, soit $1 < p < N$, et soit $\theta \in (0, 1)$. On définit r_1, r_2 et r_3 par*

$$r_1 := \frac{pN}{\theta(pN + p - N) + (1-\theta)p^2}, \quad r_2 := \frac{pN}{\theta N(p-1) + (1-\theta)p(p-1)},$$
$$r_3 := \frac{p(N-1)}{\theta N(p-1) + (1-\theta)p(p-1)}.$$

Sous l'Hypothèse III.4, si $f_0 \in L^{r_1+\varepsilon}(\Omega)$, chaque $f_j \in L^{r_2+\varepsilon}(\Omega)$, et $g \in L^{r_3+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$, alors l'unique solution faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de (III.1.7) satisfait

$$u \in L^{\frac{Np}{\theta(N-p)}}(\Omega) \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} \in L^{\frac{(N-1)p}{\theta(N-p)}}(\partial\Omega).$$

Preuve. *Voire [7] Lemme 4.2.4.* ■

Le théorème suivant est le principal résultat de régularité pour les problèmes de Robin.

Théorème III.5. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné lipschitzien et $1 < p < N$. Soit h une fonction mesurable, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions ψ_8 et ψ_9 de $L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ tels que*

$$|h(z, u)| \leq \psi_8(z)|u|^{p-1} + \psi_9(z) \tag{III.4.6}$$

pour tout $z \in \partial\Omega$ et tout $u \in \mathbb{R}$. Sous l'Hypothèse III.4, il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que toute solution faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ du problème de Robin (III.4.1) appartient à $C^{0,\alpha}(\Omega)$ quand $f_0 \in L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$, chaque $f_j \in L^{N/(p-1)+\varepsilon}(\Omega)$ et $g \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certain $\varepsilon > 0$.

Preuve. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution faible de (III.4.1). Pour $\theta \in [0, 1]$, on définit*

$$l_\theta := \frac{pN}{\theta(pN+p-N)+(1-\theta)p^2} = \frac{pN}{p^2+\theta(N-p)(p-1)} \in (1, \infty),$$
$$q_\theta := \frac{p(N-1)}{\theta N(p-1)+(1-\theta)p(p-1)} = \frac{p(N-1)}{p(p-1)+\theta(N-p)(p-1)} \in (1, \infty).$$

On va montrer que $|u|^{p-1} \in L^p(\Omega)$ *et* $h(\cdot, u(\cdot)) \in L^q(\partial\Omega)$ *pour certains* $l > l_0 = \frac{N}{p}$ *et* $q > q_0 = \frac{N-1}{p-1}$. *En d'autres termes, on montre que l'ensemble*

$$\Theta := \left\{\theta \in [0,1] : \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } |u|^{p-1} \in L^{l_\theta+\varepsilon}(\Omega) \text{ et } h(\cdot, u(\cdot)) \in L^{q_\theta+\varepsilon}(\partial\Omega)\right\}$$

contient 0.

Comme l_θ *et* q_θ *sont des fonctions décroissantes par rapport à* θ, *pour* $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$ *on a que* $\theta_1 \in \Theta$ *implique* $\theta_2 \in \Theta$. *De plus, comme* l_θ *et* q_θ *dépend continument de* θ, Θ *est un sous ensemble relativement ouvert de* $[0,1]$. *Donc soit* $\Theta = \emptyset$, $\Theta = (a,1]$ *pour certains* $a \in [0,1)$, *ou bien* $\Theta = [0,1]$. *Il suffit donc d'exclure les deux premiers possibilités pour conclure que* $0 \in \Theta$.

D'après les Théorème I.9 et I.10 on trouve que $u \in L^{pN/(N-p)}(\Omega)$. *Comme*

$$\frac{pN}{(N-p)(p-1)} = \frac{pN}{pN+p-N-p^2} > \frac{pN}{pN+p-N} = l_1,$$

cela implique

$$|u|^{p-1} \in L^{\frac{pN}{(N-p)(p-1)}}(\Omega) \hookrightarrow L^{l_1+\varepsilon}(\Omega)$$

pour certains $\varepsilon > 0$. *De plus, le Théorème I.13 affirme que* $u|_{\partial\Omega}$ *appartient à* $L^{p(N-1)/(N-p)}(\partial\Omega)$. *Par conséquent, la trace de* $|u|^{p-1}$ *appartient à* $L^{\frac{p(N-1)}{(p-1)(N-p)}}(\partial\Omega)$, *où on note que*

$$\frac{p(N-1)}{(p-1)(N-p)} \geq \frac{p}{p-1} > 1.$$

Alors d'après l'inégalité de Hölder généralisée I.2 on trouve que $\psi_8|u|^{p-1}$ *appartient à* $L^{r_1}(\partial\Omega)$ *pour certains* $r_1 \in (1,\infty)$ *défini par*

$$\frac{1}{r_1} = \frac{(p-1)(N-p)}{p(N-1)} + \frac{p-1-\varepsilon}{N-1} < \frac{(p-1)(N-p)+p(p-1)}{p(N-1)} = \frac{N(p-1)}{p(N-1)}$$

pour certains $\varepsilon > 0$. *Donc* $r_1 > q_1$. *Comme on a aussi* $\frac{N-1}{p-1} + \varepsilon > q_1$, *on déduit de* (III.4.6) *que* $h(\cdot, u(\cdot)) \in L^{q_1+\varepsilon}(\partial\Omega)$ *pour certains* $\varepsilon > 0$. *On a vérifié que* $1 \in \Theta$, *i.e.,* $\Theta \neq \emptyset$.

Supposons que $\Theta = (a,1]$ *pour certains* $a \in [0,1)$. *Soit* $\theta \in (a,1]$ *arbitraire, soit* ω *comme dans l'Hypothèse III.4. Alors le coté droit de* (III.4.2) *satisfait les hypothèses du Lemme III.3 pour ce* θ. *En effet,* f_0, f_j *et* g *satisfont à ces hypothèses même pour* $\theta = 0$, *donc pour tout* $\theta \in [0,1]$, *et pour les termes impliquant* u *c'est la définition de* θ *étant un élément de* Θ.

Donc on obtient du Lemme III.3 que

$$u \in L^{\frac{pN}{\theta(N-p)}}(\Omega) \text{ et } u|_{\partial\Omega} \in L^{\frac{(N-1)p}{\theta(N-p)}}(\partial\Omega)$$

et donc

$$|u|^{p-1} \in L^{\frac{pN}{\theta(N-p)(p-1)}}(\Omega)$$

pour tout $\theta > a$. Comme

$$\frac{pN}{a(N-p)(p-1)} > \frac{pN}{p^2 + a(N-p)(p-1)} = l_a,$$

par la continuité de ces expressions il existe $\theta_0 > a$, i.e., $\theta_0 \in \Theta$, tel que

$$\frac{pN}{\theta_0(N-p)(p-1)} > l_a.$$

Par conséquent $|u|^{p-1} \in L^{l_a+\varepsilon}(\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$. De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée I.2 de la même manière que précédemment, on obtient que $\psi_8|u|^{p-1}$ appartient à $L^{r_\theta}(\partial\Omega)$ avec $r_\theta > 1$ donné par

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_\theta} &= \frac{\theta(N-p)(p-1)}{p(N-1)} + \frac{p-1-\varepsilon}{N-1} \\ &= \frac{p(p-1-\varepsilon) + \theta(N-p)(p-1)}{p(N-1)} = \frac{1}{q_\theta} - \frac{\varepsilon}{N-1}\end{aligned}$$

pour certains $\varepsilon > 0$. En exploitant la continuité de ces expressions, on voit qu'il existe $\theta_1 > a$, i.e., $\theta_1 \in \Theta$, tel que $\frac{1}{r_{\theta_1}} < \frac{1}{q_a} - \varepsilon$ pour certains $\varepsilon > 0$. Par conséquent $r_{\theta_1} = q_a + \varepsilon$ pour certains $\varepsilon > 0$. De (III.4.6) on obtient donc que $h(\cdot, u(\cdot)) \in L^{q_a+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$. Par conséquent $a \in \Theta$, contredisant l'hypothèse $\Theta = (a, 1]$.

Puisque ni $\Theta = \emptyset$ ni $\Theta = (a, 1]$, les commentaires introductifs sur Θ impliquent que $\Theta = [0, 1]$, i.e., $0 \in \Theta$. Cela signifie que u appartient à $L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$ et que $h(\cdot, u(\cdot))$ appartient à $L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$. Donc d'après l'Hypothèse III.4, le coté droit de (III.4.2) est suffisamment régulier pour garantir que nous pouvons appliquer le Corollaire III.3 afin de conclure que u appartient à $C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour certains $\alpha \in (0, 1)$. ■

Remarque III.4. *L'énoncé du théorème est limité à $p < N$ car le cas $p \geq N$ est trivial. En effet, si $p > N$, alors la continuité de Hölder des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ découle du théorème d'injection de Sobolev. Dans le cas de la frontière $p = N$ on a $u \in L^r(\Omega)$ et $u|_{\partial\Omega} \in L^r(\partial\Omega)$ pour tout $r < \infty$, donc $h(\cdot, u) \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$ d'après (III.4.6).*

Par conséquent on peut appliquer directement le Corollaire III.3 à (III.4.2) *pour obtenir la continuité de Hölder des solutions. En effet, pour $p \geq N$ nous n'avons donc besoin d'aucune information sur l'existence ou la dépendance contenue pour le problème de Neumann.*

Le Théorème III.5 couvre de nombreux exemples intéressants. Cependant, l'équation p-Laplace ne satisfait pas l'Hypothèse III.4 si $p \in (1, 2)$, voir Remarque III.3. Le but de la suite de cette section est de surmonter ce problème.

Hypothèse III.5. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien et soit $p \in (1, N)$. Soient les fonctions A et a telles que pour certains $\omega \in \mathbb{R}$ le problème* (III.1.7) *admet une solution faible dans $W^{1,p}(\Omega)$ quand (f_0, f_j, g) sont dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1.*
De plus, supposons que

$$\|u - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c(\|f_0 - \tilde{f}_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|f_j - \tilde{f}_j\| + \|g - \tilde{g}\|) \tag{III.4.7}$$

quand u et $\tilde{u}$ sont des solution de (III.1.7) *dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour les cotés droit (f_0, f_j, g) et $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_j, \tilde{g})$, respectivement, où les normes se trouvent dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1 ; alors en particulier les solutions du problème* (III.1.7) *sont uniques. Ici, $c > 0$ peut dépendre des bornes supérieures des normes de (f_0, f_j, g) et $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_j, \tilde{g})$ dans ces espaces. Finalement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha \in (0, 1)$ et $c \geq 0$ tels que la solution u appartient à $C^{0,\alpha}(\Omega)$ quand $f_0 \in L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$, $f_j \in L^{N/(p-1)+\varepsilon}(\Omega)$ et $g \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ et satisfait l'estimation*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c\Big((\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|f_j\| + \|g\|)^{1/(p-1)} + 1\Big) \tag{III.4.8}$$

pour les normes respectives.

Le lemme suivant est prouvé comme le Lemme III.3.

Lemme III.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné lipschitzien, soit $1 < p < N$, et soit $\theta \in (0, 1)$. et on définit $\eta \in (0, 1)$ par*

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{(p-1)(1-\theta)}{\theta}. \tag{III.4.9}$$

On définit r_1, r_2 *et* r_3 *par*

$$r_1 := \frac{pN}{\theta(pN+p-N)+(1-\theta)p^2}, \quad r_2 := \frac{pN}{\theta N(p-1)+(1-\theta)p(p-1)},$$
$$r_3 := \frac{p(N-1)}{\theta N(p-1)+(1-\theta)p(p-1)}.$$

Sous l'Hypothèse III.5, si $f_0 \in L^{r_1+\varepsilon}(\Omega)$, *chaque* $f_j \in L^{r_2+\varepsilon}(\Omega)$, *et* $g \in L^{r_3+\varepsilon}(\partial\Omega)$ *pour certains* $\varepsilon > 0$, *alors l'unique solution faible* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *de (III.1.7) satisfait*

$$u \in L^{\frac{Np}{\eta(N-p)}}(\Omega) \quad \textit{et} \quad u|_{\partial\Omega} \in L^{\frac{(N-1)p}{\eta(N-p)}}(\partial\Omega).$$

Nous avons besoin d'un lemme supplémentaire, qui est essentiellement une estimation technique.

Lemme III.5. *Soit* $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, *et soit* $p \in (1, N)$. *Pour* $\theta \in (0,1)$ *on définit* $\eta_\theta \in (0,1)$ *par*

$$\frac{1-\eta_\theta}{\eta_\theta} = (p-1)\frac{1-\theta}{\theta}. \tag{III.4.10}$$

Alors

$$(2-p)(N-p) < p(1+\sqrt{p-1})^2 \tag{III.4.11}$$

si et seulement si

$$\eta_\theta - \theta < \frac{p}{N-p} \text{ pour tout } \theta \in (0,1). \tag{III.4.12}$$

Preuve. *Voire [7] Lemme 4.2.13.* ■

Théorème III.6. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné lipschitzien et* $1 < p < N$. *Supposons que*

$$(2-p)(N-p) < (1+\sqrt{p-1})^2. \tag{III.4.13}$$

Soit h *une fonction mesurable, supposons qu'il existe* $\varepsilon > 0$, *une constante* $\mu \geq 0$ *et une fonction* ψ_9 *de* $L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ *tels que*

$$|h(z,u)| \leq \mu|u|^{p-1} + \psi_9(z) \tag{III.4.14}$$

pour tout $z \in \partial\Omega$ *et tout* $u \in \mathbb{R}$. *Sous l'Hypothèse III.5, il existe* $\alpha \in (0,1)$ *tel que toute solution faible* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *du problème de Robin (III.4.1) appartient à* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *quand*

$f_0 \in L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$, chaque $f_j \in L^{N/(p-1)+\varepsilon}(\Omega)$ et $g \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$.

Preuve. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution faible de (III.4.1). On procède exactement comme dans la preuve du Théorème III.5 et on utilisent la même notation. En particulier, l'ensemble Θ est défini de la même manière que précédemment. Il n'y a qu'une partie de la preuve du Théorème III.5 qui ne soit pas reprise textuellement. En effet, on doit montrer que Θ n'est pas de la forme $(a, 1]$ avec $a \in [0, 1)$.*

Pour obtenir une contradiction, supposons que $\Theta = (a, 1]$ avec $a \in [0, 1)$. Soit $\theta \in (a, 1]$ arbitraire, et soit ω comme dans l'Hypothèse III.4. Alors le coté droit de (III.4.2) satisfait les hypothèses du Lemme III.4 pour ce θ. Donc

$$u \in L^{\frac{pN}{\eta_\theta(N-p)}}(\Omega) \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} \in L^{\frac{(N-1)p}{\eta_\theta(N-p)}}(\partial\Omega),$$

où η_θ est donné par (III.4.9), et donc

$$|u|^{p-1} \in L^{\frac{pN}{\eta_\theta(N-p)(p-1)}}(\Omega) \quad \text{et} \quad |u|^{p-1}\big|_{\partial\Omega} \in L^{\frac{(N-1)p}{\eta_\theta(N-p)(p-1)}}(\partial\Omega).$$

Par le Lemme III.5

$$\eta_a - a < \frac{p}{N-p},$$

par conséquent

$$\eta_a(N-p)(p-1) < p(p-1) + a(N-p)(p-1) < p^2 + a(N-p)(p-1)$$

et donc

$$\frac{p(N-1)}{\eta_a(N-p)(p-1)} > \frac{p(N-1)}{p(p-1)+a(N-p)(p-1)} = q_a$$

et

$$\frac{pN}{\eta_a(N-p)(p-1)} > \frac{pN}{p^2+a(N-p)(p-1)} = l_a.$$

Par conséquent, comme η_θ dépend continument de θ, il existe $\theta > a$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\frac{p(N-1)}{\eta_\theta(N-p)(p-1)} \geq q_a + \varepsilon$$

et

$$\frac{pN}{\eta_\theta(N-p)(p-1)} \geq l_a + \varepsilon.$$

Donc $|u|^{p-1} \in L^{l_a+\varepsilon}(\Omega)$, et d'après (III.4.14), $h(\cdot, u) \in L^{q_a+\varepsilon}(\Omega)$. On a montré que $a \in \Theta$,

contredisant l'hypothèse que $\Theta = (a, 1]$.

Donc Θ *n'est pas de la forme* $(a, 1]$ *avec* $a[0, 1)$. *Comme indiqué dans les remarques introductives, on peut maintenant procéder comme dans la preuve de Théorème III.5 pour terminer la preuve.* ■

Remarque III.5. *La condition* (III.4.13) *est assez étrange et peut probablement être améliorée. Néanmoins, il apparait de manière naturelle car, par le Lemme III.5, il équivaut au fait que cet Méthode de généralisation fonctionne si* h *croît comme* (III.4.14). *Il est remarquable que* (III.4.13) *n'implique pas*

$$p \geq \frac{2N}{N+2}, \tag{III.4.15}$$

qui est une hypothèse caractéristique pour les équations quasi-linaires. En effet, pour $N = 5$ *la condition* (III.4.13) *équivaut à* $p > \frac{5}{4}$.

III.5 Application

Dans cette section on appliquons les théorème d'existence et de régularité pour les problèmes de robin.

Le critère suivant sera utile pour vérifier que les opérateurs différentiels dans nos exemples satisfont (III.1.6).

Lemme III.6. *Soit* w *une fonction de* $[0, \infty)$ *dans* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$(l - \tilde{l})\left(w(|l|)l^T - w(|\tilde{l}|)\tilde{l}^T\right) > 0 \quad \textit{pour tout } \ l \neq \tilde{l} \ \textit{ dans } \ \mathbb{R}^N \tag{III.5.1}$$

si et seulement si $w(x)x$ *est positive et strictement croissante sur* $(0, \infty)$. *Donc en particulier* (III.5.1) *est valable si w est positive et croissante.*

Preuve. *Voir [7] Lemme 3.2.8 p.*60. ■

Exemple III.1. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné lipschitzien,* $N \geq 3$, *et* $\omega \geq 0$. *Soit* h *une fonction mesurable et satisfait*

$$|h(z, u)| \leq \psi_8(z)|u| + \psi_9(z)$$

avec les fonctions ψ_8 et ψ_9 sont de $L^{q-1}(\partial\Omega)$ pour certains $q > N$, par exemple $h(z,u) = \beta u$ avec $\beta \in L^\infty(\Omega)$. Soit $f_0 \in L^{q/2}(\Omega)$, $f_j \in L^q(\Omega)$, et $g \in L^{q-1}(\partial\Omega)$ pour certains $q > N$. Le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(1+\arctan\left(|\nabla u|^2\right)\right)\nabla u\right) + \omega u^2 = f_0 - \sum_{j=1}^{N} f_j & \text{dans } \Omega, \\ \left(1+\arctan\left(|\nabla u|^2\right)\right)\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(z,u) = g + \sum_{j=1}^{N} f_j \nu_j & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{III.5.2}$$

admet une solution faible $u \in W^{1,2}(\Omega)$ pour chaque côté droit de (III.5.2), si h est continue par rapport à la deuxième variable et si ω assez grand. Si en plus h satisfait (III.3.6), alors chaque $\omega > 0$ est «assez grand». Enfin, si h est croissante par rapport à la deuxième variable, alors la solution est unique pour tout $\omega > 0$.

Preuve. *Nous vérifions l'hypothèse III.2. pour $p = 2$ avec*

$$A(x,u,l) = \left(1+\arctan\left(|l|^2\right)\right) l^T \text{ et } a(x,u,l) = 0.$$

La seule propriété non évidente est la condition de monotonie (III.1.6). Mais pour

$$w(x) := 1 + \arctan\left(x^2\right)$$

la fonction w est positive et strictement croissante sur $(0,\infty)$. Donc (III.1.6) est une conséquence du lemme III.6, donc l'Hypothèse III.2 est satisfaite. On a $\frac{q}{2} \geq \frac{pN}{pN+p-N}$ alors $f_0 \in L^{pN/(pN+p-N)}(\Omega)$, $q \geq \frac{p}{p-1}$ alors $f_j \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, et $q-1 \geq \frac{p(N-1)}{pN-N}$ alors $g \in L^{\frac{p(N-1)}{(pN-N)}}(\partial\Omega)$. Donc (f_0, f_j, g) sont dans les espaces indiqués dans le lemme III.1. On a ψ_8 et ψ_9 sont de $L^{q-1}(\partial\Omega)$ et on a $q-1 \geq \frac{N-1}{p-1} \geq \frac{(N-1)p}{(p-1)N}$ donc $\psi_8 \in L^{\frac{N-1}{p-1}}(\partial\Omega)$ et $\psi_9 \in L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}}(\partial\Omega)$. Si h est continue par rapport à la deuxième variable et si ω assez grand, Alors d'après le théorème III.4, il existe ω_0 tel que pour tout $\omega > \omega_0$ l'équation (III.5.2) admet une solution faible dans $W^{1,2}(\Omega)$ pour chaque côté droit dans les espaces indiqués dans le lemme III.1. Si en plus h satisfait (III.3.6), alors chaque $\omega > 0$ est «assez grand» par le Corollaire III.2. Enfin, si h est croissante par rapport à la deuxième variable, alors pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}_R^\omega$ définis comme dans la démonstration du théorème III.4, l'opérateur $\mathcal{B}$ est monotone. donc l'opérateur $\mathcal{A}_R^\omega$ est strictement monotone pour $\omega > 0$ au sens de la définition II.1. Comme dans le Corollaire III.1, nous pouvons donc conclure que la solution est unique. En

effet, supposons qu'il existe $\omega > 0$ de telle sorte que nous pouvons trouver deux solutions faibles différentes u et v de III.5.2 alors $\mathcal{A}_R^\omega(u) = \mathcal{A}_R^\omega(v)$ par le Lemme III.1. Comme $\mathcal{A}_R^\omega$ est strictement monotone, cela implique que

$$0 = \langle \mathcal{A}_R^\omega(u) - \mathcal{A}_R^\omega(v), u - v \rangle > 0,$$

une contradiction. ■

Exemple III.2 (Équation de p-Laplace, $p \geq 2$)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné lipschitzien, soit $2 \leq p < N$, et soit $\omega \geq 0$. Soit h une fonction mesurable et satisfait*

$$|h(z,u)| \leq \psi_8 |u|^{p-1} + \psi_9$$

avec les fonctions ψ_8 et ψ_9 sont de $L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certains $\varepsilon > 0$, par exemple $h(z,u) = \beta|u|^{p-1}$ avec $\beta \in L^\infty(\Omega)$. soient $f_0 \in L^{N/p+\varepsilon}(\Omega)$, $f_j \in L^{N/(p-1)+\varepsilon}(\Omega)$, et $g \in L^{(N-1)/(p-1)+\varepsilon}(\partial\Omega)$ pour certain $\varepsilon > 0$, et supposons que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \omega|u|^{p-2}u = f_0 - \sum_{j=1}^N f_j, & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + h(z,u) = g + \sum_{j=1}^N f_j \nu_j, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{III.5.3}$$

Alors u est α-höldérienne. De plus, si h est continue par rapport à la deuxième variable et si ω assez grand, alors pour chaque côté droit de (III.5.3), il existe une solution faible. Si en plus h satisfait (III.3.6), alors chaque $\omega > 0$ est «assez grand». Enfin, si h est croissante par rapport à la deuxième variable, alors la solution est unique.

Preuve. *Nous vérifions l'Hypothèse III.4 pour $\beta = \frac{1}{p-1}$ avec*

$$A(x,u,l) = |l|^{l-2}l^T \text{ et } a(x,u,l) = 0.$$

Montrons l'existence de solutions au problème de Neumann (III.1.7), nous vérifions l'Hypothèse III.2. La seule propriété non évidente est la condition de monotonie (III.1.6). Mais pour

$$w(x) = |x|^{p-2}$$

la fonction w est positive et strictement croissante sur $(0,\infty)$. Donc (III.1.6) est une consé-

quence du Lemme III.6, donc l'Hypothèse III.2 est satisfaite. On a pour $2 \leq p \leq N$, $\frac{N}{p} + \varepsilon \geq \frac{pN}{pN+p-N}$ *alors* $f_0 \in L^{pN/(pN+p-N)}(\Omega)$, $\frac{N}{p-1} + \varepsilon \geq \frac{p}{p-1}$ *alors* $f_j \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, *et* $\frac{N-1}{p-1} + \varepsilon \geq \frac{p(N-1)}{pN-N}$ *alors* $g \in L^{p(N-1)/(pN-N)}(\partial\Omega)$. *Donc* (f_0, f_j, g) *sont dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1. Alors d'après le Théorème III.2, il existe* $\omega_0 \geq 0$ *tel que pour tout* $\omega > \omega_0$ *l'équation* (III.1.7) *admet une solution faible dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *Montrons maintenant la dépendance continue de Hölder en norme de* $W^{1,p}(\Omega)$ *de ces solutions. vérifions d'abords l'Hypothèse III.3, on a les bornes de croissance de l'Hypothèse III.3 sont triviales pour cet exemple, et la condition de monotonie est l'énoncé du Lemme I.1. Alors d'après le Théorème III.3, il existe une constante* $c \geq 0$ *telle que* (III.4.4) *soit vérifié. La régularité de Hölder, y compris la norme liée découle du Corollaire III.3 puisque la norme du solution dans* $L^p(\Omega)$ *se produisant en* (III.4.3), *et d'après le Théorème III.2 elle peut être estimée en utilisant* (III.1.8). *i,e., d'après le Corollaire III.3 la solution faible* u *appartient à* $\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ *avec*

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)} &\leq c\Big(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N}\|f_j\| + \|g\|\Big)^{1/(p-1)} + 1\Big)\\ &\leq c\Big(\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N}\|f_j\| + \|g\|\Big)^{1/(p-1)} + 1\Big)\end{aligned}$$

et d'après le Théorème III.2

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)} &\leq c\Big(c'\Big(\Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N}\|f_j\| + \|g\|\Big)^{\frac{1}{p-1}} + 1\Big) + \Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N}\|f_j\| + \|g\|\Big)^{\frac{1}{p-1}} + 1\Big)\\ &\leq C'\Big(\Big(\|f_0\| + \sum_{j=1}^{N}\|f_j\| + \|g\|\Big)^{\frac{1}{p-1}} + 1\Big).\end{aligned}$$

Donc, l'Hypothèse III.4 est satisfaite. Maintenant par le Théorème III.5 on obtient la régularité de Hölder pour ce problème.

Les deux revendications suivantes sont les déclarations du Théorème III.4 et du Corollaire III.2. En effet, d'après ce qui précède nous avons vu que l'Hypothèse III.2 est vérifié et que (f_0, f_j, g) *sont dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1. On a* $\psi_8 \in L^{\frac{N-1}{p-1}+\varepsilon}(\partial\Omega)$ *et* $\psi_9 \in L^{\frac{N-1}{p-1}+\varepsilon}(\partial\Omega)$, *i.e.,* $\psi_9 \in L^{\frac{(N-1)p}{(p-1)N}+\varepsilon}(\partial\Omega)$ *pour certains* $\varepsilon > 0$, *car* $\frac{N-1}{p-1} \geq \frac{(N-1)p}{(p-1)N}$. *Si* h *est continue par rapport à la deuxième variable et si* ω *assez grand, Alors d'après le Théorème III.4, il existe* ω_0 *tel que pour tout* $\omega > \omega_0$ *l'équation* (III.5.3) *admet une solution faible*

dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour chaque côté droit dans les espaces indiqués dans le Lemme III.1. Si en plus h satisfait (III.3.6)*, alors chaque $\omega > 0$ est «assez grand» par le Corollaire III.2. Enfin, si h est croissante par rapport à la deuxième variable, alors pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}_R^\omega$ définis comme dans la démonstration du Théorème III.4, l'opérateur $\mathcal{B}$ est monotone. donc l'opérateur $\mathcal{A}_R^\omega$ est strictement monotone pour $\omega > 0$ au sens de la définition II.1. Comme dans le Corollaire III.1, nous pouvons donc conclure que la solution est unique.* ■

CONCLUSION GÉNÉRALE

À travers ce modeste travail, nous avons présenté une branche de problèmes elliptiques, où nous avons étudié l'existence et la régularité de solution pour les problèmes elliptiques non linéaire aux limites de Robin. La connaissance des méthodes de résolution de ce type de problèmes, aussi divers que variés, nous permettra sûrement de répondre aux questions soulevés par ce travail. nous utilisons le cadre théorique pour prouvons l'existence d'une solution. Plusieurs problèmes connexes sont à explorer. Nous pensons essentiellement aux conditions de robin ou conditions aux limites de convection et leur application dans les problèmes de la transmission de chaleur.

En fin, notons que dans la littérature, très peu de problèmes elliptiques ont été traités. Il semble que cette difficulté soit liée a la compréhension et à la définition d'espaces fonctionnels adapté. Par conséquent, des questions intéressantes ouvert des pistes de recherche dans ce volet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS *Analyse fonctionnelle théorie et applications* , Masson Paris New York Barcelone Milane Mexico Sao Paulo (1987).

[2] L. BOCCARDO, G. CROCE , *Elliptic Partial Differential Equations : Existence and Regularity of Distributional Solutions* , De Gruyter , Berlin , (2014).

[3] E. DIBENEDETTO, Degenerate parabolic equations, Universitext, Springer-Verlag, New York, (1993).

[4] H. L. DRET , *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires* , : Springer, Berlin-New York , (2013).

[5] L. C. EVANS AND R. F. GARIEPY, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, (1992).

[6] T. GALLOUËT ET R. HERBIN *Mesure, Integration, Probabilites* , DEA. Marseille , (2010).

[7] R. NITTKA, Elliptic and Parabolic Problems with Robin Boundary Conditions on Lipschitz Domains, (2010).

[8] R. E. SHOWALTER, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, **49**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.