RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par

TERKMANE SABRINA

YAGOUB KHADRA SONIA

DÉTERMINANTS ET PERMANENTS DE CERTAINES MATRICES

Soutenu Publiquement, le 13 Juin 2023, devant le jury composé de :

Présidente :	Dr. S. KOUIDER AIAD	$M.A.A$	Université de Médéa
Promotrice :	Dr. N. R. AIT-AMRANE	$M.C.B$	Université de Médéa
Co-Promotrice :	Dr. G. GUETTAI	$M.C.B$	Université de Médéa
Examinatrice :	Dr. F. BOULARIAH	$M.A.A$	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2022-2023

Remerciements

Avant tout nous remercions ALLAH qui nous a donné le courage et la patience de terminer ce modeste travail.

Nous tenons également à remercier nos promotrices Mesdames N. R. AIT-AMRANE et G. GUETTAI, pour leurs précieux conseils, leurs encouragements et leurs disponibilités tout au long de notre travail.

Nos vifs remerciements vont aussi aux membres du jury Mesdames, la présidente S. KOUIDER AIAD et l'examinatrice F. BOULARIAH, pour l'honneur qu'elles nous ont accordé en acceptant de faire partie de notre jury.

Enfin, nous saluons tous les professeurs qui nous on formé pendant tout notre cursus universitaire.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Á Mon très chèr père "Zoubir" qui peut être fier des résultat des longues années de sacrifices et de privation, pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; je le merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent qu'il m'a apporté.

Á Ma très chère mère "Hakima" qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

Je dédie ce travail à ma très chère sœur :

"Radjaa".

Á Toutes mes chères amies.

Ainsi que toute la promotion R.O. 2023

Á tous ceux qui m'ont soutenu et m'ont donné la force de continuer. . . .

★ ★ ★ **Sabrina** ★ ★ ★

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Á Mon très chère père "Ahmed cherif" qui peut être fier des résultat des longues années de sacrifices et de privation, pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; je le merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent qu'il m'a apporté.

Á Ma très chère mère "Fadila" qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

Je dédie ce travail à mon frère :

"Sidali".

Á une personne très spéciale pour moi "Mohamed Soualhi".

Á tous ceux qui m'ont soutenu et m'ont donné la force de continuer. . . .

★ ★ ★ **Sonia** ★ ★ ★

Table des matières

Remerciements i

Dédicace ii

Dédicace iii

Résumé vi

Table des notations viii

Introduction 1

1 Suites de Fibonacci et Lucas 3

1.1 Suite numérique . . . 3
1.2 Définition explicite d'une suite . . . 3
1.3 Définition par récurrence . . . 4
1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre k . . . 5
1.5 Suite de Fibonacci . . . 5
1.6 Suite de Lucas . . . 9
1.7 Polynômes de Fibonacci et de Lucas . . . 10

2 Suites r-Fibonacci et r-Lucas 13

2.1 Suites r-Fibonacci et r-Lucas . . . 13
2.2 Polynômes r-Fibonacci et r-Lucas . . . 14
2.3 Polynôme r-Fibonacci et r-Lucas bivariés . . . 14

3 Déterminants et Permanents de certains matrices **20**

3.1 Notions fondamentales et définitions : 20

3.2 Matrices de Toeplitz 25

3.3 Matrice de Hessenberg 30

3.4 Matrice de Toeplitz-Hessenberg 31

3.5 Déterminant et permanent de matrice de Toeplitz-Hessenberg 32

3.6 Déterminant et Permanent des matrices de Toeplitz-Hessenberg pour les suites Fibonacci et Lucas généralisés 33

3.7 Déterminant et Permanent des matrices de Toeplitz-Hessenberg pour les suites r-Fibonacci et r-Lucas 44

Conclusion **49**

Bibliographie **50**

Résumé

Dans ce travail, à partir de divers articles, nous avons étudié et calculé de manière plus détaillée des matrices de Toeplitz-Hessenberg et donné une méthode pour calculer le déterminant et le permanent de cette matrice, associée à la suite de Fibonacci et Lucas (resp, r-Fibonacci, r-Lucas). Nous dérivons des formes explicites pour le déterminant et le permanent des matrices de Toeplitz-Hessenberg ayant des nombres de Fibonacci bivariés comme entrées, les formes explicites sont utilisées pour dériver des identités pour les sommes de produits de nombres de Fibonacci. A la fin de ce mémoire, on donne quelque application sur le calcule de déterminant et le permanent de la matrice Toeplitz-Hessenberg.

Le but de ce travail est d'étudier les matrices de Toeplitz-Hessenberg qui assiste la résolution des systèmes de grand taille, puis l'importance de la relation de ces matrices avec les suites de Fibonacci et Lucas (r-Fibonacci et r-Lucas).

Mots-clés : Suite de Fibonacci, suite Lucas, suite r-Fibonacci, suite r-Lucas, matrice de Toeplitz-Hessenberg, déterminants de la matrice Toeplitz-Hessenberg, permanent de la matrice Toeplitz-Hessenberg.

Table des notations

W_n	Suite numérique.
F_n	Suite de Fibonacci.
L_n	Suite de Lucas.
U_n	Suite de Fibonacci généralisée.
V_n	Suite de Lucas généralisée.
U_n^r	Suite r-Fibonacci généralisée.
V_n^r	Suite r-Lucas généralisée.
$F_{p,q}(x)$	Polynôme de Fibonacci.
$L_{p,q}(x)$	Polynôme de Lucas.
$F_n^{(r)}$	Suite r-Fibonacci.
$L_n^{(r)}$	Suite r-Lucas.
$F_n^{(r)}(x)$	Polynôme r-Fibonacci à une seule variable.
$L_n^{(r)}(x)$	Polynôme r-Lucas à une seule variable.
$F_n^{(r)}(x,y)$	Polynôme r-Fibonacci bivarié.
$L_n^{(r)}(x,y)$	Polynôme r-Lucas bivarié.
I_n	Matrice identité.
T_n	Matrice de Toeplitz.
Sng	La signature d'une matrice.
$\mathbb{K}$	Le corps d'une matrice.
det	Déterminant d'une matrice.
per	Permanent d'une matrice.

Introduction

Les suites de Fibonacci et Lucas sont deux suites de nombres d'entiers où chaque terme est la somme des deux termes qui le précédent. Elles commence généralement par les termes initiaux 0 et 1(resp. 1, 1) et ses premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ $(resp. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Cette suite nous la rencontrons fréquemment dans la nature, par exemple dans la disposition des graines dans une fleur de tournesol. Aussi nous remarquons son existence chez l'être humain et exactement sur le visage, également chez les animaux comme par exemple les fourmis, abeilles, en architecture, et même dans la musique.

Pour les différentes raison évoquées plus haut nous choisissons de préparer ce modeste mémoire de Master 2 sur cette fameuse suite dont son contenu est comme suit.

Dans le premier chapitre nous avons parlé des suites numériques, les nombres de Fibonacci en donnant quelques définitions, à savoir : nombre de Fibonacci, nombre d'or, suite de Lucas, quelque propriétés des suites de Fibonacci et on donne la définition des suites de Fibonacci et Lucas bivariées.

Dans le deuxième chapitre on étudie les suites de r-Fibonacci et r-Lucas ainsi que les suites des polynômes r-Fibonacci et r-Lucas bivariées, comme nous présentons quelques exemples.

Dans plusieurs domaine scientifiques comme les Mathématiques, Physique, Biologies... il y a des systèmes d'équations linéaires de très grande taille, la résolution de ces systèmes appartient aux problèmes les plus anciens en mathématiques et ceux-ci apparaissent dans presque tous les domaines scientifiques. C'est pour cela qu'on cherche à utiliser la structure de la matrice qui facilite et réduit considérablement le temps de calcul.

Le chapitre trois est une généralité sur les matrices de Toeplitz-Hessenberg. On rappelle, dans ce chapitre la définition générale d'une matrice, la définition d'une matrice carrée et non carrée,

l'origine et la définition d'une matrice structurées dite matrice de Toeplitz-Hessenberg et quelques propriétés, puis on donne la définition du déterminant et du permanent d'une matrice de Toeplitz-Hessenberg et quelques méthodes utilisés pour les calculer.

1

Suites de Fibonacci et Lucas

1.1 Suite numérique

Définition 1.1.1 *Une suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque élément n de $\mathbb{N}$ associe un unique élément noté w_n, appelé terme d'indice n de la suite $(W_n)_{n\geq 0}$.*
Une suite peut être définie de manière explicite i,e la valeur de chaque terme est directement donnée en fonction de n ou par récurrence i,e la valeur d'un terme est donnée en fonction du terme précédent.

1.2 Définition explicite d'une suite

Une suite est définie de manière explicite lorsque l'on connaît directement la valeur de n'importe quel terme w_n en fonction de n.

Définition 1.2.1 *Une suite $(W_n)_{n\geq 0}$ définie sous la forme explicite est donnée par son terme général W_n exprimé en fonction de n.*
On introduit alors une fonction f telle que : $\forall n \geqslant n_0, W_n = f(n)$.

Exemple 1.1 *Soit la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ définie par : $W_n = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$, cette suite est définie de façon explicite.*
Pour tout entier naturel n, on a : $W_n = f(n)$ où f est la fonction affine,
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 1.$
Le calcule de chaque terme est direct. Par exemple, pour le terme d'indice 50 :

$$W_{50} = f(50) = 2 \times 50 - 1 = 99.$$

1.3 Définition par récurrence

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut pas calculer directement la valeur du terme W_n en fonction de n. On sait uniquement calculer la valeur du terme W_n en fonction des termes qui le précèdent, ou même des fois de plusieurs termes qui le précèdent.

Définition 1.3.1 *Une suite $(W_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence est donnée par son terme initial W_{n_0} et une relation reliant chaque terme au terme précédents. On introduit alors une fonction f telle que :*

$$\begin{cases} W_{n_0} \in \mathbb{R}, \\ W_{n+1} = f(w_n), \quad n \geq n_0. \end{cases}$$

Exemple 1.2 *Prenons la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ donnée par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} W_0 = 1, \\ W_{n+1} = 3W_n + 1, \end{cases}$$

on peut alors calculer les termes successifs de proche en proche :

$$\begin{cases} W_0 = 1, \\ W_1 = 3W_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4, \\ W_2 = 3W_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13, \\ W_3 = 3W_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40. \end{cases}$$

Notons qu'une suite est définie par sa relation de récurrence et son terme initial.
Il existe une infinité des suites, selon le point de départ W_{n_0} que l'on prend.

Remarque 1 *La relation de récurrence peut être plus complexe, un terme pouvant dépendre non seulement de celui qui le précède mais de plusieurs termes qui le précèdent.*

Par exemple, prenons une suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

avec des conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

A partir de ces deux premiers termes, on peut calculer de proche en proche les termes suivants,

$$\begin{cases} F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \\ F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2. \end{cases}$$

On obtient la suite $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.$

Remarque 2 *Notons qu'il est obligatoire dans le cas présent de se donner deux termes de départ, un seul ne pouvant suffire pour avoir une suite unique.*

1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre k

Définition 1.4.1 *On appelle une suite récurrente linéaire d'ordre k, toute suite à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}, (\mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par une relation de récurrence linéaire de la forme suivante :*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k. \tag{1.2}$$

avec les conditions initiales $u_0 = r_0; u_1 = r_1; \ldots; u_{k-1} = r_{k-1},$ et $a_1; a_2; \ldots; a_k$ sont scalaires de $\mathbb{K}$.

1.5 Suite de Fibonacci

1.5.1 Nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci disposent d'une infinité de propriétés et caractéristique. La suite de Fibonacci apparaît est utilisé dans les mathématiques, notamment dans le dénombrement est appliqué aux sciences, à la musique, elle est présente aussi dans la nature d'une manière fréquente,... etc. Les nombres de Fibonacci sont les éléments de la suite des entiers positifs suivants

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots \tag{1.3}$$

où chaque nombre de la suite est la somme des deux termes précédents.

Définition 1.5.1 *La Suite de Fibonacci, notée $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par :*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0, \tag{1.4}$$

avec les conditions initiales :

$$F_0 = 0\ et\ F_1 = 1.$$

La formule précédente nous permet d'étendue la suite de Fibonacci vers $\mathbb{Z}$. En effet, la réécriture de (1.4) sous la forme :

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Nous permet d'étendre les termes de la suite de Fibonacci vers la gauche, c'est-à-dire de calculer les termes d'indice négatif.

La définition précédente permet de prolonger la suite (1.3) vers la gauche en incluant les termes F_{-n}, qui se traduit par

$\ldots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33, \ldots$

Proposition 1.5.1 *Les termes d'indices négatifs dans la suite de Fibonacci étendue sont donnés par :*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \qquad n \geqslant 0, \tag{1.5}$$

la suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaires a coefficients constants homogènes d'ordre 2.

L'équation caractéristique de (1.4) est $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ qui admet comme racines :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ , \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

la solution générale de cette équation :

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On utilise les conditions initiales : $F_0 = 0\ et\ F_1 = 1$, pour calculer C_1 et C_2

on obtient :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

alors :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.6}$$

Cette formule est dite la formule de Binet.

Autrement dit :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \in \mathbb{N}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

α est appelé le nombre d'or. β est le conjugué de α. [15]

1.5.2 Quelques propriétés des suites de Fibonacci

Proposition 1.5.2 *Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ la suite de Fibonacci, on a les identités suivantes :*

i) Pour $n > 0$, on a

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

ii) Pour $n, r \in N$, on a :

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r.$$

iii)Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

[15]

Preuve. i)Pour tout $n \geq 0$, posons : $W_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.

Tout d'abord

$$W_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 1 \times 0 - (1)^2 = -1.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2, \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}), \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}, \\ &= -W_n. \end{aligned}$$

La suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $W_1 = -1$ et de raison -1.

Donc : $W_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$, c'est à dire :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

ii)Pour $n \geq 0$ posons :

$$W_n = F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n.$$

Tout d'abord

$$W_0 = F_rF_1 - F_{r+1}F_0 = F_r \times 1 - F_{r+1} \times 0$$

$$W_0 = F_r.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= F_{n+1+r}F_{n+2} - F_{n+r+2}F_{n+1}, \\ &= F_{n+1+r}(F_{n+1} + F_n) - (F_{n+r+1} + F_{n+r})F_{n+1}, \\ &= F_{n+1+r}F_{n+1} + F_{n+1+r}F_n - F_{n+r+1}F_{n+1} - F_{n+r}F_{n+1}, \\ &= F_{n+1+r}F_n - F_{n+r}F_{n+1}, \\ &= -W_n. \end{aligned}$$

La suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $W_0 = F_r$ et de raison -1.
Donc : $W_n = (-1)^n F_r$, pour tout $n \geq 0$, c'est à dire :

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r.$$

iii) De la forme de Binet (1.6), pour $n, r \in N$

$$\begin{aligned} F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \beta^{n+r}\alpha^{n-r} + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n - \alpha^{2n} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r} + \beta^{2n}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(-2(\alpha\beta)^n + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r}) \\ &= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\left(-2 + \frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r}\right) \\ &= \frac{\alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)^2}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2, \\ &= (-1)^{n-r}F_r^2. \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}{4} \\ &= \frac{1 - 5}{4} \\ &= \frac{-4}{4} \\ \alpha\beta &= -1 \end{aligned}$$

donc :

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

■

[15]

1.6 Suite de Lucas

1.6.1 Nombres de Lucas

Les nombres de Lucas est définit par :

$$1, 3, 4, 11, \ldots$$

Définition 1.6.1 *La suite de Lucas est une variante de la suite de Fibonacci. Notée* $(L_n)_{n\geq 0}$ *est définie par :*

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \qquad n \geqslant 0,$$

avec les conditions initiales :

$$L_0 = 2 \; et \; L_1 = 1.$$

On démontre facilement par récurrence, la relation suivante entre les nombre de Fibonacci et Lucas :

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \qquad n \in N,$$

Preuve. Par récurrence sur n

initialisations

(n=1) : $L_1 = 1$ et $F_0 + F_2 = 1$.

(n=2) : $L_2 = 3$ et $F_1 + F_3 = 3$. Hypothèse de récurrence :

au rang n :

$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

au rang n+1 :

$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$.

au rang n+2 :

$F_{n+1} + F_{n+3} = F_n + F_{n-1} + F_{n+2} + F_{n+1}$. (Définition de la suite de Fibonacci)

$F_{n+1} + F_{n+3} = (F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_n + F_{n+2})$. (Associativité, commutativité)

$F_{n+1} + F_{n+3} = L_n + L_{n+1}$. (Hypothèse de récurrence)

$F_{n+1}+F_{n+3} = L_{n+2}$. (Définition des nombres de Lucas)

Le terme général L_n de la suite des nombres de Lucas s'exprime en fonction du nombre d'or par la formule suivante :

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.7}$$

1.6.2 Suite de Fibonacci et Lucas bivariée

Dans [3] la suite de Fibonacci bivariée est une suite de Fibonacci généralisée d'ordre deux. Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, la suite de Fibonacci généralisée d'ordre deux, notée $(U_n)_{n\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

$$U_{n+1} = pU_{n+2} + qU_n. \tag{1.8}$$

Avec les conditions initiales :

$$U_0 = 0, U_1 = 1.$$

On remarque que lorsque $p = 1$ et $q = 1$, la suite ci-dessus est la suite de nombres de Fibonacci elle-même.

Remarque 3 *Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :*

$$U_{n+2} \ = \ \alpha U_{n+1} + \beta U_n \ , \qquad \alpha, \ \beta \ \in \mathbb{R}.$$

ou plus généralement

$$aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

La suite de Lucas généralisée d'ordre deux, notée $(V_n)_{n\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

$$V_{n+1} = pV_{n+2} + qV_n. \tag{1.9}$$

Avec les conditions initiales :

$$V_0 = 2, V_1 = p.$$

Si on prend $p = 1$ et $q = 1$, la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ génère les nombres de Lucas.

1.7 Polynômes de Fibonacci et de Lucas

Définition 1.7.1 *Les polynômes de Fibonacci sont les polynômes notés $F_n(x)$ et qui sont définis par la récurrence à trois terme suivante :*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ n = 0, \\ 1 \ \ si \ \ n = 1, \\ xF_{n-1} + F_{n-2} \ \ si \ \ n \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.10}$$

On note que la récurrence (1.10) donne les nombres de Fibonacci classique lorsque $x = 1$.

Exemple 1.3 *Les premiers polynômes de Fibonacci sont :*

$$\begin{cases} F_0(x) = 0, \\ F_1(x) = 1, \\ F_2(x) = x, \\ F_3(x) = x^2 + 1, \\ F_4(x) = x^3 + 2x, \\ F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1. \end{cases}$$

D'autre part, les polynômes de Lucas étudiés par M.Bicknell en 1970 notés $L_n(x)$ et définis :

$$L_n(x) = \begin{cases} 2 \ \ si \ \ n = 0, \\ x \ \ si \ \ n = 1, \\ xL_{n-1} + L_{n-2} \ \ si \ \ n \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.11}$$

Exemple 1.4 *Les premiers polynômes de Lucas sont :*

$$\begin{cases} L_0(x) = 2, \\ L_1(x) = x, \\ L_2(x) = x^2 + 2, \\ L_3(x) = x^3 + 3x, \\ L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2, \\ L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x. \end{cases}$$

1.7.1 Polynômes de Fibonacci et de Lucas bivariés

Définition 1.7.2 *Soient p_x et q_x deux polynômes à coefficients réels. On définit les polynômes (p,q)-Fibonacci et (p,q)-Lucas notés respectivement par $F_{(p,q)}(x)$ et $L_{(p,q)}(x)$ telle que :*

$$F_{(p,q),n+2}(x) = p(x)F_{(p,q),n+1}(x) + q(x)F_{(p,q),n}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.12}$$

avec les conditions initiales : $F_{(p,q),0}(x) = 0$ et $F_{(p,q),1}(x) = 1$.
Et

$$L_{(p,q),n+2}(x) = p(x)L_{(p,q),n+1}(x) + q(x)L_{(p,q),n}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.13}$$

avec les conditions initiales $L_{(p,q),0}(x) = 2$ et $L_{(p,q),1}(x) = p(x)$.

Dans [14], le cas q(x)=1 dans les équations (1.12) et (1.13) étudie respectivement au $h(x)$ -polynôme de Fibonacci et $h(x)$ -polynôme de Lucas dus à Nalli et Haukkanen [12].

Exemple 1.5 *Les premiers polynômes bivariés de Fibonacci :*

$$\begin{cases} F_0(x) = 0, \\ F_1(x) = 1, \\ F_2(x) = x, \\ F_3(x) = x^2 + y, \\ F_4(x) = x^3 + 2xy, \\ F_5(x) = x^4 + y^2 + 3x^2y. \end{cases}$$

Exemple 1.6 *Les premiers polynômes bivariés de Lucas :*

$$\begin{cases} L_0(x) = 2, \\ L_1(x) = x, \\ L_2(x) = x^2 + 2y, \\ L_3(x) = x^3 + 3xy, \\ L_4(x) = x^4 + 2y^2 + 4x^2y, \\ L_5(x) = x^5 + 5x^3y + 5xy^2. \end{cases}$$

2

Suites r-Fibonacci et r-Lucas

2.1 Suites r-Fibonacci et r-Lucas

Les suites r-Fibonacci et r-Lucas sont des généralisations des suites de Fibonacci et Lucas. Elles ont été introduites par le mathématicien français Édouard Lucas au 19^{me} siècle. Les suites de Fibonacci et Lucas sont des exemples particuliers de ces suites plus générales.
Les suites r-Fibonacci et r-Lucas ont également des relations intéressantes avec d'autres domaines des mathématique, tels que la géométrie, la combinatoire et la théorie des nombres.
La suite r-Fibonacci $(F_n^{(r)})_{n\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence :

$$F_n^{(r)} = \begin{cases} 0 \quad si \quad n = 0, \\ 1 \quad si \quad n = 1, \\ F_{n-1}^{(r)} + F_{n-r-1}^{(r)} \quad si \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Si $r = 1$, on obtient la suite de Fibonacci classique.
La suite r-Lucas $(L_n^{(r)})_{n\geq 0}$ est définie de manière similaire :

$$L_n^{(r)} = \begin{cases} 2 \quad si \quad n = 0, \\ 1 \quad si \quad n = 1, \\ L_{n-1}^{(r)} + L_{n-2}^{(r)} \quad si\ n \geq 2. \end{cases}$$

Si $r = 1$, on obtient la suite de Lucas classique.

2.2 Polynômes r-Fibonacci et r-Lucas

Les polynôme de r-Fibonacci sont les polynômes notés $F_n^{(r)}$ et qui définis par la récurrence à trois terme suivant :

$$F_n^{(r)}(x) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ n = 0, \\ 1 \ \ si \ \ n = 1, \\ xF_{n-1}^{(r)} + F_{n-2}^{(r)} \ \ si \ \ n \geq 2. \end{cases}$$

Les polynôme r-Lucas sont les polynôme notés $L_n^{(r)}$ et qui définis par la récurrence à trois terme suivant :

$$L_n^{(r)}(x) = \begin{cases} 2 \ \ si \ \ n = 0, \\ x \ \ si \ \ n = 1, \\ xL_{n-1}^{(r)} + L_{n-2}^{(r)} \ \ si \ \ n \geq 2. \end{cases}$$

2.3 Polynôme r-Fibonacci et r-Lucas bivariés

Définition 2.3.1 *Pour tout entier $r \geqslant 1$ le polynôme r-Fibonacci bivarié $(F_n^{(r)}(x,y))_n$ noté par : $(F_n^r)_{n\geq 0}$ est défini par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_0^{(r)} = 0, F_k^{(r)} = x^{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ F_n^{(r)} = xF_{n-1}^{(r)} + yF_{n-r-1}^{(r)}, \quad n \geqslant r. \end{cases} \tag{2.1}$$

[1]

Définition 2.3.2 *Pour tous les entiers n, r, le polynôme r-Lucas bivarié noté par $(L_n^{(r)})_{n\geq 0}$ est défini par la récurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_0^{(r)} = 2, L_k^{(r)} = x^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ L_n^{(r)} = xL_{n-1}^{(r)} + yL_{n-r-1}^{(r)}, \quad n \geqslant r. \end{cases} \tag{2.2}$$

[1]

Remarque 4 *Pour $r = 1$, on obtient la suite de Fibonacci et de Lucas classiques.*
Pour $s = r$, on obtient la suite étudiée par Tuglu et al dans [13]
D'aprés [4], si $s = 0$, alors $(V_n^{(r,0)})_{n\geq 0}$ est la suite r-Fibonacci décalée $\left(U_n^{(r)}\right)_{n\geqslant 0}$.
Si $s = r$, $(V_n^{(r,r)})_{n\geq 0}$ est la suite r–Lucas bivariée $\left(L_n^{(r)}\right)$.
telle que :

$$U_n^{(r,s)} = xU_{n-1}^{(r,s)} + yU_{n-r-1}^{(r,s)}, \quad pour \ n > r,$$

et

$$V_n^{(r,s)} = xV_{n-1}^{(r,s)} + yV_{n-r-1}^{(r,s)}, \quad pour\ n > r.$$

D'après l'équation (2.2) on donne quelques termes de suites $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ pour $r = 5$:

Pour $s = 1$, $V_0^{(r,s)} = s + 1$ et $V_k^{(r,s)} = x^k$

on a :

$$\begin{cases} V_0 = 2, \\ V_1 = x, \\ V_2 = x^2, \\ V_3 = x^3, \\ V_4 = x^4, \\ V_5 = x^5, \\ V_6 = xV_5 + yV_0 = x(x^5) + y(2) = x^6 + 2y, \\ V_7 = xV_6 + yV_1 = x(x^6 + 2y) + y(x) = x^7 + 3xy, \\ V_8 = xV_7 + yV_2 = x(x^7 + 3xy) + y(x^2) = x^8 + 4x^2y, \\ V_9 = xV_8 + yV_3 = x(x^8 + 4x^2y) + y(x^3) = x^9 + 5x^3y. \end{cases}$$

Pour $s = 2$, on a :

$$\begin{cases} V_0 = 3, \\ V_1 = x, , \\ V_2 = x^2, \\ V_3 = x^3, \\ V_4 = x^4, \\ V_5 = x^5, \\ V_6 = xV_5 + yV_0 = x(x^5) + y(3) = x^6 + 3y, \\ V_7 = xV_6 + yV_1 = x(x^6 + 3y) + y(x) = x^7 + 4xy, \\ V_8 = xV_7 + yV_2 = x(x^7 + 4xy) + y(x^2) = x^8 + 5x^2y, \\ V_9 = xV_8 + yV_3 = x(x^8 + 5x^2y) + y(x^3) = x^9 + 6x^3y. \end{cases}$$

Pour $s = 3$, on a :

$$\begin{cases} V_0 = 4, \\ V_1 = x, \\ V_2 = x^2, \\ V_3 = x^3, \\ V_4 = x^4, \\ V_5 = x^5, \\ V_6 = xV_5 + yV_0 = x(x^5) + y(4) = x^6 + 4y, \\ V_7 = xV_6 + yV_1 = x(x^6 + 4y) + y(x) = x^7 + 5xy, \\ V_8 = xV_7 + yV_2 = x(x^7 + 5xy) + y(x^2) = x^8 + 6x^2y, \\ V_9 = xV_8 + yV_3 = x(x^8 + 6x^2y) + y(x^3) = x^9 + 7x^3y. \end{cases}$$

Pour $s = 4$, on a :

$$\begin{cases} V_0 = 5, \\ V_1 = x, \\ V_2 = x^2, \\ V_3 = x^3, \\ V_4 = x^4, \\ V_5 = x^5, \\ V_6 = xV_5 + yV_0 = x(x^5) + y(5) = x^6 + 5y, \\ V_7 = xV_6 + yV_1 = x(x^6 + 5y) + y(x) = x^7 + 5xy, \\ V_8 = xV_7 + yV_2 = x(x^7 + 5xy) + y(x^2) = x^8 + 6x^2y, \\ V_9 = xV_8 + yV_3 = x(x^8 + 6x^2y) + y(x^3) = x^9 + 7x^3y. \end{cases}$$

Pour $s = 5$, on a :

$$\begin{cases} V_0 = 6, \\ V_1 = x, \\ V_2 = x^2, \\ V_3 = x^3, \\ V_4 = x^4, \\ V_5 = x^5, \\ V_6 = xV_5 + yV_0 = x(x^5) + y(6) = x^6 + 6y, \\ V_7 = xV_6 + yV_1 = x(x^6 + 6y) + y(x) = x^7 + 7xy, \\ V_8 = xV_7 + yV_2 = x(x^7 + 7xy) + y(x^2) = x^8 + 8x^2y, \\ V_9 = xV_8 + yV_3 = x(x^8 + 8x^2y) + y(x^3) = x^9 + 9x^3y. \end{cases}$$

Les suites compagnons $(V_n^{(r,s)})$ généralisent certaines suites et polynômes classiques donnés dans le tableau suivant :

$s = 1$	$2, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 + 2y, x^7 + 3xy, x^8 + 4x^2y, x^9 + 5x^3y, \ldots$
$s = 2$	$3, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 + 3y, x^7 + 4xy, x^8 + 5x^2y, x^9 + 6x^3y, \ldots$
$s = 3$	$4, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 + 4y, x^7 + 5xy, x^8 + 6x^2y, x^9 + 7x^3y, \ldots$
$s = 4$	$5, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 + 5y, x^7 + 6xy, x^8 + 7x^2y, x^9 + 8x^3y, \ldots$
$s = 5$	$6, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 + 6y, x^7 + 7xy, x^8 + 8x^2y, x^9 + 9x^3y, \ldots$

TABLE 2.1 – Termes de suites $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ pour $r = 5$

Le tableau suivant représente quelque suites et polynômes inclus dans $(U_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$:

x	y	r	$F_n^{(r)}(x,y)$
x	y	1	$Polynôme\ de\ Fibonacci\ bivaris\ F_n(x,y)$
x	1	r	$r-Polynômes\ de\ Fibonacci\ F_n^{(r)}(x)$
x	1	1	$Polynôme\ de\ Fibonacci\ F_n(x)$
1	1	r	$r-Nombres\ de\ Fibonacci\ F^{(r)}(n)$
1	1	1	$Nombres\ de\ Fibonacci\ F_n$
$2x$	y	r	$r-Polynômes\ de\ Pell\ bivaris\ F_n^{(r)}(2x,y)$
$2x$	y	1	$Polynômes\ de\ Pell\ bivaris\ F_n(2x,y)$
$2x$	1	r	$p-Polynômes\ de\ Pell\ P_n^{(r)}(x)$
$2x$	1	1	$Polynômes\ de\ Pell\ P_n(x)$
2	1	1	$Nombres\ de\ Pell\ P_n$
x	$2y$	r	$r-Polynômes\ de\ Jacobsthal\ bivaris\ F_n^{(r)}(x,2y)$
x	$2y$	1	$Polynômes\ de\ Jacobsthal\ bivaris\ F_n(x,2y)$
1	$2y$	1	$Polynômes\ de\ Jacobsthal\ J_n(y)$
1	2	1	$Nombres\ de\ Jacobsthal\ J_n$

TABLE 2.2 – Suites classiques et polynômes inclus dans $(U_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$

Le tableau suivant représente quelque suites et polynômes inclus dans $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$:

x	y	r	$L_n^{(r)}(x,y)$
x	y	1	$Polynômes\ de\ Lucas\ bivaris\ L_n(x,y)$
x	1	r	$r-Polynômes\ de\ Lucas\ L_n^{(r)}(x)$
x	1	1	$Polynôme\ de\ Lucas\ L_n(x)$
1	1	r	$r-Nombres\ de\ Lucas\ L^{(r)}(n)$
1	1	1	$Nombres\ de\ Lucas\ L_n$
$2x$	y	r	$r-Polynômes\ de\ Pell-Lucas\ bivaris\ L_n^{(r)}(2x,y)$
$2x$	y	1	$Polynômes\ de\ Pell-Lucas\ bivaris\ L_n(2x,y)$
$2x$	1	r	$r-Polynômes\ de\ Pell-Lucas\ Q_n^{(r)}(x)$
$2x$	1	1	$Polynômes\ de\ Pell-Lucas\ Q_n(x)$
2	1	1	$Nombres\ de\ Pell-Lucas\ Q_n$
x	$2y$	r	$r-Polynômes\ de\ Lucas-Jacobsthal\ bivaris\ F_n^{(r)}(x,2y)$
x	$2y$	1	$Polynômes\ de\ Lucas-Jacobsthal\ bivaris\ F_n(x,2y)$
1	$2y$	1	$Polynômes\ de\ Lucas-Jacobsthal\ J_n(y)$
1	2	1	$Nombres\ de\ Lucas-Jacobsthal\ J_n$

TABLE 2.3 – Suites classiques et polynômes inclus dans $(V_n^{(r,s)})$

3

Déterminants et Permanents de certains matrices

Dans ce chapitre, nous obtenons les déterminants et les permanents de certaines matrices de Hessenberg qui donnent les termes de k suites de nombres de Fibonacci généralisés d'ordre k pour $k = 2$, ces résultats sont importants, puisque k suite de nombres de Fibonacci généralisées d'ordre k pour $k = 2$ sont la forme générale de la suite de Fibonacci classique.

3.1 Notions fondamentales et définitions :

3.1.1 Les matrices

Définition 3.1.1 *Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de k.*
On appelle matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ la donnée d'un nombre p de colonnes, un nombre n de lignes et un ensemble de np éléments de k rangés dans un tableau de n lignes et p colonnes.
Un tel tableau est représentée de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, ou\ A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$$

Taille d'une matrice

Une matrice a n lignes et p colonnes, noté $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est dite de taille ($n \times p$).

Matrice carrée

Ce sont les matrices qui en même nombre de lignes et de colonnes.

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix},$$

est une matrice carrée, d'ordre 3.

Matrice non carrée

On appelle matrice non carrée (ou matrice rectangulaire), une matrice de type (n, p).

Par example

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

est une matrice non carrée, d'ordre (4,2).

3.1.2 Déterminants de certaines matrices

Définition 3.1.2 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R}$ une matrice carrée de taille $n \geq 1$. On définit son déterminant, noté $det(A)$, comme suit. Si $A = (a_{1,1})$, on pose $det(A) = a_{1,1}$; si $n > 1$, alors on pose :*

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{1,1}det(A_{1,1}) - a_{1,2}det(A_{1,2}) + \ldots + (-1)^n a_{1,n-1}det(A_{1,n-1}) + (-1)^{n+1}a_{1,n}det(A_{1,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}det(A_{1,j}). \end{aligned}$$

Les matrices $A_{1,j}$ sont carrées de taille $(n-1)$.

• Il existe plusieurs méthodes de calculer d'un déterminant d'une matrice ici nous allons voir la méthode de développement suivant la ligne ou la colonne :

On peut calculer le déterminant d'une matrice de taille n à l'aide de n déterminants de la matrice de taille $n-1$ obtenues en enlevant à la matrice de départ une ligne est une colonne.

Si A est la matrice pour tout i et j, on note A_{ij} la matrice obtenue en enlevant à A sa i^{eme} ligne et sa j^{eme} colonne.

Pour la matrice d'ordre 2

$$det\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_0a_3 - a_2a_1.$$

Exemple 3.1 *Nous prenons une matrice carrée d'ordre 2*

$$si\ M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, alors$$

$det(M) = 5 \times 2 - 1 \times 4 = 6$

3- Pour la matrice de tailles supérieures comme 3×3 : effectuer le calcul suivant

$$det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\ det\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\ det\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\ det\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$= aei - afg - bfg + bdi + cdh - cge.$

Exemple 3.2 *Nous prenons une matrice carrée d'ordre 3*

$$det\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -1\ det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2\ det\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 5\ det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$= -1(2 \times 10 - 3 \times 8) - 2(1 \times 10 - 3 \times (-2)) + 5(1 \times 8 - 2 \times (-2)) = -1(-4) - 2(16) + 5(12)$

$= 4 - 32 + 60$

$= 32.$

Proposition 3.1.1 *On rappel quelque propriétés de déterminant qui serons utilisés durant ce chapitre :*

1- $det(A^T) = det(A)$ *(ou* A^t *c'est la matrice transposée de* A*).*

2- $det(A^*) = det(A)$ *(ou* A^* *c'est la matrice adjointe de* A*).*

pour tout matrice A *d'ordre* n*.*

3- $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$*,* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$*,* $\forall A \in GL_{n(\mathbb{K})}$*.*

4- $det(AB) = det(BA) = det(A) \times det(B)$ *(si* A *et* B *deux matrices inversibles et de même dimension).*

5- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés.

6- Le déterminant est nul si la matrice à deux vecteurs colonnes égaux.

7- Le déterminant vaut 1 *si la matrice à deux vecteurs lignes égaux.*

8- Si A *possède une ligne (ou colonne) de* 0 *alors,* $det(A) = 0$.

9- Si A *possède* 2 *lignes (colonne) identiques alors,* $det(A) = 0$.

10- Si A *est triangulaire, alors* $det(A) =$ *produit de ses éléments diagonaux.*

En particulier, $det(I_n) = 1$.

10- A *est inversible si* $det(A) \neq 0$. *On dit que la matrice est non singulière.*

3.1.3 Permanent de certaines matrices

Définition 3.1.3 *Soit* M *l'ensemble* $\{1, \ldots, m\}(m \in \mathbb{Z}^+)$.

Le groupe symétrique S_m *est le groupe de tous les* $m!$ *permutations de* M.

Le signe d'une permutation $\delta \in S_m$ *est :*

$$sng = \begin{cases} 1 \; pour \; \delta \; paire, \\ -1 \; pour \; \delta \; impaire. \end{cases}$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leq m}$ une matrice carrée. Le permanent de la matrice A est un polynôme semblable de degré m :

$$per(A) = \sum_{\delta \in S_m} \prod_{i=1}^{n} a_{i\delta(i)}, \tag{3.1}$$

$\delta(i)$ est représenté le groupe symétrique S_m de tous les éléments m. [8]

Remarque 5 *Le permanent est comme le déterminant d'une matrice, mais sans la signature* $(-)$ *(moins).*

• Nous abordons la méthode de calcule d'un permanent d'une matrice par la méthode de développement suivant la ligne ou la colonne :

1- Le permanent de la matrice 1×1, est le seul élément de la matrice.

2- Pour la matrice de tailles 2×2, le calcul du permanent est

$$per \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_0 a_3 + a_1 a_2.$$

Exemple 3.3 *Nous prenons une matrice carrée d'ordre* 2

$$si \; M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, alors$$

$per(M) = 3 \times 1 + 4 \times 2 = 11$.

3- Pour la matrice de tailles supérieurs comme 3×3 on fait le calcul suivant :

$$per\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\ per\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} + b\ per\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\ per\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$= aei + afh + bfg + bdi + cdh + ceg.$

Exemple 3.4 *Nous prenons une matrice carrée d'ordre* 3

$$si\ M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix},$$

alors

$per(M) = (1)(2)(3) + (1)(4)(9) + (3)(4)(6) + (3)(7)(3) + (5)(7)(9) + (5)(2)(6).$

$per(M) = 552.$

même l'idée avec les matrices d'ordre supérieur à 3.

Nous donnons quelques propriétés de la permanent de certain matrice.

Proposition 3.1.2 *Dans [6], on a*

1- Soient A et B deux matrices non négatives d'ordres m et n respectivement, on a :

$$per(A \times B) \geqslant (per(A))^n (per(B))^m.$$

2- Les lignes et les colonnes de $A \times B$ peuvent être simultanément permutés pour donner $B \times A$, à partir de là, on obtient immédiatement :

$$per(A \times B) = per(B \times A).$$

3- Soient A et B des matrices positives d'ordre n. On a :

$$per(A \times B) \geqslant per(A)per(B).$$

4- Nous montrons également que chaque terme dans le développement du permanent de $A \times B$ peut s'exprimer comme le produit de n termes dans le développement permanent de A et m termes dans le développement permanent de B, et inversement.

Ceci implique qu'il existe un nombre minimal positif $K_{m,n}$ tel que :

$$per(A \times B) \leqslant K_{m,n}(per(A))^n (per(B))^m.$$

Une conjecture est donnée pour la valeur de $K_{m,n}$.

3.2 Matrices de Toeplitz

3.2.1 L'origine des matrices de Toeplitz

Dans plusieurs domaines scientifiques, la modélisation mathématique de divers problèmes conduit éventuellement après une étape de discrétisation, ou de linéarisation pour les problème non linéaires, à la résolution numérique de systèmes linéaires de très grande taille, cette taille peut atteindre des milliers d'équations (par exemple lors de la résolution par discrétisation des équations aux dérivés partielles partir des phénomènes physiques).
Pour cela, il est naturel de concevoir des algorithmes rapides, efficaces et stable. Spécifiquement, les matrices de Toeplitz sont omniprésentes dans plusieurs problèmes des sciences, de l'ingénierie (par exemple le traitement de signal et d'image). [5]

3.2.2 Matrice de Toeplitz

D'aprés [10], une matrice de Toeplitz est une matrice dont les composantes des diagonales sont constantes.
Il suffit donc pour connaitre une matrice de Toeplitz $[m, n]$ de connaitre la première ligne (qui va donner les diagonales de 0 à n et la première colonne qui va donner les diagonales de 0 à m). Voici un exemple de matrice de Toeplitz de taille 5×5 :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{pmatrix}$$

Définition 3.2.1 *Une matrice de dimensions $[m, n]$ est dits de Toeplitz si : $[T]_{i,j} = T_{(i-j)}$ avec $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, c'est-à-dire une matrice de la forme :*

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \ldots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & \ldots & \ldots & t_{-(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & t_0 & \ldots & \ldots \\ t_{m-2} & \ldots & \ldots & t_0 & t_{-1} \\ t_{m-1} & t_{m-2} & \ldots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

[10]

Dans le cas ou T est carrée on a :

Définition 3.2.2 *Soit* $(T)_{i,j} = [T_{(i-j)}, \quad i,j = 1,\ldots,n]$ *une matrice de Toeplitz c'est à dire une matrice de la forme :*

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \ldots & \ldots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_2 & t_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & t_{-1} & t_{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & \ldots & \ldots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

[10]

Exemple 3.5 *Pour* $n = 4$ *on a,* $T_3 = [T_{(i-j)}, \quad i,j = 1,2,3,4]$ *la première ligne est :*

$[t_{1-1}\ t_{1-2}\ t_{1-3}\ t_{1-4}\ ] = [t_0\ t_{-1}\ t_{-2}\ t_{-3}]$,

la deuxième ligne est :

$[t_{2-1}\ t_{2-2}\ t_{2-3}\ t_{2-4}] = [t_1\ t_0\ t_{-1}\ t_{-2}]$,

la troisième ligne est :

$[t_{3-1}\ t_{3-2}\ t_{3-3}\ t_{3-4}] = [t_2\ t_1\ t_0\ t_{-1}]$,

la quatrième ligne est :

$[t_{4-1}\ t_{4-2}\ t_{4-3}\ t_{4-4}] = [t_3\ t_2\ t_1\ t_0]$.

Donc la matrice T_4 *est définie sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix},$$

par la suite nous considérons seulement les matrices de Toeplitz carrées de dimensions (n,n).

Et plus généralement, nous sommes intéressés par les matrices de Toeplitz triangulaires supérieure et inférieure.

3.2.3 La matrice triangulaire inférieure de Toeplitz

Définition 3.2.3 *Une matrice carrée $T = [t_{i-j}, \quad i,j = 1,\dots,n]$ de Toeplitz est dite triangulaire inférieure si $t_{i-j} = 0$ pour $i < j$, c'est à dire une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_1 & t_0 & \dots & \dots & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t_{n-1} & \dots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.6 *Matrice carrée d'ordre 4*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 La matrice triangulaire supérieure de Toeplitz

Définition 3.2.4 *Une matrice carrée $T = [t_{i-j}, \quad i,j = 1,\dots,n]$ de Toeplitz est dite triangulaire supérieure si $t_{i-j} = 0$ pour $i > j$, c'est à dire une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ 0 & t_0 & t_{-1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.7 *Matrice carrée d'ordre* 5

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.2.5 La matrice symétrique de Toeplitz

Définition 3.2.5 *Une matrice de Toeplitz $T = [t_{i-j}, \quad i,j = 1,\dots,n]$ est dite symétrique si elle vérifie : $t_{i,j} = t_{|i-j|}$, $\forall i,j = \{1,\dots,n\}$ i,e une matrice de la forme :*

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & \dots & \dots & \dots \\ t_2 & t_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t_1 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & t_1 & t_0 & t_1 \\ t_{n-1} & \dots & \dots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire une telle matrice possède des éléments identiques sur ou sous la diagonale.

Exemple 3.8 *Matrice carrée d'ordre* 6

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 8 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 5 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 2 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2.6 Opérations algébriques sur les matrices de Toeplitz

L'addition

Proposition 3.2.1 *La somme de deux matrices de Toeplitz est évidement une matrice de Toeplitz.*

Preuve. Soient $T = [t_{i-j}, i,j = 1,\dots,n]$ et $S = [s_{i-j}, i,j = 1,\dots,n]$ sont des matrice de Toeplitz carrées, on a :

$$T_n + S_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & \dots & \dots \\ t_2 & t_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t_{-1} & t_{-1} \\ \dots & \dots & \dots & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & \dots & \dots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 & s_{-1} & s_{-2} & \dots & \dots & s_{-(n-1)} \\ s_1 & s_0 & s_{-1} & \dots & \dots & \dots \\ s_2 & s_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & s_{-1} & s_{-1} \\ \dots & \dots & \dots & s_1 & s_0 & s_{-1} \\ s_{n-1} & \dots & \dots & s_2 & s_1 & s_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_0+s_0 & t_{-1}+s_{-1} & t_{-2}+s_{-2} & \dots & \dots & t_{-(n-1)}+s_{-(n-1)} \\ t_1+s_1 & t_0+s_0 & t_{-1}+s_{-1} & \dots & \dots & \dots \\ t_2+s_2 & t_1+s_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t_{-1}+s_{-1} & t_{-1}+s_{-1} \\ \dots & \dots & \dots & t_1+s_1 & t_0+s_0 & t_{-1}+s_{-1} \\ t_{n-1}+s_{n-1} & \dots & \dots & t_2+s_2 & t_1+s_1 & t_0+s_0 \end{pmatrix},$$

■

le résultat de la somme est une matrice de Toeplitz qui est notée par :
$A_n = [a_{i-j} = t_{i-j} + s_{i-j}, \quad i,j = 1,\dots,n]$.

$$T + S = ((t_{i-j} + s_{i-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \tag{3.2}$$

Multiplication par un scalaire

Proposition 3.2.2 *La multiplication d'une matrice de Toeplitz par un scalaire est évidement une matrice de Toeplitz.*

Preuve. Soit $T_n = [t_{i-j}, \quad i,j = 1,\dots,n]$ est une matrice de Toeplitz et soit $\alpha \in \Bbbk$ tel que ($\Bbbk = \Re$) ou a :

$$\alpha \times T_n = \begin{pmatrix} \alpha t_0 & \alpha t_{-1} & \alpha t_{-2} & \dots & \dots & \alpha t_{-(n-1)} \\ \alpha t_1 & \alpha t_0 & \alpha t_{-1} & \dots & \dots & \dots \\ \alpha t_2 & \alpha t_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha t_{-1} & \alpha t_{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \alpha t_1 & \alpha t_0 & \alpha t_{-1} \\ \alpha t_{n-1} & \dots & \dots & \alpha t_2 & \alpha t_1 & \alpha t_0 \end{pmatrix},$$

le résultat de la produit est une matrice de Toeplitz qui est notée par : $A_n = [a_{i-j} = \alpha a_{i-j}, \dots i,j = 1,\dots,n]$.

$$\alpha T = (\alpha t_{i-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

■

Le produit de deux matrices de Toeplitz

Proposition 3.2.3 *Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas en générale une matrice de Toeplitz.*

Preuve. Pour $n = 3$ soient $T_3 = [t_{i-j}, \quad i, j = 1, 2, 3]$ et $S_3 = [s_{i-j}, \quad i, j = 1, 2, 3]$ deux matrices de Toeplitz on a :

$$T_3 \times S_3 = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 & s_{-1} & s_{-2} \\ s_1 & s_0 & s_{-1} \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_0s_0 + t_{-1}s_1 + t_{-2}s_2 & t_0s_{-1} + t_{-1}s_0 + t_{-2}s_1 & t_0s_{-2} + t_{-1}s_{-1} + t_{-2}s_0 \\ t_1s_0 + t_0s_1 + t_{-1}s_2 & t_1s_{-1} + t_0s_0 + t_{-1}s_1 & t_1s_{-2} + t_0s_{-1} + t_{-1}s_0 \\ t_2s_0 + t_1s_1 + t_0s_2 & t_2s_{-1} + t_1s_0 + t_0s_1 & t_2s_{-2} + t_1s_{-1} + t_0s_0 \end{pmatrix},$$

Le résultat de ce produit n'est pas une matrice de Toeplitz car les éléments de la diagonale ne sont pas égaux i.e :

$$t_0s_0 + t_{-1}s_1 + t_{-2}s_2 \neq t_1s_{-1} + t_0s_0 + t_{-1}s_1 \neq t_2s_{-2} + t_1s_{-1} + t_0s_0,$$

$$t_1s_0 + t_0s_1 + t_{-1}s_2 \neq t_2s_{-1} + t_1s_0 + t_0s_1$$

et

$$t_0s_{-1} + t_{-1}s_0 + t_{-2}s_1 \neq t_1s_{-2} + t_0s_{-1} + t_{-1}s_0.$$

■

3.3 Matrice de Hessenberg

La matrice de Hessenberg supérieure (resp inférieure), également connue sous le nom de la forme de Hessenberg, est une matrice carrée dans laquelle tous les éléments en dessous (resp en dessus) de la première sous-diagonale sont nuls. Autrement dit, tout les éléments $a_{i,j}$ de la matrice de Hessenberg doivent satisfaire la condition $j \leqslant i + 1$. Voici un exemple d'une matrice de Hessenberg de taille 4×4

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

est une matrice de Hessenberg supérieure.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de Hessenberg inférieur.
Les matrice de Hessenberg sont souvent utilisées en algèbre linéaire et en calcul numérique, car elles peuvent simplifier certaines opération mathématique et permettre des calculs plus efficaces, notamment lorsqu'on souhaite résoudre des systèmes d'équation linéaires ou calculer les valeurs propre d'une matrice

3.4 Matrice de Toeplitz-Hessenberg

Une matrice de Toeplitz-Hessenberg est une matrice qui est à la fois de Toeplitz et de Hessenberg. C'est-à-dire que tous les éléments diagonaux sont les mêmes pour chaque ligne, et que tous les éléments en dessous de la première sous-diagonale sont nuls. Voici un exemple de matrice de Toeplitz-Hessenberg de taille 4×4 :
1- Matrice de Toeplitz-Hessenberg supérieure :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ 0 & e & a & b \\ 0 & 0 & e & a \end{pmatrix}$$

2- Matrice de Toeplitz-Hessenberg inférieur :

$$\begin{pmatrix} a & e & 0 & 0 \\ b & a & e & 0 \\ c & b & a & e \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Les matrices de Toeplitz-Hessenberg sont souvent utilisées en algèbre linéaire numérique, car elles ont des propriétés spéciales qui les rendent plus faciles à traiter que les matrices générales. Par exemple, on peut résoudre des systèmes d'équation linéaire impliquant des matrices de Toeplitz-Hessenberg en temps linéaire, plutôt qu'en temps quadratique pour les matrices générales.
De plus, les matrices de Toeplitz-Hessenberg sont souvent utilisé dans les applications telles que le filtrage de signale et la compression d'image.

3.5 Déterminant et permanent de matrice de Toeplitz-Hessenberg

- Le calcul du déterminant d'une matrice Toeplitz-Hessenberg est plus simple que pour une matrice générale, car la matrice est déjà partiellement triangulaire.
La formule déterminant de la matrice Toeplitz-Hessenberg est la suivante :

$$det(T_n) = \sum_{k=1}^{n} (-a_0)^{k-1} a_k det(T_{n-k}), \tag{3.3}$$

où $det(T_0) = 1$.
La formule de permanent de la matrice Toeplitz-Hessenberg est la suivante :

$$per(T_n) = \sum_{k=1}^{n} (a_0)^{k-1} a_k per(T_{n-k}), \tag{3.4}$$

où $per(T_0) = 1$.
En résumé, pour calculer le déterminant et le permanent d'une matrice Toeplitz-Hessenberg, il suffit de transforme la matrice en une matrice triangulaire supérieur avec les mêmes éléments diagonaux et de multiplier ces éléments diagonaux pour obtenir le déterminant et le permanent.
Cette méthode est plus efficace que d'autre méthode pour les matrice Toeplitz-Hessenberg en raison de leur structure particulière.

Applications

3.6 Déterminant et Permanent des matrices de Toeplitz-Hessenberg pour les suites Fibonacci et Lucas généralisés

Dans [2], une matrice carrée de Toeplitz-Hessenberg inférieure, sur le formulaire suivant

$$T_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

où $a_0 \neq 0$ et $a_k \neq 0$ pour au moins un $k > 1$.

Dans cette partie, nous introduisons des formules explicites pour le permanent et le déterminant de (3.5) avec entrées de Fibonacci généralisées.

Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, la suite de Fibonacci généralisée, notée $(U_n)_{n\geqslant 0}$, est définie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, et la relation de récurrence (1.8).

La suite de Lucas généralisée, notée $(V_n)_{n\geqslant 0}$, est définie par :

$V_0 = 2$ et $V_1 = p$, et il en résulte relation de référence (1.9).

Pour simplifier, nous utilisons la notation $per(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ au lieu de $per(T_n(1, a_1, a_2, \ldots, a_n))$et $(detT_n(1,a_1, a_2, \ldots, a_n))$, respectivement.

On évalue les expressions

$per(U_{as+b}, U_{a(s+1)+b}, \ldots, U_{a(s+n-1)+b})$, et $per(V_{as+b}, V_{a(s+1)+b}, \ldots, V_{a(s+n-1)+b})$.

Avant d'énoncer les principaux résultats, nous présentons les récurrences liées à $(U_{as+b})_s$ et $(V_{as+b})_s$: dans l'article de Shannon et Horadam (1979).

Ils ont établi pour $a, b, s \in \mathbb{N}, b < a$ que la suite de Fibonacci et la suite de Lucas généralisée satisfont les récurrences suivantes :

$$U_{as+b} = V_a U_{a(s-1)+b} - (-q)^a U_{a(s-2)+b}, \tag{3.6}$$

et

$$V_{as+b} = V_a V_{a(s-1)+b} - (-q)^a V_{a(s-2)+b}. \tag{3.7}$$

Maintenant, nous donnons les résultats principaux.

$$T_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & \ldots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$T_n(U_{as+b}, U_{a(s+1)+b}, \ldots, U_{a(s+n-1)+b})$

$$= \begin{pmatrix} U_{a(s+1)+b} & U_{as+b} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ U_{a(s+2)+b} & U_{a(s+1)+b} & U_{as+b} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots \\ U_{a(s+n-2)+b} & \ldots & \ldots & \ldots & U_{a(s+1)+b} & U_{as+b} \\ U_{a(s+n-1)+b} & U_{a(s+n-2)+b} & \ldots & \ldots & U_{a(s+2)+b} & U_{a(s+1)+b} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Theoreme 3.1 *Pour les entiers $n, s, a \geqslant 1$ et $0 \leqslant b < a$.*

Soit T_n une matrice de Toeplitz-Hessenberg pour la suite de Fibonacci généralisée, alors le permanent de T_n est :

$per(U_{as+b}, U_{a(s+1)+b}, \ldots, U_{a(s+n-1)+b})$,

$$= \frac{U_{as+b}(U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} + V_a + \sqrt{A}}{2} \right)^{n-1}$$

$$+ \frac{U_{as+b}(-U_{as+b} + V_a + \sqrt{A} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} + V_a - \sqrt{A}}{2} \right)^{n-1},$$

où $A = (U_{as+b} + V_a)^2 - 4(-q)^a(U_{a(s-1)+b} + 1)$.

Preuve. *Posons :*

$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{A}} \Big[U_{as+b}(U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2U_{a(s+1)+b} \Big]$,

et

$\beta = \frac{1}{2\sqrt{A}}\Big[U_{as+b}(-U_{as+b}+V_a+\sqrt{A})-2U_a(s+1)+b\Big]$.

Pour $n=1$ *on a :*

$$\begin{aligned}
per(U_{as+b}) &= \frac{U_{as+b}(U_{as+b}-V_a+\sqrt{A})+2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{1-1}\\
&+\frac{U_{as+b}(-U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}-2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^{1-1},\\
&=\frac{U_{as+b}(U_{as+b}-V_a+\sqrt{A})+2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}+\frac{U_{as+b}(-U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}-2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},\\
&=\frac{U_{as+b}^2-U_{as+b}V_a+U_{as+b}\sqrt{A}+2U_{a(s+1)+b}-U_{as+b}^2+U_{as+b}V_a+U_{as+b}\sqrt{A}-2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},\\
&=\frac{2U_{as+b}\sqrt{A}}{2\sqrt{A}},\\
&=U_{as+b}.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient $per(U_{as+b})=\alpha+\beta=U_{as+b}$.

Pour $n=2$ *on a :*

$$\begin{aligned}
&per(U_{as+b},U_{a(s+1)+b})\\
&=\frac{U_{as+b}(U_{as+b}-V_a+\sqrt{A})+2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{2-1}\\
&+\frac{U_{as+b}(-U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}-2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^{2-1},\\
&=\frac{U_{as+b}(U_{as+b}-V_a+\sqrt{A})+2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)\\
&+\frac{U_{as+b}(-U_{as+b}+V_a+\sqrt{A})-2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right),\\
&=\frac{(U_{as+b}^2-U_{as+b}V_a+U_{as+b}\sqrt{A}+2U_{a(s+1)+b})(U_{as+b}+V_a+\sqrt{A})}{4\sqrt{A}}\\
&+\frac{(-U_{as+b}^2+U_{as+b}V_a+U_{as+b}\sqrt{A}-2U_{a(s+1)+b})(U_{as+b}+V_a-\sqrt{A})}{4\sqrt{A}},\\
&=\frac{U_{as+b}^3+U_{as+b}^2V_a+U_{as+b}^2\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}-\frac{U_{as+b}^2V_a-U_{as+b}V_a^2-U_{as+b}V_a\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}\\
&+\frac{U_{as+b}^2\sqrt{A}+U_{as+b}V_a\sqrt{A}+U_{as+b}A}{4\sqrt{A}}+\frac{2U_{a(s+1)+b}U_{as+b}+2U_{a(s+1)+b}V_a+2U_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}\\
&-\frac{U_{as+b}^3-U_{as+b}^2V_a+U_{as+b}^2\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}+\frac{U_{as+b}^2V_a+U_{as+b}V_a^2-U_{as+b}V_a\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{U_{as+b}^2\sqrt{A}+U_{as+b}V_a\sqrt{A}-U_{as+b}A}{4\sqrt{A}}-\frac{2U_{a(s+1)+b}U_{as+b}-2U_{a(s+1)+b}V_a+2U_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}},\\
&=\frac{4U_{as+b}^2\sqrt{A}+4U_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}},\\
&=\frac{4\sqrt{A}(U_{as+b}^2+U_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}},\\
&=U_{as+b}^2+U_{a(s+1)+b}.
\end{aligned}
$$

Soit $per_n = per(U_{as+b}, U_{a(s+1)+b}, \ldots, U_{a(s+n-1)+b})$.

En utilisant la récurrence (3.4)*, on a,*

$$
\begin{aligned}
per_n &= \sum_{j=1}^{n} U_{a(s+j-1)+b} per_{n-j},\\
&= U_{as+b}per_{n-1}+\sum_{j=2}^{n} U_{a(s+j-1)+b}per_{n-j},\\
&= U_{as+b}per_{n-1}+\sum_{j=2}^{n}(V_aU_{a(s+j-1-1)+b}-(-q)^aU_{a(s+j-1+2)+b}per_{n-j},\\
&= U_{as+b}per_{n-1}+\sum_{j=2}^{n}(V_aU_{a(s+j-2)+b}-(-q)^aU_{a(s+j-3)+b}per_{n-j},\\
&= U_{as+b}per_{n-1}+V_a\sum_{j=2}^{n}U_{a(s+j-2)+b}per_{n-j}-(-q)^a\sum_{j=2}^{n}U_{a(s+j-3)+b}per_{n-j},\\
&= U_{as+b}per_{n-1}+V_a\sum_{j=1}^{n-1}U_{a(s+j-1)+b}per_{n-j-1}-(-q)^aU_{a(s+2-3)+b}per_{n-2}\\
&-(-q)^a\sum_{j=2}^{n}U_{a(s+j-3)+b}per_{n-j},\\
&= U_{as+b}per_{n-1}+V_a\sum_{j=1}^{n}U_{a(s+j-1)+b}per_{n-j-1}-(-q)^aU_{a(s-1)+b}per_{n-2}\\
&-(-q)^a\sum_{j=3}^{n}U_{a(s+j-3)+b}per_{n-j},\\
&= (U_{as+b}+V_a)per_{n-1}-(-q)^aU_{a(s-1)+b}per_{n-2}-(-q)^a\sum_{j=1}^{n-2}U_{a(s+j-1)+b}per_{n-j-2},\\
&= (U_{as+b}+V_a)per_{n-1}+(-(-q)^aU_{a(s-1)+b}-(-q)^a)per_{n-2},\\
&= (U_{as+b}+V_a)per_{n-1}-(-q)^a(U_{a(s-1)+b}+1)per_{n-2},\\
&= (U_{as+b}+V_a)\left[\alpha\left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-2}+\beta\left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^{n-2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (-q)^a(U_{a(s-1)+b+1}) \left[\alpha \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3} + \beta \left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3}\right], \\
&= \alpha \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3} \left[(U_{as+b}+V_a)\left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right) - (-q)^a(U_{a(s-1)+b+1})\right] \\
&+ \beta(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2})^{n-3} \left[(U_{as+b}+V_a)\left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right) - (-q)^a(U_{a(s-1)+b+1})\right], \\
&= \alpha \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^2 \\
&+ \beta \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^2, \\
&= \alpha \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3+2} + \beta \left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^{n-3+2}, \\
&= \alpha \left(\frac{U_{as+b}+V_a+\sqrt{A}}{2}\right)^{n-1} + \beta \left(\frac{U_{as+b}+V_a-\sqrt{A}}{2}\right)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

■

Exemple 3.9 *Si* $n = 1$

$$
\begin{aligned}
per(T_1) &= a_0^{1-1} per(T_{1-1}), \\
&= a_1 per(T_0), \\
&= a_1 = U_{as+b}, \\
&= V_a U_{a(s-1)+b} - (-q)^a U_{a(s-2)+b}.
\end{aligned}
$$

Si $n = 2$

$$
\begin{aligned}
per(T_2) &= a_0^{1-1} a_1 per(T_{2-1}) + a_0^{2-1} a_2 per(T_{2-2}), \\
&= a_1 per(T_1) + a_2 per(T_0), \\
&= U_{as+b} U_{as+b} + U_{a(s+1)+b}, \\
&= U_{as+b}^2 + U_{a(s+1)+b}.
\end{aligned}
$$

Si $n = 3$

$$
\begin{aligned}
per(T_3) &= a_0^{1-1} a_1 per(T_{3-1}) + a_0^{2-1} a_2 per(T_{3-2}) + a_0^{3-1} a_3 per(T_{3-3}), \\
&= a_1 per(T_2) + a_2 per(T_1) + a_3 per(T_0), \\
&= U_{as+b}(U_{as+b}^2 + U_{a(s+1)+b}) + U_{a(s+1)+b} U_{as+b} + U_{a(s+2)+b},
\end{aligned}
$$

$$= U_{as+b}^3 + U_{as+b}U_{a(s+1)+b} + U_{a(s+1)+b}U_{as+b} + U_{a(s+2)+b},$$
$$= U_{as+b}^3 + 2U_{as+b}U_{a(s+1)+b} + U_{a(s+2)+b}.$$

Remarque 6 *On a :*

$$U_{as+b} = V_a U_{a(s-1)+b} - (-q)^a U_{a(s-2)+b},$$

alors :

$$U_{a(s+1)+b} = V_a U_{a(s-1+1)+b} - (-q)^a U_{a(s-2+1)+b},$$
$$= V_a U_{as+b} - (-q)^a U_{a(s-1)+b}.$$

Calculons $U_{a(s+2)+b}$:

$$U_{a(s+2)+b} = V_a U_{a(s-1+2)+b} - (-q)^a U_{a(s-2+2)+b},$$
$$= V_a U_{a(s+1)+b} - (-q)^a U_{as+b}.$$

Theorem 3.2 *Pour les entiers $n, s, a \geqslant 1$ et $0 \leqslant b < a$.*

Soit T_n une matrice de Toeplitz-Hessenberg pour la suite de Lucas généralisée, alors le permanent de T_n est

$per(V_{as+b}, V_{a(s+1)b}, \ldots, V_{a(s+n-1)+b})$

$$= \frac{V_{as+b}(V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{n-1}$$
$$+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{V_{as+b} + V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{n-1},$$

ou $A = (V_{as+b} + V_a)^2 - 4(-q)^a(V_{a(s-1)+b} + 1)$.

Preuve. Par récurrence. Pour $n = 1$

$$per(V_{as+b}) = \frac{V_{as+b}(V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{1-1}$$
$$+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{V_{as+b} + V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{1-1},$$
$$= \frac{V_{as+b}(V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} + \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},$$
$$= \frac{V_{as+b}^2 - V_a V_{as+b} + \sqrt{A}V_{as+b} + 2V_{a(s+1)+b} - V_{as+b}^2 + V_a V_{as+b} + \sqrt{A}V_{as+b} - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},$$
$$= \frac{2\sqrt{A}V_{as+b}}{2\sqrt{A}},$$
$$= V_{as+b}.$$

Pour $n = 2$

$$
\begin{aligned}
per(V_{as+b}, V_{a(s+1)+b}) &= \frac{V_{as+b}(V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{2-1} \\
&+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{V_{as+b} + V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{2-1}, \\
&= \frac{V_{as+b}(V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2V_{a(s+1)+b}(V_{as+b} + V_a + \sqrt{A})}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}(V_{as+b} + V_a - \sqrt{A})}{4\sqrt{A}}, \\
&= \frac{V_{as+b}^2 - V_a V_{as+b} + \sqrt{A}V_{as+b} + 2V_{a(s+1)+b}(V_{as+b} + V_a + \sqrt{A})}{4\sqrt{A}} \\
&- \frac{V_{as+b}^2 + V_a V_{as+b} + \sqrt{A}V_{as+b} - 2V_{a(s+1)+b}(V_{as+b} + V_a - \sqrt{A})}{4\sqrt{A}}, \\
&= \frac{V_{as+b}^3 - V_a V_{as+b}^2 + \sqrt{A}V_{as+b}^2 + 2V_{a(s+1)+b}V_{as+b}}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{V_{as+b}^2 V_a - V_{a^2}V_{as+b} + \sqrt{A}V_a V_{as+b} + 2V_a V_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{\sqrt{A}V_{as+b}^2 - V_a\sqrt{A}V_{as+b} + AV_{as+b} + 2\sqrt{A}V_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}} \\
&- \frac{V_{as+b}^3 + V_a V_{as+b}^2 + \sqrt{A}V_{as+b}^2 - 2V_{a(s+1)+b}V_{as+b}}{4\sqrt{A}} \\
&- \frac{V_a V_{as+b}^2 + V_a^2 V_{as+b} + V_a\sqrt{A}V_{as+b} - 2V_a V_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{V_{as+b}^2\sqrt{A} - V_a\sqrt{A}V_{as+b} - AV_{as+b} + 2V_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}, \\
&= \frac{4\sqrt{A}V_{as+b}^2 + 4\sqrt{A}V_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}}, \\
&= V_{as+b}^2 + V_{a(s+1)+b}.
\end{aligned}
$$

Soit $per_n = per(V_{as+b}, V_{a(s+1)+b}, \ldots, V_{a(s+n-1)+b})$. En utilisant la récurrence (3.4), on a,

$$
\begin{aligned}
per_n &= \sum_{j=1}^{n} V_{a(s+j-1)+b}\, per_{n-j}, \\
&= V_{as+b}\, per_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} V_{a(s+j-1)+b}\, per_{n-j}, \\
&= V_{as+b}\, per_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} (V_a V_{a(s+j-1-1)+b} - (-q)^a V_{a(s+j-1-2)+b}\, per_{n-j}, \\
&= V_{as+b}\, per_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} (V_a V_{a(s+j-2)+b} - (-q)^a V_{a(s+j-3)+b}) per_{n-j},
\end{aligned}
$$

$$= V_{as+b}per_{n-1} + V_a \sum_{j=2}^{n} V_{a(s+j-2)+b}per_{n-j} - (-q)^a \sum_{j=2}^{n} V_{a(s+j-3)+b})per_{n-j},$$

$$= V_{as+b}per_{n-1} + V_a \sum_{j=1}^{n-1} V_{a(s+j-1)+b}per_{n-j} - (-q)^a \sum_{j=1}^{n-1} V_{a(s+j-2)+b}per_{n-j},$$

$$= V_{as+b}per_{n-1} + V_a \sum_{j=1}^{n-1} V_{a(s+j-1)+b}per_{n-j} - (-q)^a V_{a(s-1)+b}per_{n-2} - (-q)^a \sum_{j=3}^{n} V_{a(s+j-3)+b}per_{n-j},$$

$$= (V_{as+b} + V_a)per_{n-1} - (-q)^a V_{a(s-1)+b}per_{n-2} - (-q)^a \sum_{j=1}^{n-2} V_{a(s+j-1)+b}per_{n-j-2},$$

$$= (V_{as+b} + V_a)per_{n-1} + (-(-q)^a V_{a(s-1)+b} - (-q)^a)per_{n-2},$$

$$= (V_{as+b} + V_a)per_{n-1} - (-q)^a (V_{a(s-1)+b} + 1)per_{n-2}.$$

■

Theoreme 3.3 *Pour les entiers $n, s, a \geqslant 1$ et $0 \leqslant b < a$.*

Soit T_n une matrice de Toeplitz-Hessenberg pour la suite de Fibonacci généralisée, alors le déterminant de T_n est

$$det(U_{as+b}, U_{a(s+1)b}, \ldots, U_{a(s+n-1)+b})$$

$$= \frac{(U_{as+b} + V_a + \sqrt{A})Uas + b - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} (\frac{U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2})^{n-1}$$

$$- \frac{(U_{as+b} + V_a - \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} (\frac{U_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2})^{n-1},$$

ou $A = (U_{as+b} - V_a)^2 + 4(-q)^a(U_{a(s-1)+b} - 1)$.

Preuve. Par récurrence. Pour $n = 1$

$$det(U_{as+b}) = \frac{(U_{as+b} + V_a + \sqrt{A})U_a - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{1-1}$$

$$- \frac{(U_{as+b} + V_a - \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{1-1},$$

$$= \frac{(U_{as+b} + V_a + \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} - \frac{(U_{as+b} + V_a - \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},$$

$$= \frac{U_{as+b}^2 + V_a U_{as+b} + U_{as+b}\sqrt{A} - 2U_{a(s+1)+b} - U_{as+b}^2 - V_a U_{as+b} + U_{as+b}\sqrt{A} + 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},$$

$$= \frac{2U_{as+b}\sqrt{A}}{2\sqrt{A}},$$

$$= U_{as+b},$$

alors

$det(U_{as+b}) = \alpha + \beta = U_{as+b}$.

Pour $n = 2$

$$
\begin{aligned}
det(U_{as+b}, U_{a(s+1)+b}) &= \frac{(U_{as+b} + V_a + \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{2-1} \\
&- \frac{(U_{as+b} + V_a - \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{2-1}, \\
&= \frac{(U_{as+b} + V_a + \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2}\right) \\
&- \frac{(U_{as+b} + V_a - \sqrt{A})U_{as+b} - 2U_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} \left(\frac{U_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2}\right), \\
&= \frac{U_{as+b}^2 + V_a U_{as+b} + U_{as+b}\sqrt{A} - 2U_{a(s+1)+b}\left(U_{as+b} - V_a + \sqrt{A}\right)}{4\sqrt{A}} \\
&- \frac{U_{as+b}^2 - V_a U_{as+b} + U_{as+b}\sqrt{A} + 2U_{a(s+1)+b}\left(U_{as+b} - V_a - \sqrt{A}\right)}{4\sqrt{A}}, \\
&= \frac{U_{as+b}^3 + V_a U_{as+b}^2 + \sqrt{A}U_{as+b}^2 - 2U_{a(s+1)+b}U_{as+b}}{4\sqrt{A}} \\
&- \frac{V_a U_{as+b}^2 - V_a^2 U_{as+b} - V_a\sqrt{A}U_{as+b} + 2V_a U_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{\sqrt{A}U_{as+b}^2 + \sqrt{A}V_a U_{as+b} + AU_{as+b} - 2\sqrt{A}Ua_{(s+1)+b}}{4\sqrt{A}} \\
&- \frac{U_{as+b}^3 - V_a U_{as+b}^2 + \sqrt{A}U_{as+b}^2 + 2U_{a(s+1)+b}U_{as+b}}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{V_A U_{as+b}^2 + V_a^2 U_{as+b} - V_a\sqrt{A}U_{as+b} - V_a 2U_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}} \\
&+ \frac{\sqrt{A}U_{as+b}^2 + \sqrt{A}V_a U_{as+b} - AU_{as+b} - 2\sqrt{A}U_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}}, \\
&= \frac{4\sqrt{A}U_{as+b}^2 - 4\sqrt{A}U_{a(s+1)+b}}{4\sqrt{A}}, \\
&= U_{as+b}^2 - U_{a(s+1)+b}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la récurrence (3.3)

$$
\begin{aligned}
det_n &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j U_{a(s+j-1)+b} det_{n-j}, \\
&= -U_{as+b} det_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^j U_{a(s+j-1)+b} det_{n-j},
\end{aligned}
$$

$$= -U_{as+b}det_{n-1} + \sum_{j=2}^{n}(-1)^j(V_aU_{a(s+j-2)+b} - (-q)^aU_{a(s+j-3)+b})det_{n-j},$$

$$= -U_{as+b}det_{n-1} + V_a\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^jU_{a(s+j-1)+b}det_{n-j-1}$$

$$- (-q)^aU_{a(s-1)+b}det_{n-2} - (-q)^a\sum_{j=3}^{n}(-1)^jU_{a(s+j-3)+b}det_{n-j},$$

$$= -(U_{as+b} + V_a)det_{n-1} + (-(-q)^aU_{a(s-1)+b} - (-q)^a)det_{n-2}.$$

■

Theoreme 3.4 *Pour les entiers $n, s, a \geqslant 1$ et $0 \leqslant b < a$.*

Soit T_n une matrice de Toeplitz-Hessenberg de généralisation Lucas, alors le déterminant de T_n est $det(V_{as+b}, V_{a(s+1)b}, \ldots, V_{a(s+n-1)+b})$

$$= \frac{(V_{as+b}(V_{as+b} + V_a + \sqrt{A})) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{n-1}$$

$$-\frac{(V_{as+b}(-v_{as+b} - V_a + \sqrt{A})) + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{n-1},$$

ou $A = (V_{as+b} - V_a)^2 + 4(-q)^a(V_{a(s-1)+b} - 1)$.

Preuve. Pour $n = 1$ on a :

$$det(V_{as+b}) = \frac{V_{as+b}(V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{1-1}$$

$$+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} - V_a + \sqrt{A} + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{1-1},$$

$$= \frac{V_{as+b}(V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}} + \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}) + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},$$

$$= \frac{V_{as+b}^2 + V_{as+b}V_a + V_{as+b}\sqrt{A} - 2V_{a(s+1)+b} - V_{as+b}^2 - V_{as+b}V_a + V_{as+b}\sqrt{A} + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}},$$

$$= \frac{2V_{as+b}\sqrt{A}}{2\sqrt{A}},$$

$$= V_{as+b}.$$

Pour $n = 2$ on a :

$$det(V_{as+b}) = \frac{V_{as+b}(V_{as+b} + V_a + \sqrt{A}) - 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b} - V_a + \sqrt{A}}{2}\right)^{2-1}$$

$$+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b} - V_a + \sqrt{A} + 2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b} - V_a - \sqrt{A}}{2}\right)^{2-1},$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{V_{as+b}(V_{as+b}+V_a+\sqrt{A})-2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b}-V_a+\sqrt{A}}{2}\right)\\
&+ \frac{V_{as+b}(-V_{as+b}-V_a+\sqrt{A})+2V_{a(s+1)+b}}{2\sqrt{A}}\left(\frac{V_{as+b}-V_a-\sqrt{A}}{2}\right),\\
&= \frac{(V_{as+b}^2+V_{as+b}V_a+V_{as+b}\sqrt{A}-2V_{a(s+1)+b})(V_{as+b}-V_a+\sqrt{A})}{4\sqrt{A}}\\
&+ \frac{(-V_{as+b}^2-V_{as+b}V_a+V_{as+b}\sqrt{A}+2V_{a(s+1)+b})(V_{as+b}-V_a-\sqrt{A})}{4\sqrt{A}},\\
&= \frac{V_{as+b}^3-V_{as+b}^2V_a+V_{as+b}^2\sqrt{A}+V_{as+b}^2V_a-V_{as+b}V_a^2+V_{as+b}V_a\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}\\
&+ \frac{V_{as+b}^2\sqrt{A}-V_{as+b}V_a\sqrt{A}+V_{as+b}A-2V_{a(s+1)+b}V_{as+b}+2V_{a(s+1)+b}V_a-2V_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}\\
&- \frac{V_{as+b}^3+V_{as+b}^2V_a+V_{as+b}^2\sqrt{A}-V_{as+b}^2V_a+V_{as+b}V_a^2+V_{as+b}V_a\sqrt{A}+V_{as+b}^2\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}\\
&- \frac{V_{as+b}V_a\sqrt{A}-V_{as+b}A+2V_{a(s+1)+b}V_{as+b}-2V_{a(s+1)+b}V_a-2V_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}},\\
&= \frac{4V_{as+b}^2\sqrt{A}-4V_{a(s+1)+b}\sqrt{A}}{4\sqrt{A}},\\
&= \frac{4\sqrt{A}(V_{as+b}^2-V_{a(s+1)+b})}{4\sqrt{A}},\\
&= V_{as+b}^2-V_{a(s+1)+b}.
\end{aligned}
$$

Par récurrence sur n, en utilisant la récurrence de det_n on trouve,

$$
\begin{aligned}
det_n &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^j V_{a(s+j-1)+b}det_{n-j},\\
&= -V_{as+b}det_{n-1}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^j V_{a(s+j-1)+b}det_{n-j},\\
&= -V_{as+b}det_{n-1}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^j(V_aV_{a(s+j-2)+b}-(-q)^aV_{a(s+j-3)+b})det_{n-j},\\
&= -V_{as+b}det_{n-1}+V_a\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j V_{a(s+j-1)+b}det_{n-j-1}\\
&- (-q)^aV_{a(s-1)+b}det_{n-2}-(-q)^a\sum_{j=3}^{n}(-1)^j V_{a(s+j-3)+b}det_{n-j},\\
&= -(V_{as+b}+V_a)det_{n-1}+(-(-q)^aV_{a(s-1)+b}-(-q)^a)det_{n-2}.
\end{aligned}
$$

■

3.7 Déterminant et Permanent des matrices de Toeplitz-Hessenberg pour les suites r-Fibonacci et r-Lucas

Définition 3.7.1 *Une matrice A de taille $n \times n$ est appelée matrice de Hessenberg inférieure si $a_{ij} = 0$ telle que $j - i > 1$,*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Theoreme 3.5 *Soit A une matrice de Hessenberg inférieure pour tout $n \geq 1$ alors,*

$$det(A_1) = a_{11},$$

et pour $n \geq 2$

$$det(A_n) = a_{n,n}det(A_{n-1}) + \sum_{r=1}^{n-1} \left[(-1)^{n-r} a_{n,r} (\prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1}) det(A_{r-1}) \right]. \tag{3.10}$$

[7]

Preuve. *Pour $n = 2$*

$$\begin{aligned} det(A_{2)} &= a_{2,2}det(A_1) + \left[(-1)^{2-1} a_{2,1}a_{1,2}det(A_0) \right], \\ &= a_{2,2}det(A_1) + (-1)a_{2,1}a_{1,2}, \\ &= a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}. \end{aligned}$$

Pour $n = 3$

$$\begin{aligned} det(A_3) &= A_{3,3}det(A_{3-1}) + \left[(-1)^{3-1} a_{3,1}a_{1,2}det(A_{1-1}) + (-1)^{3-2} a_{2,3}det(A_1) \right], \\ &= a_{3,3}det(A_2) + (-1)^2 a_{3,1}a_{1,2}det(A_0) + (-1)a_{3,2}a_{2,3}det(A_1), \\ &= a_{3,3}(a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}) + a_{3,1}a_{1,2} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1}, \\ &= a_{3,3}a_{2,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,2} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1}. \end{aligned}$$

■

Dans [11], le permanent de A est définie par

$$per(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

où la sommation s'étend sur tous les éléments σ du groupe symétrique S_n.

Remarque 7 *Si A_n une matrice de Hessenberg inférieure définie dans (3.9), alors*

$$det(A_n) = per(B_n). \tag{3.11}$$

Telle que B_n est définie par :

$$B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & -a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Theoreme 3.6 *Soit $(V_n^{(r,s)})$ la famille de suite compagnon associée à la polynôme de Fibonacci bivariée et $A_n^{(r,s)} = a_{jk}$ est une matrice de Hessenberg inférieure donnée par :*

$$a_{jk} = \begin{cases} i, \quad si \quad j = k-1, \\ x, \quad si \quad j = k, \\ i^r y, \quad si \quad r = j-k \quad et \quad k \neq 1, \\ (s+1)i^r y, \quad si \quad r = j-k \quad et \quad k = 1, \\ 0, \quad sinon, \end{cases}$$

$$A_n^{(r,s)} = \begin{pmatrix} x & i & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & i & 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (s+1)i^r y & 0 & \dots & \dots & \dots & x & i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i^r y & 0 & \ddots & \dots & 0 & x & i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & i^r y & 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots & x & i \\ 0 & \dots & 0 & i^r y & 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 & x \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Alors pour $n \geq 1$,

$$det(A_n^{(r,s)}) = V_n^{(r,s)}. \tag{3.13}$$

Preuve. Par hypothèse le résultat est vraie pour $n \in \{1, \ldots, r\}$.

Pour $n = r + 1$, nous utilisons l'expansion de Laplace pour la dernière ligne de $A_{r+1}^{(r,s)}$ alors, supposons maintenant que (3.13) est vraie pour tout $j \in \{r + 2, \ldots, n\}$. Puis en utilisent le théorème (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
det(A_{n+1}^{(r,s)}) &= a_{n+1,n+1} det(A_{n+1-1}^{(r,s)}) + \sum_{p=1}^{n-1+1} (-1)^{n+1-p} a_{n+1,p} (\prod_{j=p}^{n-1+1} a_{j,j+1}) det(A_{r-1}^{(r,s)}), \\
&= a_{n+1,n+1} det(A_n^{(r,s)}) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{n+1-p} a_{n+1,p} (\prod_{j=p}^{n} a_{j,j+1}) det(A_{r-1}^{(r,s)}), \\
&= x det(A_n^{(r,s)}) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{n+1-p} a_{n+1,p} (\prod_{j=p}^{n} a_{j,j+1}) det(A_{r-1}^{(r,s)}), \\
&= x det(A_n^{(r,s)}) + \sum_{p=1}^{n-r} \left[(-1)^{n+1-p} a_{n+1,p} (\prod_{j=p}^{n} a_{j,j+1}) det(A_{r-1}^{(r,s)}) \right] \\
&+ \sum_{p=n-r+1}^{n} \left[(-1)^{n+1-p} (\prod_{j=p}^{n} a_{j,j+1}) det(A_{r-1}^{(r,s)}) \right], \\
&= x det(A_n^{(r,s)}) + \left[(-1)^r (i)^r y \prod_{j=n-r+1}^{n} i det(A_{n-r}^{(r,s)}) \right], \\
&= x det(A_n^{(r,s)}) + \left[(-1)^r (i)^r y . (i)^r det(A_{n-r}^{(r,s)}) \right], \\
&= x det(A_n^{(r,s)}) + y det(A_{n-r}^{(r,s)}).
\end{aligned}$$

■

À partir de l'hypothèse de récurrence et de la définition de $V_n^{r,s}$, on obtient :

$$det(A_{n+1}^{(r,s)}) = x V_n^{(r,s)} + y V_{n-r}^{(r,s)} = V_{n+1}^{(r,s)}.$$

Theorem 3.7 *Soit $(V_n^{(r,s)})_{n \geq 0}$ la famille de suite compagnon associée à la polynôme r-Fibonacci bivariée et $B_n^{(r,s)} = b_{jk}$ est une matrice de Hessenberg inférieure donnée par :*

$$b_{jk} = \begin{cases} -i, & si \quad j = k - 1, \\ x, & si \quad j = k, \\ i^r y, & si \quad r = j - k \quad et \quad k \neq 1, \\ (s+1) i^r y, & si \quad r = j - k \quad et \quad k = 1, \\ 0, & sinon, \end{cases}$$

$$B_n^{(r,s)} = \begin{pmatrix} x & -i & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & -i & 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (s+1)i^r y & 0 & \dots & \dots & \dots & x & -i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i^r y & 0 & \ddots & \dots & 0 & x & -i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & i^r y & 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots & x & -i \\ 0 & \dots & 0 & i^r y & 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 & x \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Alors pour $n \geq 1$,

$$per(B_n^{(r,s)}) = V_n^{(r,s)}. \tag{3.15}$$

Exemple 3.10 *Nous donnons la représentations déterminantes et permanentes du* $4^{eme} V_n^{(r,s)}$ *pour* $r = 4$ *et* $1 \leq s \leq 4$,

On a :

$$det(A_{r+1}^{(r,s)}) = x^{(r+1)} + (s+1)y = V_{r+1}^{(r,s)}.$$

Pour $s = 1$, *on obtient :*

$$det(A_{3+1}^{(3,1)}) = x^{(3+1)} + (1+1)y,$$

$$\begin{aligned} det(A_4^{3,1}) &= x^4 + 2y, \\ &= V_4^{(3,1)}. \end{aligned}$$

Donc :

$$det \begin{pmatrix} x & i & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 \\ 0 & 0 & x & i \\ 2i^3 y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = per \begin{pmatrix} x & -i & 0 & 0 \\ 0 & x & -i & 0 \\ 0 & 0 & x & -i \\ 2i^3 y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^4 + 2y = V_4^{3,1}.$$

Pour $s = 2$,*on obtient :*

$$det(A_{3+2}^{(3,1)}) = x^{(3+1)} + (2+1)y,$$

$$\begin{aligned} det(A_4^{3,2}) &= x^4 + 3y, \\ &= V_4^{(3,2)}. \end{aligned}$$

Donc :

$$det\begin{pmatrix} x & i & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 \\ 0 & 0 & x & i \\ 3i^3y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = per\begin{pmatrix} x & -i & 0 & 0 \\ 0 & x & -i & 0 \\ 0 & 0 & x & -i \\ 3i^3y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^4 + 3y = V_4^{3,2}.$$

Pour $s = 3$, on obtient :

$$det(A_{3+3}^{(3,1)}) = x^{(3+1)} + (3+1)y,$$

$$\begin{aligned} det(A_4^{3,3}) &= x^4 + 4y, \\ &= V_4^{(3,3)}. \end{aligned}$$

Donc :

$$det\begin{pmatrix} x & i & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 \\ 0 & 0 & x & i \\ 4i^3y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = per\begin{pmatrix} x & -i & 0 & 0 \\ 0 & x & -i & 0 \\ 0 & 0 & x & -i \\ 4i^3y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^4 + 4y = V_4^{3,3}.$$

Pour $s = 4$, on obtient :

$$det(A_{3+1}^{(3,4)}) = x^{(4+1)} + (4+1)y,$$

$$\begin{aligned} det(A_4^{3,4}) &= x^4 + 5y, \\ &= V_4^{(3,4)}. \end{aligned}$$

Donc :

$$det\begin{pmatrix} x & i & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 \\ 0 & 0 & x & i \\ 5i^3y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = per\begin{pmatrix} x & -i & 0 & 0 \\ 0 & x & -i & 0 \\ 0 & 0 & x & -i \\ 5i^3y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^4 + 5y = V_4^{3,4}.$$

Conclusion

Les suites de Fibonacci et leurs compagnons les suites de Lucas sont des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, très riche en propriétés.
Par conséquent, on attend de l'étude de ces suites de nombreux résultats. En effet, dans le domaine des mathématiques on trouve beaucoup d'auteurs intéressés par ces suites qui travaillent sur d'autres problèmes de physique ou autres, étudier les suites récurrentes linéaires en générales et les suites de Fibonacci et ses généralisations en particulier. Nous avons constaté, durant notre étude, que la documentation concernant ce domaine est très abondante.
Dans notre recherche, nous nous sommes également intéressé aux suites r-Fibonacci et leurs suites compagnons r-Lucas, les polynômes r-Fibonacci et r-Lucas à une seule variables (resp. bivariés).
On donne quelque applications à travers les matrices de Toeplitz-Hessenberg et leurs relations avec les polynômes de Fibonacci et Lucas (resp. r-Fibonacci et r-Lucas).

Les recherches actuelles sont très fréquentes et riches en résultats, nous encourageons les jeunes chercheurs avides de savoir à se pencher sur ce domaine.

Bibliographie

[1] ABBAD, S, BELBACHIR, H, et BENZAGHOU, B. Companion sequences associated to the r-Fibonacci sequence : algebraic and combinatorial properties. Turkish Journal of Mathematics, 2019, vol. 43, no 3, p. 1095-1114.

[2] BELBACHIR, H, BELKHIR, A, et DJELLAS, I-E. (R1979) Permanent of Toeplitz-Hessenberg Matrices with Generalized Fibonacci and Lucas entries. Applications and Applied Mathematics : An International Journal (AAM), 2022, vol. 17, no 2, p. 15.

[3] BELBACHIR, H et BENCHERIF, F. On some properties on bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. arXiv preprint arXiv :0710.1451, 2007.

[4] BELBACHIR, H et DJELLAS, I-E. Determinantal and permanental representations of companion sequences associated to the r-Fibonacci sequence. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 2022, Vol. 28, no 1, p. 64–74.

[5] BELHAJ, S. Algèbre matricielle rapide en calcul formel et calcul numérique. 2010. Thèse de doctorat. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (Université de Tunis El Manar) ; Université de Franche-Comté.

[6] BRUALDI, R. Permanent of the direct product of matrices. Pacific Journal of Mathematics, 1966, vol. 16, no 3, p. 471-482.

[7] CAHILL, N D., D'ERRICO, J R., NARAYAN, D A., et al. Fibonacci determinants. The college mathematics Journal, 2002, vol. 33, no 3, p. 221-225.

[8] GLYNN, D. G. The permanent of a square matrix. European Journal of Combinatorics, 2010, vol. 31, no 7, p. 1887-1891.

[9] KHALIL, H. Matrices structurées et matrices de Toeplitz par blocs de Toeplitz en calcul numérique et formel. 2008. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard-Lyon I.

[10] MERABET, S. et ZEKRAOUI, H. Les matrices de toeplitz et applications. 2014.

[11] MINC, H. Permanents. Cambridge University Press, 1984.

[12] NALLI, A et HAUKKANEN, P. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. Chaos, Solitons Fractals, 2009, vol. 42, no 5, p. 3179-3186.

[13] TUGLU, N, KOCER, E. Gokcen, et STAKHOV, A. Bivariate fibonacci like p–polynomials. Applied Mathematics and Computation, 2011, vol. 217, no 24, p. 10239-10246.

[14] WANG, J. Some new results for the (p, q)-Fibonacci and Lucas polynomials. Advances in Difference Equations, 2014, vol. 2014, no 1, p. 1-15.

[15] ZERROUG, S, ATTABI W. NOMBRES DE FIBONACCI. 2017.