RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE DE MASTER

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

MELLATI Meriem et TAIBAOUI Yamena

Thème

Déterminant de Hankel

Devant le jury composé de :

Mr. RAHMANI Mourad	Prof	U.S.T.H.B	Président
Mme. GUETTAI Ghania	M.C.B	U.Y.F.M	Encadreur
Mr. LAISSAOUI Diffalah	M.C.A	U.Y.F.M	Examinateur
Mr. SEBAOUI Madjid	M.C.B	U.Y.F.M	Examinateur

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022

Remerciements

Avant tout je tien à remercier ALLAH, qui ma donné le courage et la patience pour terminer ce modeste travail.

En premier lieu je tiens à remercier mon encadreur Madame G. GUETTAI, pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité tout au long de notre travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr. RAHMANI, Professeur à l'USTHB Mr. LAISSAOUI, Maitre de Conférence à l'université Yahia Farès de Médéa et Mr. SEIBAOUI, Maitre de Conférence à l'université Yahia Farès de Médéa pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de faire partie de jury.

Enfin, je tiens également à remercier vivement ma famille, mes amis, et tous ce qui ont aidé dans la réalisation de ce mémoire .

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes très chères parents : Ma Mère "Razika" et Mon Père "Mohamed" qui m'ont soutenu durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, qui ont sacrifié toute leur vie afin de me voir devenir ce que je suis.

Á Je dédie ce travail à mes très chers frères et ma chère sœur :

"Oussama, Hicham, Ishak, Bessma".

Á tous la famille "MELLATI".

Á mon binôme "Yamena", mon intime amie et ma sœur avec qui j'ai partagé de beaux moments, que dieu te préserve.

Á tout mes chères amies

Ainsi que toute la promotion R.O. 2022.

Á tous ceux qui, même un mot, m'ont donné la force de continuer. . . .

★ ★ ★ **Meriem** ★ ★ ★

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mon très chère père"Boukhatem" qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privation pour m'aider à avancer dans la vie.puisse dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; merci pour les valeurs noble, l'éducation et le soutien permanent venu de vous.

A ma très mère"charabia" qui a ouvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

Mes très chère frères et ma chére sœur : "Mohamed, Ahmad aziz, Samira".

Á tous la famille "Taibaoui".

Mon binôme, et ma sœur, et mon intime "Mariem".

Á tout mes chères amies.

Ainsi que toute la promotion R.O. 2022.

Á tous ceux qui, même un mot, m'ont donné la force de continuer. . . .

★ ★ ★ **Yamena** ★ ★ ★

Table des matières

Remerciements i

Dédicace ii

Dédicace iii

Résumé vi

Abstract vii

Notation viii

Introduction 1

1 Notions de base 2
- 1.1 Les factorielles montantes et descendantes . . . 2
  - 1.1.1 Factorielle montante . . . 2
  - 1.1.2 Factorielle descendante . . . 2
- 1.2 Les coefficients binomiaux . . . 3
- 1.3 Permutation, cycle, Partition . . . 3
  - 1.3.1 Permutation . . . 3
  - 1.3.2 Cycle . . . 4
  - 1.3.3 Partition . . . 4
- 1.4 La fonction génératrice et quelques opérations sur les séries entières . . . 5
  - 1.4.1 Les fonctions génératrices . . . 5
  - 1.4.2 Quelques opérations sur les séries formelles . . . 5
- 1.5 Les nombres de Stirling . . . 6
  - 1.5.1 Les nombres de Stirling de première espèce . . . 6
  - 1.5.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce . . . 7
  - 1.5.3 Les nombres r-Stirling de deuxième espèce . . . 8
- 1.6 Les nombres et polynômes de Bell . . . 10
  - 1.6.1 Nombres de Bell . . . 10
  - 1.6.2 Polynômes de Bell . . . 11
- 1.7 Les nombres et polynômes de dérangement . . . 11
  - 1.7.1 Les nombres de dérangement . . . 11
  - 1.7.2 Les polynômes de dérangement . . . 12

2 Déterminants de Hankel **13**
2.1 Matrice de Hankel 13
2.2 Déterminant de Hankel 13
2.3 Fraction continue 24
2.4 Méthode de Sylvester pour les polynômes de dérangement 24

3 Transformations de Hankel **29**
3.1 Opérateurs de convolution 29
3.2 Transformation de Stirling généralisée 30
3.2.1 Les identités combinatoires 31

Conclusion **34**

Bibliographie **35**

Liste des tableaux

1.1 Nombres de triangle de Pascal 4
1.2 Nombres de Stirling de première espèce 7
1.3 Nombres de Stirling de deuxième espèce 8
1.4 Nombres de 2-Stirling de deuxième espèce 10
1.5 Nombres de Bell 11
1.6 Nombres de dérangement 12

Résumé

Dans ce travail, a partir de divers articles, nous avons étudié et calculé de manière plus détaillée des matrices de Hankel et donné une méthode pour évaluer leur déterminant lorsque certaines conditions sur la fonction génératrice exponentielle ou ordinaire, associée à la suite sont données. A l'aide de la formule de Sylvester, on a calculé le déterminant de Hankel pour les polynômes de dérangement. A la fin de ce mémoire, nous avons montré que le déterminant de Hankel est invariant par la transformation binomiale et l'inverse pour la transformation de Stirling généralisée.

Mots-clés : Les nombres de Stirling, les polynômes de dérangement, les polynômes de Bell, la fonction génératrice, la forme explicite, la relation de récurrence, matrice de Hankel, déterminant de Hankel.

Abstract

In this work, from various articles, we have studied and calculated in more detail Hankel matrices and given a method to evaluate their determinant when certain conditions on the exponential or ordinary generating function, associated with the sequence are given. Using Sylvester's formula, the Hankel determinant for the disturbance polynomials was calculated. At the end of this thesis, we showed that the Hankel determinant is invariant by the binomial transformation and the reverse for the generalized Stirling transformation.

Keywords : Stirling numbers, derangement polynomials, Bell polynomials, generating function, explicit form, recurrence relation, Hankel matrix, Hankel determinants.

Notations

$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des nombres entiers.
$[\mathrm{n}]$	L'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
$(x)^n$	La factorielle montante.
$(x)_n$	La factorielle descendante .
$\binom{n}{k}$	Le coefficient binomial.
$s(n,k)$	Les nombres de Stirling de première espèce signés.
$\mid s(n,k) \mid$	Les nombres de Stirling de première espèce non signés.
$\left\{ {n \atop k} \right\}$	Les nombres de Stirling de deuxième espèce.
$\left\{ {n \atop k} \right\}_r$	Les nombres r-Stirling de deuxième espèce.
D_n	Les nombres de dérangement.
$D_n(x)$	Les polynômes de dérangement.
B_n	Les nombres de Bell.
$B_n(x)$	Les polynômes de Bell.
H_n	La Matrice de Hankel.
$\mathcal{H}_n$	Le déterminant de Hankel.
T^a	L'opérateur de convolution.
d_k	Des éléments appartient à un anneu A unitaire.
∂_x	L'opérateur de dérivation par rapport à la variable x.

Introduction

Introduction

Au cours de ce travail, nous présentons le déterminant de Hankel $\mathcal{H}_n$ associée à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, de la forme :

$$\mathcal{H}_n = \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{2n} \end{pmatrix},$$

où $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à A (anneau unitaire, commutatif et intègre).

Nous étudions de manière plus détaillée des matrices de Hankel et donnons une méthode pour évaluer leur déterminant lorsque certaines conditions sur la fonction génératrice exponentielle (ou ordinaire), associée à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sont données.
Plusieurs cas particuliers bien connus sont ainsi déduits dans ce contexte à savoir : polynômes de Bell, polynômes de dérangement, ...)

Sur la base du déterminant de Hankel nous avons pu savoir si la fonction génératrice $\sum \alpha_n z^n$ décrit ou non une fonction rationnelle, il ya lieu de préciser que ces déterminants sont invariants par la transformation binomiale et inversement pour la transformation de Stirling généralisée [14].

Dans le premier chapitre, on présente quelques rappels théoriques qui sont des notions de base de ce mémoire telles que : le coefficient binomial, les factorielles montantes et descendantes, les fonctions génératrices, la forme explicite et la relation de récurrence. Les nombres et les polynômes remarquables ont aussi eu leur part dans ce chapitre (de Stirling, r-Stirling, dérangement et nombres de Bell).

Ensuite dans le deuxième chapitre, on calcul les déterminants de Hankel en traitant différents exemples. Aussi on s'est basé sur la méthode de Sylvester pour le calcul du déterminant de Hankel pour les polynômes de dérangement.

Dans le dernier chapitre, on donne la transformation binomiale et la transformation de Stirling et leurs déterminants de Hankel.

1

Notions de base

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments de base qui seront utiles pour la suite, en rappelant les factorielles montantes et descendantes, la fonction génératrice, la forme explicite, la relation de récurrence, les suites classiques (nombres de Stirling, r-Stirling, nombres et polynômes de dérangement, Bell,...) et leurs propriétés combinatoires. Pour des notions plus précises et détaillées le lecteur pourra consulter [1, 3, 4, 7, 8, 13, 15, 17].

1.1 Les factorielles montantes et descendantes

1.1.1 Factorielle montante

Définition 1.1.1 *Soit x un nombre réel ou complexe et n un entier positif. On définit la factorielle montante d'ordre n, notée $(x)^n$, par :*

$$(x)^n = \begin{cases} 1 \quad si & n = 0 \\ x(x+1)\cdots(x+n-1) \quad si & n \geq 1 \end{cases}$$

et on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (1)^n &= n!. \\ (x)^{i+j} &= (x)^i(x+i)^j. \\ (x)^n &= (-1)^n(1-n-x)^n. \\ (x)^n &= \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!}. \end{aligned}$$

1.1.2 Factorielle descendante

Définition 1.1.2 *Soit x un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}$. On définit la factorielle descendante d'ordre n, notée $(x)_n$, par :*

$$(x)_n = \begin{cases} 1, \quad si & n = 0 \\ x(x-1)\cdots(x-n+1), \quad si & n \geq 1 \end{cases}$$

Les relations entre les factorielles descendantes et les factorielles montantes sont données par :

$$\begin{aligned} (x)^n &= (x+n-1)_n. \\ (x)_n &= (x-n+1)^n. \\ (-x)^n &= (-1)^n(x)_n. \end{aligned}$$

1.2 Les coefficients binomiaux

Définition 1.2.1 *Soit n et k deux entiers non négatifs. Le coefficient binomial de k d'ordre n, noté $\binom{n}{k}$, est donné par :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!} \quad (0 \leq k \leq n), \tag{1.1}$$

avec $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, et $\binom{n}{k} = 1$ pour $k = 0$ ou $k = n$.

On peut aussi définir le coefficient binomial en combinatoire par :

Définition 1.2.2 *Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.*

Exemple 1.1

En remplaçant n par 4 et k par 2 dans (1.1), on obtient :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{(1 \times 2)(1 \times 2)} = \frac{2 \times 3}{1} = 6.$$

Dans l'ensemble $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$, il y a six façons de choisir deux éléments :

$$\{1, 2\}\,;\ \{1, 3\}\,;\ \{1, 4\}\,;\ \{2, 3\}\,;\ \{2, 4\}\,;\ \{3, 4\}.$$

Par conséquent, $\binom{4}{2}$=6.

La formule du binôme de Newton

Soit x et y deux nombres réels et n un entier non négatif. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1.2}$$

La relation de récurrence de Pascal

Les coefficients binomiaux vérifiant la relation suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \tag{1.3}$$

Le triangle de Pascal

A partir de la relation de récurrence (1.3), nous pouvons construire le triangle de Pascal

1.3 Permutation, cycle, Partition

1.3.1 Permutation

Définition 1.3.1 *Soit $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on appelle permutation σ d'un ensemble fini $[n]$, toute bijection de $[n]$ dans $[n]$. En fait, puisque l'ensemble de $[n]$ est fini, le mot bijection peut être remplacé par injection ou surjection. Une permutation σ_n peut être représentée par une forme matricielle*

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

TABLE 1.1 – Nombres de triangle de Pascal

Le nombre de permutation de l'ensemble $[n]$ est $n!$.
On appelle point fixe si l'image d'un élément x de $[n]$ par la permutation σ est lui même i.e $\sigma(x) = x$.

Exemple 1.2 *La permutation σ_8 est donnée par :*

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Cycle

Définition 1.3.2 *Un cycle de longueur $k \geq 2$ est une permutation dont les éléments mobiles (c'est-à-dire un élément non fixe), ou support sont de la forme*

$$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{k+1}(x), \sigma^k(x) = x\}.$$

On appelle habituellement orbite de x, notée O_x est l'ensemble des images de x obtenues en appliquant successivement la permutation σ sur les éléments x, $O_x = (\sigma^j(x))_{j\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.3 *La permutation σ_8 dans l'Exemple 1.2 de $[8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est un trois cycles de support $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 8, 5, 6\}$ et $\{7\}$, tels que*

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma^2 = 4, \quad \sigma^3 = 1,$$

donc l'orbite de l'élément 1 dans l'Exemple 1.2 est $O_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$. Remarquez que $O_1 = O_3 = O_4$. Ces éléments,$\{1, 3, 4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3, 4)$, on a aussi

$$\sigma(2) = 8, \quad \sigma^2(2) = 5, \quad \sigma^3(2) = 6, \quad \sigma^4(2) = 2,$$

donc l'orbite de l'élément 2 dans l'Exemple 1.2 est $O_2 = \{2, \sigma(2) = 8, \sigma^2(2) = 5, \sigma^3(2) = 6\}$. Remarquez que $O_2 = O_8 = O_5 = O_6$. Ces éléments, $\{2, 8, 5, 6\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(2, 8, 5, 6)$ et le point $\{7\}$ est un point fixe.

1.3.3 Partition

Définition 1.3.3 *Une partition P de $[n]$ est une famille de parts $p_1, \ldots, p_k$ deux à deux disjoints, tels que $\cup_{i=1}^{k} p_i = [n]$.*

Exemple 1.4 *Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions de $[3]$ sont*

$$\{\{1\}\{2\}\{3\}\}, \quad \{\{1, 2\}\{3\}\}, \quad \{\{1, 3\}\{2\}\}, \quad \{\{2, 3\}\{1\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}\}.$$

1.4 La fonction génératrice et quelques opérations sur les séries entières

1.4.1 Les fonctions génératrices

Définition 1.4.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_n$, la fonction :*

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction :

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

1.4.2 Quelques opérations sur les séries formelles

Le produit

Le produit de deux séries ordinaires $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, est donné par :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad tel\ que \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Le produit de deux séries exponentielles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$, est donné par :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}, \quad tel\ que \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

La somme

La somme de deux séries ordinaires $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, est définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

La somme de deux séries exponentielles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$, est définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}.$$

Muni de ces deux lois, l'ensemble des séries formelles A[[x]], est un anneau unitaire commutatif.

Dans la partie suivante, nous présentons certains nombres remarquables, en commençant par les suites des nombres de Stirling de première et de deuxième espèce, les nombres r-Stirling de deuxième espèce, les nombres et polynômes de Bell et les nombres et polynômes de dérangement.

1.5 Les nombres de Stirling

1.5.1 Les nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.5.1 *Les nombres de Stirling de première espèce signés $s(n,k)$ sont les coefficients des polynômes factorielles descendantes dans la base canonique $(x)_n$, c'est-à-dire :*

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Définition 1.5.2 *Les nombres de Stirling de première espèce non signés $\mid s(n,k) \mid$ sont les coefficients des polynômes factorielles montantes dans la base canonique $(x)^n$, c'est-à-dire :*

$$(x)^n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k,$$

on a :

$$|s(n,k)| = (-1)^{n-k}s(n,k).$$

Définition 1.5.3 *(Combinatoire) Le nombre de Stirling de première espèce $\mid s(n,k) \mid$ compte le nombre de permutations de n objets composés exactement k cycles disjoints.*

Exemple 1.5 *Écrire $(x)_2$ comme un polynôme*

$$\begin{aligned}(x)_2 &= x(x-1)\\ &= x^2 - x.\end{aligned}$$

Nous pouvons dire à partir de cet exemple que :
$s(2,0) = 0.$
$s(2,1) = -1.$
$s(2,2) = 1.$

La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce signés est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}.$$

La forme explicite

La forme explicite pour les nombres de Stirling de première espèce non signés :

$$\mid s(n,k) \mid = \sum_{0 \leqslant j \leqslant h \leqslant n-k}^{\infty} (-1)^{j+h}\binom{h}{j}\binom{n-1+h}{n-k+h}.$$

La forme explicite pour les nombres de Stirling de première espèce signés :

$$s(n,k) = \frac{n!}{k!}\sum_{i_1+\ldots\cdots+i_k=n} \frac{1}{i_1 \cdots i_k}.$$

La formule de récurrence

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} s(n,0) = s(0,k) = 0, \quad sauf \quad s(0,0) = 1, \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), \quad (n,k \geqslant 1). \end{cases} \tag{1.4}$$

Table des nombres de Stirling de première espèce

En utilisant la relation de récurrence triangulaire (1.4) est les conditions initiales, on peut calculer les premiers nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$:

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	−1	1					
3	0	2	−3	1				
4	0	−6	11	−6	1			
5	0	24	−50	35	−10	1		
6	0	−120	274	−225	85	−15	1	
7	0	720	−1764	1624	−735	175	−21	1

TABLE 1.2 – Nombres de Stirling de première espèce

1.5.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce

Définition 1.5.4 *Les nombres de Stirling de deuxième espèce, notés* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *sont les coefficients du polynôme* x^n *c'est-à-dire :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_k.$$

Définition 1.5.5 *(Combinatoire) Le nombre de Stirling de deuxième espèce,* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *compte le nombre de partitions de l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *en* k *sous-ensembles non vide (*$0 \leq k \leq n$*).*

Exemple 1.6 *L'ensemble [4] possède 7 partitions en deux sous-ensembles non vides* $\left\{ {4 \atop 2} \right\}$ *sont les partitions en* 2 *:*

$$\{\{1\}\{2,3,4\}\}, \quad \{\{2\}\{1,3,4\}\}, \quad \{\{3\}\{1,2,4\}\}, \quad \{\{4\}\{1,2,3\}, \\ \{1,2\}\{3,4\}\}, \quad \{\{1,3\}\{2,4\}\}, \quad \{\{1,4\}\{2,3\}\}.$$

Par conséquent, $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

La fonction génératrice

La fonction génératrice ordinaire des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n = \frac{1}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-kt)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-jt)}.$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t - 1)^k.$$

La forme explicite

Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont donnés par la formule explicite suivante :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

La formule de récurrence

Les nombres de Stirling de deuxième espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop k} \right\} = 1, sauf \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \\ \\ \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, n \geq 0 \end{cases}.$$

Table des nombres de Stirling de deuxième espèce

Les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce sont données dans la Table suivante :

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	20	1

TABLE 1.3 – Nombres de Stirling de deuxième espèce

1.5.3 Les nombres r-Stirling de deuxième espèce

Les nombres r-Stirling de deuxième espèce [2] comptent certaines partitions restreintes. L'ensemble de ces nombres représente une sous classe des nombres de Stirling de deuxième espèce et sont donnés par la définition suivante :

Définition 1.5.6 *Les nombres r-Stirling de deuxième espèce apparaissent comme les coefficients des polynômes du monôme* $(x+r)^n$ *dans la base* $(x)_n$ *, c'est-à-dire :*

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r (x)_k, \quad pour \quad n \geqslant 0.$$

Pour $r = 0$ *et* $r = 1$*, on trouve les nombres de Stirling de deuxième espèce classiques*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_0 = \left\{ {n \atop k} \right\},$$
$$\left\{ {n \atop k} \right\}_1 = \left\{ {n \atop k} \right\}, \quad n > 0.$$

Définition 1.5.7 *(Combinatoire) Les nombres r-Stirling de deuxième espèce notés* $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$*, comptent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs, tels que les r premiers éléments sont dans des blocs différents.*

Exemple 1.7 $\left\{ {4 \atop 3} \right\}_2$ *est le nombre de partitions de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en trois blocs, tels que les premiers éléments* 1 *et* 2 *sont dans des blocs différents. Les partitions qui vérifient les conditions sont :*

$$\{1\}\{2,3\}\{4\}, \quad \{1\}\{3,4\}\{2\}, \quad \{1\}\{2,4\}\{3\},$$
$$\{2\}\{1,3\}\{4\}, \quad \{2\}\{1,4\}\{3\}.$$

Par conséquent $\left\{ {4 \atop 3} \right\}_2 = 5$.

La fonction génératrice

La fonction génératrice ordinaire des nombres r-Stirling de deuxième espèce, est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r t^n = \frac{t^k}{(1-rt)(1-(r+1)t)\dots(1-(r+k)t)}.$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres r-Stirling de deuxième espèce, est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t - 1)^k e^{rt}.$$

La forme explicite

La forme explicite des nombres r-Stirling de deuxième espèce est définie par :

$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (r+j)^n.$$

La formule de récurrence

La formule de récurrence des nombres r-Stirling de deuxième espèce est définie par :

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop r} \right\}_r = 0, & n < r \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = \delta_{k,r}, & n = r \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}_r + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_r, & n > r \\ \left\{ {n \atop r} \right\}_r = r^{n-r}, & n \geq k, \end{cases}$$

où $\delta_{k,r}$ est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{k,r} = \begin{cases} 1 & si \quad k = r \\ 0 & si \quad k \neq r. \end{cases}$$

On a aussi la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_{r-1} - (r-1)\left\{ {n+r-1 \atop k+r} \right\}_{r-1}, n \geq r \geq 1. \tag{1.5}$$

Table des nombres de 2-Stirling de deuxième espèce

Les premières valeurs de ces nombres pour $r = 2$, sont données dans la table suivante :

$n \diagdown k$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1							
3	2	1						
4	4	5	1					
5	8	19	9	1				
6	16	65	55	14	1			
7	32	211	285	125	20	1		
8	64	655	1351	910	245	27	1	
9	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1

TABLE 1.4 – Nombres de 2-Stirling de deuxième espèce

1.6 Les nombres et polynômes de Bell

Dans cette partie, nous donnons quelques propriétés concernant les nombres et les polynômes de Bell.

1.6.1 Nombres de Bell

Définition 1.6.1 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre de Bell, noté B_n est le nombre total de partitions de l'ensemble $[n]$ sachant que $B_0 = 1$, on obtient :*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Exemple 1.8 *L'exemple suivant illustre la signification des nombres de Bell, on a*

$$B_4 = \left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\}.$$

D'après l'Exemple 1.6, on obtient

$$B_4 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

La fonction génératrice

Les fonctions génératrices des nombres de Bell sont données par :

• La fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = exp(e^t - 1). \tag{1.6}$$

• La fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = \sum_{k=0}^{n} t^k \prod_{j=0}^{k} (1 - jt)^{-1}.$$

La formule de récurrence

La suite de nombre de Bell vérifie la relation de récurrence suivante :

$$B_0 = 1 \quad et \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Les premières valeurs de B_n sont données par le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

TABLE 1.5 – Nombres de Bell

1.6.2 Polynômes de Bell

Définition 1.6.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes de Bell $B_n(x)$ sont définis par :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^k.$$

Les premiers polynômes de Bell sont :

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x \\ B_2(x) &= x + x^2 \\ B_3(x) &= x + 3x^2 + x^3 \\ B_4(x) &= x + 7x^2 + 6x^3 + x^4. \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$B_n(0) = 0.$$

La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle de polynôme de Bell est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = exp(x(e^t - 1)).$$

La formule de Dobinski

La formule de Dobinski du polynôme $B_n(x)$ est donnée par :

$$B_n(x) = e^{-x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{k^n}{k!} x^k.$$

La formule de récurrence

La suite $(B_n(x))_{n \geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$B_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x).$$

1.7 Les nombres et polynômes de dérangement

1.7.1 Les nombres de dérangement

Définition 1.7.1 *Le nombre de dérangement d'un ensemble de taille n noté D_n est le nombre de permutations sans point fixe de n éléments.*
Il est connu aussi comme le sous-facteur de n, noté $!n$.

Exemple 1.9 *Soit* $[2] = \{1, 2\}$ *un ensemble de cardinale 2, il y a* $2 = 2!$ *permutations de cet ensemble. La permutation sans point fixe de cet ensemble est :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

donc le nombre de dérangement égale à 1 *c'est-à-dire :* $D_2 = 1$.

La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle du nombre de dérangement est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t}.$$

La forme explicite

La forme explicite du nombre de dérangement est donnée par la formule suivante :

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La formule de récurrence

Le nombre de dérangement sur n éléments est donné par la récurrence suivante :

$$D_0 = 1, \quad D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, (n \geqslant 1),$$

on déduit que

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), (n \geqslant 2),$$

avec les conditions initiales $D_0 = 1$ et $D_1 = 0$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854

TABLE 1.6 – Nombres de dérangement

1.7.2 Les polynômes de dérangement

La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle de la suite de polynôme $(D_n(x))_n$ est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-tx}.$$

La forme explicite

Le polynôme de dérangement peut être donner sous forme explicite par :

$$D_n(x) = n! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{n-k}.$$

2

Déterminants de Hankel

Dans ce chapitre, nous étudions de manière plus détaillée des matrices de Hankel et donnons une méthode pour évaluer leurs déterminants lorsque certaines conditions sur la fonction génératrice exponentielle associée à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sont données et ceci pour plusieurs cas particuliers (polynôme de Bell, dérangement, ect.). Pour plus de détails, le lecture pourra consulter [5, 8, 9, 10, 12, 16].

2.1 Matrice de Hankel

Définition 2.1.1 *Nous considérons un anneau A unitaire, commutatif et intègre, et une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ dans A. Une matrice dite de Hankel est de la forme :*

$$H_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{2n} \end{pmatrix}.$$

2.2 Déterminant de Hankel

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $F(\mathbb{N}, A)$ l'ensemble des suites défini par :

$$F(\mathbb{N}, A) = \{fonctions\ \alpha : \mathbb{N} \longrightarrow A\} = \{suites\ (\alpha_n)_{n\geq 0} \subset A\}.$$

Définition 2.2.1 *Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite d'éléments d'un anneau A, on appelle déterminant de Hankel de rang n de la suite (α) et on note $\mathcal{H}_n$, le déterminant de la matrice H_n, défini par :*

$$\mathcal{H}_n = \det(\alpha_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}.$$

Le théorème suivant donne une formule explicite pour le déterminant de Hankel d'une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.

Théorème 2.1 *[8] Notons $F(z) = \sum \alpha_n \frac{z^n}{n!}$ la série génératrice exponentielle associée à une suite $\alpha \in F(\mathbb{N}, A)$ et $\partial = \partial_z$ l'opérateur de dérivation par rapport à la variable z.*
S'il existe des séries formelles $F_k(z) \in A[[z]]$ et des éléments $d_k \in A$ tels que :

1. $[\partial^n F_k(z)]_{z=0} = 0$ *chaque fois que $k > n$.*

2. $\sum_{k=0}^{\infty} d_k F_k(y) F_k(z) = F(y+z)$.

Alors les déterminants de Hankel sont donnés par : $\det H_n = \prod_{k=0}^{n} d_k [\partial^k F_k(z)]^2_{z=0}$.

Preuve. A l'aide de l'identité binomiale (1.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} F(y+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{(y+z)^n}{n!} \\ &= \sum_{m,n\geq 0} \alpha_{m+n} \frac{y^n z^m}{n!m!}, \end{aligned}$$

car

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k}.$$

Alors que les développements de Taylor :

$$\begin{aligned} F_k(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \partial^n F_k(0) \frac{y^n}{n!}. \\ F_k(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \partial^m F_k(0) \frac{z^m}{m!}, \end{aligned}$$

permettent d'expliciter

$$\sum_{k\geq 0} d_k F_k(y) F_k(z) = \sum_{m,n\geq 0} \sum_{k\geq 0} d_k \partial^n F_k(0) \partial^m f_k(0) \frac{y^n}{n!} \frac{z^m}{m!}.$$

Par identification, la deuxième condition exprime le fait que

$$\alpha_{m+n} = \sum_{k=0}^{min(n,m)} d_k [\partial^n F_k(z)]_{z=0} [\partial^m F_k(z)]_{z=0}.$$

■

Remarque 1 *Remarquons que la somme est finie, elle porte sur les indices $k = 0, 1, \ldots, min(m,n)$. Ainsi la matrice de Hankel $H_n = (\alpha_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}$ admet une composition $H_n = L_n D_n L_n^t$ où $D_n = Diag(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ est une matrice diagonale et $L_n = (\partial^i F_j(z) \mid_{z=0})_{0\leq i,j\leq n})$ une matrice triangulaire inférieure, par la condition 1.). Le théorème est alors évident.*

Un cas particulier important

Si A un anneau de polynôme, on peut considérer des suites $(P_n(x))_{n\geq 0})$ telles que deg $P_n(x) = n$. La fonction génératrice exponentielle est alors :

$$F(x,z) = \sum_{n\geq 0} P_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

et dans de nombreux cas, on peut prendre $F_k(x,z) = \partial_x^k F(x,z)$ où ∂_x est l'opérateur de dérivation par rapport à x. La première condition du Théorème 2.1 est alors automatiquement vérifiée :

$$\begin{aligned} [\partial_z^n F_k(x,z)]_{z=0} &= [\partial_z^n \partial_x^k F(x,z)]_{z=0} \\ &= \partial_x^k [\partial_z^n F(x,z)]_{z=0} \\ &= \partial_x^k P_n(x), \end{aligned}$$

est nul dès que $k > n$. Ainsi s'il existe des polynômes $d_k(x)$ vérifiant :

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x) \partial_x^k F(x,y) \partial_x^k F(x,z) = F(x, y+z), \tag{2.1}$$

alors les déterminants de Hankel sont :

$$\det(P_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} = \prod_{k=0}^{n} d_k(x) \left(\partial_x^k P_k(x)\right)^2. \tag{2.2}$$

Applications

Exemple 1. L'exemple le plus simple est celui de la base canonique $P_n(x) = x^n$: on a $F(x,z) = e^{xz}$ est la relation (2.1) peut s'écrire sous la forme suivante : $\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = 1$. Les polynômes constante $d_0(x) = 1$ et $d_k(x) = 0$ si $k \geq 1$. En effet,

La première condition 1. donne

$[\partial_z^n F_k(x,z)]_{z=0} = \partial_x^k P_n(x) = n!x^{n-k}$ est nul dés que $k > n$.

La deuxième condition 2.

$$\begin{aligned}
\partial_x^1 F(x,y) &= \partial_x^1(e^{xy}) = ye^{xy} \\
\partial_x^2 F(x,y) &= \partial_x^2(e^{xy}) = y^2e^{xy} \\
\partial_x^3 F(x,y) &= \partial_x^3(e^{xy}) = y^3e^{xy} \\
&\vdots \\
\partial_x^k F(x,y) &= \partial_x^k(e^{xy}) = y^ke^{xy}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_x^1 F(x,z) &= \partial_x^1(e^{xz}) = ze^{xz} \\
\partial_x^2 F(x,z) &= \partial_x^2(e^{xz}) = z^2e^{xz} \\
\partial_x^3 F(x,z) &= \partial_x^3(e^{xz}) = z^3e^{xz} \\
&\vdots \\
\partial_x^k F(x,z) &= \partial_x^k(e^{xz}) = z^ke^{xz}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

et comme

$$F(x,y+z) = e^{x(y+z)} \tag{2.5}$$

D'après (2.3), (2.4) et (2.5), les formules suivantes sont équivalentes

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)\partial_x^k F(x,y)\partial_x^k F(x,z) = F(x,y+z).$$

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)y^ke^{xy}z^ke^{xz} = e^{x(y+z)}.$$

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^ke^{x(y+z)} = e^{x(y+z)}.$$

D'ou le résultat suivant

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = 1.$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = 1 \Rightarrow \begin{cases} d_0(x) = 1 & si \quad k = 0 \\ d_k(x) = 0 & si \quad k \geq 1 \end{cases}.$$

Les conditions 1. et 2. sont vérifiées, alors le déterminant de Hankel (2.2) devient

$$\det(x^{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = d_n(x) = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ 0 & sinon \end{cases} .$$

Exemple 2. Pour les polynômes $P_n(x) = n!x^n$, de fonction génératrice $F(x,z) = (1-zx)^{-1}$, on trouve

$$\partial_x^k F(x,z) = k!z^k(1-zx)^{-k-1} \quad (pour\ k \geq 0).$$

La relation (2.1) devient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)(k!)^2(yz)^k[1-x(y+z)+x^2yz]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1},$$

et les polynômes $d_k(x) = (x^k/k!)^2$. En effet,

La première condition 1. donne

$[\partial_z^n F_k(x,z)]_{z=0} = \partial_x^k P_n(x) = n!(n-k)!x^{n-k}$ est nul dés que $k \geq n$.

La deuxième condition 2.

$$\begin{aligned}
\partial_x^1 F(x,y) &= \partial_x^1[(1-yx)^{-1}] = y(1-yx)^{-2} \\
\partial_x^2 F(x,y) &= \partial_x^2[(1-yx)^{-1}] = 2y^2(1-yx)^{-3} \\
\partial_x^3 F(x,y) &= \partial_x^3[(1-yx)^{-1}] = 6y^3(1-yx)^{-4} \\
&\vdots \\
\partial_x^k F(x,y) &= \partial_x^k[(1-yx)^{-1}] = k!y^k(1-yx)^{-k-1}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_x^1 F(x,z) &= \partial_x^1[(1-zx)^{-1}] = z(1-zx)^{-2} \\
\partial_x^2 F(x,z) &= \partial_x^2[(1-zx)^{-1}] = 2z^2(1-zx)^{-3} \\
\partial_x^3 F(x,z) &= \partial_x^3[(1-zx)^{-1}] = 6z^3(1-zx)^{-4} \\
&\vdots \\
\partial_x^k F(x,z) &= \partial_x^k[(1-zx)^{-1}] = k!z^k(1-zx)^{-k-1}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

et comme

$$F(x,y+z) = e^{-(y+z)}(1-x(y+z))^{-1}. \tag{2.8}$$

Alors, d'après (2.6), (2.7) et (2.8) la formule (2.1) devient

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)k!y^k k!z^k[(1-yx)(1-zx)]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1}.$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(k!)^2(yz)^k[1-x(y+z)+x^2yz]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1}.$$

Par identification des séries, on trouve les polynômes $d_k(x) = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$, et le déterminant (2.2) devient :

$$\begin{aligned}\det((i+j)!x^{i+j})_{0\leq i,j\leq n} &= \prod_{k=0}^{n} d_k(x)(\partial_x^k P_k(x))^2 \\ &= \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2 (k!)^4 \\ &= \prod_{k=0}^{n} (k!x^k)^2 \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 x^{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Exemple 3. Les polynômes de dérangement $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (n)_k(-1)^{n-k}x^k$ engendrent les même déterminants : la fonction génératrice exponentielle est donnée par $F(x,z) = e^{-z}(1-xz)^{-1}$. D'après la relation (2.1) on obtient :

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(k!)^2(zy)^k[1-x(y+z)+x^2yz]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1}, \tag{2.9}$$

où les polynômes $d_k = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$. En effet,

La première condition 1. donne

$$\partial_x^k F(x,y) = \partial_x^k(e^{-y}(1-xy)^{-1}) = e^{-y}k!y^k(1-yx)^{-k-1}$$

et

$$\partial_x^k F(x,z) = \partial_x^k(e^{-z}(1-xz)^{-1}) = e^{-z}k!z^k(1-zx)^{-k-1}.$$

D'après (2.1), on obtient

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)\partial_x^k F(x,y)\partial_x^k F(x,z) = F(x,y+z).$$

Ce qui équivaut à (2.9)

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(k!)^2 e^{-(z+y)}(zy)^k[(1-zx)(1-yx)]^{-k-1} = e^{-(y+z)}(1-x(y+z))^{-1}.$$

Maintenant, en identifiant les coefficients de deux séries, on obtient les polynômes $d_k = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$. Finalement, le déterminant de Hankel pour les polynômes de dérangement est donné par :

$$\begin{aligned}\det(D_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} &= \prod_{k=0}^{n} d_k(x)(\partial_x^k P_k(x))^2 \\ &= \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2 (k!)^4 \\ &= \prod_{k=0}^{n} (k!x^k)^2 \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 x^{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Exemple 4. Soit I_n le nombre d'involution sur un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de permutation $\sigma \in Sym(n)$ d'ordre 2. Nous avons $I_0 = I_1 = 1$ et la relation de récurrence $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$ conduit à la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n\geq 0} I_n \frac{z^n}{n!} = e^{z+\frac{z^2}{2}}.$$

Pour utiliser la méthode présentée ci-dessus, il faut construire des polynômes $I_n(x)$ dont I_n serait une valeur particulière et il semble naturel de considérer

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} I_n(x)\frac{z^n}{n!} &= e^{xz+\frac{z^2}{2}}\\ &= F(x,z).\end{aligned}$$

On a $I_n(1) = I_n$ et en dérivant $F(x,z)$ par rapport à z, on trouve

$$I_{n+1}(x) = xI_n(x) + nI_{n-1}(x),$$

ce qui montre du même coup que les polynômes $I_n(x)$ sont unitaires avec $\deg I_n(x) = n$.
La relation (2.1) devient

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = e^{yz}, \tag{2.10}$$

avec $d_k(x) = 1/k!$. En effet,

La première condition 1. donne

$[\partial_z^n F_k(x,z)]_{z=0} = \partial_x^k I_n(x)$ est nul dés que $k > n$.

La deuxième condition

$$\begin{aligned}\partial_x^1 F(x,y) = \partial_x^1(e^{xy+\frac{y^2}{2}}) &= ye^{xy+\frac{y^2}{2}}\\ \partial_x^2 F(x,y) = \partial_x^2(e^{xy+\frac{y^2}{2}}) &= y^2e^{xy+\frac{y^2}{2}}\\ \partial_x^3 F(x,y) = \partial_x^3(e^{xy+\frac{y^2}{2}}) &= y^3e^{xy+\frac{y^2}{2}}\\ &\vdots\\ \partial_x^k F(x,y) = \partial_x^k(e^{xy+\frac{y^2}{2}}) &= y^ke^{xy+\frac{y^2}{2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_x^1 F(x,z) = \partial_x^1(e^{xz+\frac{z^2}{2}}) &= ze^{xz+\frac{z^2}{2}}\\ \partial_x^2 F(x,z) = \partial_x^2(e^{xz+\frac{z^2}{2}}) &= z^2e^{xz+\frac{z^2}{2}}\\ \partial_x^3 F(x,z) = \partial_x^3(e^{xz+\frac{z^2}{2}}) &= z^3e^{xz+\frac{z^2}{2}}\\ &\vdots\\ \partial_x^k F(x,z) = \partial_x^k(e^{xz+\frac{z^2}{2}}) &= z^ke^{xz+\frac{z^2}{2}}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$F(x,y+z) = e^{x(y+z)+\frac{(y+z)^2}{2}}.$$

Alors, la relation (2.1) devient

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} d_k(x)y^ke^{xy+\frac{y^2}{2}}z^ke^{xz+\frac{z^2}{2}} &= e^{x(y+z)+\frac{(y+z)^2}{2}}\\ \sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k &= e^{yz}.\end{aligned}$$

D'après la série exponentielle

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(yz)^k}{k!},$$

et par identification des coefficients de deux séries, on trouve

$$d_k(x) = \frac{1}{k!}.$$

Donc le déterminant de Hankel pour les polynômes d'involution est donné par la formule (2.2)

$$\begin{aligned}\det(I_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} &= \prod_{k=0}^{n} d_k(x)(\partial_x^k P_k(x))^2 \\ &= \prod_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{k!}\right)(k!)^2 \\ &= \prod_{k=0}^{n} k!.\end{aligned}$$

Exemple 5. Les polynômes d'Hermite $h_n(x)$ admette la fonction génératrice $F(x,z) = e^{2xz-z^2}$ et satisfont la relation de récurrence $h_{n+1}(x) = 2xh_n(x) - 2nh_{n-1}(x)$. La relation (2.1) devient

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = e^{-2yz}.$$

Elle est vérifiée pour les polynômes constantes $d_k(x) = 1/((-2)^k k!)$. En effet,

La première condition 1. donne

$[\partial_z^n F_k(x,z)]_{z=0} = \partial_x^k h_n(x)$ est nul dés que $k > n$.

La deuxième condition 2.

$$\begin{aligned}\partial_x^1 F(x,y) &= \partial_x^1(e^{2yx-y^2}) = 2ye^{2yx-y^2} \\ \partial_x^2 F(x,y) &= \partial_x^2(e^{2yx-y^2}) = 4y^2e^{2yx-y^2} \\ \partial_x^2 F(x,y) &= \partial_x^2(e^{2yx-y^2}) = 8y^3e^{2yx-y^2} \\ &\vdots \\ \partial_x^k F(x,y) &= \partial_x^k(e^{2yx-y^2}) = 2^k y^k e^{2yx-y^2}\end{aligned} \tag{2.11}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_x^1 F(x,z) &= \partial_x^1(e^{2zx-z^2}) = 2ze^{2zx-z^2} \\ \partial_x^2 F(x,z) &= \partial_x^2(e^{2zx-z^2}) = 4z^2e^{2zx-z^2} \\ \partial_x^2 F(x,z) &= \partial_x^2(e^{2zx-z^2}) = 8z^3e^{2zx-z^2} \\ &\vdots \\ \partial_x^k F(x,z) &= \partial_x^k(e^{2zx-z^2}) = 2^k z^k e^{2zx-z^2}\end{aligned} \tag{2.12}$$

De plus la fonction génératrice pour les polynômes d'Hermite, donne

$$F(x,y+z) = e^{2(y+z)x-(y+z)^2}. \tag{2.13}$$

En utilisant (2.11), (2.12) et (2.13), la relation (2.1) devient

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)e^{-z^2}e^{2xz}(2z)^k e^{-y^2}e^{2xy}(2y)^k = e^{2x(y+z)-(y+z)^2},$$
$$= e^{2x(y+z)-y^2-z^2-2yz},$$

alors

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(4zy)^k = e^{-2yz}.$$

La série exponentielle donne

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(4zy)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(-2yz)^k}{k!}.$$
$$d_k(x)(2)^k = \frac{(-1)^k}{k!},$$

donc

$$d_k(x) = \frac{1}{(-2)^k k!}.$$

Et comme le coefficient dominant de $h_k(x)$ est 2^k, on trouve

$$\det(h_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(-2)^k k!}(2^k k!)^2$$
$$= \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)(-2)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Exemple 6. Considérant maintenant les polynômes de Bell $B_n(x)$, donnés par $F(x,z) = e^{x(e^z-1)}$.

La première condition

$[\partial_z^n F_k(x,z)]_{z=0} = \partial_x^k P_n(x)$ est nul dés que $k > n$.

La deuxième condition

$$\partial_x^1 F(x,y) = \partial_x^1(e^{x(e^y-1)}) = (e^y-1)e^{x(e^y-1)}$$
$$\partial_x^2 F(x,y) = \partial_x^2(e^{x(e^y-1)}) = (e^y-1)^2 e^{x(e^y-1)}$$
$$\partial_x^3 F(x,y) = \partial_x^3(e^{x(e^y-1)}) = (e^y-1)^3 e^{x(e^y-1)}$$
$$\vdots$$
$$\partial_x^k F(x,y) = \partial_x^k(e^{x(e^y-1)}) = (e^y-1)^k e^{x(e^y-1)}$$

et

$$\partial_x^1 F(x,z) = \partial_x^1(e^{x(e^z-1)}) = (e^z-1)e^{x(e^z-1)}$$
$$\partial_x^2 F(x,z) = \partial_x^2(e^{x(e^z-1)}) = (e^z-1)^2 e^{x(e^z-1)}$$
$$\partial_x^3 F(x,z) = \partial_x^3(e^{x(e^z-1)}) = (e^z-1)^3 e^{x(e^z-1)}$$
$$\vdots$$
$$\partial_x^k F(x,z) = \partial_x^k(e^{x(e^z-1)}) = (e^z-1)^k e^{x(e^z-1)}$$

et comme

$$F(x, y+z) = e^{x(e^{(y+z)}-1)}.$$

Donc la relation (2.1) devient :

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(e^y-1)^k e^{x(e^y-1)}(e^z-1)^k e^{x(e^z-1)} = e^{x(e^{y+z}-1)}.$$
$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(e^{y+z}-e^y-e^z-1)^k e^{x(e^y-e^z-2)} = e^{x(e^{y+z})},$$

alors

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(e^{y+z}-e^y-e^z+1)^k = e^{x(e^{y+z}-e^y-e^z+1)}.$$

D'après la série exponentielle, on obtient

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(e^{y+z}-e^y-e^z+1)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(x(e^{y+z}-e^y-e^z+1))^k}{k!}$$
$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(e^{y+z}-e^y-e^z+1)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}(e^{y+z}-e^y-e^z+1)^k,$$

donc

$$d_k(x) = \frac{x^k}{k!},$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\det(B_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} &= \prod_{k=0}^{n}\left(\tfrac{x^k}{k!}\right)(k!)^2 \\ &= \prod_{k=0}^{n} k! x^k \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right) x^{\frac{n(n+1)}{2}}.\end{aligned}$$

Exemple 7. Les nombres d'Euler $E_n (n \geqslant 0)$ peuvent être définis par $F(z) = \sum E_n \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{cosz}$. Cette fonction génératrice exponentielle vérifie

$$F(y+z) = \frac{1}{cos(y+z)} = \frac{cosycosz}{cosycosz - sinysinz}\frac{1}{cosycosz} = \frac{(1-tanytanz)^{-1}}{cosycosz},$$

ce qui à l'aide d'une série géométrique, peut s'exprimer formellement

$$F(y+z) = \frac{1}{cosycosz}\sum_{k\geqslant 0}(tany)^k(tanz)^k = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(tany)^k}{cosy}\frac{(tanz)^k}{cosz}. \tag{2.14}$$

La deuxième condition du théorème président est donc vérifiée si l'on considère les constantes $d_k = z$ et les fonctions

$$F_k(z) = \frac{(tanz)^k}{cosz}.$$

La première condition l'est également :

$$\begin{aligned}E_{n,k} &= [\partial^n F_k(z)]_{z=0} \\ &= [\partial^n \frac{(tanz)^k}{cosz}]_{z=0}\end{aligned}$$

est nul lorsque $k > n$ et vaut $n!$ si $k = n$.
Ceci est évident pour $n = 0$ et persiste par induction grâce à la relation de récurrence

$$E_{n+1,k} = kE_{n,k-1} + (k-1)E_{n,k+1}.$$

En fin de compte, le Théorème 2.1 fournit

$$\det(E_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2.$$

Avec cette définition, les nombres d'Euler d'indices impairs sont nuls et certaines personnes préfèrent travailler avec $\tilde{E}_n = E_{2n}$. On trouverait alors

$$\begin{aligned}\det(\tilde{E}_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} &= \det(E_{2(i+j)})_{0\leq i,j\leq n}\\ &= \left(\prod_{k=0}^{n}(2k)!\right)^2\end{aligned}$$

en modifiant légèrement la fin de preuve du théorème.

Dans l'exemple des nombres d'Euler (de fonction génératrice $F(z) = 1/cosz$), nous avons introduit les fonctions $F_k(z) = g(z)^k F(z)$ où $g(z) = tanz$ vérifie l'équation différentielle $g'(z) = 1 + g(z)^2$ avec la condition initiale $g(0) = 0$. Cette situation peut être généralisé comme suit.

Théorème 2.2 *On considère une fonction génératrice exponentielle $F(z) = exp(G(x))$ avec $G(0) = 0$ et on suppose que $g(z) = G'(z) - G'(0)$ vérifié*

$$g'(z) = \alpha + \beta g(z) + \gamma g(z)^2,$$

pour certains paramètres $\alpha \neq 0$, β et γ dans A. Alors

$$F(y+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1.(1+\gamma)\dots(1+(k-1)\gamma)}{k!\alpha^k} g(y)^k F(y) g(z)^k F(z).$$

Les déterminants de Hankel correspondant sont donnés par :

$$\det H_n = \alpha^{n(n+1)/2} \prod_{k=0}^{n} \Big(k!(1+\gamma)\dots(1+(k-1)\gamma)\Big).$$

Preuve. Pour $k \geq 0$, on considère les fonctions $F_k(z) = g(z)^k F(z)$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\partial F_k &= kg^{k-1}g'F + g^k F'\\ &= kg^{k-1}(\alpha + \beta g + \gamma g^2)F + g^k G'F\\ &= \Big(k\alpha g^{k-1} + (G'(0) + k\beta)g^k + (1+k\gamma)g^{k+1}\Big)F\\ &= k\alpha F_{k-1} + (G'(0) + k\beta)F_k + (1+k\gamma)F_{k+1}.\end{aligned}$$

(par convention, $F_k(z) = 0 \quad pour \quad k < 0$), c'est-à-dire

$$\partial^{n+1}F_k(z) = \partial^n[k\alpha F_{k-1}(z) + (G'(0) + k\beta)F_k(z) + (1+k\gamma)F_{k+1}(z)] \quad pour \quad n \geq 0.$$

Cette relation nous permet d'établir inductivement les faits suivants (évidents pour $n = 0$) :

. $[\partial^n F_k(z)]_{z=0} = 0$ chaque fois que $k > n$.

. $[\partial^n F_k(z)]_{z=0} = n\alpha[\partial^{n-1} F_{n-1}(z)]_{z=0} = \ldots = n!\alpha^n$.

Un calcul direct montre d'autre part que

$$\partial^{n+1} F_k(z)\partial^m F_k(z) - \partial^n F_k(z)\partial^{m+1} F_k(z) = k\alpha H_{k-1}(z)(1+k\gamma)H_k(z),$$

avec

$$H_k(z) = \partial^m F_{k+1}(z)\partial^n F_k(z) - \partial^m F_k(z)\partial^n F_{k+1}(z) \quad (= 0 \quad si \quad k < 0).$$

Considérons alors les éléments (dans Frac A, corps des fraction de A)

$$d_k = \frac{(1+\gamma)\ldots(1+(k-1)\gamma)}{k!\alpha^k} \quad (= 1 \quad si \quad k = 0).$$

Ils vérifient

$$d_{k+1}(k+1)\alpha = d_k(1+k\gamma),$$

de sorte que tous les termes de la somme

$$\sum_{k\geq 0} d_k[\partial^{n+1} F_k(z)\partial^m F_k(z) - \partial^n F_k(z)\partial^{m+1} F_k(z)] = \sum_{k\geq 0} d_k[k\alpha H_{k-1}(z) - (1+k\gamma)H_k(z)]$$

se compensent : il s'agit d'une somme télescopique nulle. Pour tous les entiers $m, n \geq 0$, on a donc

$$\begin{aligned}\sum d_k \partial^n F_k(z)\partial^m F_k(z) &= \sum d_k \partial^{n-1} F_k(z)\partial^{m+1} F_k(z)\\ &= \ldots\\ &= \sum d_k F_k(z)\partial^{m+n} F_k(z)\end{aligned}$$

et en évaluant cette expression en $z = 0$, il vient

$$\begin{aligned}\sum d_k[\partial^n F_k(z)\partial^m F_k(z)]_{z=0} &= \sum d_k F_k(0)[\partial^{m+n} F_k(z)]_{z=0}\\ &= [\partial^{m+n} F(z)]_{z=0}.\end{aligned}$$

Cela montre que pour la suite qui admet la fonction génératrice $F(z)$, on peut utiliser le Théorème 2.1 avec les éléments d_k et les fonctions $F_k(z)$ définis ci-dessus.

■

Voici les données correspondant aux exemples (1-7) déjà traités :

	$F(z)$	$G(z)$	$g(z)$	α	β	γ
Base canonique	e^{xz}	xz	x	0	0	0
$P_n(x) = n!x^n$	$(1-xz)^{-1}$	$-log(1-xz)$	$\frac{x}{1-xz} - x$	x^2	$2x$	1
Polynômes de dérangement	$e^{-z}(1-xz)^{-1}$	$-z - log(1-xz)$	$\frac{x}{1-xz} - x$	x^2	$2x$	1
Polynômes d'involution	$e^{xz+\frac{z^2}{2}}$	$xz + \frac{z^2}{2}$	z	1	0	0
Polynômes d'Hermite	e^{2xz-z^2}	$2xz - z^2$	$-2z$	-2	0	0
Polynômes de Bell	$e^{x(e^z-1)}$	$x(e^z-1)$	$x(e^z-1)$	x	1	0
Nombres d'Euler	$\frac{1}{cosz}$	$-log(cosz)$	$tanz$	1	0	1

2.3 Fraction continue

Théorème 2.3 *Soit $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombre, avec la fonction génératrice $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k z^k$ écrite sous la forme suivante :*

$$\sum_{k\geq 0} \mu_k z^k = \cfrac{\mu_0}{1 + a_0 z - \cfrac{b_n z^1}{1 + a_1 z - \cfrac{b_2 z^2}{1 + a_2 z - \ldots}}} \tag{2.15}$$

alors le déterminant de Hankel est définit par la formule suivante :

$$\det(\mu_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = \mu_0^n b_1^{n-1} b_2^{n-2} \ldots b_{n-2}^2 b_{n-1}.$$

Cela signifie que nous aurions évalué une fois que nous sommes capables d'expliquer explicitement la fonction génératrice $\sum_{k\geq 0} B_{k+2} z^k$ en terme de fraction continue de la forme du côte droit de (2.15).

$$\sum_{k\geq 0} B_{k+2} z^k = \cfrac{\frac{1}{6}}{1 - \cfrac{b_1 z^2}{1 - \cfrac{b_2 z^2}{1 - \ldots}}},$$

où

$$b_i = \frac{-i(i+1)^2(i+2)}{(2i+1)(2i+3)}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Théorème 2.4 *Pour que la série formelle $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k z^k$ soit une fraction rationnel il faut et il suffit qu'il existe k tel que, pour n assez grand, $\mathcal{H}_n^k = 0$, où $\mathcal{H}_n^k$ le déterminant de Hankel de rang n et d'ordre k.*

Dans ce qui suit, nous présentons une autre méthode basé sur la formule de Sylvester pour calculer le déterminant de Hankel des polynômes de dérangement. Pour des notions plus détaillées, le lecteur pourra consulter [11].

2.4 Méthode de Sylvester pour les polynômes de dérangement

Théorème 2.5 *Le déterminant de Hankel pour les polynômes de dérangement $D_n(x)$, est donné par :*

$$\det(D_{i+j}(x)) = \begin{vmatrix} D_0(x) & D_1(x) & D_2(x) & \ldots & D_n(x) \\ D_1(x) & D_2(x) & D_3(x) & \ldots & D_{n+1}(x) \\ D_2(x) & D_3(x) & D_4(x) & \ldots & D_{n+2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n(x) & D_{n+1}(x) & D_{n+2}(x) & \ldots & D_{2n}(x) \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{n} k! \right)^2 x^{n(n+1)}. \tag{2.16}$$

Preuve. La fonction génératrice pour les nombres de dérangement D_n est donnée par :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t}. \tag{2.17}$$

Posons

$$\Delta_n(G(t)) = \det\left(\frac{\partial^{i+j-2}}{\partial t^{i+j-2}} G(t) \right)_{i,j=1,2,\ldots,n}. \tag{2.18}$$

Alors on obtient

$$\Delta_n(G(t)) = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right)^2 e^{-nt}}{(1-t)^{n^2}}. \tag{2.19}$$

On montre la formule (2.19) par induction sur n en utilisant la formule de Sylvester. Pour $n = 1$ on a

$$\Delta_1(G(t)) = \frac{e^{-t}}{1-t},$$

Pour $n = 2$. D'une part, par la formule (2.18) on a :

$$\Delta_2(G(t)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^0}{\partial t^0} G(t) & \frac{\partial^1}{\partial t^1} G(t) \\ \frac{\partial^1}{\partial t^1} G(t) & \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t) \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\Delta_2(G(t)) = \begin{vmatrix} e^{-t}\frac{1}{1-t} & e^{-t}\left(-\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2}\right) \\ e^{-t}\left(-\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2}\right) & e^{-t}\left(\frac{1}{1-t} - \frac{2}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1-t)^3}\right) \end{vmatrix}.$$

C'est-à-dire, par un calcul immédiat,

$$\begin{aligned} \Delta_2(G(t)) &= \frac{e^{-t}}{1-t} \times e^{-t} \times \left(\frac{1}{1-t} - \frac{2}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1-t)^3}\right) - \left(e^{-t}\left(-\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{e^{-2t}}{(1-t)^2} - \frac{2e^{-2t}}{(1-t)^3} + \frac{2e^{-2t}}{(1-t)^4} - \frac{e^{-2t}}{(1-t)^2} + \frac{2e^{-2t}}{(1-t)^3} - \frac{e^{-2t}}{(1-t)^4} \\ &= \frac{e^{-2t}}{(1-t)^4}, \end{aligned}$$

et d'autre part, la formule (2.19) donne :

$$\begin{aligned} \Delta_2(G(t)) &= \frac{\left(\prod_{k=0}^{2-1} k!\right)^2 e^{-2t}}{(1-t)^4} \\ &= \frac{(0!1!)^2 e^{-2t}}{(1-t)^4} \\ &= \frac{e^{-2t}}{(1-t)^4}. \end{aligned}$$

Supposons la formule (2.19) est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, m$ et calculons $\Delta_{m+1}(G(x))$ par la formule de Sylvester

$$\Delta_{m+1}(G(t)) = \frac{\Delta_2(\Delta_m(G(t)))}{\Delta_{m-1}(G(t))}. \tag{2.20}$$

On a

$$\Delta_2(\Delta_m(G(t))) = \begin{vmatrix} (\Delta_m(G(t))) & (\Delta_m(G(t)))' \\ (\Delta_m(G(t)))' & (\Delta_m(G(t)))'' \end{vmatrix}.$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
\Delta_m(G(t)) &= \frac{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-mt}}{(1-t)^{m^2}} \\
(\Delta_m(G(t)))' &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 \left(\frac{-me^{-t}(1-t)^{m^2}+m^2(1-t)^{m^2-1}e^{-mt}}{(1-t)^{2m^2}}\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-mt}\left(\frac{-m}{(1-t)^{m^2}}+\frac{m^2}{(1-t)^{m^2+1}}\right) \\
(\Delta_m(G(t)))'' &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 \left((-m)e^{-mt}\left(\frac{-m}{(1-t)^{m^2}}+\frac{m^2}{(1-t)^{m^2+1}}\right)-e^{-}mt\left(-\frac{m^3(1-t)^{m^2-1}}{(1-t)^{2m^2}}+\frac{m^2(m^2+1)(1-t)^{m^2}}{(1-t)^{2(m^2+1)}}\right)\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-mt}\left(\frac{m^2}{(1-t)^{m^2}}-\frac{m^3}{(1-t)^{m^2+1}}-\frac{m^3}{(1-t)^{m^2+1}}+\frac{m^2(m^2+1)}{(1-t)^{m^2+2}}\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-mt}\left(\frac{m^2}{(1-t)^{m^2}}-\frac{2m^3}{(1-t)^{m^2+1}}+\frac{m^2(m^2+1)}{(1-t)^{m^2+2}}\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\Delta_2(\Delta_m(G(t))) = \frac{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^4 e^{-2mt}}{(1-t)^{(2m^2)}} \begin{vmatrix} 1 & -m+\frac{m^2}{1-t} \\ -m+\frac{m^2}{1-t} & m^2-\frac{2m^3}{1-t}+\frac{m^2(m^2+1)}{(1-t)^2} \end{vmatrix}.$$

C'est-à-dire, par calcul

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\Delta_m(G(t))) &= \frac{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^4 e^{-2mx}}{(1-t)^{(2m^2)}}\left(m^2-\frac{2m^3}{1-t}+\frac{m^2(m^2+1)}{(1-t)^2}-\left(-m+\frac{m^2}{1-t}\right)^2\right) \\
&= \frac{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^4 e^{-2mt}}{(1-t)^{(2m^2)}}\left(m^2-\frac{2m^3}{(1-t)}+\frac{m^4}{(1-t)^2}+\frac{m^2}{(1-t^2}-m^2+\frac{2m^3}{(1-t)}-\frac{m^4}{(1-t)^2}\right) \\
&= \frac{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^4 e^{-2mt}}{(1-t)^{(2m^2)}}\frac{m^2}{(1-t)^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta_2(D_m(G(t))) = \frac{m^2\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^4 e^{-2mt}}{(1-t)^{(2m^2+2)}}.$$

La formule de Sylvester (2.20) est une nouvelle utilisation de l'hypothèse de récurrence donnent

finalement

$$\Delta_{m+1}(G(t)) = \frac{m2\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^4 e^{-2mt}}{(1-t)^{(2m^2+2)}} \times \frac{(1-t)^{(m-1)^2}}{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-(m-1)t}}$$

$$\Delta_{m+1}(G(t)) = \frac{m^2\left((m-1)!\right)^2\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-(m-1)t}}{(1-t)^{(m+1)^2}}$$

$$\Delta_{m+1}(G(t)) = \frac{\left(\prod_{k=0}^{m-1} k!\right)^2 e^{-(m+1)t}}{(1-t)^{(m+1)^2}}.$$

Ceci preuve la formule (2.19).

Maintenant, pour obtenir le résultat du Théorème 2.5, il reste à noter que, d'après la formule de Leibiniz, on a :

$$I = \frac{d^n}{dt^n} G(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\tfrac{e^{-t}}{1-t}\right).$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\tfrac{1}{1-t}\right). \tag{2.21}$$

On dérive les deux fonctions suivantes :

$$f(t) = e^{-t} \quad et \quad g(t) = \frac{1}{1-t},$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(e^{-t}\right)' &= -e^{-t} \\
\left(e^{-t}\right)'' &= \left(-e^{-t}\right)' = (-1)^2 e^{-t} \\
\left(e^{-t}\right)''' &= \left((-1)^2 e^{t}\right)' = (-1)^3 e^{-t} \\
&\vdots \\
\left(e^{-t}\right)^{(k)} &= (-1)^k e^{-t}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{1-x}\right)' &= (1-t)^{-1} = -(1-t)^{-2} \\
\left(\tfrac{1}{1-t}\right)'' &= (-(1-t)^{-2})' = 2(1-t)^{-3} \\
\left(\tfrac{1}{1-t}\right)''' &= (2(1-t)^{-3})' = (-6)(1-t)^{-4} \\
&\vdots \\
\left(\tfrac{1}{1-t}\right)^{(k)} &= k!(1-t)^{-k-1} = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}},
\end{aligned}$$

donc la formule (2.21) devient :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{(n-k)!}{(1-t)^{1+n-k}} \\
&= \frac{e^{-t}}{1-t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \left(\tfrac{1}{1-t}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d^n}{dt^n}G(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}D_n\left(\tfrac{1}{1-t}\right).$$

De plus, le passage à la déterminant et la formule (2.19) donnent :

$$\begin{aligned}\det\left(\tfrac{d^{i+j-2}}{dt^{i+j-2}}G(t)\right)_{i,j=1,2,\ldots,n} &= \det\left(\tfrac{e^{-t}}{1-t}D_{i+j-2}\left(\tfrac{1}{1-t}\right)\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}\\ &= \left(\tfrac{e^{-t}}{1-t}\right)^n \det\left(D_{i+j-2}\left(\tfrac{1}{1-t}\right)\right)_{i,j=1,2,\ldots n}\\ &= \left(\tfrac{e^{-t}}{1-t}\right)^n \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right)^2}{(t-1)^{n(n-1)}}.\end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$\det\left(D_{i+j-2}\left(\tfrac{1}{1-t}\right)\right)_{i,j=1,2\ldots n} = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2}{(t-1)^{n(n-1)}}.$$

Posons $x = 1/(1-t)$, on trouve le résultat suivant

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} D_0(x) & D_1(x) & D_2(x) & \ldots & D_n(x)\\ D_1(x) & D_2(x) & D_3(x) & \ldots & D_{n+1}(x)\\ D_2(x) & D_3(x) & D_4(x) & \ldots & D_{n+2}(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ D_n(x) & D_{n+1}(x) & D_{n+2}(x) & \ldots & D_{2n}(x)\end{vmatrix} &= \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 x^{n(n-1)}(-1)^{n(n-1)}\\ &= \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 x^{n(n-1)}.\end{aligned}$$

Donc la formule (2.16) est vérifiée.

3

Transformations de Hankel

Dans ce dernier chapitre, on donne la transformation binomiale et la transformation de Stirling généralisée et leurs déterminants de Hankel. En suite, on montre que ces déterminants sont invariants par la transformation binomiale (l'opérateur de convolution) et inversement pour la transformation de Stirling généralisée [6, 8, 14].

3.1 Opérateurs de convolution

Pour $a \in A$ et $\alpha \in F(\mathbb{N}, A)$, on définit l'opérateur de convolution $T^a\alpha \in F(\mathbb{N}, A)$ par :

$$(T^a\alpha)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\alpha_k$$

et on vérifie que $T^aT^b = T^{a+b} \quad (a, b \in A)$. Cette action préserve les déterminants de Hankel :

Théorème 3.1 *Si H_n est la matrice de Hankel (d'ordre n) associée à $\alpha \in F(\mathbb{N}, A)$, alors la matrice de Hankel (d'ordre n) associée à la convolution $T^a\alpha \in F(\mathbb{N}, A)$ est*

$$H_{a,n} = SH_nS^t \qquad avec \qquad S = S_n(a) = \left(\binom{i}{j}a^{i-j}\right)_{0\le i,j\le n}$$

où S^t la matrice transposée de S.

En particulier, $\det H_{a,n} = \det H_n$ *ne dépend pas de $a \in A$.*

Preuve. Par calcul direct, nous avons

$$\begin{aligned}(SHS^t)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} S_{jk} \sum_{l=0}^{n} S_{il}H_{lk},\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{j}{k} a^{j-k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{i}{l} a^{i-l}\alpha_{l+k}.\end{aligned}$$

En posant $m = k + l$ et en utilisant la formule de convolution de Vandermonde, on obtient

$$\begin{aligned}(SHS^t)_{ij} &= \sum_{m\ge 0} \sum_{k=0}^{m} \binom{j}{k} \binom{i}{m-k} a^{i+j-m}\alpha_m,\\ &= \sum_{m\ge 0} \binom{i+j}{m} a^{i+j-m}\alpha_m,\end{aligned}$$

autrement dit

$$\begin{aligned}(SHS^t)_{ij} &= (T^a\alpha)_{i+j}\\ &= (H_{a,n})_{ij}.\end{aligned}$$

■

De manière plus générale, on a vu (Théorème 3.1) que les déterminants de Hankel engendrés par une suite :

$$P_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} P_k(x),$$

ne dépendant pas de $a \in A$ et coïncident donc avec ceux de la suite

$$P_{0,n}(x) = P_n(x) \quad (polynôme\,de\,Poisson - charlier).$$

Par exemple, les polynômes de dérangement $D_n(x)$ s'obtiennent à partir de

$$P_n(x) = n!x^n, \quad et \quad a = 1.$$

C'est-à-dire :

$$P_{1,n}(x) = D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! x^k. \tag{3.1}$$

D'après le Théorème 3.1, on trouve que

$$\det(D_{i+j})_{0\le i,j\le n} = \det((i+j)!x^{i+j})_{0\le i,j\le n}. \tag{3.2}$$

Dans la partie suivante, des algorithmes sont développés pour la transformation de Stirling et la transformation de Stirling inverse ; plus précisément, nous étudions une classe de suite satisfaisant une récurrence à trois termes. On donne une identité générale qui généralise la transformée de Stirling [14].

On rappelle que la transformation de Stirling d'une suite (a_n) est la suite (b_n) donnée par :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} a_k \tag{3.3}$$

et la transformation inverse est donnée par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) b_k. \tag{3.4}$$

3.2 Transformation de Stirling généralisée

Étant donné une suite $a_m = a_{0,m} (m \ge 0)$, on construit une matrice infinie $S = (a_{n,m})$ comme suit : la première ligne de la matrice est la suite initiale $a_{0,m}$, la première colonne est appelée la suite finale $b_n = a_{n,m} \quad (n \ge 0)$, et chaque entrée $a_{n,m}$ est donnée récursivement par

$$a_{n+1,m} = a_{n,m+1} + m a_{n,m}. \tag{3.5}$$

inversement, on commence par la suite finale, la matrice S peut être remplir par la relation de récurrence

$$a_{n,m+1} = a_{n+1,m} - m a_{n,m}. \tag{3.6}$$

3.2.1 Les identités combinatoires

Théorème 3.2 *[14] Soit $(a_{0,m})_{m\geq 0}$ une suite initiale, on définit la matrice S par (3.5). Alors, les entrés de la matrice infinie S sont données par :*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m a_{0,m+k}. \tag{3.7}$$

Preuve. La preuve se fait par induction sur n. Si $n = 0$ le résultat est vrai. D'après la formule (3.5), on trouve :

$$\begin{aligned}
a_{n,m+1} + ma_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m+1 \atop k+m+1} \right\}_{m+1} a_{0,m+k+1} + m \left\{ {n+m \atop m} \right\}_m a_{0,m} \\
&\quad + m \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m a_{0,m+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m+1 \atop k+m+1} \right\}_{m+1} a_{0,m+k+1} + m \left\{ {n+m \atop m} \right\}_m a_{0,m} \\
&\quad + m \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ {n+m \atop k+m+1} \right\}_m a_{0,m+k+1} \\
&= \left\{ {n+m+1 \atop n+m+1} \right\}_{m+1} a_{0,m+n+1} + \left\{ {n+m+1 \atop n+m} \right\}_{m+1} a_{0,m+n} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ {n+m+1 \atop k+m+1} \right\}_{m+1} a_{0,m+k+1} \\
&\quad + m \left\{ {n+m \atop m} \right\}_m a_{0,m} + m \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ {n+m \atop k+m+1} \right\}_m a_{0,m+k+1}.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de récurrence des nombres r-Stirling et après quelques réarrangements, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_{n,m+1} + ma_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+m+1 \atop k+m} \right\}_m a_{0,m+k} \\
&= a_{n+1,m}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3 *[14] Étant donné une suite finale $(a_{n,0})_{n\geq 0}$, définit la matrice S par (3.6). Alors, les entrées de la matrice infinie S sont données par :*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} s(m,k) a_{n+k,0}. \tag{3.8}$$

Preuve. La preuve se fait par induction sur n. Si $n = 0$ le résultat est vrai. De (3.6) on a :

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m} - ma_{n,m} &= \sum_{k=1}^{m+1} s(m,k-1)a_{n+k,0} - m\sum_{k=0}^{m} s(m,k)a_{n+k,0} \\
&= s(m,m)a_{n+m+1,0} + \sum_{k=0}^{m} s(m,k-1)a_{n+k,0} \\
&- ms(m,0)a_{n,0} - m\sum_{k=1}^{m} s(m,k)a_{n+k,0} \\
&= s(m,m)a_{n+m+1,0} + \sum_{k=0}^{m} \Big(s(m,k-1) - mS(m,k)\Big)\, a_{n+k,0} \\
&- ms(m,0)a_{n,0} \\
&= a_{n,m+1}.
\end{aligned}$$

■

D'après les deux théorèmes précédents, il en résulte cette identité qui représente la transformation de Stirling généralisée d'écrite dans ce corollaire.

Corollaire 1 *[14] On a*

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)b_{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n+m \\ k+m \end{Bmatrix}_m a_{m+k}. \tag{3.9}$$

Pour $m = 0$ et pour $n = 0$, on aura respectivement la transformation de Stirling classique (3.3) et la transformation de Stirling inverse (3.4). Maintenant, et à la fin de ce chapitre on donne le déterminant de Hankel pour la transformation de Stirling généralisée.

Pour la transformation de Stirling, on a le résultat suivant :

Théorème 3.4 *Pour $n \geq 0$, on a :*

$$\det(a_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = \det(b_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}.$$

Preuve. Nous pouvons écrire

$$\det(b_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & a_{2,0} & \dots & a_{n,0} \\ a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} & \dots & a_{n+1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n+1,0} & a_{n+2,0} & \dots & a_{2n,0} \end{vmatrix},$$

on applique (3.6), le déterminant devient :

$$\det(b_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & a_{2,0} - a_{1,0} & a_{3,0} - a_{2,0} - 2(a_{2,0} - a_{1,0}) & \dots \\ a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} - a_{2,0} & a_{4,0} - a_{3,0} - 2(a_{3,0} - a_{2,0}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n+1,0} & a_{n+2,0} - a_{n+1,0} & a_{n+3,0} - a_{n+1,0} - 2(a_{n+2,0} - a_{n+1,0}) & \dots \end{vmatrix}.$$

En utilisant (3.8), on obtient

$$\det(b_{i+j})_{0\leq i,j\leq n} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}. \end{vmatrix},$$

d'ou le résultat.

■

Le corollaire suivant donne un résultat important sur le déterminant de Hankel de la transformation de Stirling généralisée.

Corollaire 2 *[14] Pour $n \geq 0$, on a*

$$\det\left(b_{i+j}\right)_{0\leq i,j\leq n} = \det\left(\sum_{k=0}^{i} \left\{ {i+j \atop k+j} \right\}_{j} a_{k+j}\right)_{0\leq i,j\leq n}. \tag{3.10}$$

Conclusion

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons décrit le lien entre combinatoire et algèbre par le biais de quelques exemples liants les séries formelles (les nombres) et les matrices de Hankel. D'ou nous avons en déduit que le déterminant de Hankel se calcul par une diversité de cas selon les types de suites et leurs fonctions génératrices .

Bibliographie

Bibliographie

[1] P. Agarwal. et al, eds. Advances in mathematical inequalities and applications. Springer Singapore, 2018.

[2] A. Z. Broder. The r-Stirling numbers. Discrete Math, 49(3) :241–259, 1984.

[3] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second Kind-II. Fibonacci Quart, 18(3) :242-257, 1980.

[4] L. Comtet. Advanced combinatorics. D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, enlarged edition, 1974. The art of finite and infinite expansions.

[5] R. Ehrenborg. The Hankel determinant of exponential polynomials. The American Mathematical Monthly 107.6 :557-560, 2000.

[6] J. W. Layman. The Hankel transfor and some of its properties. J. Integer Seq., 4, No. 1, art. 01.1.5, 11, 2001.

[7] G. Guettai. Autour de certaines propriétés analytiques des polynômes classiques. Thèse de Doctorat en Sciences, USTHB.

[8] A. Junod. Congruences par l'analyse p-adique et le calcul symbolique. Thèse de Doctorat en Sciences, Université de Neuchâtel, 2003.

[9] C. Radoux. Addition Formulas and Hankel Determinants for some classical Sequences of Integers. Journal of Comput. and Applied Math. 115, p.471-477, 2000.

[10] C. Radoux. Calcul effectif de certains déterminants de Hankel. Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, série B31, p.49-55, 1979.

[11] C. Radoux. Déterminant de Hankel Construit sur des Polynômes Liés aux Nombres de Dérangements. Eur. J. Comb, 12.4 :327-329, 1991.

[12] C. Radoux. The Hankel Determinant of Exponential Polynomials : A very short Proof and a new Result concerning Euler Numbers. American Math. Monthly 109, p.277-278, 2002.

[13] M. Rahmani. Étude Combinatoire et Analytique des Suites et des Polynômes. Thèse de Doctorat en Scienes, USTHB, 2013.

[14] M. Rahmani. Generalized Stirling transform. Miskolc Math. Notes, 15(2) :677–690, 2014.

[15] J. Remmel. A note on a recursion for the number of derangements. Europ, J. Combinatorics vol, 4, p. 371-374.

[16] V. Robert and D. Paul. Determinants and their applications in mathematical physics. Springer Science vol 134, 2006.

[17] M. Sebaoui. Sur Quelques Propriétés Analytiques des Polynômes Classiques. Thèse de Doctorat L M D, Université de Médéa, 2019.