Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique



THÈSE

présentée en vue de l'obtention du diplôme

Doctorat LMD en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

THÈME

CONTRIBUTION À L'ETUDE DES PROBLÈMES DE LA COLORATION DOMINANTE DANS LES GRAPHES

Présentée par **AIOULA Soumia**

Soutenue devant le jury composé de :

D. LAISSAOUI, MCA, à UYFM. Médéa..... Président

N. IKHLEF-ESCHOUF, Prof, à UYFM. Médéa.....Directeur de thèse

M. ZAMIME, MCB, à UYFM. Médéa.....Co-directeur de thèse

I. BOUCHEMAKH, Prof, à USTHB. Alger.....Examinatrice

M. CHELLALI, Prof, à USTB. Blida 1.....Examinateur

M. MIHOUBI, Prof, à USTHB, Alger .....Examinateur

A. BOUCHOU, MCA, à UYFM. Médéa.....Examinateur

2020-2021

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIERES 2

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES 5

REMERCIEMENTS 7

RÉSUMÉ 9

ABSTRACT 10

INTRODUCTION 12

1 Concepts fondamentaux **16**

1.1 Définitions et notations de base 17

1.1.1 Définitions 17

1.1.2 Voisinages et degrés 17

1.1.3 Isomorphisme de deux graphes 18

1.1.4 Sous graphe et graphe partiel 18

1.1.5 Cliques, stables, couplages et transversal 18

1.1.6 Quelques graphes particuliérs 19

1.1.7 Distance, excentricité et diamètre 21

1.1.8 Maximalité, minimalité par rapport à une propriété 22

1.2 Quelques opérations sur les graphes 22

1.3 Aperçu sur la complexité algorithmique 23

1.4 Coloration propre et domination 25

1.4.1 Coloration propre 25

1.4.2 Domination dans les graphes 26

2 Etat de l'art sur la coloration dominante 28

2.1 Coloration dominante 29

2.2 Quelques résultats sur le nombre chromatique dominant 30

2.2.1 Chaînes, cycles, roues 31

2.2.2 Graphes connexes et non-connexes 33

2.2.3 Coloration dominante et partition sécurisée 33

2.2.4 Graphes triangulés, graphes scindés et graphes sans P_4 35

2.2.5 Graphes vérifiants l'égalité $\chi_d(G) = \chi(G)$ et $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$ . . 36

2.2.6 Caractérisation des graphes avec $\chi_d(G) = n - 1$ 37

2.2.7 Graphes G avec $\delta(G) = 1$ 37

2.2.8 Graphes bipartis 38

2.2.9 Autres graphes 40

2.2.10 Produit de deux graphes 45

2.2.11 D'autres colorations dérivées de la coloration dominante 45

3 Détermination du nombre chromatique dominant des forêts de chenilles généralisées 48

3.1 Définitions et notations 49

3.2 Résultats préliminaires 51

3.3 Preuve du Théorème 3.2.1 62

4 Graphes arête χ_d^+-critiques **63**

4.1 Graphes sommet(resp., arête) χ_d-critiques 64

4.1.1 Exemples 65

4.2 Résultats prémilinaires 65

4.3 Graphes arête χ_d^+-critiques. 67

4.3.1 Forêt arête χ_d^+-critique. 71

4.3.2 Graphe sans P_4 arête χ_d^+-critique 73

Conclusion et perspectives **75**

TABLE DES FIGURES

1.1 Exemple d'un graphe scindé. 20

1.2 Exemple d'une étoile-multiple $K_3\{3,3,3\}$ 20

1.3 Exemple d'une chenille $C(2,0,3,0,1)$. 21

1.4 Exemple d'une couronne. 21

1.5 Exemple de la suppression d'un sommet v et d'une arête e. 22

1.6 Exemple de la roue W_6. 23

1.7 Une χ-coloration de sommets d'un graphe avec 3 couleurs. 26

2.1 La coloration dominante optimale de la chaîne P_5 avec $\chi_d(G) = 3$. 29

2.2 χ_d-coloration de l'étoile $K_{1,n}$, du graphe complet K_4 et d'une étoile double $S_{a,b}$ 31

2.3 χ_d-coloration d'une étoile-multiple $K_3\{3,3,3\}$ 32

2.4 χ_d-coloration de la chaîne P_9 et du cycle C_9. 33

2.5 Exemple d'une araignée blessée. 35

2.6 Exemple d'une chenille avec $\chi_d(G) = r + 1$. 39

2.7 Graphe de Petersen 41

2.8 χ_d-coloration du graphe de Hajós généralisé $[K_5]$ avec $\chi_d([K_5]) = 6$. . . . 43

2.9 χ_d-coloration du graphe partiel d'un Hajós généralisé $[C_5]$ avec $\chi_d([C_5]) = 5$. 44

2.10 χ_d-coloration du graphe de trampoline $T[K_5]$ avec $\chi_d(T[K_5]) = 5$. 44

2.11 Exemple d'une coloration dominante forte avec $\chi_d^s(G) = 7$. 47

3.1 Exemple d'une chenille généralisée et d'une forêt de chenilles généralisées. 49

3.2 Exemple d'une tige dans une forêt de chenilles généralisées. 50

3.3 Exemple d'un arbre T_3 et de sa chenille généralisée correspondante . . . 52

4.1 Un graphe illustrant le Théorème 4.2.1. 67

REMERCIEMENTS

" Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent
du bonheur, elles sont les charmants jardiniers
par qui nos âmes sont fleuries. "

Marcel Proust

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur IKHLEF-ESCHOUF Noureddine, Professeur à l'Université Yahia Farès de Médéa pour avoir accepté de diriger ce travail de recherche. Je le remercie également pour ses conseils, ses orientations et son aide, et pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de cette thèse.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-directeur de thèse, Monsieur ZAMIME Mohamed, Maître de Conférences à l'Université Yahia Farès de Médéa, pour ses conseils avisés et son écoute.

Je remercie Monsieur LAISSAOUI Diffalah, Maître de Conférences à l'Université Yahia Farès de Médéa, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remeciements vont également à Madame BOUCHEMAKH Isma, Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'Alger, Monsieur CHELLALI Mustapha, Professeur à l'Université de Blida 1, Monsieur MIHOUBI Miloud, Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'Alger, Monsieur BOUCHOU Ahmed, Maître de Conférences à l'Université Yahia Farès de Médéa, pour avoir accepté de lire et de juger ce travail.

Un grand merci à Monsieur CHELLALI Mustapha, Monsieur BOUCHOU Ahmed et Mademoiselle BENDALI-BRAHAM Amel, pour leurs implication dans certains des mes travaux. Ils m'ont beaucoup appris, j'ai apprécié leur enthousiasme infatigable.

Je présente aussi mes sincères remerciements avec mon respect et ma gratitude à Monsieur OUMOUNA Mustapha, Professeur à l'université Yahia Farès de Médéa, pour son aide et ses recommandations précieuses.

Un merci spécial à ma famille. Tout d'abord, mes sincères remerciements vont à mes parents qui m'ont toujours encouragé dans la poursuite de mes études. Rien que je puisse dire, peut vraiment exprimer ce que je ressens envers eux. Une chose est sûre : sans eux, je ne serais jamais la personne que je suis aujourd'hui. Un merci du fond du coeur à mes soeurs Asmaa, Meriem et Raihana, pour leur compréhension, leur soutien et pour m'avoir toujours encouragé dans mes choix.

Que mes amies trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance et de mon amitié, pour l'agréable bout de chemin qu'on a passé ensemble, tout particulièrement, BELHADJER Amina, YOUSSEF ETTOUMI Kaouthar et ABDAZZIZE Zoubida.

RÉSUMÉ

Les travaux réalisés dans cette thèse portent sur l'étude de la coloration dominante dans les graphes. Etant donné un graph $G = (V, E)$, une coloration dominante de G est une coloration propre telle que chaque sommet voit (domine) au moins une classe de couleur. Le nombre chromatique dominant, noté $\chi_d(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une coloration dominante avec k couleurs. Dans la première partie de cette thèse, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique dominant d'une sous classe des forêts dite forêts de chenilles généralisées. Dans la deuxième partie, nous introduisons la notion des graphes arêtes χ_d^+-critiques, c'est-à-dire les graphes dont la surpression d'une arête quelconque du graphe fait augmenter son nombre chromatique dominant. Dans ce contexte, nous montrons que le nombre chromatique dominant d'un graphe G privé d'une arête quelconque peut augmenter ou diminuer par au plus une unité. Ensuite, nous caractérisons les forêts et les graphes sans P_4 qui sont arête χ_d^+-critiques.

ABSTRACT

THe works carried out in this thesis focuses on the study of dominator coloring in graphs. For a given graph $G = (V, E)$, a dominator coloring of a G is proper coloring such that each vertex of G sees (dominates) at least one color class. The dominator chromatic number denoted $\chi_d(G)$, is the smallest integer k such that G admits a dominator coloring with k colors. In the first part of this thesis, we determine the exact value of the dominator chromatic number of a subclass of forests called generalized caterpillar forests. In the second part, we introduce the notion of edge χ_d^+-critical graphs, that is, graphs in which the deletion of any edge increases its dominator chromatic number. In this context, we show that the dominator chromatic number of a graph G deprived of any edge can increase or decrease by at most one unit. Then we characterize forests and P_4-free graphs that are edge χ_d^+-critical.

ملخص

هدف هذه الأطروحة هو دراسة مفهوم χ_d - تلوين في البيانات.

التلوين χ_d-لوني لرؤوس بيان $G = (V,E)$ هو تلوين أجود بحيث كل رأس يرى (يهيمن) فئة لونية واحدة على الأقل. العدد χ_d- لوني لبيان G الذي يرمز له بـ $\chi_d^+(G)$ هو أصغر عدد صحيح k بحيث البيان G يقبل χ_d^+ -تلوين ب k-لون. في القسم الأول من هذه الأطروحة، نقوم بتحديد القيمة الصحيحة للعدد اللوني السائد لفئة فرعية من الغابات، تسمى غابة كاتربيلر المعممة. في القسم الثاني نعرف مفهوم البيانات الحافة χ_d^+- حرجة، أي البيانات التي من أجلها يزيد العدد χ_d -لوني عند تعديل البيان G بواسطة حذف أي حافة. في هذا الصدد، نثبت أن العدد اللوني المسيطر للرسم البياني G بعد حذف أي حافة يمكن أن يزيد أو ينقص بمقدار وحدة واحدة على الأكثر.، ثم نقوم بتمييز بعض البيانات χ_d^+ - حرجة .

INTRODUCTION

Le choix de la méthode la plus appropriée pour résoudre un problème concret est souvent plus difficile que d'arriver au résultat. A ce titre, Edwin Chargaff a écrit :

"*Dans les sciences, le chemin est plus important que le but.*"

En effet, face à des questions complexes issues de la vie courante, divers outils mathématiques ont été développés pour pallier aux problèmes rencontrés. Parmi les différentes stratégies adoptées pour modéliser de tels problèmes mathématiques se trouve la recherche opérationnelle.

La recherche opérationnelle est une branche des mathématiques qui vise à traiter des problèmes d'utilisation optimale des ressources dans les différents secteurs d'activité. Le champ d'application de cette discipline s'est développé à d'autres domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Parmi les principales techniques utilisées dans la recherche opérationnelle : la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation des réseaux, les files d'attente, et *la théorie des graphes*,...

La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes en les transformant à des schémas qui se déssinent simplement à l'aide des points et des traits qui s'appellent, respectivement, sommets et arêtes (arcs si les traits ont une orientation). Plus formellement, *"un graphe"* est une structure mathématique simple, composée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini non vide de sommets et E est l'ensemble des arêtes.

La théorie des graphes est apparue comme une curiosité mathématique avec le problème des sept ponts. L'étude de ce problème a commencé depuis le $18^{\text{ème}}$ siècle avec le mathématicien suisse Leonhard Euler quand il a démontré, en 1736, qu'il est impossible de traverser les sept ponts de la ville russe de Königsberg une seule fois et revenir au point de départ. Le mot «graphe» est introduit par l'Anglais J. Sylvester en 1822 pour mettre en évidence une analogie entre des structures algébriques et chimiques.
Le $20^{\text{ème}}$ siècle voit un développement de la théorie plus concrète. C'est d'abord Kirchhoff qui s'intéresse à la quantité de courant qui circule dans les différentes branches d'un circuit électrique, en 1847. Dix ans plus tard, en 1857, le mathématicien britannique Arthur Cayley a développé la notion d'arbre, qui représentent un type particulier de graphe sans cycle. Cayley a démontré que le nombre d'arbres que l'on peut construire avec $n(n > 1)$ sommets numérotés est égal à n^{n-2}. En 1936, Kőnig, un mathématicien et professeur hongrois a écrit le premier livre sur la théorie des graphes, intitulé : " *Theory of finite and infinite graph*". Depuis cette époque, la théorie des graphes est officiellement devenue une branche des mathématiques.

De manière plus générale, la théorie des graphes n'est pas seulement un outil puissant de modélisation et de résolution de problèmes concréts, mais elle est aussi un moyen efficace utilisé dans d'autres domaines mathématiques tels que l'algèbre et la topologie,. . . , de plus elle touche plusieurs disciplines telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie, les sciences sociales (modélisation des relations),...etc.

L'un des thèmes majeurs de la théorie des graphes est *la coloration des graphes*. L'origine de la coloration remonte au $19^{\text{ème}}$ siècle, et plus précisement en 1852, lorsque Francis Guthrie a découvert qu'il est possible de colorer la carte d'Angleterre avec seulement quatre couleurs sous la condition que tous deux régions voisins sont colorés différemment. Ce problème n'a reçu sa réponse définitive qu'en 1976, quand Appel et Haken ont prouvé que dans ce cas particulier, quatre couleurs suffisent toujours. Cette solution a fait un grand bruit car c'est le premier problème de l'histoire des mathématiques qui a nécessité l'usage systématique de l'ordinateur.

Actuellement, plusieurs types de coloration ont été introduits et étudiés, telles que la coloration des sommets, la coloration d'arêtes, la coloration totale, la coloration d'incidence, la coloration par liste, . . . , etc. Pour de plus amples détails, l'article de Jensen

et Toft " Graph coloring problems" rassemble plusieurs résultats sur plusieurs types de colorations dans les graphes.

Le problème général de la coloration des sommets d'un graphe consiste en l'affectation à chaque sommet une couleur de sorte que deux sommets adjacents ne reçoient jamais la même couleur, une telle coloration est dite " propre " (classique). Le nombre chromatique, noté $\chi(G)$, est défini comme le nombre minimum de couleurs utilisées dans une coloration propre de sommets d'un graphe.

Notre étude se focalise sur une variante de la coloration classique appelée " *coloration dominante* ". Elle est définie comme étant une coloration propre de sommets telle que chaque sommet voit (domine) au moins une classe de couleur. Cette coloration à été introduite en 2006 par Gera et al [33]. Le paramètre lié à ce concept est appelé *nombre chromatique dominant* et est noté $\chi_d(G)$. Il représente le nombre minimum de classes de couleurs dans une coloration dominante.

Ce manuscrit comporte quatre chapitres organisés comme suit.

Chapitre 1 : Concepts fondamentaux.

Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons les principales définitions et les notations de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles au cours de cette thèse. La deuxième section est destinée à la présentation de quelques opérations sur les graphes. Dans la troisième section, nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique ensuite nous exposons les définitions et les notations relatives à la coloration propre et à la domination.

Chapitre 2 : Etat de l'art sur la coloration dominante.

Dans ce chapitre, nous donnons un résumé de l'ensemble des travaux et résultats existants sur la coloration dominante.

Chapitre 3 : Détermination du nombre chromatique dominant des forêts de chenilles généralisées.

Dans ce chapitre, nous donnons les premiers résultats de notre contribution. Plus précisément, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique dominant pour une classe spéciale des graphes, appelée "forêts de chenilles généralisées".

Chapitre 4 : Graphes arête χ_d^+-critiques.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'effet de la suppression d'une arête quelconque sur le nombre chromatique dominant. D'abord, nous montrons que le nombre chromatique dominant d'un graphe privé d'une arête quelconque peut augmenter ou diminuer par au plus une unité. Ensuite, nous caractérisons les forêts et les graphes sans P_4 qui sont arêtes χ_d^+-critiques.

Le mansucrit s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

CONCEPTS FONDAMENTAUX

Sommaire

1.1 Définitions et notations de base 17

1.1.1 Définitions 17

1.1.2 Voisinages et degrés 17

1.1.3 Isomorphisme de deux graphes 18

1.1.4 Sous graphe et graphe partiel 18

1.1.5 Cliques, stables, couplages et transversal 18

1.1.6 Quelques graphes particuliérs 19

1.1.7 Distance, excentricité et diamètre 21

1.1.8 Maximalité, minimalité par rapport à une propriété 22

1.2 Quelques opérations sur les graphes 22

1.3 Aperçu sur la complexité algorithmique 23

1.4 Coloration propre et domination 25

1.4.1 Coloration propre 25

1.4.2 Domination dans les graphes 26

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons les principales définitions, les concepts de base et les notations relatives aux graphes que nous utiliserons le long de cette thèse. Dans la deuxième partie, nous présentons quelques opérations sur les graphes

qui nous seront utiles dans la suite. Enfin, dans la troisième partie, nous rappelons les concepts relatives à la coloration propre et à la domination.

1.1 Définitions et notations de base

Cette section s'attache à donner les principales notions nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse.

1.1.1 Définitions

- Un *graphe* G est défini par un couple $(V(G),\ E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble de *sommets*, et $E(G)$ est un ensemble de paires de sommets appelées *arêtes*. Le nombre des sommets de G, appelé *ordre* de G, est noté $n(G)$ et le nombre de ses arêtes est noté $m(G)$.
- On dit que deux sommets $u, v \in V$ sont *adjacents ou voisins* si l'arête $uv \in E(G)$, on dit aussi que u *voit* v. Réciproquement, si $uv \notin E(G)$, alors u et v sont dits *non-adjacents ou non-voisins*, on dit aussi que u *manque* v.
- Si $e = uv$ est une arête de G, alors u et v sont les extrémités de e, et e est dit incidente à u et v.
- *Une boucle* est une arête reliant un sommet à lui- même.
- Un sommet u est dit *isolé* s'il n'existe aucune arête dans E incidente à u.
- Des arêtes sont dites *multiples* si elles ont les mêmes extrémités.
- Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucle et sans arêtes multiples.

Dans cette thèse, tous les graphes considérés sont finis, non-orientés et simples.

1.1.2 Voisinages et degrés

- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G(v)$, est l'ensemble des sommets de G adjacents au sommet v, et le *voisinage fermé* d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G[v]$, est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est le nombre de ses voisins.

- Un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant ou feuille.*
- Un sommet adjacent a une feuille est appelé *support.*
- On note par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ *le degré minimum* et *le degré maximum* d'un graphe G, respectivement.

1.1.3 Isomorphisme de deux graphes

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection f de V vers V' telle que pour tout u, $v \in V$, on a $uv \in E$ si et seulement si $f(u) f(v) \in E'$. L'application f est appelée *isomorphisme.* Les graphes isomorphes ont la même représentation sauf l'identité des sommets qui peut changer.

1.1.4 Sous graphe et graphe partiel

- $H = (V', E')$ est un *sous-graphe* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E' = \{uv \in E : \ u, v \in V'\}$, alors H est dit sous-graphe induit (ou engendré) par V', dans ce cas H est noté par $G[V']$.
- $H = (V', E')$ est un *graphe partiel* d'un graphe $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

1.1.5 Cliques, stables, couplages et transversal

- Une *clique* dans un graphe est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté $\omega(G)$.
- Un *stable* (un ensemble indépendent) dans un graphe est un ensemble des sommets deux à deux non-adjacents. Le plus grand stable dans G s'appelle le *nombre de stabilité* et est noté $\alpha(G)$.
- Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un sommet x de G est dit *saturé* par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un *couplage parfait* dans G.
- Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$, est un sous ensemble $S \subseteq V$ contenant au moins une extrémité de chaque arête, ie. $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$. Le nombre

de transversal d'un graphe G, noté par $\alpha_0(G)$, est la cardinalité minimum d'un transversal de G.

1.1.6 Quelques graphes particuliérs

Chaînes et Cycles

- Une *chaîne* P d'un graphe G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_k$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de P, et les sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P. L'entier $k-1$ représente la longueur de P (au sens des arêtes). Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*. *Une corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n, est une chaîne élémentaire sans cordes.
- *Un cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. La longueur du plus petit cycle d'un graphe G est appelée *maille* de G, notée $g(G)$.

Graphe connexe, graphe complet, graphe complémentaire d'un graphe, graphe scindé et graphe d-régulier

- Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe connexe de G maximale (au sens de l'inclusion).
- Un graphe complet d'ordre n noté K_n est un graphe tel que toutes les paires de sommets sont adjacents.
- Le graphe *complémentaire* d'un graphe G est le graphe noté $\overline{G}$, défini par $V\left(\overline{G}\right) = V(G)$ et $E\left(\overline{G}\right) = \{uv : u, v \in V \text{ et } uv \notin E(G)\}$.
- Un graphe est dit *scindé* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en une clique et un stable.

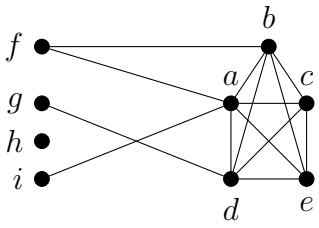


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe scindé.

- Un graphe simple est dit *d-régulier* si tous ses sommets sont de même degré d.

Graphe biparti, biparti complet, étoile et étoile-multiple

- Un graphe est dit *biparti* si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête. Si chaque sommet de V_1 est adjacent à chaque sommet de V_2, alors G est dit *biparti complet* et on le note par $K_{p,q}$ avec $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.
- Si $p = 1$ (ou $q = 1$), alors $K_{1,q}$ est dit étoile.
- Une *étoile-multiple* notée $K_n\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est obtenu à partir d'une clique K_n d'ensemble de sommets $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en joignant à chaque sommet x_i, $a_i \geq 1$, nouveaux sommets.

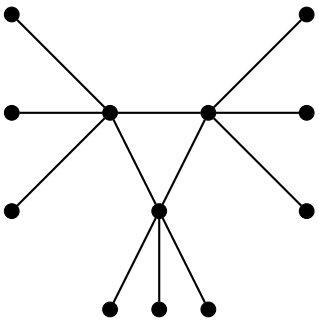


FIGURE 1.2 – Exemple d'une étoile-multiple $K_3\{3, 3, 3\}$.

Arbre, forêt, chenille et couronne

- Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

- Une *forêt* est un graphe non connexe où chaque composante connexe est un arbre.
- Une *chenille* C est un arbre dont la suppression des feuilles produira une chaîne appelée épine de C. Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont les sommets de l'épine d'une chenille C et si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, le sommet t_i est adjacent à d_i feuilles dans C, on convient de noter C par $C(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Si $n = 2$ alors C est dite *double étoile*, et on la note par $S_{a,b}$, où $d_G(t_1) = a \geq 2$ et $d_G(t_2) = b \geq 2$.

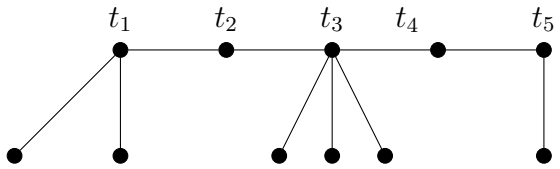


FIGURE 1.3 – Exemple d'une chenille $C(2, 0, 3, 0, 1)$.

- *La couronne* d'un graphe G, noté $cor(G)$, est le graphe obtenu d'une copie de G où chaque sommet de G est adjacent à un sommet pendant. Notons que l'ordre de $cor(G)$ est $2\,|V(G)|$.

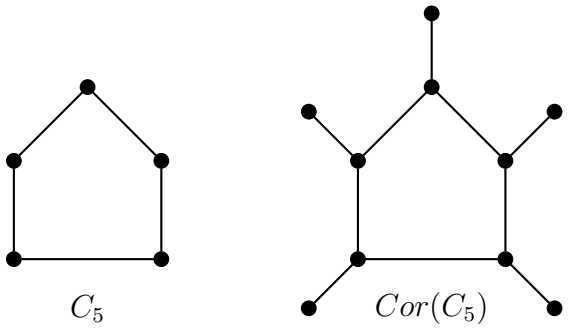


FIGURE 1.4 – Exemple d'une couronne.

1.1.7 Distance, excentricité et diamètre

- *La distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d(u, v)$, est la longueur du plus courte chaîne reliant u à v.
- *L'excentricité* d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$, notée $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$.

- *Le diamètre* de G, noté par $diam(G)$ est défini par $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.
- Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé un *centre*.

1.1.8 Maximalité, minimalité par rapport à une propriété

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de $V(G)$ est dit *minimal* (resp., *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$, si S vérifé $\mathcal{P}$ et n'existe pas d'ensemble $S' \subset S$ (resp., $S \subset S'$) tel que $G[S']$ vérifie $\mathcal{P}$.

1.2 Quelques opérations sur les graphes

- Soient v et e, respectivement, un sommet et une arête d'un graphe $G = (V, E)$. Alors $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. Le graphe $G - e$, est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (la suppréssion de l'arête e n'implique pas la suppression des sommets incidents à e).

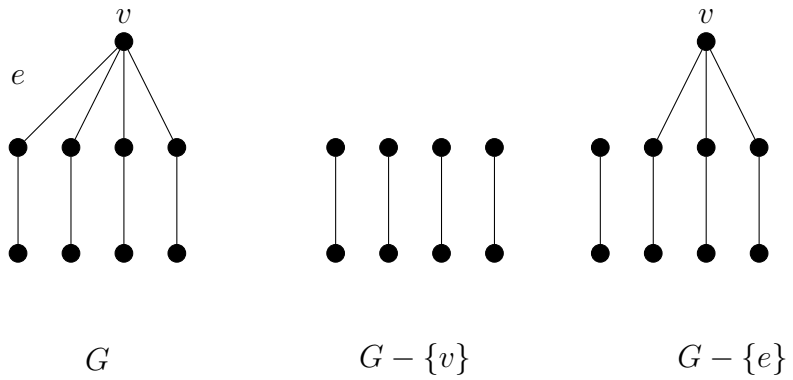


FIGURE 1.5 – Exemple de la suppression d'un sommet v et d'une arête e.

- Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes. L'union de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2$ dont l'ensemble des sommets est $V_1 \cup V_2$ et l'ensemble des arêtes est $E_1 \cup E_2$. On note par kG l'union de $k \geq 2$ copies de G.
- Le *joint* de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \vee G'$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V \cup V'$ et ensemble d'arêtes $(E \cup E') \cup \{uv : u \in V$

et $v \in V'\}$. Autrement dit, $G \vee G'$ est le graphe obtenu à partir de $G + G'$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G et G'.

- Une roue est le joint d'un cycle C_n et d'un sommet isolé.

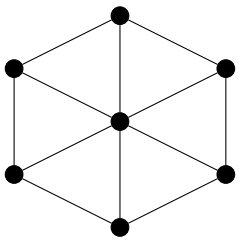


FIGURE 1.6 – Exemple de la roue W_6.

- Le *produit cartésien* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe G défini par : $V(G) = \{(u, v) : u \in V(G_1) \text{ et } v \in V(G_2)\}$ et $E(G) = \{v_1 = v_2 \text{ et } u_1u_2 \in E(G_2) \text{ ou } u_1 = u_2 \text{ et } v_1v_2 \in E(G_1)\}$.
- Le produit tensoriel, produit direct ou encore produit croisée de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \times G'$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(G')$. Deux sommets (u, v) et (u', v') de $V(G) \times V(G')$ sont adjacents si $uu' \in E(G)$ et $vv' \in E(G')$.

1.3 Aperçu sur la complexité algorithmique

Dans cette section, nous donnons quelques éléments de base sur la compléxité algorithmique.

Notion de complexité

L'optimisation combinatoire occupe une place très importante en recherche opérationnelle, en mathématiques discrètes et en informatiques. Son importance se justifie d'une part par la complexité des problèmes à traiter et d'autre part par l'existence ou non d'algorithmes efficaces a résoudre.

Avant d'expliquer la complexité algorithmique, donnons la définition d'un algorithme. Un algorithme est une suite finie d'opérations ou règles à appliquer dans un ordre déterminé, à un nombre fini de données, pour arriver à un nombre fini d'étapes, à un certain résultats et cela indépendamment des données.

La théorie de la complexité est un domaine de l'informatique théorique, qui s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique. La complexité d'un problème A est la complexité du meilleur algorithme qui résoud A.

Classes de complexité

La théorie de la complexité classe les problèmes selon leur complexité en deux classes principales : la classe P (polynomial time), et la classe NP(Non deterministic polynomial time).

Classe P

La classe P est définie comme la classe des problèmes décisionnels, *ie.* qui contient l'ensemble des problèmes qui peuvent être résolus par un algorithme polynomial d'ordre $O(n^k)$ pour un k constant donné et pour une entrée de taille n. Un problème est dit polynomial s'il existe un algorithme permettant de trouver une solution optimale pour toutes ses instances en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance. La classe P est la classe des problèmes qui sont faciles a résoudre.

Classe NP

La classe NP est la classe des problèmes de décision pour lesquels la réponse oui peut être décidée par un algorithme non-déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance. Cette classe contient donc l'ensemble des problèmes qui peuvent être résolus par un algorithme de complexité polynomiale pour une machine non déterministe, il est claire que $P \subseteq NP$. Mais, la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. La classe NP est divisé en deux sous classes : *NP-complet* et *NP-difficile*.
Formellement, On dit qu'un problème de décision (P_1) se réduit en temps polynomial à un problème (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Les problèmes de la classe NP-Complet

Cette classe contient les problèmes les plus difficiles de la classe NP. Le problème de la classe NP est dit NP-complet, si tout problème de la classe NP peut être réduit en temps

polynomial à lui. En d'autres termes, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP.

Les problèmes de la classe NP-difficiles

La classe des problèmes NP-difficiles englobe les problèmes de décision et les problèmes d'optimisations. Les problèmes NP-difficiles sont aussi difficiles que les problèmes NP-complets. Un problème est dit NP-difficile si tout problème de NP lui est polynomialement réductible.

1.4 Coloration propre et domination

1.4.1 Coloration propre

Le problème de coloration des graphes est l'un des premiers problèmes de la théorie des graphes. L'un des problèmes les plus célèbres de la coloration est le problème des quatre couleurs. Ce problème a été posé par Francis Guthrie en 1852 et consiste à répondre a la question suivante :

« est-il possible de colorer toute carte géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays partageant une frontière commune doivent être coloriés de couleur différente ? ».

La carte à colorier a été remplacée par un graphe tel que chaque pays étant représenté par un sommet et chaque deux pays voisins reliés par une arête. Colorier les pays de la carte se ramène alors à colorier les sommets du graphe obtenu. Cette idée à donné naissance au champ trés vaste de la coloration des graphes, qui consiste à attribuer une couleur à chaque sommet, ou à chaque arête, ou encore, la coloration des sommets et des arêtes, appelée coloration totale.

Définition 1.4.1 *Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une affectation de couleurs aux sommets de G de sorte que deux sommets adjacents u et v ne reçoivent pas la même couleur.*

Définition 1.4.2 *Une classe de couleur i notée C_i est un ensemble stable de sommets de V coloriés avec la même couleur i.*

Evidemment, tout graphe à $n-$sommets admet une $n-$coloration, donc il est évident s'intérresser au nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer un graphe. D'où la définition du nombre chromatique.

Définition 1.4.3 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble de sommets V.*

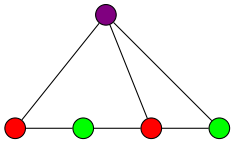


FIGURE 1.7 – Une χ-coloration de sommets d'un graphe avec 3 couleurs.

La détermination du nombre chromatique est $NP-$complet dans le cas général [32]. De ce fait, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes inférieures ou supérieures de ce paramètre en fonction d'autres paramètres de graphes (voir par exemple les références [11, 17] pour plus de détails).
Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique, on cite par exemple la b-coloration, la coloration dominée et la coloration dominante. Cette dernière coloration a fait l'objet de notre étude dans cette thèse.

1.4.2 Domination dans les graphes

Parmi les thèmes les plus étudiées dans la théorie des graphes est "la domination dans les graphes ". Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. L'idée semble remonter au $16^{\text{ème}}$ siècle en Inde (voir [25]). En 1862, Jaenisch [31] posa le problème suivant :

Déterminer le nombre minimum des reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit ocupée par une reine ou bien peut être ocupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5, et le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [39].
Le problème de domination des cases d'un échiquier peut être présenté d'une manière plus générale pour n'importe quelle pièce du jeu d'échecs en un problème de domination des sommets des graphes.
En 1958, la domination est devenue un domaine théorique grâce aux travaux de Claude Berge [9] qui a donné la définition de l'ensemble dominant dans les graphes orientés. Le nombre de domination était connu sous le nom "coefficient de stabilité externe". En 1962, Ore [63] publia son livre de théorie des graphes dans lequel il utilisa pour la première fois les appellations " ensemble dominant " et "nombre de domination ", et utilisa la notation $d(G)$ dans les graphes non orientés.
L'article de Cockayne et Hedetniemi [22] publié en 1977 a fait une croissance rapide de la recherche dans ce domaine, et dans ce même papier la notation $\gamma(G)$ est apparue pour la première fois pour noter le nombre de domination.

Définition 1.4.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets D de V est un dominant si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D.*

Définition 1.4.5 *Le nombre de domination de G, noté par $\gamma(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.*

Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet [39] dans le cas général, même restreint aux graphes bipartis [26], et aux graphes triangulés [16]. Par contre, ce problème devient polynomial pour les arbres [24] et pour la classe des graphes de permutations [30].

CHAPITRE 2

ETAT DE L'ART SUR LA COLORATION DOMINANTE

Sommaire

2.1 Coloration dominante 29

2.2 Quelques résultats sur le nombre chromatique dominant . . 30

2.2.1 Chaînes, cycles, roues 31

2.2.2 Graphes connexes et non-connexes 33

2.2.3 Coloration dominante et partition sécurisée 33

2.2.4 Graphes triangulés, graphes scindés et graphes sans P_4 35

2.2.5 Graphes vérifiants l'égalité $\chi_d(G) = \chi(G)$ et $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$ 36

2.2.6 Caractérisation des graphes avec $\chi_d(G) = n - 1$ 37

2.2.7 Graphes G avec $\delta(G) = 1$ 37

2.2.8 Graphes bipartis 38

2.2.9 Autres graphes 40

2.2.10 Produit de deux graphes 45

2.2.11 D'autres colorations dérivées de la coloration dominante 45

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques résultats existants dans la littérature concenant la coloration dominante dans les graphes.

2.1 Coloration dominante

La coloration dominante a été introduite en 2006 par Gera et al [33], leur étude a été motivée par l'article de Cockayne et al. [23]. Depuis, ce concept a été largement étudié par de nombreux chercheurs [33, 34, 35, 18].

Définition 2.1.1 *On dit qu'un sommet x voit (domine) une classe de couleur X, s'il est adjacent à tous les sommets de X, ou si x est le seul sommet de X.*

Définition 2.1.2 *Une coloration dominante d'un graphe simple G est une coloration propre telle que chaque sommet de G voit (domine) au moins une classe de couleur.*

Définition 2.1.3 *Le nombre chromatique dominant d'un graphe G, noté $\chi_d(G)$, est le nombre minimum de classes de couleur dans une coloration dominante. Une coloration dominante minimum est dite $\chi_d(G)-$coloration.*

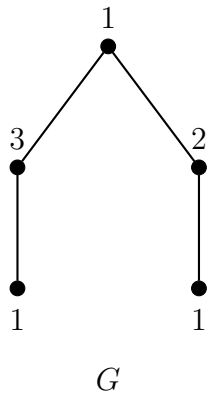


FIGURE 2.1 – La coloration dominante optimale de la chaîne P_5 avec $\chi_d(G) = 3$.

Maintenant, nous allons présenter quelques résultats existants sur la coloration dominante. Il convient en premier lieu de noter que ces résultats ont été un point de départ de plusieurs recherches qui s'intéressent au nombre $\chi_d(G)$. Un certain nombre de résultats combinatoires et algorithmiques de base sur la coloration dominante ont été obtenus dans [34, 35]. Du point de vue de complexité, Gera et al. [33] ont montré la NP-complétude du problème de calcul de $\chi_d(G)$ d'un graphe arbitraire G.

Théorème 2.1.1 *[33] Le nombre chromatique dominant est NP-complet.*

Par ailleurs, Arumugam et al.[6] ont montré que le problème de coloration dominante est NP-complet pour les graphes bipartis, les graphes planaires et les graphes scindés.

2.2 Quelques résultats sur le nombre chromatique dominant

Plusieurs chercheurs ont établi des bornes qui encadrent le paramètre $\chi_d(G)$ dans le cas d'absence d'algorithme polynômial pour la détermination de ce paramètre dans le cas général. Dans ce contexte, les auteurs de [33] ont donné des bornes et des valeurs exactes du nombre chromatique dominant pour certaines graphes particuliers comme les chaînes, les étoiles, les graphes complet et les chenilles. Avant de présenter ceci, nous donnons les observations suivantes.

Observation 2.2.1 *[33] Pour tout graphe G, on a*

$$\chi(G) \leq \chi_d(G).$$

Observation 2.2.2 *[33] Pour un graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$2 \leq \chi_d(G) \leq n.$$

Pour un graphe connexe d'ordre n, la borne inférieure de L'observation 2.2.2 est atteinte si et seulement si $G = K_{a,b}$ pour $a, b \in N^*$, tandis que la borne supérieure est atteinte si et seulement si $G = K_n$.

Lemme 2.2.1 *[33] Soit $S_{a,b}$ une double étoile. Alors pour $a + b \geq 4$, $\chi_d(S_{a,b}) = 3$.*

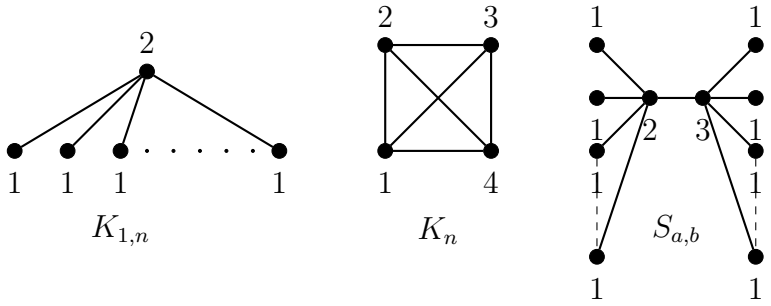


FIGURE 2.2 – χ_d-coloration de l'étoile $K_{1,n}$, du graphe complet K_4 et d'une étoile double $S_{a,b}$

Nous savons que si $H \subseteq G$, alors $\chi(H) \leq \chi(G)$ (puisque toute coloration propre de G reste une coloration propre de H). Les auteurs de [33] ont remarqué que ce dernier résultat n'est pas valable pour la coloration dominante. En effet, ils ont montré dans [33] que les nombres chromatiques dominants d'un graphe G et d'un sous-graphe H de G sont en général incomparables, par exemple $\chi_d(D_n) = n > \chi_d(K_{1,n-1}) = 2$, mais $\chi_d(K_{1,n-1}) = 2 < \chi_d(K_n) = n$ où D_n, $K_{1,n-1}$, et K_n sont respectivement graphe discret, étoile et graphe complet.

2.2.1 Chaînes, cycles, roues

Proposition 2.2.1 *[33] Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_d(P_n) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{si } n = 2, 3, 4, 5, 7 \\ 2 + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Les mêmes auteurs de [33] ont donné une borne supérieure pour le nombre chromatique dominant en fonction du nombre d'indépendance $\alpha(G)$.

Proposition 2.2.2 *[33] Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, on a*

$$\chi_d(G) \leq n + 1 - \alpha(G).$$

avec $\alpha(G)$ est l'ordre de le plus grande ensemble de sommets indépendants.

La borne précédente est atteinte pour la chaîne P_5 tel que $\chi_d(P_5) = n + 1 - \alpha(P_5)$.
Dans [34], Gera et Ralucca ont étudié la coloration dominante de plusieurs classes de graphes, comme les cycles, la roue et l'étoile multiple.

Proposition 2.2.3 *[34]*

- *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$\chi_d(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & si\ n = 4 \\ 1 + \lceil \frac{n}{3} \rceil & si\ n = 5 \\ 2 + \lceil \frac{n}{3} \rceil & sinon. \end{cases}$$

- *Soit $W_{1,n}$ une roue d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$\chi_d(W_{1,n}) = \begin{cases} 3\ si\ \ n\ est\ pair \\ 4\ si\ \ n\ est\ impair. \end{cases}$$

- *Soit $K_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ une étoile multiple d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$\chi_d(K_n(a_1, a_2, ..., a_n)) = n + 1.$$

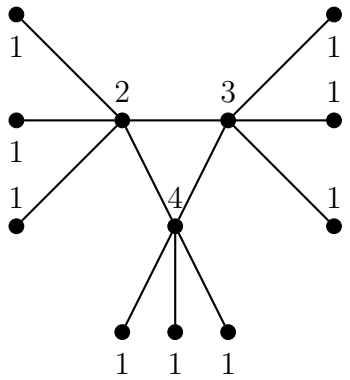


FIGURE 2.3 – χ_d-coloration d'une étoile-multiple $K_3\{3, 3, 3\}$.

Remarque 2.2.1 *Soient C_n et P_n un cycle et une chaîne respectivement d'ordre n. si $n \geq 5$ et $n \neq 7$, alors $\chi_d(C_n) = \chi_d(P_n)$.*

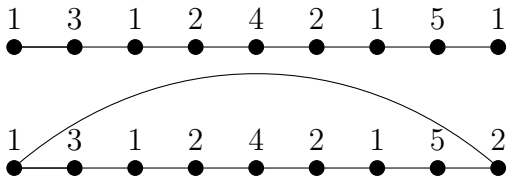


FIGURE 2.4 – χ_d-coloration de la chaîne P_9 et du cycle C_9.

2.2.2 Graphes connexes et non-connexes

Dans [34], Gera et al. ont donné une borne de $\chi_d(G)$ en fonction de $\gamma(G)$ et $\chi(G)$.

Théorème 2.2.1 *[34] Soit G un graphe connexe, alors*

$$max(\gamma(G), \chi(G)) \leq \chi_d(G) \leq \gamma(G) + \chi(G).$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes bipartis complets, et la borne supérieure est atteinte pour les chaînes P_n et les cycles C_n avec $n \geq 8$.
Les mêmes auteurs de [34] en [33] ont fourni d'autres bornes pour des graphes non-connexes.

Proposition 2.2.4 *[33] Si G est un graphe non-connexe avec des composantes $G_1, G_2, \ldots, G_k$ avec $k \geq 2$, alors*

$$max_{i\in\{1,2,\ldots,k\}}\chi_d(G_i) + k - 1 \leq \chi_d(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi_d(G_i)$$

De plus, ils ont étudié dans [33] le problème de la partition sécurisée, qui est un problème équivalent à la partition des sommets du graphe en cliques dans $\overline{G}$.

2.2.3 Coloration dominante et partition sécurisée

Définition 2.2.1 *[33] Etant donné un graphe $G = (V(G), E(G))$, une partition en cliques est une partition de $V(G)$ en sous-ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_q$ de sorte que chaque $V_i, (1 \leq i \leq q)$ est une clique dans G. Le nombre de partition en cliques $\overline{\chi}(G)$ est la valeur minimale de q parmi toutes ces partitions.*

Définition 2.2.2 *[33] Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et une partition $V_1, V_2, \ldots, V_q$ de G, un sommet v de G est sécurisé s'il existe un certain i $(1 \leq i \leq q)$ tel que $N(v) \cap V_i = \emptyset$. Nous appelons une partition sécurisée en cliques si chaque sommet est sécurisé. Le nombre de partition sécurisé d'un graphe G est le plus petit entier q pour lequel $V_1, V_2, \ldots, V_q$ est une partition sécurisée. Nous désignons ce nombre par $\overline{\chi_d}(G)$.*

Dans [33], les auteurs ont donné quelques résultats mettent en évidence la relation entre $\overline{\chi_d}(G)$ et $\overline{\chi}(G)$.

Observation 2.2.3 *[33]* $\overline{\chi_d}(G) = \overline{\chi}(G)$.

Observation 2.2.4 *[33]* $\overline{\chi_d}(G) = \chi(\overline{G})$.

Observation 2.2.5 *[33] Soit G un graphe sans triangle d'ordre n, soit M^* un couplage maximum correspond a une partition en clique maximale. Si M^* est sécurisé, alors* $\overline{\chi_d}(G) = n - |M^*|$.

Observation 2.2.6 *[33] Soit P_n une chaîne d'ordre n. Pour $n \geq 5$,* $\overline{\chi_d}(P_n) = \chi(\overline{P_n}) = n - |M^*| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. *De plus* $\overline{\chi_d}(P_2) = 2$ *et* $\overline{\chi_d}(P_3) = \overline{\chi_d}(P_4) = 3$.

Observation 2.2.7 *[33] Soit C_n un cycle d'ordre n. Pour $n \geq 5$,* $\overline{\chi_d}(C_n) = \chi(\overline{C_n}) = n - |M^*| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. *De plus* $\overline{\chi_d}(C_3) = \overline{\chi_d}(C_4) = 3$.

Lemme 2.2.2 *[33] Une partition en clique d'un arbre avec $n \geq 5$ peut avoir au plus un sommet non sécurisé.*

Lemme 2.2.3 *[33] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 5$. Un couplage maximum M^* de G est non sécurisé si et seulement si G est l'araignée blessée. (Voir Figure 2.5).*

Corollaire 2.2.1 *[33] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 5$, et M^* un couplage maximum dans G. Si M^* est sécurisés, alors tous les autres couplages maximum dans G sont sécurisé. Donc les couplages maximums dans un arbre d'ordre $n \geq 5$ sont tous sécurisés ou tous non-sécurisés.*

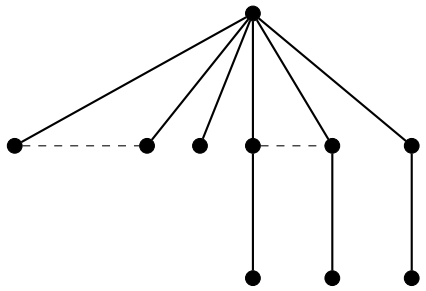


FIGURE 2.5 – Exemple d'une araignée blessée.

2.2.4 Graphes triangulés, graphes scindés et graphes sans P_4

D'autres résultats sur le nombre chromatique dominant ont été fournis par Chellali et Maffray [18], où ils sont intéressés à la coloration dominante des graphes triangulés. Aussi ils ont donné deux procédures polynômiales pour calculer le nombre chromatique dominant d'un graphe sans P_4, et également ils ont donné une caractérisation en temps polynômiales des graphes ayant un nombre chromatique dominant au plus trois.

Proposition 2.2.5 *[18] Il existe un algorithme polynômial qui permet de vérifier si un graphe G satisfait $\chi_d(G) \leq 3$.*

Théorème 2.2.2 *[18] Soit G un graphe, alors*

1/ $\chi_d(G) = 1$ si et seulement si $G = K_1$.

2/ $\chi_d(G) = 2$ si et seulement si $G = \overline{K_2}$ ou $G = K_{r,s}$ avec $r \geq 1$ et $s \geq 1$.

Théorème 2.2.3 *[18] Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, tel que soit*

a/ G est un graphe sans C_4, ou

b/ G est sans griffes et $G \neq C_4$.

Alors $\chi_d(G) \geq \gamma(G) + 1$.

Corollaire 2.2.2 *[18] Tout graphe triangulé G d'ordre $n \geq 2$ satisfait,*

$$\chi_d(G) \geq \gamma(G) + 1.$$

Dans le résultat suivant Chellali et Maffray [18] ont donné une caractérisation des graphes scindés connexe vérifiant la borne précédente.

Théorème 2.2.4 *[18] Soit G un graphe scindé connexe dont l'ensemble de sommets est partitionné en un clique Q et un ensemble stable S tel que Q est minimal. Alors $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$ si et seulement si chaque sommet de Q est un sommet support.*

Théorème 2.2.5 *[18] Soit G un graphe sans P_4.*

(i) Si G est connexe, alors $\chi_d(G) = \chi(G)$.

(ii) Si G est non-connexe, soit $k \geq 2$ le nombre des composantes de G, et soit h le nombre des composantes de G qui possèdent un sommet universel. Si G est non connexe, alors :

— *Si G a une composante H qui possède un sommet universel et satisfait $\chi(H) = \chi(G)$, alors $\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 1$.*

— *Sinon $\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 2$.*

2.2.5 Graphes vérifiants l'égalité $\chi_d(G) = \chi(G)$ et $\chi_d(G) = \gamma(G)+1$

Dans [34], Gera a posé le problème de trouver les graphes vérifiant les égalités suivantes $\chi_d(G) = \chi(G)$ et $\chi_d(G) = \gamma(G)$. Arumugam et al. [7] ont caractérisé les graphes unicycles, les graphes scindés et le complémentaire d'un graphe biparti vérifiant l'égalité $\chi_d(G) = \chi(G)$.

Théorème 2.2.6 *[7] Soit G un unicycle connexe. Alors $\chi_d(G) = \chi(G)$ si et seulement si G est isomorphe à C_3 ou C_4 ou C_5 ou bien le graphe obtenu à partir de C_3 en attachant n'importe quel nombre de feuilles à un ou deux sommets de C_3.*

Chellali et Maffray [18] ont donné une caractérisation des graphes scindés avec $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$. Dans le théorème suivant, S. Arumugam et al. [7] ont montré que soit $\chi_d(G) = \omega(G)$ ou $\omega(G) + 1$ pour tout graphe scindé G.

Théorème 2.2.7 *[7] Soit $G = (K, I)$ un graphe scindé et $|K| = \omega$. Alors $\chi_d(G) = \omega(G)$ ou $\omega(G) + 1$. De plus $\chi_d(G) = \omega(G)$ si et seulement s'il existe un ensemble dominant D de G tel que $D \subseteq K$ et tout sommet v dans I est non adjacent a au moins un sommet de $K - D$.*

Dans [7], les auteurs ont donné une caractérisation des graphes G d'ordre n vérifiant $\chi_d(G) = n - 1$, et ils ont aussi étudié les graphes de degré minimum $\delta(G) = 1$.

2.2.6 Caractérisation des graphes avec $\chi_d(G) = n - 1$

Théorème 2.2.8 *[7] Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors $\chi_d(G) = n - 1$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$G \neq K_n$ et K_{n-1} est un sous-graphe de G.*
- *$V(G) = V_1 \cup \{u, v\}$, où $V_1 = K_{n-2}$, $d_G(u) = 1$, $uv \in E(G)$ et v n'est pas adjacent à au moins un sommet de V_1.*

Théorème 2.2.9 *[7] Soit G un graphe d'ordre n. Alors $\chi_d(G) = n - 1$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *G contient exactement une composante non-triviale G_1 d'ordre n_1 avec $\chi_d(G_1) = n_1 - 1$.*
- *G contient exactement deux composantes non-triviales dites G_1 et G_2, où $G_1 = K_{n_1}, n_1 \geq 2$ et $G_2 = K_2$.*

Théorème 2.2.10 *[7] Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors $4 \leq \chi_d(G) + \chi_d(\overline{G}) \leq 2n$. De plus $\chi_d(G)+\chi_d(\overline{G}) = 4$ si et seulement si $G = K_2$ et $\chi_d(G)+\chi_d(\overline{G}) = 2n$ si et seulement si $G = K_n$.*

2.2.7 Graphes G avec $\delta(G) = 1$

Théorème 2.2.11 *[7] Soit G un graphe avec $\delta(G) = 1$ et k sommets supports. Alors $\chi_d(G) \geq k + 1$, et $\chi_d(G) = k + 1$ si et seulement si l'ensemble des sommets non supports est un ensemble dominant indépendant de G.*

Théorème 2.2.12 *[7] Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $\delta(G) = 1$, soit V_1 l'ensemble des sommets supports de G et soit $|V_1| = k$. Alors $\chi_d(G) = k + 2$ si et seulement si les conditions suivantes est vérifiées :*

(i) $(V - V_1)$ est un graphe biparti.

(*ii*) *Si V_1 n'est pas un ensemble dominant, alors $(V - V_1)$ contient exactement une composante non trivial qui est un graphe biparti complet avec $V_2 = V - N[V_1]$.*

Théorème 2.2.13 *[7] Soit G un graphe avec $\delta(G) = 1$. Alors $\chi_d(G) > \gamma(G)$.*

Proposition 2.2.6 *[7] Soit T un arbre d'ordre n. S'il existe un $\gamma - ensemble$ dans T, tel que $V - S$ est indépendant, alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$.*

2.2.8 Graphes bipartis

Dans [35], Gera a donné des bornes pour le nombre χ_d-chromatique dans les graphes bipartis.

Théorème 2.2.14 *[35] Soit G un graphe biparti connexe. Alors*

$$2 \leq \chi_d(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Dans le même article, Gera a caractérisé les graphes atteignants la borne inférieure. Et pour la borne supérieure dans le Théorème 2.2.14, Gera [35] a donné seulement une condition nécessaire.

Proposition 2.2.7 *[35] Soit G un graphe biparti d'ordre $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_d(G) = 2 \text{ si et seulement si } G \text{ est un graphe biparti complet.}$$

Proposition 2.2.8 *[35] Soit G un graphe biparti. Alors*

$$\chi_d(Cor(G)) = \lfloor \frac{|Cor(G)|}{2} \rfloor + 1.$$

Dans [35], une autre borne sur le nombre chromatique dominant a été fournie en fonction du nombre de domination $\gamma(G)$ dans la classe des graphes bipartis connexes et ils ont donné une amélioration pour les arbres.

Théorème 2.2.15 *[35] Soit G un graphe biparti connexe. Alors*

$$\gamma(G) \leq \chi_d(G) \leq 2 + \gamma(G).$$

Proposition 2.2.9 *[35] Soit G un graphe biparti d'ordre $n \geq 4$. Alors*

$\chi_d(G) = \gamma(G)$*si et seulement si G est un graphe partiel d'un graphe biparti complet.*

Le résultat suivant est une conséquence de la Proposition 2.2.9 et le Théorème 2.2.15.

Corollaire 2.2.3 *[35] Soit T un arbre. Alors*

$$\gamma(T) + 1 \leq \chi_d(T) \leq \gamma(T) + 2. \tag{2.1}$$

Notons que $\chi_d(T) = \gamma(T) + 2$ pour les chaînes $P_n, n \geq 8$, et $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ pour les étoiles. Donc les deux bornes sont atteintes.

Dans [13], Chellali et Boumediene ont caractérisé les arbres atteignant la borne inférieure de (2.1), par conséquent, aussi les autres arbres atteignents la borne supérieure.

Théorème 2.2.16 *[13] Soit $T = (V, E)$ un arbre non trivial. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si T admet un $\gamma -$ ensemble $D = D_I \cup D_R$ tel que $V(T) - (D_R \cup N[D_I])$ induit un stable, avec $D_I = \{v \in D : P_n(v, D) = v\}$ et $D_R = D \setminus D_I$.*

Des résultats concernant les chenilles sont donnés dans [34].

Théorème 2.2.17 *Si G est une chenille telle que les sommets de degré inférieur à trois sont indépendants, et si l'épine de G contient exactement r sommets de degré au moins trois, alors $\chi_d(G) = r + 1$.*

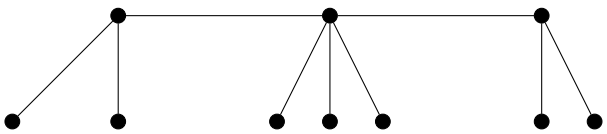


FIGURE 2.6 – Exemple d'une chenille avec $\chi_d(G) = r + 1$.

Dans [13], Chellali et Boumediene ont caractérisé les chenilles atteignants chacune des deux bornes de l'inégalité (2.1). Rappelons que α_0 est le nombre transversal de T.

Proposition 2.2.10 *[13] Soit T une chenille différente d'un sommet isolé. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si $\gamma(T) = \alpha_0(T)$.*

Proposition 2.2.11 *[13] Soit T une chenille non trivial. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si T est une étoile où la distance entre deux supports consécutifs dans T est $1, 2$ ou 4.*

Dans [14], les mêmes auteurs ont donné un algorithme polynômial pour calculer le nombre chromatique dominant d'un arbre arbitraire T.
Avant de présenter le théorème, nous avons besoin des notations utilisées par Chellali et Boumediene dans [14]. Les ensembles de feuilles et de supports de T sont notés par $L(T)$ et $S(T)$, respectivement. Soient les deux ensembles $Q^* = N(S(T)) \setminus (S(T) \cup L(T))$, $Q = \{x \in V \setminus Q^* : N(x) \subseteq Q^*\}$, et X un transversal minimum de $T[V - N[Q]]$ contenant tous les supports de T.

Théorème 2.2.18 *[14] Soit $T = (V, E)$ un arbre arbitraire. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si T vérifie les conditions suivantes :*

(a) Q est un packing,

(b) $X \cup Q$ est un $\gamma -$ ensemble de T.

(c) $\gamma(T[V \setminus N[Q]]) = \alpha_0(T[V \setminus N[Q]])$.

2.2.9 Autres graphes

Dans [44], Kalaivani et Vijayalakshmi ont donné les valeurs exactes du nombre chromatique dominant des graphes représentatifs de quelques graphes, comme les étoiles, doubles étoiles, biparti,... D'autres travaux ont été donnés dans [4, 15, 46, 47] pour les graphes centraux et les graphes milieux. Dans [29], Fletcher a utilisé l'ordinateur pour calculer le nombre chromatique dominant du graphe de Petersen. Ensuite il a posé la question de trouver une preuve combinatoire de ce calcul. Boumediene a prouvé que le nombre chromatique dominant du graphe de Petersen est égale à cinq.

Théorème 2.2.19 *Soit G le graphe de Petersen. Alors $\chi_d(G) = 5$.*

Egalement, d'autres études ont été réalisés pour le graphe de Petersen généralisé. Tout d'abord nous rappelons la définition de graphe de Petersen généralisé.

Définition 2.2.3 *[55] Soient n et k des entiers positifs avec $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-1$. Le graphe de Petersen généralisé noté $P(n,k)$ est défini comme suit : $V(P(n,k)) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $E(P(n,k)) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+k} : 1 \leq i \leq n\}$.*

Le graphe de Petersen généralisé peut être vu comme le produit cartésien $C_n \square K_2$. Dans le cas où $P(n,k) = P(5,1)$ le graphe s'appelle graphe de Petersen.

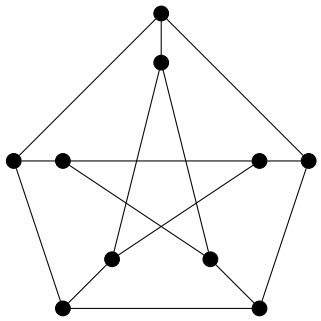


FIGURE 2.7 – Graphe de Petersen .

Dans [55], Cary a donné la valeur exacte du nombre chromatique dominant du graphe de Petersen généralisé.

Théorème 2.2.20 *[55] Pour le graphe de Petersen généralisé $G = P(n,1) = C_n \square K_2$, nous avons*

$$\chi_d(G) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3 \text{ ;} \\ 2 + \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ si } n \equiv [4] \\ 2 + \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ sinon.} \end{cases} .$$

Arumugam et al. [7] ont donné une borne du nombre chromatique dominant des graphes Mycielski noté $\mu(G)$ et qui est défini comme suit : Soit $V(\mu(G)) = V \cup V' \cup \{u\}$ avec $v_i v_j \in E(\mu(G))$ si et seulement si $v_i v_j' \in E(\mu(G))$, $1 \leq i \leq n$, et aucun autre arête dans $\mu(G)$, où $v_i \in V(G)$ et $v_i' \in V'(G)$.

Théorème 2.2.21 *[7] Pour tout graphe G,*

$$\chi_d(G) + 1 \leq \chi_d(\mu_G) \leq \chi_d(G) + 2. \tag{2.2}$$

De plus, si il existe une $\chi_d -$ coloration de G pour lequel chaque sommet v domine une classe de couleur V_i avec $v \in V_i$, alors $\chi_d(\mu_G) = \chi_d(G) + 1$.

Dans [6], Abid et Ramesh Rao ont caractérisé les graphes atteignants les deux bornes de l'inégalité (2.2).

Théorème 2.2.22 *[6] Etant donné un graphe G, alors $\chi_d(\mu_G) = \chi_d(G) + 1$ si et seulement si pour certaine χ_d-coloration c de G :*

- *Tout sommet v domine une certaine classe de couleur V_i avec $v \notin V_i$.*
- *Un sommet v est un sommet singleton et c contient une classe de couleur V_i qui ne contient aucun sommet de $N(v)$.*

Par la suite, les mêmes auteurs de [6] ont donné des bornes du nombre χ_d-chromatique des graphes Mycielski itérés, de plus ils sont caractérisés les graphes atteignants les bornes.

Dans [35], Gera a étudié le nombre chromatique dominant pour l'hypercube.

Proposition 2.2.12 *[35] Soit Q_n le n-cube de dimension $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_d(Q_{n+1}) \leq \chi_d(Q_n) + \gamma(Q_n),$$

avec $\chi_d(Q_2) = 2$.

D'autres résultats ont été réalisés pour les digraphes dans [52, 6].
Un graphe de prisme est équivalent au graphe de Petersen généralisé $P_{n,1}$, pour n impair. Il est également isomorphe au produit cartésien $P_2 \square C_n$. Des résultats concernant le graphe prisme ont été établis par Manjula [57].
Maintenant, nous rappelons la définition du graphe Hajós généralisé, le graphe partiel de Hajós généralisé et trampoline graphe.

Définition 2.2.4 *[61] Le graphe de Hajós généralisé, noté par $[K_n]$, est un graphe avec $n + (\frac{n}{2})$ sommets. Il est construit à partir d'une clique d'ordre au moins trois, où pour chaque paire de sommets v_i, v_j dans K_n le sommet u_{ij} et les arêtes $u_{ij}v_i, u_{ij}v_j$ sont ajoutés.*

Définition 2.2.5 *[61] Ce graphe est noté par $[C_n]$. Même définition précedente (de Hajós généralisé) de plus les arêtes intérieures de $[C_n]$ sont supprimées.*

Définition 2.2.6 *[61] Un graphe trampoline noté $T[K_n]$ d'ordre $2n$ est construit à partir d'un graphe complet de sommets $v_1, v_2, ..., v_n$, où pour chaque paire de sommets v_i, v_j de K_n des sommets $u_1, u_2, ..., u_n$, et des arêtes u_iv_i et u_iv_{i+1} (avec $v_{i+1} = v_1$) sont ajoutés.*

Les auteurs de [61] ont donné la valeur exacte du nombre chromatique dominant pour le graphe de Hajós généralisé, graphe partiel d'un Hajós généralisé et trampoline graphe, et la relation entre le nombre chromatique dominant et le nombre de domination.

Proposition 2.2.13 *[61] Soit $[K_n]$ un graphe de Hajós généralisé, alors le nombre chromatique dominant $\chi_d([K_n]) = n + 1$, et le nombre de domination $\gamma([K_n]) = n - 1$, où $n \geq 3$.*

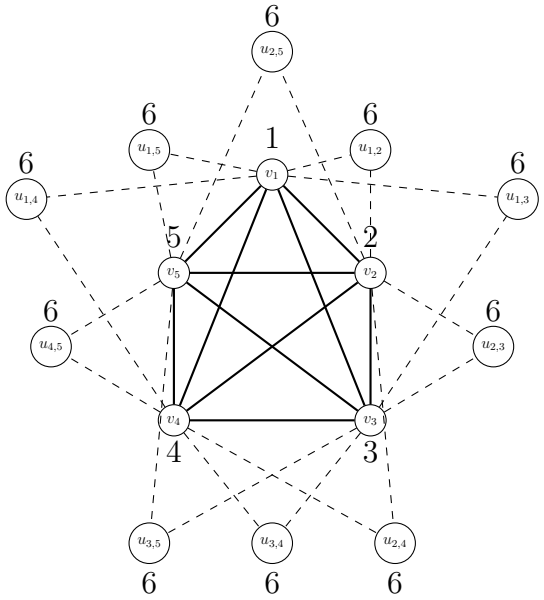


FIGURE 2.8 – χ_d-coloration du graphe de Hajós généralisé $[K_5]$ avec $\chi_d([K_5]) = 6$.

Corollaire 2.2.4 *[61] Tout graphe de Hajós généralisé $[K_n]$ satisfait la relation suivante $\chi_d([K_n]) + \gamma([K_n]) = 2\chi$, où $n \geq 3$.*

Proposition 2.2.14 *[61] Soit $[C_n]$ un graphe partiel d'un Hajós généralisé, où $n \geq 3$. Alors le nombre chromatique dominant* $\chi_d([C_n]) = \begin{cases} n+1 \text{ si } n = 3 \\ n \text{ si } n > 3. \end{cases}$

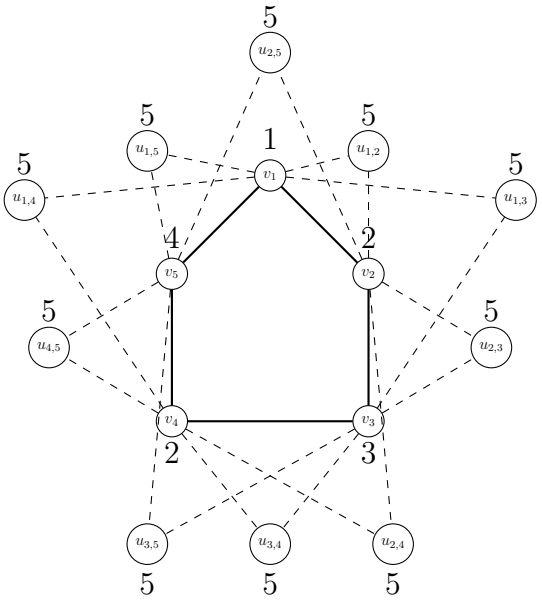


FIGURE 2.9 – χ_d-coloration du graphe partiel d'un Hajós généralisé $[C_5]$ avec $\chi_d([C_5]) = 5$.

Théorème 2.2.23 *[61] Soit $T[K_n]$ un graphe de trampoline, alors le nombre chromatique dominant* $\chi_d(T[K_n]) = \begin{cases} n+1 \text{ si } n = 3 \\ n \text{ si } n > 3 \end{cases}$, *et le nombre de domination* $\gamma(T[K_n]) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, *où* $n \geq 3$.

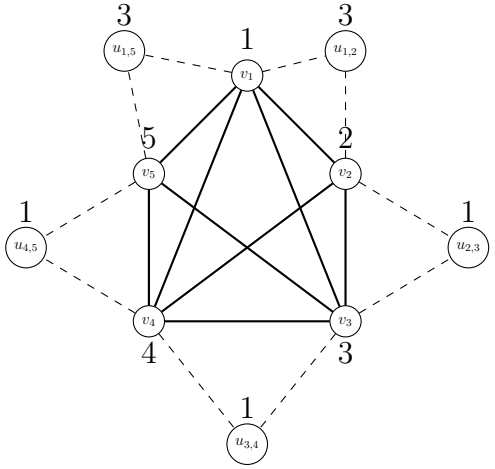


FIGURE 2.10 – χ_d-coloration du graphe de trampoline $T[K_5]$ avec $\chi_d(T[K_5]) = 5$.

Corollaire 2.2.5 *[61] Tout graphe de trampoline $T[K_n]$ satisfait la relation suivante* $\chi_d(T[K_n]) = \gamma(T[K_n]) + \lceil \frac{n}{2} \rceil$, *où* $n \geq 3$.

2.2.10 Produit de deux graphes

Dans [20], Chen a déterminé le nombre chromatique dominant du produit cartésien des graphes $P_2\Box P_n$ et $P_2\Box C_n$.

Théorème 2.2.24 *[20] Pour $n \geq 2$, alors*

$$\chi_d(P_2\Box P_n) = \begin{cases} 2 \ si \ n = 2 \, ; \\ 4 \ si \ n = 4 \\ 3 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ si \ n = 3 \ et \ n \geq 5. \end{cases}$$

Théorème 2.2.25 *[20] Pour $n \geq 3$, alors*

$$\chi_d(P_2\Box C_n) = \begin{cases} 3 \ si \ n = 3 \, ; \\ 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2 \ si \ n \equiv 0[4] \\ 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 3 \ si \ n \equiv 1[4] \\ 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 4 \ si \ n \equiv 2, 3[4]. \end{cases}$$

Paulraja et Chandrasekar [65] ont donné la valeur exacte de nombre chromatique dominant pour certaines classes de graphes telles que $K_m \times K_n$ et $K_n\Box Q_{r+2}$, où $\times$ et $\Box$ désignent respectivement le produit tensoriel et le produit cartésien.

Théorème 2.2.26 *[65] Pour $m, n \geq 3$, $\chi_d(K_m \times K_n) = min\{m + 2, n + 2\}$.*

Théorème 2.2.27 *[65] Soient n et r deux entiers tels que $n \geq 2^{r+2}$. Alors $\chi_d(K_n\Box Q_{r+2}) = 2^{r+2} + n - 1$, où $r \geq 0$.*

2.2.11 D'autres colorations dérivées de la coloration dominante

Dans cette section, nous définissons quelques colorations dérivées de la coloration dominante. citons par exemple :

Coloration dominante totale $\chi_d^t(G)$

Kazemi [50] a étudié la coloration dominant total d'un graphe.

Définition 2.2.7 *[50] Une coloration dominante totale d'un graphe G est une coloration propre de G dans laquelle chaque sommet de G est adjacent à chaque sommet d'une certaine classe de couleur de G.*
Le nombre chromatique dominant total $\chi_d^t(G)$ est le nombre minimum de classes de couleurs dans une coloration dominante totale de G.

Kazemi [50] a montré que le calcul du nombre chromatique dominant total est NP-complet.

Théorème 2.2.28 *[50] Le nombre chromatique dominant total est NP-complet.*

Théorème 2.2.29 *[50] Soit G un graphe sans sommet isolé. Si $G_1, G_2, \ldots, G_w$ sont les composantes connexes de G, alors*

$$max_{1\leq i\leq \omega}\chi_d^t(G_i) + 2\omega - 2 \leq \chi_d^t(G) \leq \sum_{i=1}^{\omega} \chi_d^t(G_i) \tag{2.3}$$

Théorème 2.2.30 *[50] Si G est un graphe connexe d'ordre n et sans sommets isolés, alors $2 \leq \chi_d^t(G) \leq n$. De plus $\chi_d^t(G)$ est égale à 2 ou n si et seulement si G est un graphe biparti complet ou graphe complet respectivement.*

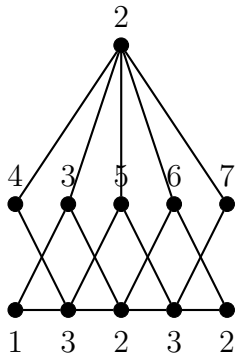
Théorème 2.2.31 *[50] Soit G un graphe connexe d'ordre n et sans sommets isolés. Si $\Delta(G) = n - 1$, alors $\chi_d^t(G) = \chi_d(G) = \chi(G)$.*

Dans le même article, il a également donné la valeur exacte de quelques classes des graphes, comme la roue, les chaînes, les cycles, le complémentaire d'un cycle et le complémentaire d'une chaîne. D'autres résultats concernant le nombre chromatique dominant ont été établi dans [37, 51, 21].

La coloration dominante forte (K. Kavitha et N.G. David- 2015)

Définition 2.2.8 *[8, 49] Soit $G = (V, E)$ un graphe et $u, v \in V(G)$. Alors v domine fortement u, si $uv \in E(G)$ et $d_G(v) \geq d_G(u)$.*

Définition 2.2.9 *[8, 49] Une coloration dominante forte d'un graphe simple G est une coloration propre telle que chaque sommet de G domine fortement au moins une classe de couleur. Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi_d^s(G)$, est le nombre minimum de classes de couleur dans une coloration dominante forte.*



G

FIGURE 2.11 – Exemple d'une coloration dominante forte avec $\chi_d^s(G) = 7$.

CHAPITRE 3

DÉTERMINATION DU NOMBRE CHROMATIQUE DOMINANT DES FORÊTS DE CHENILLES GÉNÉRALISÉES

Sommaire

3.1 Définitions et notations 49

3.2 Résultats préliminaires 51

3.3 Preuve du Théorème 3.2.1 62

Dans ce chapitre, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique dominant d'une sous classe des forêts que nous appelons forêt de chenilles généralisée. Dans la première partie, nous commençons par donner des définitions et notations relatifs a cette sous-classe, puis nous rappelons les principaux résultats concernant ce paramètre. La deuxième partie est consacrée à détérminer le nombre chromatique dominant de forêt de chenilles généralisée.

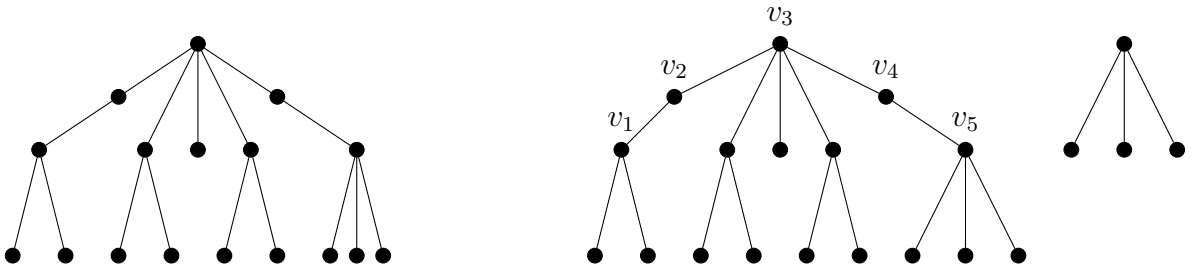
Il est à noter que le contenu de ce chapitre a été publié dans la revue RAIRO - Operations Research [3].

3.1 Définitions et notations

Dans cette section, nous définissons une nouvelle classe de graphe qui généralise les chenilles que nous appelons forêt de chenilles généralisées. Tout d'abord, nous donnons des définitions et des notations qui serviront dans la suite de cette thèse.

Définition 3.1.1 *Une chenille généralisée est un arbre tel que chaque sommet de degré au moins trois est un sommet support.*

Définition 3.1.2 *Une forêt de chenilles généralisées G est une forêt telle que chaque composante de G est une chenille généralisée.*



(a) Une chenille généralisée (b) Une forêt de chenilles généralisées

FIGURE 3.1 – Exemple d'une chenille généralisée et d'une forêt de chenilles généralisées.

Définition 3.1.3 *Une tige dans une forêt de chenilles généralisées G est une chaîne telle que ses extrémités sont des sommets supports dans G et ses sommets intérieures ne sont pas des sommets supports.*

Dans la Figure 3.2, les sommets v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 induisent une tige t dans une forêt de chenilles généralisées telle que v_1 et v_5 sont des sommets supports de t et v_2, v_3, v_4 sont des sommets intérieures de t.

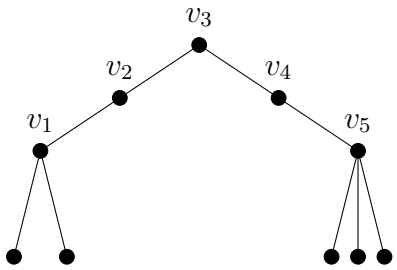


FIGURE 3.2 – Exemple d'une tige dans une forêt de chenilles généralisées.

Notons que, chaque tige (si elle existe) est d'ordre au moins deux. De plus, si G est une forêt de chenilles généralisées sans tige, alors chaque composante de G est une étoile ou un sommet isolé.

Avant de commencer à introduire le problème de la détermination du nombre chromatique d'une forêt de chenilles généralisées, nous donnons des notations supplémentaires qu'on utilisera dans la suite de ce chapitre.

Soient c une χ_d-coloration de G et X une classe de c. Alors on dit qu'un sommet x de G voit X si x est adjacent à tous les sommets de X, et x manque X sinon. On note par, Ω_c l'ensemble des classes de c contenant des sommets singletons, et Π_c l'ensemble des classes de couleurs restant de c. Nous définissons également les ensembles suivants :

- Π_c^1 le sous ensemble des classes de couleurs qui manquent X, c'est à dire $\Pi_c^1 = \{X \in \Pi_c |$ aucun sommet de G ne voit $X\}$, et posons $\Pi_c^2 = \Pi_c \setminus \Pi_c^1$.
- Pour $i \in \{1, 2\}$, soit B_c^i l'ensemble de tous les sommets appartenant à Π_c^i, et $A_c = V(G) \setminus (B_c^1 \cup B_c^2)$.

Clairement, A_c, B_c^1, B_c^2, sont des ensembles disjoints et forment une partition de l'ensemble des classes de couleurs, c'est à dire $V(G) = A_c \cup B_c^1 \cup B_c^2$. De plus, $| A_c | = | \Omega_c |$ et $| B_c^1 \cup B_c^2 | \geq 2 | \Pi_c |$.

Dans [13], Chellali et Boumediene ont montré que pour chaque χ_d-coloration c d'un arbre non-trivial, chaque sommet support appartient à A_c ou il est adjacent à une seule feuille et cette feuille appartient à A_c. De plus, ils ont donné le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *[13] Chaque arbre T d'ordre au moins trois admet une coloration dominante avec χ_d couleurs telle que chaque sommet support appartient à A_c et toutes les feuilles de G ont la même couleur.*

3.2 Résultats préliminaires

Il est important de noter que tout arbre T d'ordre au moins trois est un sous-arbre d'une chenille généralisée. En effet, il suffit d'attacher à chaque sommet de degré au moins trois qui n'est pas un sommet support un nouveau sommet.
Notons aussi que, le sous arbre obtenu, qui sera noté par G_T, est une chenille généralisée. Dans ce contexte, si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors l'ensemble des sommets de degré au moins trois qui ne sont pas des supports, sera noté par I_T. Evidement, si T est un arbre avec $I_T = \varnothing$, alors $G_T = T$.

Dans l'observation suivante nous expliquons la relation entre $\chi_d(T)$ et $\chi_d(G_T)$ pour tout arbre non trivial T.

Observation 3.2.1 *Si T est un arbre non trivial, alors*

$$\chi_d(G_T) - \mid I_T \mid \leq \chi_d(T) \leq \chi_d(G_T).$$

Preuve. Clairement, si T est un arbre d'ordre deux ou I_T est vide, alors $G_T = T$ et par la suite le résultat est immédiat. On peut donc supposer que T est d'ordre au moins trois et $I_T \neq \varnothing$. La borne suppérieure découle du fait que la restriction de toute χ_d-coloration de G_T à T est une coloration dominante de T. Maintenant, pour prouver la borne inférieure, considérons une χ_d-coloration c de T et posons $M = I_T \setminus A_c$. Soit π une coloration de G_T obtenue à partir de c comme suit : colorons chaque sommet de M avec une nouvelle couleur différente, et pour chaque $x \notin M$, posons $\pi(x) = c(x)$. Alors π est une coloration dominante de G_T avec $\chi_d(T) + \mid M \mid$ couleurs, donc $\chi_d(G_T) \leq \chi_d(T) + \mid M \mid \leq \chi_d(T) + I_T$.
■

D'autre part, le résultat suivant est une conséquence directe du fait que la chenille généralisée G_{T_j} peut être construite à partir d'un arbre T_j pour tout entier $j \geq 0$.

Observation 3.2.2 *Pour tout entier $j \geq 0$, il existe un arbre T_j tel que $|I_{T_j}| = j$ et $\chi_d(G_{T_j}) = \chi_d(T_j) + |I_{T_j}|$.*

Preuve. Il est clair que si $j = 0$, alors pour toute chenille T nous avons $G_T = T$ et donc $\chi_d(G_T) = \chi_d(T)$. Soit $j \geq 1$ un entier et H_i un arbre obtenu à partir d'une étoile

$K_{1,3}$ centrée en u_i, en subdivisant chaque arête exactement une fois, et soit v_i un sommet support de H_i. Soit T_j un arbre obtenu à partir de $H_1, H_2, \dots H_j$ en ajoutant $j-1$ arêtes reliant les v_i de sorte qu'elles induisent une chaîne P_j. (Voir par exemple, l'arbre T_3 illustré dans la Figure 1). Notons que T_j a $3j$ sommets supports, et comme les sommets restants de T_j forment un stable, nous déduissons du Lemme 3.1.1 que $\chi_d(T_j) = 3j+1$. De plus, la chenille généralisée G_T construite à partir de T_j en ajoutant pour chaque u_i un nouveau sommet qui lui attaché par une arête, contient $4j$ sommets supports. On peut facilement, voir que $\chi_d(G_{T_j}) = 4j+1 = \chi_d(T_j)+j$. ■

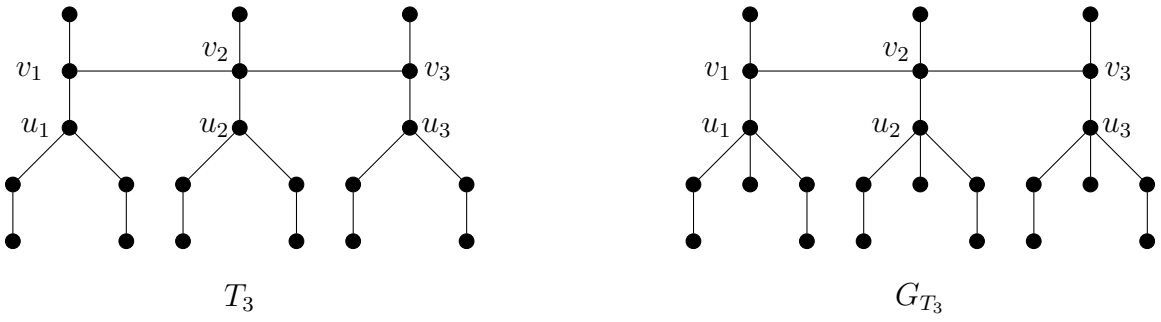


FIGURE 3.3 – Exemple d'un arbre T_3 et de sa chenille généralisée correspondante

Avec un raisonnement similaire à celui utilisé dans [13], nous pouvons voir qu'une forêt de chenilles généralisées G admet une χ_d-coloration c tel que chaque sommet support appartient à A_c et toutes les feuilles de G ont la même couleur. Par conséquent, Le Lemme 3.1.1 reste valable pour toute forêt de chenilles généralisées. D'où le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1 *Toute forêt de chenilles généralisées G d'ordre au moins trois admet une coloration dominante avec χ_d couleurs telle que chaque sommet support appartient à A_c et toutes les feuilles de G ont la même couleur.*

Dans la suite, on donne la valeur exacte du nombre chromatique dominant pour une forêt de chenilles généralisées G, composé de p singletons et q étoiles non triviales, avec $p, q \geq 0$ et un sous-graphe H de G contenant toutes les composantes qui ne sont ni des singletons ni des étoiles.

Observation 3.2.3 *Soit G une forêt de chenilles généralisées avec $p \geq 0$ sommets singletons et $q \geq 0$ étoiles non triviales, et un sous-graphe H de G contenant toutes les composantes qui ne sont ni des singletons ni des étoiles.*

Alors $\chi_d(G) = p + q + \chi_d(H) + i$, *où* $i = \begin{cases} 1 \text{ si } q \geq 1 et V(H) est \text{ vide.} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

Preuve. Si G ne contient pas d'arêtes, alors clairement $\chi_d(G) = p$. Supposons donc G contient au mois une arête. Si $V(H)$ est vide, alors il est facile de montrer que $\chi_d(G) = p + q + 1$.

Maintenant, nous pouvons supposer que $V(H)$ est non vide. Soient $G_1, G_2, ..., G_r$ les composantes de $G - H$ (si elles existe). Clairement $\chi_d(H) \geq 2$, et $\chi_d(G_i) \leq 2$ puisque G_i est un sommet singleton ou une étoile non triviale. Cela signifie que $\chi_d(H) \geq \chi_d(G_i)$ pour tout i. De plus, chaque composante de $G - H$ à besoin d'au moins une nouvelle couleur, car un sommet dans une telle composante doit voir une classe de couleur. D'où $\chi_d(G) \geq p + q + \chi_d(H)$. L'égalité est obtenue en exhibant une coloration dominante de G avec $p + q + \chi_d(H)$ couleurs. D'après le Corollaire 3.2.1, H admet une χ_d-coloration c telle que toutes les feuilles ont la même couleur, disons 1. Soit π une coloration de G définie comme suit. Pour chaque $x \in V(H)$, posons $\pi(x) = c(x)$, et pour chaque feuille v dans $G - H$, posons $\pi(v) = 1$, sauf si v appartient à une composante d'ordre 2, dans chaque cas v est l'une des deux feuilles. Colorons différemment les sommets restants de G en utilisant $(p + q)$ nouvelles couleurs. Clairement π est une coloration dominante utilisant $p + q + \chi_d(H)$ couleurs, et donc $\chi_d(G) \leq p + q + \chi_d(H)$. ■

D'après l'Observation 3.2.3, nous pouvons supposer dans la suite de ce chapitre que chaque composante d'une forêt de chenilles généralisées est non trivial et différente d'une étoile.

Dans le but de détérminer le nombre chromatique dominant de forêt de chenilles généralisée, nous allons établir les résultats suivants.

Observation 3.2.4 *Soit G une forêt de chenilles généralisées telle que chaque composante est non trivial et différente d'une étoile. Alors G admet une χ_d-coloration c telle que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

(i) Toutes les feuilles de G sont dans B_c^1 et donc chaque sommet de $A_c \cup B_c^2$ a un degré au moins deux.

(ii) Chaque sommet de B_c^1 a un degré au plus deux.

(iii) Chaque sommet de B_c^2 a un degré exactement deux.

Preuve. Soit c une χ_d-coloration satisfaisant le Corollaire 3.2.1.

(i) Soit X la classe de couleur contenant toutes les feuilles de G. Puisque G a au moins une tige, chaque sommet de G manque X, et la première partie de (i) est vérifiée. La deuxième partie du (i) est évidente.

(ii) Si B_c^1 a un sommet de degré au moins trois, alors un tel sommet serait un sommet support, ce qui contredit le choix de c.

(iii) En utilisant le fait que chaque sommet de degré au moins trois est un sommet support, le résultat souhaité découle du point (i). ■

Dans le lemme suivant nous montrons que le nombre de couleur apparaissent dans B_c^1, noté μ_c est inférieure ou égale à $\chi(G)$, pour tout graphe G. De plus, si G est un graphe biparti (resp., une forêt de chenilles généralisées), alors $\mu_c \in \{0, 1, 2\}$ (resp., $\mu_c \in \{1, 2\}$).

Lemme 3.2.1 *Soit c une χ_d-coloration d'un graphe G et soit $\mu_c = |\Pi_c^1|$. Alors*

(i) $\mu_c \leq \chi(G)$. En particulier, si G est biparti, alors $\mu_c \in \{0, 1, 2\}$.

(ii) De plus, si G est une forêt de chenilles généralisées telle que chaque composante est non trivial et différente d'une étoile, alors $\mu_c \in \{1, 2\}$.

Preuve. (i) Supposons, au contraire, que $\mu_c \geq \chi(G) + 1$, c'est-à-dire, au moins $\chi(G) + 1$ couleurs apparaissent dans B_c^1. Sans perte de généralité, on peut supposer que les sommets de B_c^1 utilisent les couleurs $1, 2, ..., \mu_c$. Puisque aucune couleur ne peut apparaître à la fois dans B_c^1 et $V(G) \setminus B_c^1$, les sommets $V(G) \setminus B_c^1$ doivent utiliser les couleurs restantes, c'est-à-dire les couleurs $\mu_c + 1, ..., \chi_d(G)$. Définissons une nouvelle coloration π de G comme suit. Recolorons proprement tous les sommets de B_c^1 avec $\chi(G[B_c^1])$ couleurs parmi $\{1, 2, ..., \mu_c\}$ (ceci est possible puisque $\chi(G[B_c^1]) \leq \chi(G) \leq \mu_c - 1$), tandis que les sommets de $V(G) \setminus B_c^1$ gardent leurs couleurs déjà données par c. Il est claire que π est une coloration dominante de G avec $\chi_d(G) - \mu_c + \chi(G[B_c^1]) < \chi_d(G)$ couleurs,

contradiction. La deuxième partie de (i) découle du fait que $\chi(G) \leq 2$ pour les graphes bipartis.

(ii) Notons d'abord que $\mu_c \neq 0$, puisque B_c^1 est non vide d'après l'Observation 3.2.4(i). Ceci avec le Lemme 3.2.1(i) donne le résultat souhaité. ■

Maintenant, nous donnons une propriété importante pour les forêts de chenilles généralisées.

Lemme 3.2.2 *Soit G une forêt de chenilles généralisées telle que chaque composante est non trivial et différente d'une étoile. Alors G admet une χ_d-coloration π tel que Π_π^2 est vide et le Corollaire 3.2.1 est vérifié pour π.*

Preuve. Parmi tous les χ_d-colorations de G satisfaisant le Corollaire 3.2.1, soit c choisi de telle sorte que

(C1) $|\Omega_c|$ est maximisé.

(C2) Sous la condition (C1), $|\Pi_c^1|$ est maximisé.

Posons $k = \chi_d(G)$ et $\mu_c = |\Pi_c^1|$. Soient $X_1, X_2, ..., X_k$ les classes de couleurs de c dans lesquelles les sommets de X_i sont colorés par la couleur i pour $i \in \{1, ..., k\}$. Supposons au contraire que Π_c^2 est non vide. Choisissons t de $\{1, ..., k\}$ tel que $X_t \in \Pi_c^2$ et soit $X_t = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Par définition, $p \geq 2$ et chaque $x_i \in B_c^2$. Aussi, par Observation 3.2.4(iii), on a

$$d_G(x_i) = 2 \text{ pour chaque } i \in \{1, ..., p\}. \tag{3.1}$$

Désignons par $W(X_t)$ l'ensemble des sommets de G qui voient X_t. Alors puisque G est acyclique, on a

$$|W(X_t)| = 1. \tag{3.2}$$

Donc, posons $W(X_t) = \{w_t\}$. Il est clair que,

$$d_G(w_t) \geq p \geq 2. \tag{3.3}$$

Au vu de (3.1), soit $N_G(x_i) = \{w_t, y_i\}$ pour $i \in \{1, ..., p\}$ et posons $Y_t = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$. Évidemment $N_G(X_t) = Y_t \cup \{w_t\}$. Puisque G est acyclique, $N_G[X_t]$ induit une étoile subdivisée d'ordre $2p + 1$ centrée en w_t.

Rappelons que le Lemme 3.2.1(ii) montre que $\mu_c \in \{1, 2\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\Pi_c^1 = \{X_1\}$ quand $\mu_c = 1$ et $\Pi_c^1 = \{X_1, X_2\}$ quand $\mu_c = 2$. dans ce cas, nous avons $t \geq \mu_c + 1$ (puisque $X_t \in \Pi_c^2$). Soit π une χ_d-coloration de G obtenue à partir de c et définie selon les cas suivants.

Cas 1 : $w_t \in B_c^1 \cup B_c^2$.

D'après (ii) et (iii) de l'Observation 3.2.4 avec (3.3), on a $d_G(w_t) = 2$. Donc $p = 2$ et $N_G(X_t) = \{w_t, y_1, y_2\}$. Alors $N_G(X_t)$ induit une chaîne $P_5 : y_1$-x_1-w_t-x_2-y_2. Ensuite, nous allons montrer que y_1 et y_2 soit les deux sont dans A_c soit l'un des deux est dans A_c et l'autre est dans B_c^2 ayant un voisin dans A_c. Dans chaque cas, nous allons recolorer certains sommets de G et augmenter le nombre de classes de couleurs de Ω_c ou Π_c^1. À cette fin, considérons les situations suivantes, soit w_t est dans B_c^1 ou B_c^2.

Cas 1.1 : $w_t \in B_c^1$. Notons que puisque $d_G(x_1) = d_G(x_2) = 2$, ni x_1 ni x_2 ne peut voir une classe de couleur dans Π_c^2, sinon, l'un des deux sera de degré au moins 3, ce qui contredit (3.1). Par conséquent, les deux y_1 et y_2 doivent être dans A_c, sinon, l'un de x_1 et x_2 manque toutes les classes de couleurs de c, ce qui contredit la définition de c. Définissons π comme suit : nous assignons la couleur 1 à x_1 et x_2, et assignons la couleur t à w_t. Les sommets restants de G gardent leurs couleurs données par c. Il est facile de voir que π est une χ_d-coloration de G satisfaisant le Corollaire 3.2.1 tel $\Omega_\pi = \Omega_c \cup \{w_t\}$ (c'est-à-dire, Ω_π contient plus de classes de couleurs que Ω_c), ce qui contredit le choix de c.

Cas 1.2 : $w_t \in B_c^2$. Soit $X_s = \{x'_1, x'_2, ..., x'_q\}$ la classe de couleur contenant $w_t = x'_1$. Il est clair que $t \neq s \geq \mu_c + 1$. Puisque $X_s \in \Pi_c^2$, alors (3.2) montre que $W(X_s) = \{w_s\}$. Si $w_s \notin \{x_1, x_2\}$, Alors $d_G(w_t) \geq 3$, ce qui contredit le fait que $d_G(w_t) = 2$. Donc $w_s \in \{x_1, x_2\}$, disons $w_s = x_1$. Puisque w_s et X_s jouent le même rôle que w_t et X_t, respectivement, nous concluons que $q = 2$, et chaque sommet dans $X_t \cup X_s$ est de degré 2. Ainsi $x'_2 = y_1$ et $X_s = \{w_t, y_1\}$. De plus, puisque $d_G(y_1) = 2$, il y a un sommet $z_1 \neq x_1$ tel que $y_1z_1 \in E(G)$. D'où $N_G(X_t \cup X_s)$ induit une chaîne $P_6 : z_1$-y_1-x_1-w_t-x_2-y_2. En utilisant un argument similaire à celui du sous-cas 1, nous pouvons voir que $y_2, z_1 \in A_c$. Maintenant, en assignant la couleur 1 à x_2 et y_1 et en gardant les couleurs déjà données

aux sommets restants sous c, fournit une χ_d-coloration π de G satisfaisant le Corollaire avec 3.2.1 $\Omega_\pi = \Omega_c \cup \{\{x_1\}, \{w_t\}\}$, ce qui contredit encore une fois le choix de c.

Cas 2 : $w_t \in A_c$.

Alors $c(w_t) \neq 1$. Nous affirmons que $Y_0 = Y_t \cap B_c^1$ n'est pas vide. Supposons au contraire que $Y_0 = \emptyset$. Alors chaque sommet dans Y_t a une couleur différente de 1. En recolorant tous les sommets de X_t avec la couleur 1 (c'est possible puisque $t \geq \mu c + 1$), on obtient une coloration dominante avec $\chi_d(G) - 1$, contradiction, ce qui prouve l'affirmation. Maintenant, soit y_{i_0} un sommet quelconque dans Y_0. Par Observation 3.2.4(ii), y_{i_0} est de un degré au plus deux. Si $d_G(y_{i_0}) = 1$, Alors y_{i_0} manque toutes les classes de couleurs de c, ce qui est impossible. Donc $d_G(y_{i_0}) = 2$ et soit $N_G(y_{i_0}) = \{x_{i_0}, z_{i_0}\}$. Un argument similaire à celui des cas précédents montre que le sommet z_{i_0} est dans A_c. Dans ce cas, nous définissons π en interchangeant les couleurs de x_{i_0} et y_{i_0} et en gardant les mêmes couleurs pour les sommets restants de G. Clairement, π est une χ_d-coloration de G vérifiant le Crollaire 3.2.1. De plus, $\Omega_\pi = \Omega_c$, mais $\Pi_\pi^1 = \Pi_c^1 \cup \{(X_t \setminus \{x_{i_0}\}) \cup \{y_{i_0}\}\}$, ceci contredit le choix de c. ■

Dans la suite de ce chapitre, nous désignons par T_i le $i^{\text{ème}}$ tige d'ordre $n_i \geq 2$ dans une forêt de chenilles généralisées G, où $V(T_i) = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i-1}^i, x_{n_i}^i\}$ et $x_j^i x_{j+1}^i \in E(G)$ pour chaque $j \in \{1, 2, ..., n_i - 1\}$. Nous désignons également par $I_i = \{x_2^i, x_3^i, \ldots, x_{n_i-1}^i\}$ (éventuellement vide) l'ensemble des sommets intérieurs dans T_i.

Lemme 3.2.3 *Soit G une forêt de chenilles généralisées telle que chaque composante est non triviale et différente d'une étoile. Si c est une χ_d-coloration satisfaisant l'énoncé du Lemme 3.2.2, avec $\mu_c = |\Pi_c^1|$, alors*

(i) Si $|I_i| \geq 3$, alors pour tous trois sommets consécutifs de I_i, l'un d'entre eux appartient à B_c^1 et un autre à A_c.

(ii) Si $\mu_c = 1$ et $|I_i| \geq 2$, alors l'un des deux sommets consécutifs de I_i appartient à A_c.

(iii) $x_1^i, x_{n_i}^i \in A_c$.

Preuve. Observons tout d'abord que par le Lemme 3.2.2, chaque sommet de G est dans $B_c^1 \cup A_c$.

(i) Soit $|I_i| \geq 3$ et supposons au contraire que pour certain $j_0 \in \{2, ..., n_i - 3\}$, tout $x^i_{j_0}, x^i_{j_0+1}, x^i_{j_0+2}$ appartiennent à A_c. Alors nous recolorons $x^i_{j_0+1}$ avec une couleur utilisée par les feuilles fournit une coloration dominante de G avec $\chi_d(G) - 1$ couleurs , contradiction. De plus pour chaque $j \in \{2, ..., n_i - 3\}$, l'un des $x^i_j, x^i_{j+1}, x^i_{j+2}$ appartient à B^1_c. Ainsi, l'un des $x^i_{j_0}, x^i_{j_0+1}, x^i_{j_0+2}$ doit être dans A_c, sinon, ces trois sommets seront tous dans B^1_c et donc $x^i_{j_0+1}$ manque toutes les classes de couleurs de c, ce qui est impossible.

(ii) Découle du fait que chaque sommet de G est dans $B^1_c \cup A_c$.

(iii) Découle de la définition de la tige T_i et du Corollaire 3.2.1. ■

Lemme 3.2.4 *Soit G une forêt de chenilles généralisées avec $r \geq 1$ tiges $T_1, ..., T_r$, s sommets supports et p composantes. Considérons une χ_d-coloration c satisfaisant le Lemme 3.2.2 et μ_c le nombre de couleurs de c apparaissant dans $G[B^1_c]$. Alors*

(i) $\chi_d(G) = s + \mu_c + \sum_{i=1}^{r} \lfloor \frac{|V(T_i)|-2}{3} \rfloor$ *avec* $r = s - p$.

(ii) Si $|V(T_i)| \in \{2, 3, 5\}$ *pour tout* $i \in \{1, ..., r\}$, *alors* $\mu_c = 1$. *Sinon, G admet une χ_d-coloration φ tel que* $\mu_\varphi = 2$.

Preuve. D'après le Lemme 3.2.2, Π^2_c est vide et le Corollaire 3.2.1 est rempli pour c. Donc $\chi_d(G) = |\Pi^1_c| + |\Omega_c|$. De plus, puisque $|\Pi^1_c| = \mu_c$ et $|\Omega_c| = |A_c|$, on trouve

$$\chi_d(G) = \mu_c + |A_c| . \tag{3.4}$$

Soit $n_i = |V(T_i)|$ et rappelons que $V(T_i) = \{x^i_1, x^i_2, ..., x^i_{n_i}\}$ et $I_i = V(T_i) \setminus \{x^i_1, x^i_{n_i}\}$. Soit S_G l'ensemble des sommets supports de G et $|S_G| = s$. Clairement,

$$A_c = S_G \cup (\cup_{i=1}^{r} I_i \cap A_c). \tag{3.5}$$

et

$$n_i = 2 + \left|I_i \cap B^1_c\right| + |I_i \cap A_c| \tag{3.6}$$

(i)- Il est facile de vérifier que $r = s - p$. Donc, en combinant ceci avec (3.4) et (3.5), nous obtenons

$$\chi_d(G) = \mu_c + s + \sum_{i=1}^{s-p} \lfloor I_i \cap A_c \rfloor \tag{3.7}$$

Dans la suite, nous montrerons que

$$|I_i \cap A_c| = \left\lfloor \tfrac{n_i-2}{3} \right\rfloor \text{ pour tout i.} \tag{3.8}$$

Pour cela, nous devons prouver les trois affirmations suivantes. Soit λ_c^i le nombre de couleurs de c apparaissant dans $G[I_i \cap B_c^1]$.

Fait 1. Si $n_i = 2$, alors $\lambda_c^i = 0$, tandis que si $n_i \geq 3$, alors $1 \leq \lambda_c^i \leq \mu_c \leq 2$.

Preuve. Clairement, d'aprés (3.5), $n_i \geq 2$. Si $n_i = 2$, alors $I_i = \emptyset$ et donc $\lambda_c^i = 0$. Par conséquent, nous pouvons supposer que $n_i \geq 3$. Alors $I_i \neq \emptyset$. Si $\lambda_c^i = 0$, alors tous les sommets de I_i sont dans A_c. Dans ce cas, la recoloration de l'un de ces sommets avec une couleur utilisée par les feuilles fournit une coloration dominante de G avec $\chi_d(G) - 1$ coleurs, contradiction. Donc $\lambda_c^i \geq 1$. Maintenant, en utilisant le fait que $\mu_c \in \{1, 2\}$ d'aprés le Lemme 3.2.1(ii)), et la définition de λ_c^i nous aurons $\lambda_c^i \leq \mu_c \leq 2$. Ceci termine la preuve du Fait 1.

Dans la suite, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que les sommets de B_c^1 utilisent soit les couleurs 1 et 2 lorsque $\mu_c = 2$ ou seulement la couleur 1 quand $\mu_c = 1$. Nous supposons également que toutes les feuilles sont colorées avec la couleur 1.

Fait 2. Si $\mu_c = 2$, alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$ soit $n_i \in \{2, 3, 5\}$ ou $\lambda_c^i = 2$.

Preuve. Supposons, au contraire, qu'il existe un entier $i_0 \in \{1, 2, ..., r\}$ tel que $n_{i_0} \notin \{2, 3, 5\}$ et $\lambda_c^{i_0} \neq 2$. Par le Fait 1, $\lambda_c^{i_0} = 1$. Soit $I_{i_0} = \{x_2^{i_0}, x_3^{i_0}, ..., x_{n_{i_0}-1}^{i_0}\}$, et observons que chaque sommet de I_{i_0} n'est pas coloré avec la couleur 1 utilise une couleur appartenant à A_c (à cause de $\lambda_c^{i_0} = 1$), et donc

$$|I_i \cap A_c| = \lfloor \frac{n_{i_0} - 2}{2} \rfloor. \tag{3.9}$$

Puisque $\mu_c = 2$, nous pouvons définir une coloration dominante φ de G obtenue à partir de c comme suit. Pour chaque $x \notin I_{i_0}$, $\varphi(x) = c(x)$; pour chaque $i \equiv 2(mod 3)$, $\varphi(x_i^{i_0}) = 1$; pour chaque $i \equiv 0(mod 3)$, $\varphi(x_i^{i_0}) = 2$; pour les sommets restants de I_{i_0}, nous les colorons différemment parmi les couleurs utilisées par $I_{i_0} \cap A_c$. Il est clair maintenant que sous φ, chaque sommet de I_{i_0} non coloré avec 1 ou 2 utilise une couleur appartenant à A_φ, donc

$$|I_{i_0} \cap A_\varphi| = \left\lfloor \frac{n_{i_0} - 2}{3} \right\rfloor \tag{3.10}$$

Maintenant, puisque $|I_{i_0} \cap A_\varphi| < |I_{i_0} \cap A_c|$, φ est une coloration dominante de G utilisant moins de couleurs que c, ce qui conduit à une contradiction. Cette contradiction achève la preuve du Fait 2.

Fait 3. Si $n_{i_0} \notin \{2,3,5\}$ pour certain $i_0 \in \{1,2,...,r\}$, alors G admet une χ_d-coloration avec $\mu = 2$.

Preuve. Si $\mu_c = 2$, alors cela termine la preuve du Fait 3. Supposons donc que $\mu_c = 1$ et par le Fait 1, $\lambda_c^{i_0} = 1$. D'abord, supposons que $n_i = 4$ pour chaque i. Définissons une nouvelle coloration dominante π comme suit : colorons chaque sommet support avec une nouvelle couleur en commençant par la couleur 3, et colorons tous ses voisins par des couleurs 1 ou 2 de sorte que les deux couleurs apparaissent dans chaque tige. Clairement, $|\pi| = |c|$ et $\mu_\pi = 2$. Pour la suite, on peut supposer que $n_i \geq 6$ pour au moins un certain i. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la couleur 2 apparaît dans $I_{i_0} \cap A_c$. Soit φ une coloration dominante de G définie comme dans le Fait 2 avec $|\varphi|$ coleurs. Un argument similaire à celui du Fait 1 montre que (3.9) et (3.10) restent valides. De plus, nous avons

$$\mu_\varphi = \mu_c + 1 \text{ et } |I_i \cap A_\varphi| = |I_i \cap A_c| \text{ pour tout } i \neq i_0. \tag{3.11}$$

et

$$|\varphi| = \mu_\varphi + s + |I_{i_0} \cap A_\varphi| + \sum_{i=1(i\neq i_0)}^{s-p} \lfloor I_i \cap A_c \rfloor \tag{3.12}$$

En remplaçant les expressions de (3.11) dans (3.10) et en utilisant (3.12), on obtient

$$|\varphi| = \mu_c + s + 1 + \left\lfloor \frac{n_{i_0} - 2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_{i_0} - 2}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1(i\neq i_0)}^{s-p} \lfloor I_i \cap A_c \rfloor \tag{3.13}$$

En utilisant (3.7), nous obtenons

$$|\varphi| = 1 + \left\lfloor \frac{n_{i_0} - 2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_{i_0} - 2}{2} \right\rfloor + \chi_d(G). \tag{3.14}$$

Maintenant, puisque $\left\lfloor \frac{n_{i_0}-2}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n_{i_0}-2}{2} \right\rfloor - 1$, il s'ensuit que $|\varphi| \leq \chi_d(G)$. Donc φ est une χ_d- coloration de G avec $\mu_\varphi = 2$. Ceci achève la preuve du Fait 2.

Nous nous intéressons maintenant à la preuve de l'égalité (3.8). Choisissons i_0 dans $\{1,2,...,r\}$ et considérons les cas suivants.

Cas 1 : $n_{i_0} \in \{2,3,5\}$.

Si $n_{i_0} = 2$, alors $I_{i_0} = \emptyset$ et donc (3.8) est valable puisque $|I_{i_0} \cap A_c| = 0$. Si $n_{i_0} = 3$, alors clairement $|I_{i_0}| = 1$. Dans ce cas, à nouveau $|I_{i_0} \cap A_c| = 0$, car sinon, la recoloration du sommet de I_{i_0} avec une couleur déja utilisée par les feuilles fournit une coloration

dominante de G avec $\chi_d(G)-1$ coleurs, contradiction. Donc (3.8) est vraie pour $n_{i_0}=3$. Enfin, si $n_{i_0}=5$ alors $|I_{i_0}|=3$, dans laquelle deux sommets de I_{i_0} n'appartiennent pas à A_c (sinon, la recoloration des deux sommets non adjacents de I_{i_0} avec la couleur déjà utilisée par $I_{i_0}\cap A_c$ fournit une coloration dominante de G avec $\chi_d(G)-1$ coleurs, contradiction). Donc $|I_{i_0}\cap A_c|\leq 1$. Ceci avec le Lemme 3.2.3(i) donne $|I_{i_0}\cap A_c|=1$ et donc (3.8) est vérifié pour $n_{i_0}=5$.

Cas 2 : $n_{i_0}\notin\{2,3,5\}$.

D'aprés le Fait 3, nous pouvons supposer que $\mu_c=2$ et donc par le Fait 2, nous avons $\lambda_c^{i_0}=2$. De plus, nous avons $|I_{i_0}\cap B_c^1|\geq 2$. Ceci avec (3.6) implique que $n_{i_0}\geq 4$. Considérons la coloration dominante φ de G définie comme dans la preuve du Fait 2. Notons que (3.10) et (3.13) restent valides. De plus, nous avons

$$\mu_\varphi=\mu_c \text{ et } |I_i\cap A_\varphi|=|I_i\cap A_c| \text{ pour chaque } i\neq i_0. \tag{3.15}$$

Maintenant, en substituant les expressions de (3.10) et (3.15) dans la formule (3.13), nous obtenons

$$|\varphi|=\mu_c+s+\left\lfloor\frac{n_{i_0}-2}{3}\right\rfloor+\sum_{i=1(i\neq i_0)}^{s-p}\lfloor I_i\cap A_c\rfloor \tag{3.16}$$

Maintenant, puisque $|\varphi|\geq \chi_d(G)$, alors (3.16) et (3.7) ensemble donnent $|I_{i_0}\cap A_c|\leq \left\lfloor\frac{n_{i_0}-2}{3}\right\rfloor$.

D'autre part, le Lemme 3.2.3(i) donne $|I_{i_0}\cap A_c|\geq\left\lfloor\frac{n_{i_0}-2}{3}\right\rfloor$, et donc l'égalité (3.8) est vérifie. Cela achève la preuve de (i).

(ii) Supposons que $n_i\in\{2,3,5\}$ pour tout $i\in\{1,2,...,r\}$ et soit l le nombre de tiges d'order 5. Dans ce cas, nous avons $\sum_{i=1(i\neq i_0)}^{s-p}\lfloor\frac{n_{i_0}-2}{3}\rfloor=l$. En remplaçant ceci dans l'expression de (i), on obtient

$$\chi_d(G)=\mu_c+s+l. \tag{3.17}$$

Maintenant, soit ψ une coloration de G obtenue à partir de c comme suit. Pour chaque I_i, soit $\psi(x_j^i)=1$ et j est pair, et colorons les sommets x_j^i avec j impair différemment parmi les couleurs utilisées par $I_i\cap A_c$. Les sommets restants de G gardent leurs couleurs données par la coloration c. Il est facile de montrer que ψ est une coloration dominante

utilisant au moins $\chi_d(G)$ couleurs telle que $\mu_\psi = 1$ et $|I_i \cap A_\psi| = \lfloor \frac{n_i-2}{2} \rfloor$ pour chaque i, où

$$|\psi| = 1 + s + \sum_{i=1}^{s-p} \lfloor \tfrac{n_i-2}{2} \rfloor. \tag{3.18}$$

En utilisant le fait que $n_i \in \{2, 3, 5\}$, alors (3.18) devient

$$|\psi| = 1 + s + l. \tag{3.19}$$

Puisque $|\psi| \geq \chi_d(G)$ et $\mu_c \in \{1, 2\}$, alors (3.17) et (3.19) ensemble donnent $\mu_c = 1$. La deuxième partie est vérifiée d'après le Fait 3. Ceci complète la démonstration du Lemme 3.2.4. ■

Maintenant, nous pouvons montrer le résultat principal suivant.

Théorème 3.2.1 *Soit G une forêt de chenilles généralisées avec s sommets supports et p composantes connexes, chacune étant non trivial et différente d'une étoile. Soit $n_i \geq 2$ l'ordre de la $i^{ème}$ tige de G. Alors*

$$\chi_d(G) = \alpha + s + \sum_{i=1}^{s-p} \lfloor \frac{n_i - 2}{3} \rfloor.$$

où $\alpha = \begin{cases} 1 \text{ si chaque } n_i \in \{2, 3, 5\}. \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$.

3.3 Preuve du Théorème 3.2.1

Preuve. Si $n_i \in \{2, 3, 5\}$ pour tout i, alors d'après (ii) et (i) du Lemme 3.2.4, on a $\mu_c = 1$ et donc $\chi_d(G) = s + 1 + \sum_{i=1}^{s-p} \lfloor \frac{n_{i_0}-2}{2} \rfloor$. Maintenant si $n_i \notin \{2, 3, 5\}$ pour quelque i, alors par la deuxième partie du Lemme 3.2.4(ii), nous pouvons prendre $\mu_c = 2$. En utilisant le Lemme 3.2.4(i), nous obtenons $\chi_d(G) = s + 2 + \sum_{i=1}^{s-p} \lfloor \frac{n_{i_0}-2}{2} \rfloor$. ■

CHAPITRE 4

GRAPHES ARÊTE χ_D^+-CRITIQUES

Sommaire

4.1 Graphes sommet(resp., arête) χ_d-critiques 64

4.1.1 Exemples 65

4.2 Résultats prémilinaires 65

4.3 Graphes arête χ_d^+-critiques. 67

4.3.1 Forêt arête χ_d^+-critique. 71

4.3.2 Graphe sans P_4 arête χ_d^+-critique 73

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet de la suppression d'une arête quelconque sur le nombre chromatique dominant. Tout d'abord, nous montrons que le nombre chromatique dominant d'un graphe G privé d'une arête quelconque peut augmenter ou diminuer par au plus une unité. Ensuite, nous allons caractériser les forêts et les graphes sans P_4 qui sont arêtes χ_d^+-critiques.

4.1 Graphes sommet(resp., arête) χ_d-critiques

Parmi les concepts étudiés en théorie des graphes, se trouve le problème des graphes critiques par rapport à un paramètre donné. Ce concept à été introduit pour la première fois en 1951 par Dirac [27, 28], qui a étudié l'effet de la suppression d'un sommet quelconque d'un graphe sur son nombre chromatique. A noter que la suppression ou l'ajout d'un sommet ou d'une arête d'un graphe G, peut faire diminuer ou rester inchangé le nombre chromatique.

Définition 4.1.1 *Un graphe G est dit sommet (resp., arête) critique si pour tout(e) sommet v (resp., arête e) de G, $\chi(G-v) < \chi(G)$ (resp., $\chi(G-e) < \chi(G)$).*
Un graphe G est dit sommet (resp., arête) stable si pour tout(e) sommet v (resp., arête e) de G, $\chi(G-v) = \chi(G)$ (resp., $\chi(G-e) = \chi(G)$).

Un sommet (ou une arête) d'un graphe G est dit(e) critique, si sa suppression fait diminuer le nombre chromatique de G. Evidemment, la suppression d'un sommet ou d'une arête fait diminuer le nombre chromatique de G par au plus un. En effet, pour tout graphe k-chromatique G avec $k \geq 2$ et pour tout sommet v de G, soit $\chi(G-v) = k$ ou bien $\chi(G-v) = k-1$. Par ailleurs, pour chaque arête e de G, soit $\chi(G-e) = k$ ou $\chi(G-e) = k-1$.
Un graphe critique est un graphe dans lequel chaque sommet (ou arête) est critique. Un graphe $k-$critique est un graphe critique avec $\chi(G) = k$. En particulier, un graphe G est dit sommet $k-$critique (resp., arête $k-$critique) si chacun (resp., chacune) des ses sommets (resp., ses arêtes) est critique. Ainsi, G est dit arête $k-$critique si chacune de ses arêtes est critique. Il est connu que si $e = uv$ et $\chi(G-e) = k-1$, alors $\chi(G-u) = k-1$ et $\chi(G-v) = k-1$. En vue de cela, tout graphe arête $k-$critique est sommet $k-$critique.

Ce fait justifie tout l'intérêt d'étudier l'effet de la suppression d'un sommet ou d'une arête quelconque pour le *nombre χ_d-chromatique* d'un graphe. Contrairement au nombre chromatique, la suppression d'un sommet ou d'une arête d'un graphe peut faire diminuer, augmenter ou rester inchangé son nombre χ_d-chromatique. De ce fait, on peut classer les graphes critiques par rapport au nombre χ_d-chromatique en six classes de graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple

La classe des graphes sommet $\chi_d^=$-stables : $\forall v \in V(G)\,,\ \chi_d(G-v) = \chi_d(G)\,.$

La classe des graphes arête $\chi_d^=$-stables : $\forall e \in V(G)\,,\ \chi_d(G-e) = \chi_d(G)\,.$

La classe des graphes sommet χ_d^+-critiques : $\forall v \in V(G)\,,\ \chi_d(G-v) > \chi_d(G)\,.$

La classe des graphes arête χ_d^+-critiques : $\forall e \in V(G)\,,\ \chi_d(G-e) > \chi_d(G)\,.$

La classe des graphes sommet χ_d^--critiques : $\forall v \in V(G)\,,\ \chi_d(G-v) < \chi_d(G)\,.$

La classe des graphes arête χ_d^--critiques : $\forall e \in V(G)\,,\ \chi_d(G-e) < \chi_d(G)\,.$

4.1.1 Exemples

— La couronne d'une chaîne P_n, $n \geq 2$ est une graphe arête $\chi_d^=$-stable.

— Les graphes complets K_n sont des graphes arête χ_d^--critiques, et sommet χ_d^--critiques.

— Les étoiles $K_{1,n}$ sont des graphes arête χ_d^+-critiques.

Dans ce chapitre, on s'intéresse principalement à la classe des graphes arête $\chi_d(G)^+$-critiques. Pour des raisons de simplicité nous alons appeler, à partir de maintenant, la classe des graphes arête $\chi_d(G)^+$-critiques par les graphes arête $\chi_d(G)^+$-critiques.

4.2 Résultats prémilinaires

Dans cette section, nous présentons quelques résultats sur la χ_d-coloration qui seront utiles dans la suite de ce chapitre, et nous donnons une borne supérieure et autre inférieure pour $\chi_d(G-e)$ en fonction de $\chi_d(G)$.

Comme nous avons déjà vu dans le chapitre précédent, les auteurs de [13] ont montré que pour toute χ_d-coloration c d'un arbre non trivial T, tous les sommets supports sont dans A_c et toutes les feuilles ont la même couleur. On se basant sur la même technique de preuve présentée dans ce papier, nous allons prouver que ce résultat reste aussi valable pour tout graphe G. Pour cela, on a besoin de l'observation suivante.

Observation 4.2.1 *[13] Soit G un graphe d'ordre au moins deux et c une $\chi_d(G)$-coloration. Alors chaque sommet support est soit dans A_c soit il est adjacent à exactement une feuille et cette feuille est dans A_c.*

Proposition 4.2.1 *Soit G un graphe d'ordre au moins deux et S l'ensemble des sommets supports de G. Alors G admet une $\chi_d(G)$-coloration c telle que $S \subset A_c$ et toutes les feuilles de G ont la même couleur.*

Preuve. Parmi toutes les $\chi_d(G)$-colorations, soit c choisie de telle sorte que $|A_c \cap S|$ est maximisé. Soit v une feuille de G et u son sommet support. Supposons que $u \notin A_c$. Par Observation 4.2.1, $L_u = \{v\}$ et $v \in A_c$. Soit π une coloration obtenue à partir de c en échangeant la couleur de u par v, et tous les autres sommets gardent leur couleur. Clairement, π est une $\chi_d(G)$-coloration dans laquelle $A_\pi \cap S = A_c \cup S \cup \{u\}$, ce qui contredit le choix de c. Donc $S \subset A_c$. S'il y a plus d'une couleur qui apparaît dans L_u, alors en recolorant tous les sommets de L_u par la même couleur parmi les couleurs apparaissant dans L_u, on obtient une coloration dominante de G utilisant moins de $\chi_d(G)$ couleurs, ce qui est impossible. Par conséquent, toutes les feuilles ont la même couleur. ■

Nous montrons maitenant que le nombre chromatique dominant d'un graphe G privé d'une arête quelconque est compris entre $\chi_d - 1$ et $\chi_d + 1$.

Théorème 4.2.1 *Soit G un graphe et e une arête de G. Alors*

$$\chi_d(G) - 1 \leq \chi_d(G - e) \leq \chi_d(G) + 1.$$

Preuve. Soient u_1 et u_2 les extrémités de l'arête e. Nous montrons d'abord la borne supérieure. Pour ce faire, on considère une coloration dominante c de G avec $\chi_d(G)$ couleurs. Si u_1 et u_2 sont dans A_c, alors clairement c reste une coloration dominante de $G - e$, ce qui implique que $\chi_d(G - e) \leq \chi_d(G)$. Supposons maintenant, sans perte de généralité, que u_1 n'est pas dans A_c. Définir une nouvelle coloration de $G - e$ avec $\chi_d(G) + 1$ couleurs de c comme suit. Tous les sommets de G gardent leurs couleurs sauf le sommet u_1 qui sera coloré avec la couleur $\chi_d(G)+1$. Il est clair que cette coloration est une coloration dominante de $G-e$ avec $\chi_d(G)+1$ couleurs. Donc $\chi_d(G - e) \leq \chi_d(G)+1$.

Montrons maintenant la borne inférieure. A cette fin, soit π une coloration dominante de $G-e$ avec $\chi_d(G - e)$ couleurs. Si $\pi(u_1) \neq \pi(u_2)$, alors π reste une coloration dominante de G, et donc $\chi_d(G) \leq \chi_d(G - e)$. Supposons alors que $\pi(u_1) = \pi(u_2)$. Définissons une

nouvelle coloration de G avec $\chi_d(G-e)+1$ couleurs à partir de π en recolorant u_1 par la couleur $\chi_d(G-e)+1$ et tous les autres sommets gardent leurs couleurs. Nous obtenons une coloration dominante de G avec $\chi_d(G-e)+1$ couleurs. Donc $\chi_d(G) \leq \chi_d(G-e)+1$.

■

Par exemple, pour le graphe présenté dans la Figure 4.1 , nous avons $\chi_d(G)=4$, tandis que $\chi_d(G-e_1)=5$, $\chi_d(G-e_2)=4$ et $\chi_d(G-e_3)=3$.

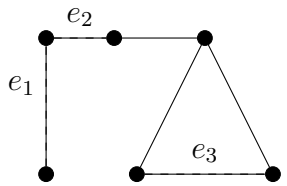


FIGURE 4.1 – Un graphe illustrant le Théorème 4.2.1.

4.3 Graphes arête χ_d^+-critiques.

Dans cette section, nous caractérisons les forêts et les graphes sans P_4 qui sont arête χ_d^+-critiques. Avant de présenter ceci, nous avons besoin des propositions suivantes.

Proposition 4.3.1 *Soit G un graphe et c une $\chi_d(G)$-coloration. Si G est arête χ_d^+-critique, alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(*i*) *A_c et $N_G(A_c)$ sont deux ensembles indépendants dans G et chaque sommet dans $N_G(A_c)$ a un voisin dans A_c.*

(*ii*) *B_c^1 est un esemble indépendant, de plus Π_c^1 possède au plus une classe de couleur.*

(*iii*) *Pour tout sommet $z \in B_c^1$, il existe une classe de couleur $X \in \mathcal{B}_c^2 \cup \mathcal{A}_c$ tel que $N_G(z) = X$.*

(*iv*) *Si $B_c^2 = \emptyset$, alors G* est l'union des étoiles. Sinon, si *$B_c^2 \neq \emptyset$, alors tout sommet dans B_c^2* a au plus un voisin dans *A_c*.

(*v*) *Soit H une composante quelconque de G (peut être $G = H$) et $x \in V(H)$. Si $x \in B_c^2 \cup A_c$, alors la couleur de x n'apparait pas dans $G - H$.*

Preuve. Soit G un graphe arête χ_d^+-critique.

(i) Soit uv une arête de G. Si u et v sont dans A_c ou les deux sont dans $N_G(A_c)$, alors c reste une coloration dominante de $G - uv$, ce qui signifie que $\chi_d(G - uv) \leq \chi_d(G)$, contradiction. Ainsi A_c et $N_G(A_c)$ sont deux ensembles indépendants. Supposons que $u \in A_c$ et $v \in N_G(A_c)$. Si v a un autre voisin dans A_c différent de u, alors la suppression de uv n'augmente pas le nombre chromatique dominant. Donc (i) est vérifié.

(ii) Le même argument que ci-dessus montre que B_c^1 est un ensemble indépendant. Pour montrer la deuxième partie, supposons au contraire que $|\Pi_c^1| \geq 2$. Recolorons tous les sommets de B_c^1 par la même couleur parmi les couleurs utilisées dans B_c^1 (ceci est possible puisque B_c^1 est un ensemble indépendant), on obtient une coloration dominante de G utilisant moins de $\chi_d(G)$ couleurs, ce qui contredit la minimalité de c.

(iii) Par définition de c, $z \in B_c^1$ doit voir une classe de couleur, disons X. Clairement $X \subseteq N_G(z)$. Si (iii) n'est pas vrai, alors il existe un sommet $y \in N_G(z) - X$. Mais, dans ce cas, c reste une coloration dominante de $G - yz$, contradiction.

(iv) Est une conséquence directe des points (i)-(iii).

(v) Le cas $x \in A_c$ est trivialement vrai. Ceci est vrai même lorsque $x \in B_c^2$ puisque, sinon, tous les sommets de G manquent la classe de couleur contenant x, contradiction.

■

Proposition 4.3.2 *Soient G_1 et G_2 deux graphes disjoints et soit $G = G_1 + G_2$. Si G admet une χ_d-coloration c telle que aucune couleur n'apparait à la fois dans G_1 et G_2, alors $\chi_d(G) = \chi_d(G_1) + \chi_d(G_2)$.*

Preuve. Posons $k = \chi_d(G_1) + \chi_d(G_2)$ et pour $i \in \{1, 2\}$, soit q_i est le nombre de couleurs de c apparaissant dans G_i. Alors $\chi_d(G) \geq q_1 + q_2$ (puisque aucune couleur n'apparaît à la fois dans G_1 et G_2). Par conséquent $\chi_d(G) \geq k$ puisque $q_i \geq \chi_d(G_i)$ pour chaque i. Maintenant, pour montrer l'égalité, pour chaque i dans $\{1, 2\}$, soit c_i une $\chi_d(G_i)$-coloration et C_i l'ensemble des couleurs utilisées par c_i telles que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Il est facile de vérifier que l'union de c_1 et c_2 est une coloration dominante de G avec k couleurs, ce qui implique que $\chi_d(G) \leq k$. ■

Proposition 4.3.3 *Soit G un graphe non connexe avec $p \geq 2$ composantes et $s \geq 0$ sommets supports et soit H une composante quelconque de G. Parmi tous les χ_d-colorations de G satisfaisant la Proposition 4.2.1, soit c choisie de telle sorte que B_c^1 est minimal. Alors les conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) Si H est un graphe biparti complet différent d'une étoile, alors aucune couleur ne peut apparaître à la fois dans H et $G - H$. De plus, le nombre de couleurs apparaissant dans H est égal à 2.

(ii) Si toute composante est un graphe biparti complet, alors $\chi_d(G) = 2p - s + i$, où $i = \begin{cases} 0 \text{ si aucune composante de } G \text{ est une étoile,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$

Preuve. Soit (A, B) la bipartition de H, donc $V(H) = A \cup B$ et $A \geq 2$ et $B \geq 2$. Posons $M = A \cap (B_c^2 \cup A_c)$ et $N = A \setminus M$. Observons que $M \neq \emptyset$ (car tout sommet dans B doit voir une classe de couleur dans A) et $N \subseteq B_c^1$.

(i) Pour prouver la première partie, choisissons $x \in A$. Si $x \in M$, alors le résultat découle du Proposition 4.3.1-(v). Maintenant, soit $x \in N$ et supposons au contraire que la couleur de x apparaît dans $G - H$. Soit t une couleur quelconque apparaissant dans M. Clairement la couleur de t est différente de la couleur de x. Puisque t apparaît dans $B_c^2 \cup A_c$, la Proposition 4.3.1-(iv) montre que t ne peut pas apparaître dans $G - H$. Soit π une coloration de G obtenue à partir de c en recolorant x avec la couleur t et tous les autres sommets gardent leurs couleurs données initialement par c. Il est facile de voir que π est une $\chi_d(G)$-coloration telle que $B_\pi^1 = B_c^1 - \{x\}$ (c'est-à-dire, B_π^1 contient des sommets moins que B_c^1), ce qui contredit le choix de c. Donc la première partie est vérifiée.

Pour montrer la deuxième partie, soit q le nombre de couleurs apparaissant dans H. Il est clair que $q \geq 2$ car H a au moins une arête. Supposons que $q \geq 3$. Ceci implique que au moins deux couleurs différentes (toutes les deux) doivent apparaître soit dans A ou dans B, par symétrie, disons dans A. Soit π une coloration de G obtenue à partir de c en recolorant tous les sommets de A avec la même couleur parmi les couleurs apparaissant dans M et les autres sommets de G gardent leurs couleurs. Il est facile de voir que π et une coloration dominante de G utilisant moins de couleurs que c, contradiction avec le choix de c. Donc $q = 2$ et par conséquent la deuxième partie est vérifiée.

ii) Soient $H_1, H_2, ..., H_p$ ($p \geq 2$) les composantes de G telles que chacune d'entre elles est un graphe biparti complet. Soit $r \geq 0$ le nombre des composantes qui ne sont pas des étoiles. Il est facile de voir que $r = p - s$. Si $r = 0$, alors toute composante est une étoile et donc (ii) est vérifié d'après la Proposition 4.2.1. Sinon, si $r \neq 0$, alors nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $H_1, H_2, ..., H_r$ ne sont pas des étoiles et que les autres composants (s'ils existent) sont des étoiles. Posons $G_1 = H_{r+1} + H_{r+2} + ... + H_p$ (G_1 peut être vide). D'après (i), aucune couleur ne peut apparaître à la fois dans H_i et $G - H_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$. Ceci, avec la Proposition 4.3.2 donne

$$\begin{aligned} \chi_d(G) &= \chi_d(H_1) + \chi_d(H_2 + H_3 + ... + H_r + G_1) \\ &= \chi_d(H_1) + \chi_d(H_2) + \chi_d(H_3 + ... + H_r + G_1) \\ &\quad ... \\ &= \chi_d(H_1) + \chi_d(H_2) + \chi_d(H_3) + ... + \chi_d(H_r) + \chi_d(G_1). \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 2.2.7, nous obtenons

$$\chi_d(G) = 2r + \chi_d(G_1). \tag{4.1}$$

Puisque chaque composante de G_1 est une étoile, la Proposition 4.2.1 donne $\chi_d(G_1) = p - r + 1$. Alors en remplaçant ceci dans (4.1), nous obtenons $\chi_d(G) = p + r + 1$. Puisque $r = p - s$, $\chi_d(G) = 2p - s + 1$. En particulier, si G_1 est vide, alors $\chi_d(G) = 2r = 2p$. ■

Proposition 4.3.4 *Soit G un graphe non connexe tel que toute composante connexe est un graphe biparti complet. Alors G est arête χ_d^+-critique si et seulement si toutes les composantes de G sont des étoiles où bien si toutes ne sont pas des étoiles.*

Preuve. Prouvons d'abord la condition "Si " . Pour cette fin, soit c une χ_d-coloration de G satisfaisant la Proposition 4.2.1 et $|B_c^1|$ est minimisé. Supposons au contraire que G possède deux composantes telles que l'une d'entre elles est une étoile et l'autre, disons H n'est pas une étoile. Soit (A, B) la bipartition de H. Il est clair que $|A| \geq 2$ et $|B| \geq 2$. D'après la deuxième partie de la Proposition 4.3.3-(i), tous les sommets de A ont la même couleur, et de même pour B. Soit $ab \in E(G)$ tel que $a \in A$ et $b \in B$. Nous définissons une coloration de $G - ab$ à partir de c comme suit. Recolorons a et b avec la couleur utilisée par les feuilles. Ceci est possible car, d'après la première partie de la Proposition

4.3.3-(i), les deux couleurs apparaissant dans H sont différentes de la couleur utilisée par les feuilles. Les autres sommets de G gardent leurs couleurs initialement données par c. Il est facile de vérifier que c reste une χ_d-coloration de $G - ab$ avec $\chi_d(G)$ couleurs, contradiction.

Maintenant, prouvons la condition "seulement si "Ṗosons $G = H_1 + H_2 + ... + H_p$ $(p \geq 2)$ où chaque H_i est un graphe complet. Si chaque H_i est une étoile, alors le résultat découle immédiatement du Théorème 4.3.1. Maintenant, supposons que aucun H_i n'est une étoile. Selon la Proposition 4.3.3-(i), aucune couleur ne peut apparaître à la fois dans H_i et $G-H_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Ceci avec les Propositions 2.2.7 et 4.3.2 impliquent que

$$\chi_d(G) = 2p.$$

Soit e une arête quelconque de G, sans perte de généralité, supposons que $e \in E(H_1)$. Par la Proposition 2.2.7, $\chi_d(H_1 - e) \neq 2$ et puisque $H_1 - e$ contient au moins une arête, il s'ensuit que

$$\chi_d(H_1 - e) \geq 3. \tag{4.2}$$

Soit π une $\chi_d(G - e)$-coloration. Puisque, pour chaque $i \geq 2$, H_i est un graphe complet différent d'une étoile, (i) montre que aucune couleur ne peut apparaître à la fois dans H_i et dans $G - H_i$. Ce fait, ensemble avec la Proposition 4.3.2 impliquent que

$$\chi_d(G - e) = \chi_d(H_1 - e) + \chi_d(H_2) + ... + \chi_d(H_p).$$

En utilisant la Proposition 2.2.7 avec (4.2), nous obtenons

$$\chi_d(G - e) \geq 3 + 2 + ... + 2 > 2p = \chi_d(G).$$

■

4.3.1 Forêt arête χ_d^+-critique.

Notre objectif dans cette section est de caractériser les forêts qui sont arête χ_d^+-critique.

Théorème 4.3.1 *Une forêt G est arête χ_d^+-critique si et seulement si chaque composante de G est une étoile.*

Preuve. Soit c une $\chi_d(G)$-coloration satisfaisant la Proposition 4.2.1. Soit $R = V(G) \setminus (L \cup S)$, où L et S désignent les ensembles de feuilles et de sommets supports, respectivement. Pour prouver la nécessité, nous devons montrer que $R = \emptyset$. Supposons le contraire. Alors il existe une arête uv telle que $u \in S$ et $v \in R$. Le choix de c montre que $u \in A_c$ et puisque $v \notin L$, alors $|N_G(v)| \geq 2$. Posons $N_R(v) = N_G(v) \cap R$ et $N_S(v) = N_G(v) \cap S$. D'après la Proposition 4.3.1-(i), on a

$$v \notin A_c \text{ et } N_S(v) = \{u\}, \tag{4.3}$$

ce qui implique que $N_R(v) \neq \emptyset$ (puisque $|N_G(v)| \geq 2$). Soit X_v la classe de couleur contenant v. D'après la première partie de (4.3), on a

$$|X_v| \geq 2. \tag{4.4}$$

Puisque v voit la classe $\{u\}$, alors chaque sommet dans $N_R(v)$ doit voir X_v (c'est-à-dire, il appartient à $W(X_v)$), car sinon c reste une coloration dominante de $G - e$, où e est une arête joignant v à un sommet de $N_R(v) \setminus W(X_v)$, contradiction. Ceci avec (4.4) impliquent que

$$|N_R(v)| = 1 \text{ et donc } d_G(v) = 2, \tag{4.5}$$

car sinon deux sommets de $N_R(v)$ ensemble avec deux sommets de X_v induisent un cycle C_4, ce qui est impossible.

Soit w l'unique sommet dans $N_R(v)$ et définissons une nouvelle coloration π de $G - vw$ à partir de c en recolorant v avec la couleur utilisée dans L et tous les autres sommets de G gardent leurs couleurs initialement données par c. Puisque, d'après (4.5), v est une feuille dans $G - wv$, il s'ensuit que π est une coloration propre. De plus, il n'est pas difficile de voir que π satisfait la définition de la coloration dominante. D'ou π est une coloration dominante de $G - vw$ avec $\chi_d(G)$ couleurs, contradiction. D'ou $R = \emptyset$. Puisque d'après la Proposition 4.3.1-(i), S est indépendant, la nécessité s'ensuit.

Maintenant, prouvons la suffisance. D'après la Proposition 4.3.3-(ii), on a $\chi_d(G) = p+1$, où p est le nombre de sommets supports de G. Soit H une composante quelconque de G et e une arête quelconque de H. Observons que si $H = P_2$, alors $G - e$ est composé de deux sommets isolés et $p-1$ étoiles. Tandis que si $H \neq P_2$, alors $G - e$ est composé d'un sommet isolé et de p étoiles. Egalement, il est à noter que la couleur d'un sommet isolé

n'apparaît pas ailleurs. En utilisant ce fait avec la Proposition 4.3.3-(ii), nous constatons que $\chi_d(G-e) = p+2$. Donc $\chi_d(G-e) > \chi_d(G)$.

■

4.3.2 Graphe sans P_4 arête χ_d^+-critique

Nous caractérisons ici les graphes sans P_4 qui sont arête χ_d^+-critiques. Un graphe est sans P_4 si G ne contient pas une chaîne P_4 comme sous-graphe induit. Nous rappelons un théorème de Seinsche [66] qui explique la structure de cette classe de graphe.

Théorème 4.3.2 *([66]) Un graphe est sans P_4, si et seulement si, chaque sous-graphe induit avec au moins deux sommets est non connexe, ou bien son graphe complémentaire est non connexe.*

Théorème 4.3.3 *Un graphe sans P_4 est arête χ_d^+-critique si et seulement si chaque composante de G est un graphe biparti complet tel que toutes les composantes sont des étoiles ou aucune d'entre elles est une étoile.*

Preuve. Pour prouver la condition nécessaire, soit G un graphe sans P_4 et arête χ_d^+-critique et soit H une composante quelconque de G. D'après le Théorème 4.3.2, H est le joint de deux graphes H_1 et H_2. Nous devons d'abord montrer que

$$\text{pour tout } i \in \{1,2\},\ V(H_i) \text{ est un ensemble indépendant.} \tag{4.6}$$

Pour cela, nous considérons les deux cas suivants.

Cas 1 : pour tout $i \in \{1,2\}$, $V(H_i) \cap (B_c^2 \cup A_c) = \emptyset$.

Par symétrie, supposons que $V(H_1) \cap (B_c^2 \cup A_c) = \emptyset$; donc $V(H_1) \subseteq B_c^1$. D'après la Proposition 4.3.1-(ii), $V(H_1)$ est un ensemble indépendant. Donc $V(H_2) \cap (B_c^2 \cup A_c) \neq \emptyset$, car sinon chaque sommet de H ne voit aucune classe de couleur de c, ce qui est impossible. Cela signifie qu'il existe une couleur, disons s qui apparaît dans $V(H_2) \cap (B_c^2 \cup A_c)$. Dans ce cas, s doit être l'unique couleur qui apparaît dans H_2, car sinon la suppression d'une arête reliant un sommet de H_2 de couleur différente de s à un certain sommet de H_1

n'augmente pas le nombre chromatique dominant, contradiction. Alors tous les sommets de H_2 sont colorés avec la couleur s et donc H_2 est un ensemble indépendant.

Cas 2 : Pour tout $i \in \{1,2\}$, $V(H_i) \cap (B_c^2 \cup A_c) \neq \emptyset$.

Pour tout $i \in \{1,2\}$, soit s_i une couleur apparaissant dans $V(H_i) \cap B_c^1 \cup A_c)$ et soit X_i la classe de couleur de c contenant tous les sommets de couleur s_i. Il est clair que, pour chaque $i \in \{1,2\}$, s_i ne peut pas apparaître à la fois dans H_i et $G-H_i$, $X_i \subseteq V(H_i)$, ce qui implique que chaque sommet de H_i voit X_{3-i}. Dans ce cas, pour chaque $i \in \{1,2\}$, H_i doit être un ensemble indépendant, car sinon, la suppression d'une arête quelconque reliant deux sommets dans H_i n'augmente pas le nombre chromatique dominant, contradiction. Ceci termine la preuve de (4.6).

De cela, nous concluons que H est un graphe biparti complet et à partir de ce fait et la Proposition 4.3.4, nous constatons que la condition nécessaire est vérifiée. La condition suffisante découle également de la Proposition 4.3.4. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons étudié la notion de la coloration dominante dans les graphes.

Notre travail s'est articulé autour de deux points principaux. Dans le premier, on a visé la recherche des valeurs exactes du nombre chromatique dominant pour des graphes particuliers tandis que dans le deuxième point on a étudié l'impact de certaines opérations de graphes sur ce paramètre. Plus en détail, nous avons déterminé, en premier lieu, la valeur exacte du nombre chromatique dominant d'une classe particulière de graphes, que nous avons appelée forêts de chenilles généralisées. Cette classe contient strictement les forêts dont chaque composante est une chenille. En second lieu, nous avons introduit la notion des graphes arêtes χ_d^+-critiques. Dans ce contexte, nous avons montré que le nombre chromatique dominant d'un graphe G privé d'une arête quelconque est compris entre $\chi_d - 1$ et $\chi_d + 1$. Puis, après avoir donné les premières propriétés des graphes χ_d-supertcritiques, nous avons caractérisé certaines graphes χ_d^+-critiques, à savoir les forêts, les graphes sans P_4.

Les travaux accomplis durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Voici une liste de problèmes qui se situent dans le prolongement de cette thèse.

- Etablir des bornes supérieures et inférieures qui encadrent le plus possible le paramètre étudié et caractériser les graphes extrémaux atteignant ces bornes.
- Déterminer la valeur exacte du nombre chromatique dominant des forêts.
- Caractériser les graphes χ_d^+-critique pour d'autres classes de graphes.

— Caractériser les graphes G tels que pour toute arête e de G, $\chi_d(G-e) < \chi_d(G)$.

— Caractériser les graphes G tels que pour toute arête e de G, $\chi_d(G-e) = \chi_d(G)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abid, T.R. Rao, Dominator coloring of mycielskian graphs, Australasian Journal of Combinatorics 73, 2 (2019), 274–279.

[2] S. Alikhani et N.Ghanbari, Total dominator chromatic number of specific graphs, arXiv preprint arXiv :1511.01652 (2015).

[3] S. Aioula, M. Chellali et N. Ikhlef-Eschouf, On the dominator chromatic number of the generalized caterpillars forest, RAIRO-Oper. Res. 55 (2021) S1647-S1655.

[4] J. Aruldoss et G. Gurulakshmi, The Dominator Coloring of Central and Middle Graph of Some Special Graphs, International Journal of Mathematics And its Applications Volume 4. (2016).

[5] J. Aruldoss, G. Gurulakshmi, Dominator Chromatic Number, Bondage Number and Domatic Number of Some Named Graphs. International Journal of Mathematics And its Applications Volume 4. (2016).

[6] S. Arumugam, K. Raja Chandrasekar, N. Misra et P.G. Philip et S. Saurabh, Algorithmic aspects of dominator colorings in graphs, IWOCA 2011, LNCS 7056, (2011), 19-30.

[7] S. Arumugam, J. Bagga et K.R. Chandrasekar, On dominator colorings in graphs, Proceedings Mathematical Sciences, 122(4), (2012), 561-571.

[8] M. Ayyampillai, R. Guruviswawathan et V. Swaminathan, Strong dominator coloring of a graph, International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 113 No. 9, 2017.

[9] C. Berge, Theory of graphs and its application, Methuen. London,(1962).

[10] C. Berge, Graphes (Vol. 2). Paris : Gauthier-villars. (1983)

[11] C. Berge, The theory of graphs, Courier Corporation, 2001.

[12] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1979.

[13] M.H. Boumediene, et M. Chellali, On the dominator colorings in trees, Discussiones mathematicae graph theory, 32, (2012), 677-683.

[14] M.H. Boumediene, et M. Chellali, An algorithm for the dominator chromatic number of trees, J Comb Optim (2015) 30 :27–33 DOI 10.1007/s10878-013-9631-y.

[15] S. Baskaran, A.M. Shahul hameed, On total dominator coloring of middle graph, total graph and shadow graph, Malaya Journal of Matematik, 731-734. (2021).

[16] K. S. Booth et J. H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs, SIAM J. Comput. pp,11 :191-199, 1982.

[17] R. Brooks, On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.,37 : 194-197, 1941.

[18] M. Chellali et F. Maffray, Dominator colorings in some classes of graphs, Graphs and combinatorics, 28, (2012), 97-107.

[19] Q. Chen, C. Zhao et M. Zhao, Dominator colorings of certain Cartesian products of paths and cycles, Graphs Combin. 33 (2017) 73–83.

[20] Q. Chen, Dominator colorings of Cartesian product of graphs, Util. Math. 109 (2018) 155–172.

[21] L. Chen, H. Jiang, Z. Shao et M. Ivanovic, Dominator and total dominator colorings in vague graphs, Engineering and Applied Science Letters. (2019).

[22] E.J. Cockayne et S. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, Networks. Networks, 7(3), 247-261. (1977).

[23] E. Cockayne, S. Hedetniemi et S. Hedetniemi, Dominating partitions of graphs, tech. rep., 1979. Unpublished manuscript.

[24] E. J. Cockayne, S. E. Goodman et S. T. Hedetniemi, A linear algorithm for the domination number of a tree. Inform. Process. Lett. 4 :41-44, 1975.

[25] C. F. Dejaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs. Petrograde, (1862).

[26] A. K. Dewdney, Fast Turing reductions between problems in NP, Tech. Rep. 71, Dept. of Computer Science, University of West Ontario, 1981.

[27] G. A. Dirac, Note on the coloring of graphs, Math. Z.54 : 347-353, 1951.

[28] G. A. Dirac, Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J.London,Math. Soc. 27 : 8592, 1952.

[29] D. M. Fletcher II, Realizable triples in dominator colorings. PhD Thesis, (2007).

[30] M. Farber and J. M. Keil, Domination in permutation graphs, J. Algorithms, pp. 6 :309-321, 1985.

[31] G.H. Fricke, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi et A.A. McRae et C. K. Wallis et M. S. Jacobson et H. W. Martin et W. D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards : A briev survey" Graph Theory, Combinatorics and Applications : Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995), 507-528.

[32] M.R. Garey et D.S. Johnson, Computers and Intractibility : A guide to the Theory of NP-completeness, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[33] R. Gera, S. Horton et C. Rasmussen, Dominator colorings and safe clique partition, Congressus Numerantium, 181, (2006), 19-32.

[34] R. Gera, On dominator colorings in graphs, Graph Theory Notes of New York, (LII), (2007), 25-30.

[35] R. Gera, On the dominator colorings in bipartite graphs, Information Technology : New Generations, (2007), 947-952.

[36] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters, Discrete Mathematics 86, (1990), 257-277.

[37] M.A. Henning, Total dominator colorings and total domination in graphs, Graphs and Combinatorics, 31(4), 953-974.

[38] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker (Eds.), Inc., New York, (1998).

[39] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et M.A. Henning, Topics in domination in graphs. Volume 64.

[40] J. Jacob, R. Laskar et W. Goddard. The upper dominator partition number of some simple graphs, Congr. Numerantium, 182, (2006), 65-77.

[41] R. Jahir hussain et K. Fathima, On fuzzy dominator coloring in fuzzy graphs, Applied Mathematical Sciences, 9(23), 1131-1137.

[42] R. Jahir hussain et K.Fathima, Fuzzy dominator chromatic number of bipartite, middle and subdivision fuzzy graph, International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems, 5(1), 99-106.

[43] T.R. Jensen et B. Toft, Graph Coloring Problems. John Wiley and Sons, New York, 1994.

[44] R. Kalaivani et D.Vijayalakshmi, A note on dominator chromatic number of line graph and jump graph of some graphs, Applied Mathematics. 2019.

[45] MG. Karunambigai, S. Prithivi et A. Sathishkumar, Dominator coloring of paths, International Journal of Applied Engineering Research, 11(1), 2016.

[46] K. Kavitha et N.G. David, Dominator chromatic number of middle and total graphs, International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 49– No.20, July 2012.

[47] K. Kavitha et N.G. David, Dominator coloring of central graphs, International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 51– No.12, August 2012.

[48] K. Kavitha et N. David, Dominator coloring on star and double star graph families, International Journal of Computer Applications 48, 3(2012).

[49] K. Kavitha et N.G. David, On strong dominator coloring of of product of graphs, International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 101 No. 5 2015, 605-613.

[50] A.P. Kazemi, Totat dominator chromatic number of a graph, Transactions on Combinatorics 4(2), 57-68.

[51] A.P. Kazemi, Total dominator coloring in product graphs, Util. Math, 94, 329-345.

[52] A.P. Kazemi, Total dominator chromatic number and mycieleskian graphs, arXiv preprint arXiv :1307.7706 (2013).

[53] Michael Cary. Dominator Colorings of Digraphs, Open J. Discret. Appl. Math. 2020, 3(2), 50-67 ; doi :10.30538/psrp-odam2020.0036

[54] AR. Lazuardi et EY. Kurniawati, The total dominator coloring of dense, octahedral and queen's graphs. In Journal of Physics : Conference Series (Vol. 1832, No. 1, p. 012017). IOP Publishing. (2021).

[55] A.P. Movarraei et S.Arumugam, Dominator coloring of generalized petersen graphs, Springer International Publishing AG 2017 S. Arumugam et al. (Eds.) : ICTCSDM 2016, LNCS 10398, pp. 144–151, 2017. DOI : 10.1007/978-3-319-64419-6 19

[56] R. Muthuraj et A. Sasireka, Fuzzy dominator coloring and fuzzy chromatic number on Cartesian product of simple fuzzy graph, Advances in Theoretical and Applied Mathematics. (2016)

[57] T. Manjula et R. Rajeswari, Dominator coloring of prism graph, Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015.

[58] T. Manjula et R. Rajeswari, Dominator coloring of quadrilateral snake, Triangle Snake Graph and Barbell Graph, Second International Conference On Science Technology Engineering and Management (ICONSTEM). (2016)

[59] T. Manjula et R. Rajeswari, Dominator coloring of some graphs, International Journal of Pure and Applied Mathematics. (2018)

[60] T. Manjula et R. Rajeswari, Dominator coloring of m-Splitting graph and m-Shadow graph of path graph, International Journal of Pure and Applied Mathematics. (2018)

[61] T. Manjula et R. Rajeswari, Dominator coloring of Hajós and Trampoline graph, International Conference on Mathematical Sciences (ICMS 2020).

[62] KG. Mirajkar et YB Priyanka, The dominator coloring on some class of graphs, Aryabhatta Journal of Mathematics and Informatics.(2017).

[63] A.P. Ore, Theory of graphs, Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I., (1962).

[64] B. Panda et A.Pandey, On the dominator coloring in proper interval graphs and block graphs, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 7, 4 (2015).

[65] P.K. Paulraja et Raja Chandrasekar, Dominator colorings of products of graphs, In : Arumugam S., Bagga J., Beineke L., Panda B. (eds) Theoretical Computer

Science and Discrete Mathematics. ICTCSDM 2016. Lecture Notes Comp. Sci. 10398, pp.242–250, Springer, Cham, 2017.

[66] D.Seinsche, On a property of the class of n-colorable graphs, J. Combin. Theory (B), 16(2) :191–193, 1974.

[67] K.S.P. Sowndarya et YL Naidu, Dominator and total dominator coloring on square chessboard, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 15(4), 499-504. (2019).

[68] A.Uma Maheswari et J.Bala samuvel, Power dominator chromatic number for some special graphs, Int. J. Innov. Technol. Explor. Eng, 8(12), 3957-3960. (2019).

[69] A.Uma Maheswari, Power dominator coloring for various graphs, Journal of the Maharaja Sayajirao University of Baroda ISSN : 0025-0422. (2020).

[70] K.Vaidya et S. shukla, Dominator coloring of some degree splitting graphs, International Journal of Mathematics and Scientific Computing, 5(2), 103-105. (2016).

[71] K. Vaidya et S. shukla, Dominator coloring of some wheel related graphs, Int. J. Math. Sci. Comput. (2016).

[72] D.B. West, Introduction to Graph Theory, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 17, (2000).