REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE YAHIA FARES - MEDEA

FACULTE DES SCIENCES

Département Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'études

Présenté pour l'obtention du Diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Applications

Intitulé du mémoire

Inégalités, Moyennes et extremas

Proposé et dirigé par :

Mr. Hamza Abdelhalim Younes

Préparé et présenté par :

Mr. Bouaied Younes

Année Universitaire 2 0 1 9 - 2 0 2 0

Table des matières

Table des matières **i**

Remerciements **iii**

Dédicaces **iv**

Introduction **1**

1 Inégalités et Analyse **2**

1.1 Rappels 2

1.2 Fonctions convexes 5

1.3 Inégalité de Young 10

1.4 Inégalité de Hölder 10

1.5 Inégalité Minkowski 12

1.6 Inégalité de Jensen 13

1.7 Inégalité d'Hermite -Hadamard 14

2 Les inégalités de moyennes et applications **16**

2.1 Moyenne arithmétique -géométrique- harmonique 16

2.2 Applications en géométrie plane et solide 18

2.3 Quelques applications algébriques 20

2.4 Quelques applications en trigonométrie 22

2.5 Applications au calcul d'extrémas 23

3 Les inégalités trigonométriques et hyperbolique **26**

3.1 Inégalités trigonométriques et hyperbolique 26

3.2 Inégalité de Price 27

3.3 Inégalités similaires à l'inégalité Price 30

4 Inégalités et triangles **33**

4.1 Inégalité triangulaire 33

4.2 Inégalités et hauteurs d'un triangle 34

4.3 Inégalités et médianes d'un triangle 36

4.4 Les inégalités et les bissectrices d'un triangle 39

4.5 Le théorème de Steiner-Lehmus 42

4.6 Symétries et inégalités 42

4.6.1 Un triangle inscrit avec un périmètre minimum 44

4.6.2 Hauteurs et triangle orthique 44

4.6.3 Symétrisation de Steiner 46

4.6.4 Un autre chemin minimal 47

Conclusion **49**

Bibliographie **50**

Remerciements

La réalisation de ce mémoire n'a été possible que grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance. En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant pour tout. Je remercie infiniment mon encadreur Mr « Hamza Abdelhalim Younes » qui a proposé le thème de ce mémoire, pour sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée. j'ai beaucop bénéficier des discussions avec lui,et de ses conseils. Je tiens ensuite à remercier mes parents pour le soutien inconditionnel dont ils ont fait preuve depuis le début be mon projet. Merci pour le soutien financier, moral, psychologique et matériel. Si je suis ici aujourd'hui, c'est grâce à vous ! Je remercie tous les professeurs de la faculté. Je remercie mes amis et camarades de promotion pour ces deux années passées ensemble, aussi bien dans les meilleurs moments que dans les moments difficiles.

Dédicaces

Spécialement à mon père à qui je dois énormément, qui a cru en moi, qui est la lumière de ma vie et l'espoir de mon existence, et qui m'a donné les moyens d'aller aussi loin. A ma mère qui a éclairée mon chemin et qui m'a encouragé et soutenue toute au long de mes études. Elle est la fleur et le charme de ma vie, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, mon bonheur. A à mon unique frère Mohamed et à mes soeurs Aicha et Souad et A tous mes familles. J'adresse ma reconnaissance, ma gratitude à mon professeur encadrant Mr. Hamza Abdelhalim Younes de m'avoir fait bénéficier de ses compétences, ses qualités humaines et de sa disponibilité pour la réalisation de ce mémoire Pour finir j'adresse mes dédicaces à mes très chers amis.

Introduction

Ce mémoire de master est un bouquet de résultats sur les inégalités les plus répandus dans le cursus universitaire. Il n'est pas exhaustif. Son intérêt est double, il est pédagogique dans le sens où il permet de faire une synthèse qui permet de voir comment des inégalités simples permettent d'assurer la continuité de fonctions ou l'existence d'objets mathématiques, ceci d'une part, d'autre part il renforce la compréhension de concepts mathématiques fondamentaux simples utiles aussi bien en pratique qu'en théorie, tels que les fonctions convexes, l'existence de norme dans certains espaces vectoriels très usagers, et la recherche d'extremas de façon intuitive. Le premier chapitre traite des inégalités les plus répandues en analyse, telles que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young, celles de Hölder et Minkowski et autres. L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure la continuité du produit scalaire, et de norme Euclidienne, celle de Minkowski l'existence d'une infinité de normes dans les espaces L^p avec $p \geqslant 1$. L'inégalité de Jensen permet d'avoir une preuve assez simple sue les inégalités arithmético-géométriques. Le second chapitre traite des inégalités arithmético-géométriques $MA - MG$, et de leurs applications dans la recherche de bornes et d'extrêmes aussi bien en géométrie qu'en analyse. Dans le troisième chapitre nous avons étudier certaines inégalités trigonométriques et hyperboliques, notamment l'inégalité de Thomas E.Price découverte en 2002, lors de l'essai de calcul du produit des longueurs de cordes définis par la distribution de manière équidistante de points sur une ellipse. Le chapitre quatre traite de certaines inégalités liants périmètre et surface de triangles à leurs segments particuliers (hauteurs, médianes, bissectrices), et de leurs applications à l'existence de triangles sous certaines données, et à la recherche de certains extremas.

Chapitre 1

Inégalités et Analyse

1.1 Rappels

Espace métrique. Soit X un ensemble. Une distance est une application

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ vérifiant pour tout } x, y \text{ et } z \in X$$

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Si d est distance sur X on dit que (X, d) est un espace métrique.

Espace normé. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit normé l'orsqu'il est muni d'une normé c-à-d d'une application.

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifient :

- $\forall x \in E \qquad N(x) = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- $\forall (x, y) \in E^2 \qquad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Produit scalaire. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $< ., . >$

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant les propriétés suivantes :}$$

- elle est bilinéaire : pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$< x + \lambda y, z > = < x, z > + \lambda < x, y >$$
$$< x, \lambda y + z > = \lambda < x, y > + < x, z >$$

— Elle est symétrique [•] pour tout $(x, y) \in E \times E$, $< x, y >=< y, x >$

— Elle est définie positive[•] $\forall x \in E$ $< x, x >\geqslant 0$.

Soit H un espace vectoriel réel ou complexe. On pose

$$\| x \|= \sqrt{< x, x >}$$

On verra par la suiste que c'est bien une norme.

Espace euclidien. Une espace euclidien est une espace vectoriel réel de dimension fini muni d'une forme bilinéaire, symétrique et définie positive on la note .

$$(x, y) \longrightarrow (x/y) \text{ ou (x,y) et note l'appelle produit scolaire .}$$

Espace $\mathbf{L}^p, \mathbf{L}^\infty$. Soit Ω un ouverte de $\mathbb{R}^n$

$\mathtt{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable \quad tq \quad \| f \|_p \leqslant \infty\}$

$\mathtt{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad mesurable \quad tq \quad \| f \|_\infty \leqslant \infty\}.$

sachant que :

$\| f \|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

$\| f \|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : |f(x)| \leqslant \alpha \quad p.p\}.$

Remarque 1.1.1. *On verra que théorème 1.5.2, l'inégalité de Minkowski assurera que ce sont bien des normes.*

Inégalité(s) de Cauchy-Schwarz

Proposition 1.1.1. *(**Inégalité de Cauchy Schwarz**). Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $< ., . >$ Alors pour tous $x, y \in E$.*

$$| < x, y > | \leqslant \| x \| \| y \| .$$

Démonstration. Si $\| x \|= 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon $\| x \|> 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leqslant \| tx + y \|^2 = \| x \|^2 t^2 + 2Re < x, y > t + \| y \|^2 .$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être $\leqslant 0$:

$$(2Re < x, y >)^2 - 4 \| x \|^2 \| y \|^2 \leqslant 0,$$

d'où

$$\| x \| \| y \| \geqslant |Re < x, y > | \geqslant Re < x, y > .$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $< x, y >= \alpha| < x, y > |$ d'où $\bar{\alpha} < x, y >= | < x, y > |$ et

$$\| x \| \| y \| = \| x \| \| \alpha y \| \geqslant Re < x, \alpha y > = Re(\bar{\alpha} < x, y >) \ = Re| < x, y > | = | < x, y > |.$$

□

Corollaire 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $< ., . >$ Alors $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ définit une norme.*

Démonstration. Il ne nous reste plus qu'à vérifient l'inégalité triangulaire. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2Re < x, y > + \| y \|^2 &\leqslant \| x \|^2 + 2| < x, y > | + \| y \|^2 \\ &\leqslant \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\ &= (\| x \| + \| y \|)^2 . \end{aligned}$$

Il en résulte que le produit scalaire est une application continue. Rappelons qu'une application bilinéaire $f : E \times F \longrightarrow G$, est continue lorsqu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout x dans E et tout y dans F on a : $\| f(x, y) \| \leqslant M \| x \| \| y \|$

□

Théorème 1.1.1. *Soit $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ des nombres réel arbitraires l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que :*

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous obtenons également pour les séries de carrés sommables l'inégalité suivante :

$$|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour les fonctions de carrés intégrables $f, g \in [a, b]$:

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Démonstration. De la forme integrale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$P(\lambda) = \int_a^b |\lambda f + g|^2.$$

Donc

$$P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b |f|^2 + 2\lambda \int_a^b |fg| + \int_a^b |g|^2.$$

P est un polynôme λ de degré 2, toujours positif, donc ne s'annule jamais. D'ou' $\Delta \leqslant 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0 \implies 4\int_a^b |fg|^2 - 4\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2 \leqslant 0$$

Finalement, on a le résultat :

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe lorsque, pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Exemple 1.2.1. *L'application $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*
En effet, pour tous x, y de I et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a équivalences :

$$\begin{aligned}
[\lambda x + (1-\lambda)y]^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 &\iff \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \\
&\leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \\
&\iff \lambda(1-\lambda)\left[-x^2 + 2xy - y^2\right] \leqslant 0 \\
&\iff -\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

ce qui est vrai .
2) Une fonction convexe sur un intervalle I est aussi convexe sur toute partie de I qui est un intervalle.

Lemme 1.2.1. *Si f vérifie la condition suivante pour $p = 2$, alors elle la vérifie pour tout entier $p \geqslant 2$:*

$$\forall x_1 .....x_p \in I \quad f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_p}{p}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_p)}{p}.$$

Démonstration. Le « principe de récurrence alternatif » suivant démontre ce lemme.

Si la condition est vraie pour p alors elle l'est pour $2p$ car,

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2p}}{2p}\right) = f\left(\frac{\dfrac{x_1+\cdots+x_p}{p}+\dfrac{x_{p+1}+\cdots+x_{2p}}{p}}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{f\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_p}{p}\right)+f\left(\dfrac{x_{p+1}+\cdots+x_{2p}}{p}\right)}{2}$$

$$\leqslant \frac{\dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_p)}{p}}{2}+\frac{\dfrac{f(x_{p+1})+\cdots+f(x_{2p})}{p}}{2}$$

$$= \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2p})}{2p}.$$

Si elle l'est pour $p+1$ alors elle l'est pour p car en posant

$$x_{p+1} = \frac{x_1+\cdots+x_p}{p}.$$

on obtient

$$f(x_{p+1}) = f\left(\frac{px_{p+1}+x_{p+1}}{p+1}\right) = f\left(\frac{x_1+...+x_p+x_{p+1}}{p+1}\right)$$
$$\leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_p)+f(x_{p+1})}{p+1},$$

alors

$$f(x_{p+1}) \leqslant \frac{1}{p+1}\left(f(x_1)+...+f(x_p)+f(x_{p+1})\right),$$

termine ta démonstration. □

• **Caractérisation par la fonction pente** :

Proposition 1.2.1. *Soit f une fonction définie sur intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, f est convexe sur I si seulement si .*

$$\forall x_0 \in I \quad f_{x_0} : I\backslash\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

est croissante sur $I\backslash\{x_0\}$, f_{x_0} est appelée fonction pente en x_0.
f est strictement convexe sur I si et seulement si la fonction pente en tout x_0 de I est strictement croissante sur I.

Démonstration. Supposons que pour tout x_0 de I, la fonction f_{x_0} est croissante sur $I\backslash\{x_0\}$. Soit$(x_1, x_2) \in I^2$ tq $x_1 < x_2$ et $\lambda \in]0, 1[$ on a. Donc :

$$x_1 < (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 < x_2$$

la fonction f_{x_1} est croissante sur $I\backslash\{x_1\}$ Donc
$f_{x_1}((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant f_{x_1}(x_2)$ cette inégalité, s'écrit explicitement.

$$\frac{f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)}{((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ou encore

$$\frac{f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

puis

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1) \leqslant \lambda(f(x_2) - f(x_1)),$$

en finalement

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Cette inégalité reste claire quand $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $x_1 = x_2$ et on a donc montré que f est convexe. Enfin, si pour tout x_0 de I, la fonction f_{x_0} est strictement croissante sur $I\backslash\{x_0\}$, on remplace ci-dessus les inégalités larges par des inégalités strictes et on obtient le fait que f est strictement convexe sur I.
Supposons f convexe sur I. Soit $x_0 \in I$. On supposera dans ce qui suit que x_0 n'est pas une borne de I, la démonstration s'adaptant facilement dans le cas contraire. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$.
Trois cas de figure se présentent :
1er cas. Supposons $x_0 < x_1 < x_2$.
Soit $\lambda = \dfrac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$. λ est un réel de $]0, 1[$, tel que $x_1 = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_2$. Puisque f est convexe sur I,

$$f(x_1) = f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}f(x_2),$$

puis

$$f(x_1) - f(x_0) \leqslant \frac{-(x_1 - x_0)}{x_2 - x_0}f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}f(x_2) = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}(f(x_2) - f(x_0))$$

et donc

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

après division des deux membres de l'inégalité par $x_1 - x_0 > 0$.

2ème cas. Supposons $x_1 < x_2 < x_0$

Soit $\lambda = \dfrac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1}$. λ est un réel de $]0, 1[$, tel que $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_0$. Puisque f est convexe sur I,

$$f(x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_0) = \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0),$$

puis

$$f(x_2) - f(x_0) \leqslant \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} f(x_0) = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0)),$$

et donc encore

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

après division des deux membres de l'inégalité par $x_2 - x_0 < 0$.

3ème cas. Supposons $x_1 < x_0 < x_2$. D'après les deux premiers cas,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f_{x_0}(x_1) = f_{x_1}(x_0) \leqslant f_{x_1}(x_2) = f_{x_2}(x_1) \leqslant f_{x_2}(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Ceci montre que la fonction pente en x_0 est croissante sur $I \backslash \{x_0\}$. D'autre part, si f est strictement convexe sur I, on remplace toutes les inégalités larges précédentes par des inégalités strictes et on obtient le fait que la fonction pente en x_0 est strictement croissante sur $I \backslash \{x_0\}$. □

• **Inégalité des pentes** :

Proposition 1.2.2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x < z < y)$ trois points de I. Alors on a la inégalité.*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

et par conséquent

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

réciproquement ,si l'une des trois inégalités est vérifiée pour tous $x < z < y$ des I alors f est convexe.

Démonstration. Pour tous $x, y, z \in I$ tel que $x < z < y$ chacune de ces trois inégalités se réécrit

$$f(z) \leqslant \frac{y - z}{y - x} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y),$$

elle sont donc équivalentes

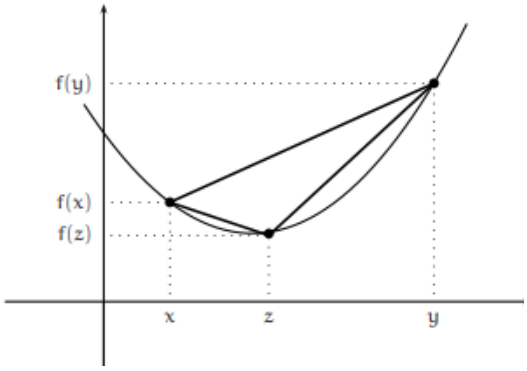


FIGURE 1.1 –

- $z = tx + (1-t)y \iff t = \dfrac{y-z}{y-x} \iff 1-t = \dfrac{z-x}{y-x}$
- $tx + (1-t)y$ est strictement compris entre x et y si et seulement si $t \in]0,1[$, par conséquent l'une des trois inégalité est vérifiée tous $x, y, z \in I$ tel que .

  $x < z < y$ si et seulement si pour tout $x < y$ dans I et tout $t \in]0,1[$

  $f\left(tx + (1-t)y\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, c'est-à-dire si f est convexe . □

• **Inégalité de convexité** :

Proposition 1.2.3. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de I et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de nombres réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. On a :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. Le résultat est trivial si $n = 1$ et résulte de la définition d'une fonction convexe si $n = 2$. Supposons l'inégalité vraie pour $n - 1 \geqslant 2$ On peut toujours supposer $\lambda_n \neq 1$et écrire :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_n)\sum_{i-1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i + \lambda_n x_n\right) \\ &\leqslant (1-\lambda_n) f\left(\sum_{i-1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) + \lambda_n f(x_n) \\ &\leqslant (1-\lambda_n) \sum_{i-1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i) + \lambda_n f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.1. *Soit f une fonction convexe définie sur intervalle I de $\mathbb{R}$, alors : pour tout $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, on a :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n}.$$

Exemple 1.2.2. *L'inégalité de la convexité 1.2.3 appliquée à la fonction exponentielle en prenant $x_i = \ln t_i$ donne :*

$$\prod_{i=1}^{n} t_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i.$$

Et en particulier, $(t_1 \cdots t_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{t_1 + \cdots + t_n}{n}$.

1.3 Inégalité de Young

Théorème 1.3.1. *Soit $a, b \geqslant 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués Alors :*
$a.b \leqslant \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.

Démonstration. Si a=0 ou b=0 , c'est facile donc on peut suppose a,b >0
la fonction e est convexe ce qui veut dire que pour tout x, y et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ Alors
$e(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda e(x) + (1-\lambda)e(y)$,
on a

$$a.b = e(\ln(a.b)) = e\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \leqslant \frac{1}{p}e\left(\ln a^p\right) + \frac{1}{q}e(\ln b^q)$$
$$= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

□

1.4 Inégalité de Hölder

Théorème 1.4.1. *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$, soit $p, q > 0$ des nombres réel tels que :* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$
Alors :

$$f, g \in L^1(\Omega),\ \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Démonstration. La conclusion est évidente si $p = \infty, q = 1$. Supposons donc que
$1 < p, q < \infty$, on a appliquer l'inégalité de Young.

$$\forall a, b \geqslant 0\ ,\ a.b \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

La démonstration de l'inégalité Young est évidente : la fonction log étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab.$$

Donc

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Il en résulta que $f, g \in L^1$ et que

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p} \parallel f \parallel_{L^p}^p + \frac{1}{q} \parallel g \parallel_{L^q}^q$$

Pour trouver l'inégalité recherchée, on remplace le couple (f, g) par $(\lambda f, \frac{1}{\lambda}g)$, ou $\lambda > 0$. On choisit $\lambda = \dfrac{\parallel g \parallel_q^{1/p}}{\parallel f \parallel_p^{1/q}}$. Alors

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \leqslant (\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q,$$

qui est bien l'inégalité annoncée. Si $p = 1$ ou $p = \infty$, on a $q = \infty$ ou $q = 1$ et l'inégalité est immédiate en choisissant un représentant de g tel que $\sup|g(x)| = \parallel g \parallel_\infty$: on a alors $\int_\Omega |f(x)g(x)| \leqslant \sup|g(x)| \int_\Omega |f(x)| = \parallel g \parallel_\infty \parallel f \parallel_{L^1}$.

□

Corollaire 1.4.1. *si $f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$.*

Théorème 1.4.2. ***(Inégalité de Hölder par somme)*** *Soit $p, q > 0$ des nombres réel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}^+$ on a*
$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leqslant (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \quad (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$
ce qu s'écrit à l'aide des signes somme.

$$\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

pour $p, q = 2$ (qui conviennent puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). On retrouve exactement inégalité Cauchy-Schwarz.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

1.5 Inégalité Minkowski

Théorème 1.5.1. *Soit $p \in \mathbb{R}_0^+$ et soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}^+$ si $p > 1$.*

$$((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \cdots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui s'écrit aussi ,à l'aide des signer somme,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

si $0 < p < 1$, on a au contraire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.5.2. ***(Inégalité de Minkowski par intégrale)***

Soit $\mathrm{g}^p, \mathrm{h}^p : \quad I \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrale .et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ a probabilités si $p > 1$ alors

$$\left[\int_\Omega |\mathrm{g} + \mathrm{h}|^p f dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_\Omega |\mathrm{g}|^p f dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |\mathrm{h}|^p f dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. (**les inégalités de Hölder et de Minkowski**) Soit p et q deux nombres réels strictement positifs vérifiant :
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de nombres réels strictement positifs.
Soit $u, v \in \mathbb{R}^+$ impliquent $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$ on (utilise exemple 1.2.2) on pose
$u = t_1, v = t_2, \quad \lambda_1 = \frac{1}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q}$, d'ou', pour tout $i \in [1, n]$.

$$\left[\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}\left[\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right],$$

en ajoutant ces n inégalités on obtient.

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} &\leqslant \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\end{aligned}$$

d'ou' l'inégalité de Hölder.

Pour l'inégalité de Minkowski, on part de $(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)^{p-1} a_i + (a_i + b_i)^{p-1} b_i$.

On applique l'inégalité de Hölder aux deux familles de produits $((a_i+b_i)^{p-1}a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $((a_i+b_i)^{p-1}b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Après addition et mise en facteur, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\left[(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}\right]$$

On remarque $(p-1)q=p$ d'ou' l'inégalité cherchée après division des deux membres par : $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}$ en n'oubliant pas que $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$. □

Remarque 1.5.1. *L'inégalité de Minkowski permet d'affirmer que les espaces L^p sont normés, et que $\mathbb{R}^n$ peut être normé d'une infinité de façon.*

1.6 Inégalité de Jensen

- ***Forme intégrale (inégalité de Jensen)***

Soient g *un fonction continue de* $[0,1]$ *dans* $]a,b[$ *avec* $(-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty)$ *et* f *une fonction convexe de* $]a,b[$ *dans* $\mathbb{R}$ *alors*

$$f\left(\int_a^b \mathrm{g}(x)dx\right)\leqslant\int_a^b f(\mathrm{g}(x))dx.\ [1]$$

- ***Interprétation probabilités de l'inégalité de Jensen***

Théorème 1.6.1. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle réel I et x une variable aléatoire à valeurs dans I dont l'espérance* $\mathrm{E}(f(x))$ *existe alors*

$$f(\mathrm{E}(x))\leqslant\mathrm{E}(f(x)).$$

Démonstration. On supposons que x est une variable aléatoire déscréte que prend des valeurs dans $x\in D$. $D=\{x_1,x_2,.....,x_n\}$ avec probabilités $P(x=x_i)=\lambda_i$ ou $\lambda_i>0$ avec $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ alors.

$$\mathrm{E}(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\lambda_i$$

l'attente d'une fonction $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(f(x))&=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\lambda_i\\&\geqslant f(\sum_{i=1}^{n}x_i\lambda_i)=f(\mathrm{E}(x)).\end{aligned}$$

□

1.7 Inégalité d'Hermite -Hadamard

Lemme 1.7.1. *Soit f une fonction intégrable sur I on a et $a, b \in I$ avec $a < b$ on a :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt \\ &= \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt.\end{aligned}$$

Démonstration. Voir [3]. □

Théorème 1.7.1. *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur l'intervalle I des nombres réels et a, b avec $a < b$; l'inégalité.*

$$f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} \ .$$

Démonstration. D'apres la définition convexe pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on a :

$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \ .$$

Soient $x, y \in I$ et $a, b \in I$;$a < b$ tel que $x = at + (1-t)b$ et $y = bt + (1-t)a$
on obtient dans l'inégalité au dessaus l'inégalité suivant pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}f(\frac{a+b}{2}) &= f\left(\frac{tb+(1-t)a+ta+(1-t)b}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{f(tb+(1-t)a)+f(ta+(1-t)b)}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[ft(b)+f(a)-tf(a)+tf(a)+f(b)-tf(b)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \\ &\leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Alors nous pouvons écrire :

$$f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{f(tb+(1-t)a+f(ta+(1-t)b)}{2} \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Nous intégrons l'inégalité sur [0,1] :

$$\int_0^1 f(\frac{a+b}{2})dt \leqslant \int_0^1 \frac{f(tb+(1-t)a+f(ta+(1-t)b)}{2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{f(a)+f(b)}{2}dt \ .$$

Nous obtenons :

$$f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \int_0^1 \frac{f(tb+(1-t)a+f(ta+(1-t)b)}{2}dt \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} \ .$$

A l'aide du Lemme 1.7.1 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(tb+(1-t)a+f(ta+(1-t)b)}{2}dt &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(tb+(1-t)a)+f(ta+(1-t)b)dt\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt+\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Les inégalités de moyennes et applications

2.1 Moyenne arithmétique -géométrique- harmonique

Définition 2.1.1. *Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un n-uplet de nombres réels strictement positifs on définit quatre moyennes (strictement positives) :*

1. ***moyenne arithmétique :*** $\mathcal{A}(x_1, ..., x_n) = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
2. ***moyenne géométrique :*** $\mathcal{G}(x_1, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$.
3. ***moyenne Harmonique :*** $\mathcal{H}(x_1, ..., x_n) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$.
4. ***moyenne quadratique :*** $\mathcal{Q}(x_1, ..., x_n) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$

On a la suite d'inégalités

$\min(x_1, ..., x_n) \leqslant \mathcal{H}(x_1, ..., x_n) \leqslant \mathcal{G}(x_1, ..., x_n) \leqslant \mathcal{A}(x_1, ..., x_n) \leqslant \mathcal{Q}(x_1, ..., x_n) \leqslant \max(x_1, ..., x_n)$.

Proposition 2.1.1. *(Comparaison entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique) Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ on a MG⩽MA c'est à dire :*

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{2.1}$$

Autrement dit la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

Démonstration. Voir exemple 1.2.2. □

Proposition 2.1.2. *(Comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne quadratique) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. On considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = x^p, \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall p \in \mathbb{N}^\star$$

alors

$$f''(x) = P(P-1)x^{P-2},$$

par conséquent f est convexe en appliquant le corollaire 1.2.1, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{n}.$$

Et en élevant les deux nombres à la puissance $\frac{1}{p}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Remarque 2.1.1. *Si l'on pose $p = 2$ dans la formule précédente, on obtient*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Le second membre représente la moyenne quadratique des x_i. Par conséquent, compte tenu Résultat la Démonstration de proposition 2.1.1, on peut dire que la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la moyenne géométrique et la moyenne quadratique. C'est-à-dire que :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Remarque 2.1.2. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique l'inégalité arithmétique-harmonique en effet. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres réels positifs non nuls on a :*

$$< (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n}) , \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) > \leqslant \| (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n}) \| \| \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \| .$$

Autrement dit :

$$n \leqslant \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Par élévation au carré on obtient :

$$n^2 \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}).$$

Et finalement :

$$\mathcal{H}(x_1, ..., x_n) \leqslant \mathcal{A}(x_1, ..., x_n).$$

Remarquons que si $x_1 = x_2 = ... = x_n$ alors toutes les inégalités deviennent des égalités, et particulièrement la moyenne arithmétique sera égale à la moyenne géométrique.

2.2 Applications en géométrie plane et solide

Formule de Héron. *C'est une formule qui permet de calculer l'aire S d'un triangle quelconque, dont les mesures des côtés sont a, b et c*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Où p représente le demi-périmètre du triangle

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Démonstration. Voir [10]. □

Formule de Brahmagupta. C'est une généralisation de Formule de Héron à l'aire d'une quadrilatère convexe inscrit dans un cercle et dont les côtés ont pour longueur a, b, c et d

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Où p est le demi-périmètre du quadrilatère

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Démonstration. Voir [10]. □

Exemple 2.2.1. *Montrer que la plus grande aire S obtenue pour un triangle ayant un coté donné $2a$ et un périmètre donné $2p$ se réalise pour un triangle isocèle :*
soit y et z les deux autre coté d'après la formule de Héron on a :

$$S = \sqrt{p(p-2a)(p-y)(p-z)}. \text{ (voir[6])}$$

Par l'inégalité MAG, on obtient :

$$\sqrt{(p-y)(p-z)} \leqslant \frac{(p-y)+(p-z)}{2} = \frac{2p-(y+z)}{2} = a.$$

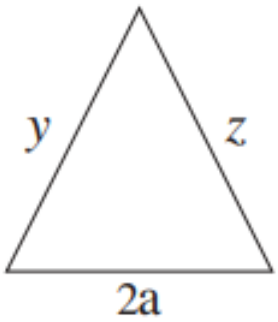


FIGURE 2.1 – La plus grande surface d'un triangle avec un périmètre donné et un coté donné

Donc,

$$S = \sqrt{p(p-2a)(p-y)(p-z)} = \left(\sqrt{(p-y)(p-z)}\right)\left(\sqrt{p(p-2a)}\right) \leqslant a\left(\sqrt{p(p-2a)}\right).$$

Puisque l'égalité en (MAG) n'est obtenue que si $a_1 = a_2 = ... = a_n$ l'aire maximale sera également obtenue lorsque $y = z$, c'est-à-dire
$S_{max} = a\sqrt{p(p-2a)}$.Cela prouve que l'aire maximale est obtenue pour un triangle isocèle.

Exemple 2.2.2. *Trouver le rayon d'un secteur angulaire ayant un périmètre donné et une aire maximale : désignons le rayon du secteur par x et la longueur d'arc du secteur par y*

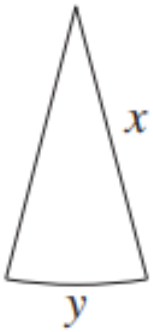


FIGURE 2.2 – La superficie maximale d'un secteur

Le périmètre donné du secteur est indiqué par l et sa superficie est indiquée par S
Alors, $l = 2x + y \implies y = l - 2x$.

En utilisant la relation «angle α du secteur $= y/x$», la surface du secteur devient $S = \frac{1}{2}\alpha x^2 = \frac{1}{2}xy$.

On remplace $l - 2x$ *par* y *pour obtenir.* $S = \frac{x(l-2x)}{2} = \frac{2x(l-2x)}{4}$.

En appliquant l'inégalité MAG *pour* $n = 2$, *nous obtenons*

$$\sqrt{4S} = \sqrt{2x(l-2x)} \leqslant \frac{2x + (l-2x)}{2} = \frac{l}{2}.$$

L'égalité sera valable lorsque $l - 2x = 2x$ *; en d'autres termes, la surface maximale du secteur est obtenue lorsque* $x = l/4$ *et elle est égale à* $l^2/16$.

Exemple 2.2.3. *Parmi tous les cylindres à incision axiale* $ABCD$ *à périmètre* $2p$, *trouvez-en un au volume maximal figure 2.3.*

On observe que

$4R + 2h = 2p$ *ou* $2R + h = p \implies \frac{R + R + h}{3} = \frac{p}{3}$.

Selon l'inégalité MAG *pour* $n = 3$, $\frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{R^2 h}$.

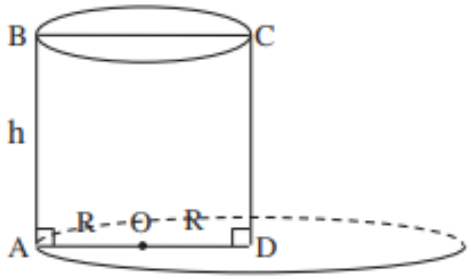


FIGURE 2.3 – Le volume maximal d'un cylindre.

Il en résulte que $V = \pi R^2 h \leqslant \frac{\pi p^3}{27}$ *, c'est-à-dire que le volume maximal du cylindre est* $V_{max} = \frac{\pi p^3}{27}$ *et cela est atteint pour* $R = h = \frac{p}{3}$.

2.3 Quelques applications algébriques

Exemple 2.3.1. *On recherche la valeur minimale de la suite* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, ...$

Nous allons prouver que cette suite est strictement croissante c-à-d. $a_{n+1} \geqslant a_n$ *pour tout* n *naturel. Nous avons :*

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)...\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.1 *Ici, nous avons* $n + 1$ *multiplicateur qui ne sont pas tous égaux* $\left(1 \neq 1 + \frac{1}{n}\right)$.

Donc l'inégalité $AM - GM$ est stricte :

$$a_n < \left(\frac{(1+\frac{1}{n})n+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

Ainsi, la valeur minimale de la séquence est $a_1 = 2$.
Notez que l'inégalité prouvée est généralement utilisée pour la preuve de l'existence du nombre e comme limite a de la séquence a_n où $\longrightarrow \infty$.

Exemple 2.3.2. *On recherche la valeur minimale de la fonction : $y = \dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$ où x est positif et a et b sont nombres réels positifs fixes.*
On observe que

$$y = \frac{(x+a)(x+b)}{x} = \frac{x^2+(a+b)x+ab}{x} = x + \frac{ab}{x} + a + b.$$

D'autre part, par l'inégalité MAG pour $n = 2$, nous avons

$$x + \frac{ab}{x} \geqslant 2\sqrt{x\frac{ab}{x}} = 2\sqrt{ab}.$$

Par conséquent

$$y = \frac{(x+a)(x+b)}{x} = x + \frac{ab}{x} + a + b \geqslant 2\sqrt{ab} + a + b = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.$$

L'égalité est obtenue pour $x = \dfrac{ab}{x} \implies x = \sqrt{ab}$.

Exemple 2.3.3. *On recherche la valeur maximale de la fonction $y = x^{2n}\left(a - x^{2n}\right)$ où x est réel, a est un nombre réel positive et n est un nombre entier positive.*
De toute évidence, le maximum se produit si l'expression $a - x^{2n}$ est positif, c'est-à-dire $|x| < \sqrt[2n]{a}$.
En utilisant l'inégalité MAG pour $n = 2$, le maximum de y est

$$y = x^{2n}\left(a - x^{2n}\right) \leqslant \left[\frac{x^{2n} + (a - x^{2n})}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Cela se produit lorsque $x^{2n} = a - x^{2n}$ ou si $|x| = \sqrt[2n]{\frac{a}{2}}$.

Exemple 2.3.4. *On recherche la valeur maximale de la fonction* $y = \dfrac{x}{ax^2+b}$ *et* $a, b > 0$.
Il est facile de montrer que la fonction obtient son maximum pour $x > 0$.
A partir de l'inégalité MAG pour $n = 2$, *on peut obtenir :*

$$\frac{ax^2+b}{2} \geqslant \sqrt{ax^2b} = x\sqrt{ab}.$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$, *nous avons :* $y = \dfrac{x}{ax^2+b} \leqslant \dfrac{x}{2x\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$.
L'égalité ne vaut que si $ax^2+b = 2x\sqrt{ab}$, *ou en d'autres termes* $x_{max} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$, *et le maximum de la fonction est* $y_{max} = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$.

2.4 Quelques applications en trigonométrie

Exemple 2.4.1. *On recherche la valeur minimale de la fonction* $y = \cos^{2n} x + \sin^{2n} x$ *dans l'intervalle* $[0 : \dfrac{\pi}{2}]$.
On pose $a = \sin^2 x$ *et* $b = \cos^2 x$.
Par identités trigonométriques, on sait que $a + b = 1$ *et donc* $\cos^2 x = 1 - a$.

$$y = \cos^{2n} x + \sin^{2n} x = b^n + a^n = (1-a)^n + a^n.$$

Par contre, par l'inégalité MAG pour $n = 2$ *nous avons*

$$a^n + b^n \geqslant 2\left(\sqrt{a(1-a)}\right)^n.$$

Donc,

$$a^n + (1-a)^n \geqslant 2\left(\sqrt{a(1-a)}\right)^n.$$

ou

$$\left(a^n - (1-a)^n\right)^2 \geqslant 0.$$

L'égalité n'est obtenue que lorsque $a = 1 - a$ *ou si* $a = \frac{1}{2} \implies \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Donc
$\cos^{2n} x + \sin^{2n} x \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Exemple 2.4.2. *Pour $a > 0$, $a \neq 1$ trouver les valeurs maximales de la fonction*

$$y = \sqrt{\cos^2 x + a \sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + a \cos^2 x}.$$

La quadrature de l'équation ci-dessus et en utilisant les identités trigonométriques, nous obtenons

$$y^2 = 1 + a + 2\sqrt{(\cos^2 x + a \sin^2 x)(\sin^2 x + a \cos^2 x)}.$$

Appliquant maintenant l'inégalité MAG pour $n = 2$ rendements

$$y^2 \leqslant 1 + a + \left(\cos^2 x + \sin^2 x + a \sin^2 x + a \cos^2 x\right) = 1 + a + 1 + a = 2(1 + a)$$

L'égalité se produit pour $\cos^2 x + a \sin^2 x = \sin^2 x + a \cos^2 x$.
Par conséquent $y_{max} = \sqrt{2(1+a)}$ *est obtenu pour* $x_{max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ *,où k est un nombre entier.*

2.5 Applications au calcul d'extrémas

Exemple 2.5.1. *Soit la largeur, la longueur et la hauteur du prisme rectangulaire droit respectivement x, y et z figure 2.4.*

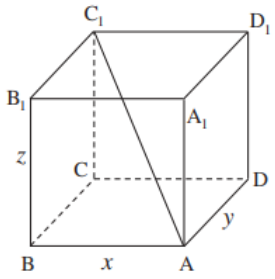


FIGURE 2.4 – La surface maximale d'un prisme.

La diagonale du cuboïde et ses arêtes satisfont la relation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (le théorème spatial de Pythagore). La valeur de surface S est : $S = 2(xy + xz + yz)$.

A partir de l'inégalité MAG pour $n = 2$, on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= \sqrt{x^2.y^2} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} \\ xz &= \sqrt{x^2.z^2} \leqslant \frac{x^2+z^2}{2} \\ yz &= \sqrt{y^2.z^2} \leqslant \frac{y^2+z^2}{2}. \end{aligned}$$

Et, par conséquent, en utilisant la formule de la surface et en ajoutant les inégalités susmentionnées, nous obtiendrons :

$$S = 2(xy + xz + yz) \leqslant 2\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{2} = 2a^2 = S_{max}.$$

Pour un cube, on a $x = y = z$ alors : $S \leqslant a^2 = S_{max}$.

Exemple 2.5.2. *Le triangle ABC avec un point intérieur O arbitraire est donné (voir figure 2.5).*

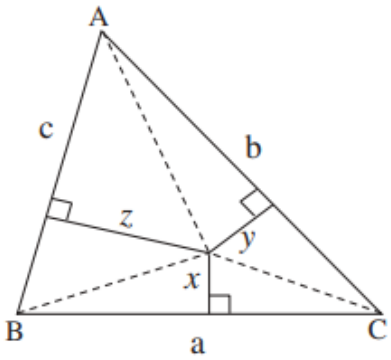


FIGURE 2.5 – La valeur minimale de l'expression $x^2 + y^2 + z^2$.

Soit x, y et z les distances du point O donné des côtés BC, CA et AB respectivement. On va calculer la valeur minimale de $x^2 + y^2 + z^2$.
L'aire du triangle ABC, basée sur les aires des triangles BOC, COA et AOB, est

$$S = \frac{1}{2}(BC)x + \frac{1}{2}(CA)y + \frac{1}{2}(AB)z = \frac{1}{2}(ax + by + cz).$$

A partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $n = 3$, on obtient

$$2S = ax + by + cz \leqslant \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Par conséquent, la valeur minimale pour $x^2 + y^2 + z^2$ et

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{4s^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Car si le triangle était un triangle équilatéral avec des côtés a, nous obtenons $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{4}a^2$.

Chapitre 3

Les inégalités trigonométriques et hyperbolique

3.1 Inégalités trigonométriques et hyperbolique

Dans ce chapitre, nous explorerons plusieurs inégalités trigonométriques. inclurons des inégalités avec des fonctions sinusoïdales et tangentes, des fonctions hyperboliques complexes. Les résultats sont très élégants, et leurs preuves nous donnent un excellent aperçu sur les propriétés des fonctions trigonométriques.

Lemme 3.1.1. *Supposons que n est un nombre entier positif et θ est un nombre réel. Alors,*

$$1 - \cos(n\theta) \leqslant n^2(1 - \cos\theta).$$

Démonstration. Voir [2][page : 13-14] □

Lemme 3.1.2. *Supposons que a et b sont des nombres réels positifs et n et k sont positifs entiers. Alors,*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \ \geqslant (n+1)a^{n/2}b^{n/2}$$

Démonstration. Soit $x = a/b > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^k b^n &= b^n \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= b^n(x^0 + x^1 + \cdots + x^n) \\
&= b^n(n+1)\left(\frac{x^0 + x^1 + \cdots + x^n}{n+1}\right) \\
&\geqslant b^n(n+1)\left(x^0 \cdot x^1 \cdot \ldots \cdot x^n\right)^{[1/(n+1)]} \\
&= b^n(n+1)\left(x^{0+1+\cdots+n}\right)^{[1/(n+1)]},
\end{aligned}$$

avec l'inégalité provenant de l'inégalité moyenne arithmétique-géométrique 2.1. Maintenant, en appliquant la formule pour la somme d'une suite arithmétique finie, nous avons que,

$$\begin{aligned} b^n(n+1)\left(x^{0+1+\cdots+n}\right)^{[1/(n+1)]} &= b^n(n+1)x^{[(n+1)(0+n)/2][1/(n+1)]} \\ &= b^n(n+1)x^{n/2} \\ &= b^n(n+1)\left(\frac{a}{b}\right)^{n/2} \\ &= (n+1)a^{n/2}b^{n/2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \geqslant (n+1)a^{n/2}b^{n/2}.$$

□

3.2 Inégalité de Price

Théorème 3.2.1. *Soient a, b, et θ des nombres réels avec a et b positifs et non égaux. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Alors,*

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(n\theta)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)} \leqslant \left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right)^2.$$

Théorème 3.2.2. (**L'inégalité du triangle**) *Pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.*

Lemme 3.2.1. *Supposons que z est un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$ et n est un nombre entier positif. Alors,*

$$\left|\frac{z^n - 1}{z - 1}\right| \leqslant \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}. \text{ (voir [2])}$$

Démonstration. En appliquant la loi somme d'une suite géométrique, nous avons.

$$\left|\frac{z^n - 1}{z - 1}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right|.$$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| &= |z^0 + z^1 + \cdots + z^{n-1}| \\ &\leqslant |z^0| + |z^1| + \cdots + |z^{n-1}| \end{aligned}$$

on utilisant l'inégalité triangulaire.

$$|z^0| + |z^1| + \cdots + |z^{n-1}| = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k| = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

Finalement

$$|\frac{z^n - 1}{z - 1}| \leqslant \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

□

Théorème 3.2.3. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul et supposons que n est un nombre entier positif. Alors,*

$$|\frac{\sinh(nz)}{\sinh z}| \leqslant \frac{\sinh(nx)}{\sinh x}.$$

Démonstration. Supposons que $z = x + iy$

$$|e^z| = |e^x.e^{iy}| = |e^x|.|\cos y + i \sin y| = e^x. \tag{3.1}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |\frac{\sinh(nz)}{\sinh z}| = |\frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}}| &= |\left(\frac{e^z \cdot e^{nz}}{e^z \cdot e^{nz}}\right)\left(\frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}}\right)| \\ &= |\frac{e^z(e^{2nz} - 1)}{e^{nz}(e^{2z} - 1)}| = |\frac{e^z}{e^{nz}}||\frac{e^{2nz} - 1}{e^{2z} - 1}| \\ &= \left(\frac{e^{-nx}}{e^{-x}}\right)|\frac{e^{2nz} - 1}{e^{2z} - 1}|, \end{aligned}$$

par lemme 3.2.1 et équation 3.1

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-nx}}{e^{-x}}\right)|\frac{e^{2nz} - 1}{e^{2z} - 1}| &\leqslant \frac{e^{-nx}}{e^{-x}}\left(\frac{|e^{2nz}| - 1}{|e^{2z}| - 1}\right) \\ &= \frac{e^{-nx}}{e^{-x}}\left(\frac{e^{2nx} - 1}{e^{2x} - 1}\right) \\ &= \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{\sinh(nx)}{\sinh x}. \end{aligned}$$

Donc,

$$|\frac{\sinh(nz)}{\sinh z}| \leqslant \frac{\sinh(nx)}{\sinh x}.$$

□

$$\begin{aligned}
|\sinh z|^2 &= (\sinh z)(\overline{\sinh z}) = (\sinh z)(\sinh \overline{z}) \\
&= \frac{(e^{z+\overline{z}} + e^{-(z+\overline{z})}) - (e^{z-\overline{z}} + e^{-(z-\overline{z})})}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^{2iy} + e^{-2iy})}{4} \\
&= \frac{\cosh(2x) - \cosh(2iy)}{2} \\
&= \frac{\cosh(2x) - \cos(2y)}{2}.
\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$|\cosh z|^2 = \frac{\cosh(2x) + \cos(2y)}{2}. \tag{3.2}$$

On va prouver l'inégalité de Price. Cela vient simplement de l'application du lemme 3.2.1

Démonstration. Donné par Katsuura-Obeid supposons que a, b et θ sont des nombres réels avec a et b positifs et non égaux. Aussi, soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. En mettant au carré les deux côtés de l'équation dans le lemme 3.2.1, nous obtenons que.

$$|\frac{z^n - 1}{z - 1}|^2 \leqslant \left(\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}\right)^2. \tag{3.3}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|z^n - 1|^2 &= (z^n - 1)(\overline{z^n - 1}) = (z^n - 1)(\overline{z^n} - 1) \\
&= |z^n|^2 - z^n - \overline{z^n} + 1 = |z^n|^2 - 2Re(z^n) + 1.
\end{aligned}$$

Maintenant, on pose $z = (b/a)e^{i\theta}$, et d'après équation 3.3, nous trouvons

$$\frac{|\frac{b^n}{a^n}e^{in\theta}|^2 - 2Re\left(\frac{b^n}{a^n}e^{in\theta}\right) + 1}{|\frac{b}{a}e^{i\theta}|^2 - 2Re\left(\frac{b}{a}e^{i\theta}\right) + 1} \leqslant \left(\frac{|\frac{b}{a}e^{i\theta}|^n - 1}{|\frac{b}{a}e^{i\theta}| - 1}\right)^2. \tag{3.4}$$

Mais,

$$\frac{|\frac{b^n}{a^n}e^{in\theta}|^2 - 2Re\left(\frac{b^n}{a^n}e^{in\theta}\right) + 1}{|\frac{b}{a}e^{i\theta}|^2 - 2Re\left(\frac{b}{a}e^{i\theta}\right) + 1} = \frac{\frac{b^{2n}}{a^{2n}} - 2\frac{b^n}{a^n}\cos(n\theta) + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b}{a}\cos\theta + 1}$$
$$= \frac{\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(n\theta)}{a^{2n}}}{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{a^2}}$$

Donc, par équation 3.4,

$$\frac{\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(n\theta)}{a^{2n}}}{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{a^2}} \leqslant \left(\frac{|\frac{b}{a}e^{i\theta}|^n - 1}{|\frac{b}{a}e^{i\theta}| - 1}\right)^2.$$

Donc,

$$\left(\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(n\theta)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\right) \leqslant \left(\frac{|\frac{b}{a}e^{i\theta}|^n - 1}{|\frac{b}{a}e^{i\theta}| - 1}\right)^2 \left(\frac{a^2}{a^{2n}}\right) = \left(\frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b}{a} - 1}\right)^2 \left(\frac{a^2}{a^{2n}}\right)$$
$$= \left(\frac{\frac{b^n - a^n}{a^n}}{\frac{b-a}{a}}\right)^2 \left(\frac{a^2}{a^{2n}}\right) = \left(\frac{b^n - a^n}{b-a}\right)^2 \left(\frac{a^{2n}}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{a^{2n}}\right)$$
$$= \left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right)^2,$$

Par conséquent, l'inégalité de Price n'est qu'un cas particulier du lemme 3.2.1 □

3.3 Inégalités similaires à l'inégalité Price

Théorème 3.3.1. *Soient a, b et θ des nombres réels avec a, b positive et non égaux. Aussi, soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Alors,*

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(n\theta)}{a^{2n} + b^{2n} + 2a^n b^n \cos(n\theta)} \leqslant \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\right).$$

Démonstration. Supposons que. $c = a/b$ et $z = x + iy = (\ln c + i\theta)/2$.

En appliquant inégalité 3.2, on obtient que

$$\begin{aligned}
|\cosh(nz)|^2 &= \frac{\cosh(n\ln c)+\cos(n\theta)}{2} \\
&= \frac{e^{n\ln c}+e^{-n\ln c}}{4}+\frac{\cos(n\theta)}{2} \\
&= \frac{c^n+c^{-n}+2\cos(n\theta)}{4} \\
&= \frac{(a^n/b^n)+(b^n/a^n)+2\cos(n\theta)}{4} \\
&= \frac{a^{2n}+b^{2n}+2a^nb^n\cos(n\theta)}{4a^nb^n}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$|\tanh(nz)|^2 = \frac{a^{2n}+b^{2n}-2a^nb^n\cos(n\theta)}{a^{2n}+b^{2n}+2a^nb^n\cos(n\theta)}, \tag{3.5}$$

et,

$$|\coth(nz)|^2 = \frac{a^{2n}+b^{2n}+2a^nb^n\cos(n\theta)}{a^{2n}+b^{2n}-2a^nb^n\cos(n\theta)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\coth x|^2 &= \frac{a^2+b^2+2ab\cos(0)}{a^2+b^2-2ab\cos(0)} \\
&= \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} \\
&= \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.
\end{aligned}$$

Par le théorème 1.4.3 dans [2]
on a,

$$\left|\frac{\tanh(nz)}{\tanh z}\right| \leqslant |\coth x|.$$

tq, $z = x+iy$ avec $x \neq k\pi$. Pour tout entier k et n est un entier positif, alors

$$\left|\frac{\tanh(nz)}{\tanh z}\right|^2 \leqslant |\coth x|^2.$$

Donc,

$$|\tanh(nz)|^2 \leqslant |\coth x|^2 |\tanh z|^2. \tag{3.6}$$

Par conséquent, inégalité 3.5, et inégalité 3.6 nous donnent l'inégalité suivante, très similaire à Price's :

$$\frac{a^{2n}+b^{2n}-2a^nb^n\cos(n\theta)}{a^{2n}+b^{2n}+2a^nb^n\cos(n\theta)} \leqslant \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \left(\frac{a^2+b^2-2ab\cos\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\right).$$

□

Chapitre 4

Inégalités et triangles

4.1 Inégalité triangulaire

Définition 4.1.1. *Si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle alors on a :*

$$a < b + c,\ b < a + c,\ \text{ et } c < a + b$$

Application. *Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle alors on a :*

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Démonstration. On a d'une part par application directe de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)} \\ &< \frac{2a}{a+(b+c)} + \frac{2b}{b+(c+a)} + \frac{2c}{c+(a+b)} \\ &= \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.\end{aligned}$$

Pour l'autre inégalité on peut supposer que $a + b + c = 1$. Et on cherche le minimum de $\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{b}{1-b} + \dfrac{c}{1-c}$.
Pour cela considérons la fonctions $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Cette fonction est convexe sur l'intervalle $]0, 1[$, donc

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c),$$

où

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

d'où

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}.$$

L'égalité à lieu si les côtés sont égaux.

Pour cette inégalité on peut aussi utiliser l'inégalité $MH - MA$:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}.$$

Il en résulte que,

$$[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right] \geqslant 9.$$

Après distribution on arrive à :

$$2\frac{a+b+c}{b+c} + 2\frac{a+b+c}{c+a} + 2\frac{a+b+c}{a+b} \geqslant 9,$$

Il s'en suit que

$$2 + \frac{2a}{b+c} + 2 + \frac{2b}{c+a} + 2 + \frac{2c}{a+b} \geqslant 9.$$

D'où le résultat.

□

4.2 Inégalités et hauteurs d'un triangle

Les conditions sur les hauteurs h_a, h_b et h_c dans un triangle ABC avec les côtés a, b et c peuvent être trouvées en considérant l'aire S du triangle. Puisque

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

on a

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2S}a, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{1}{2S}b, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2S}c, \tag{4.1}$$

donc un triangle avec les côtés $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ doit exister et être similaire au triangle d'origine, avec $1/2S$ le facteur de similitude.

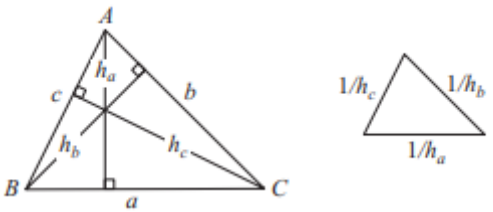


FIGURE 4.1 –

Nous devons donc avoir $\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, $\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}$ *et* $\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$ *et formule 4.1 implique que si* $a \leqslant b \leqslant c$, *alors* $h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$.

Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ***et*** $\mathbf{h_a}$

Il est clair que $b \geqslant h_a > 0$ *est nécessaire. Pour montrer qu'il est également sufficient, nous donnons un Dessin* BC *avec longueur* $|BC| = a$ *et* CD *perpendiculaire à* BC *avec* $|CD| = h_a$, *comme le montre la figure 4.2. Tracez une ligne parallèle à* BC *en* D, *et localiser le sommet* A *à une distance de* b *de* C. *Ainsi* $b \geqslant h_a > 0$ *est nécessaire et sufficient pour l'existence d'un triangle étant donné* a, b, *et* h_a.

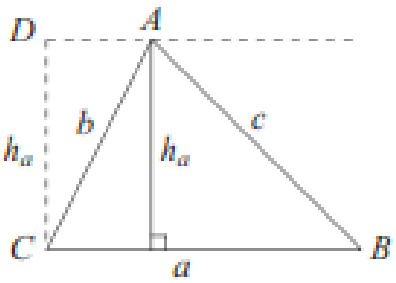


FIGURE 4.2 –

Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{h_b}$ ***et*** $\mathbf{h_c}$

Construire $|BC| = a$ *et un demi-cercle avec* BC *comme diamètre. Localisez ensuite les pieds des hauteurs* h_b *et* h_c *sur le demi-cercle et tracez des lignes de* B *et* C *à travers ces points pour localiser le sommet* A. *(Si une hauteurs, disons* h_b, *est égale à* a, *puis tracez* AC *perpendiculairement à* BC *en* C.*) Voir figure 4.3. Par conséquent, une condition sufficient (et nécessaire) à l'existence du triangle est* $h_b \leqslant a$, *et* $h_c \leqslant a$ *avec au moins une inégalité stricte. Si les hauteurs* h_b *et* h_c *se coupent en dehors du demi-cercle, alors le triangle* ABC *est obtus.*

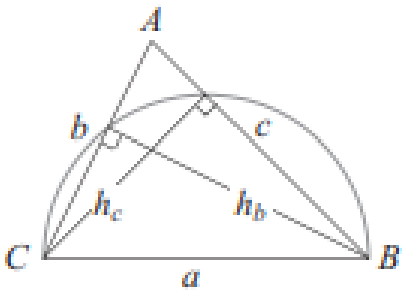


FIGURE 4.3 –

Plus d'inégalités pour les trois hauteurs

Nous trouvons maintenant des bornes supérieures pour la somme $h_a + h_b + h_c$ et le produit $h_a h_b h_c$ des trois hauteurs d'un triangle avec les côtés a, b, c en termes de demi-périmètre ρ et d'aire S [Bottema et al., 1968 ; Santalo, 2004].

Lemme 4.2.1. *Soit ρ est une demi-périmètre de triangle ABC on a :*

$$h_a \leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)},\ \ h_b \leqslant \sqrt{\rho(\rho-b)},\ \textit{et}\ h_c \leqslant \sqrt{\rho(\rho-c)}$$

Démonstration. En utilisant la formule de Héron pour l'aire S du triangle, nous avons

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} = \sqrt{\rho(\rho-a)}\frac{\sqrt{(\rho-b)(\rho-c)}}{a/2}$$

Par l'inégalité $MA - MG$, sur $\rho - b$ et $\rho - c$ on obtient :

$$\sqrt{(\rho-b)(\rho-c)} \leqslant \frac{\rho-b+\rho-c}{2} = \frac{a}{2}.$$

Donc

$$h_a \leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)}.$$

□

Théorème 4.2.1. *$h_a + h_b + h_c \leqslant \sqrt{3}\rho$, et $h_a h_b h_c \leqslant \rho S$.*

Démonstration. Utilisation de l'inégalité moyenne quadratique moyenne arithmétique pour les trois nombres, $\sqrt{\rho(\rho-a)}$, $\sqrt{\rho(\rho-b)}$, et $\sqrt{\rho(\rho-c)}$, alors

$$h_a+h_b+h_c \leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)}+\sqrt{\rho(\rho-b)}+\sqrt{\rho(\rho-c)} \leqslant 3\sqrt{\frac{\rho(\rho-a)+\rho(\rho-b)+\rho(\rho-c)}{3}} = \sqrt{3}\rho,$$

et

$$h_a h_b h_c \leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)}\sqrt{\rho(\rho-b)}\sqrt{\rho(\rho-c)} = \rho S.$$

□

4.3 Inégalités et médianes d'un triangle

Dans le triangle ABC, les médianes sont les segments joignant chaque sommet au milieu du côté opposé et ont des longueurs m_a, m_b et m_c. Les trois médianes se coupent en un point, le centroïde ou le centre de gravité du triangle, et la distance le long d'une médiane d'un sommet au centroïde est égale deux tiers de la longueur de cette médiane. Voir figure 4.4

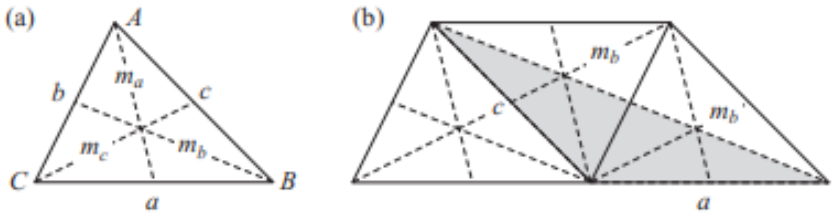


FIGURE 4.4 –

En utilisant la loi des cosinus
(loi des cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}, b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$), il est facile de montrer que la longueur d'une médiane est fonction des côtés a, b et c c.à.d, $m_a^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4$ (voir[4]), et de même pour m_b^2 et m_c^2 par conséquent
$m_a^2 - m_b^2 = 3(b^2 - a^2)/4$, , donc si les côtés satisfont, $a \leqslant b \leqslant c$, puis $m_a \geqslant m_b \geqslant m_c$. Aussi, $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)/4$.

Théorème 4.3.1. *Soit ρ est une demi-périmètre de triangle ABC on a :*

$$3\rho/2 \leqslant m_a + m_b + m_c \leqslant 2\rho.$$

Démonstration. Après avoir disposé trois copies d'un triangle dans un trapèze sur la figure 4.4, nous appliquons l'inégalité du triangle au triangle ombré pour conclure $2m_b \leqslant a + c$. De même, $2m_a \leqslant b + c$ et $2m_c \leqslant a + b$.

$$m_a + m_b + m_c \leqslant a + b + c = 2\rho. \tag{4.2}$$

Pour trouver la borne inférieure sur $m_a + m_b + m_c$ nous organisons six copies du triangle dans l'hexagone de la figure 4.5, et notons que le triangle ombré a des côtés $2m_a, 2m_b$ et $2m_c$, et médianes $3a/2, 3b/2$, et $3c/2$. L'application de Théorème 4.3.1 à ce triangle donne $3(a + b + c)/2 \leqslant 2(m_a + m_b + m_c)$ qui complète la preuve.

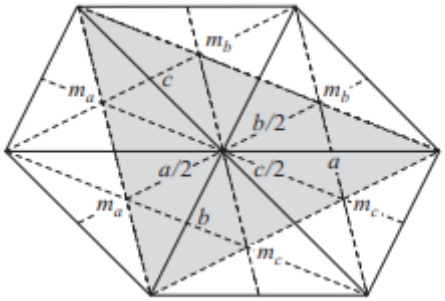


FIGURE 4.5 –

l'aire S d'un triangle est liée à son demi-périmètre ρ par l'inégalité $S \leqslant \sqrt{3}\rho^2/9$. Si S désigne l'aire du triangle ABC sur la figure 4.4, alors l'aire du triangle ombré sur la figure 4.5 est $3S$, son demi-périmètre est $m_a + m_b + m_c$, et donc

$$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27}(m_a + m_b + m_c)^2.$$

De plus, l'aire d'un triangle avec les côtés m_a, m_b et m_c (appelé triangle médian d'ABC) est $3S/4$. □

• **Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{m_a}, \mathbf{m_b}$ et $\mathbf{m_c}$**

Si nous pouvons construire un triangle avec les côtés $2m_a, 2m_b$ et $2m_c$ alors nous pouvons construire le triangle ombré de la figure 4.5 et trouver son centre de gravité. Alors a, b, c sont les longueurs des segments entre le centroïde et les sommets. Par conséquent, nous avons besoin des inégalités.

$$m_a < m_b + m_c, \qquad m_b < m_c + m_a, \text{ et} \qquad m_c < m_a + m_b.$$

• **Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ et $\mathbf{m_a}$**

Si nous pouvons construire un triangle avec les côtés $a/2, b$, et m_a, alors nous pouvons construire le triangle gris de la figure 4.6 et doubler sa base pour obtenir le triangle souhaité. Nous avons donc besoin des trois inégalités.

$$m_a < b + a/2, \qquad a/2 < b + m_a \qquad \text{et} \qquad b < m_a + a/2.$$

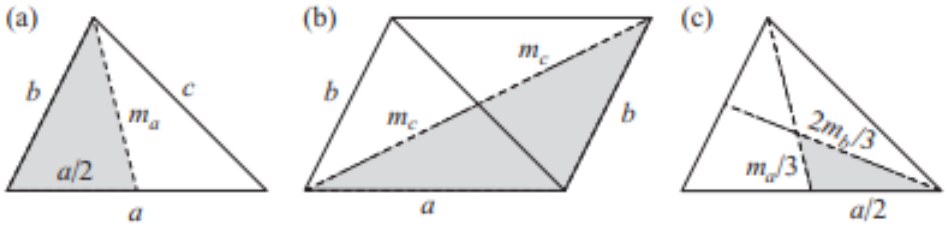


FIGURE 4.6 –

• **Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ et $\mathbf{m_c}$**

Si nous pouvons construire un triangle avec les côtés a, b et $2m_c$, nous pouvons construire le triangle gris de la figure 4.6(b), compléter le parallélogramme et dessiner son autre diagonale pour obtenir le triangle souhaité. Nous avons donc besoin des trois inégalités

$2m_c < a + b, \qquad a < b + 2m_c \qquad$ et $\qquad b < a + 2m_c.$

• **Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{m_a}$ et $\mathbf{m_b}$**

Comme précédemment, si nous pouvons construire un triangle avec des côtés $a/2, m_a/3$, et $2m_b/3$ nous pouvons construire le triangle gris de la figure 4.6(c) et étendre les côtés de

longueur $a/2$ et $m_a/3$ pour localiser le deux autres sommets du triangle. Nous avons donc besoin des trois inégalités

$$\frac{a}{2} < \frac{m_a}{3} + \frac{2m_b}{3}, \qquad \frac{m_a}{3} < \frac{a}{2} + \frac{2m_b}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{2m_b}{3} < \frac{a}{2} + \frac{m_a}{3}.$$

4.4 Les inégalités et les bissectrices d'un triangle

Soient w_a, w_b et w_c les longueurs des segments de droite qui coupent les angles du triangle ABC et se terminent sur les côtés opposés. Nous trouvons maintenant des bornes sur $w_a + w_b + w_c$ et $w_a w_b w_c$ en termes de demi-périmètre ρ et de l'aire S.

Théorème 4.4.1. *$w_a + w_b + w_c \leqslant \sqrt{3}\rho$ et $w_a w_b w_c \leqslant \rho S$.*

Démonstration. Nous commençons par trouver des expressions explicites pour w_a, w_b et w_c en termes de a, b et c. Dans le triangle ABC (voir figure 4.7), nous étendons d'abord BC d'une longueur b jusqu'au point F et dessinons AF. La bissectrice $[CD)$ de longueur w_c de $\hat{C}$ coupe le cercle circonscrit en E . Parce que le triangle ACF est isocèle et que $A\hat{F}C$ est égale à la moitié de $\hat{C}$, alors AF est parallèle à CE.

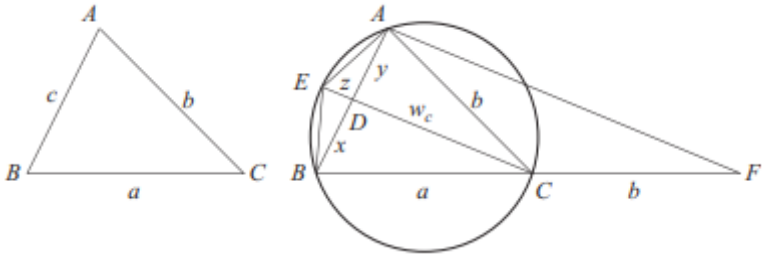


FIGURE 4.7 –

Puisque le triangle DBC est similaire au triangle ABF, nous avons $x/c = a/(a+b)$, donc $x = ac/(a+b)$ et $y = c - x = bc/(a+b)$. Étant donné que le triangle DAC est similaire au triangle BEC car $D\hat{A}C = B\hat{E}C$ et $A\hat{C}D = E\hat{C}B$, nous avons $.(z + w_c)/b = a/w_c$, et donc $w_c^2 + zw_c = ab$.

Mais le théorème des cordes qui se croisent affirme que lorsque deux accords se croisent à l'intérieur d'un cercle, les produits de leurs segments sont égaux. Appliqué à AB et CE, cela donne $zw_c = xy = abc^2/(a+b)^2$, et donc

$$w_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\rho(\rho - c)}.$$

Mais $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$ par l'inégalité $MA - MG$, donc $w_c \leqslant \sqrt{\rho(\rho - c)}$.

De même $w_a \leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)}$ et $w_b \leqslant \sqrt{\rho(\rho-b)}$, donc par la racine moyenne arithmétique moyenne quadratique que nous avons,

$$\begin{aligned} w_a + w_b + w_c &\leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)} + \sqrt{\rho(\rho-b)} + \sqrt{\rho(\rho-c)} \\ &\leqslant 3\sqrt{\frac{\rho(\rho-a)+\rho(\rho-b)+\rho(\rho-c)}{3}} = \sqrt{3}\rho, \end{aligned}$$

et

$$w_a w_b w_c \leqslant \sqrt{\rho(\rho-a)}\sqrt{\rho(\rho-b)}\sqrt{\rho(\rho-c)} = \rho S$$

les bornes dans le théorème. □

Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{h_a}$ et $\mathbf{w_a}$

D'après la figure 4.8, la seule inégalité requise est $w_a \geqslant h_a$.

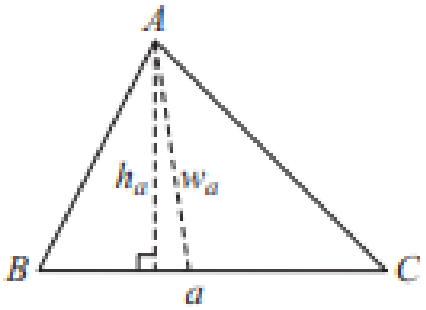


FIGURE 4.8 –

Contrairement aux exemples d'existence antérieurs, nous n'avons pas de procédure de construction dans ce cas. La même figure fournit l'inégalité requise pour l'existence d'un triangle donné a, h_a, et m_a est $m_a \geqslant h_a$.

Existence d'un triangle étant donnés $\mathbf{a}, \mathbf{h_b}$ et $\mathbf{w_c}$

Construire $[BC] = a$ et un demi-cercle avec BC comme diamètre.
Localisez ensuite D à une distance h_b de B, comme illustré à la figure 4.9. Couper en deux $B\hat{C}D$ et localisez E à une distance w_c de C sur la bissectrice. Dessinez CD et BE et prolongez-les pour qu'elle se rencontre en A. Cette construction est possible si et seulement si

$$h_a \leqslant a \qquad \text{et} \qquad w_c < \left[h_b^2 + \left(a + \sqrt{a^2 - h_b^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

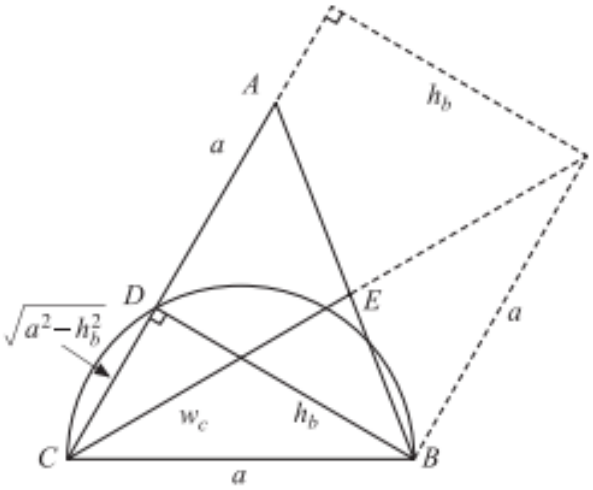


FIGURE 4.9 –

Ordre des côtés et des bissectrices d'angle

Plus tôt dans ce chapitre, nous avons montré que si $a \leqslant b \leqslant c$ alors $h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$ et $m_a \geqslant m_b \geqslant m_c$. Nous montrons maintenant que les mêmes inégalités pour les bissectrices des angles : $w_a \geqslant w_b \geqslant w_c$.

Si $0 < a \leqslant b \leqslant c$, alors $c-a \geqslant c-b$ et $2\sqrt{ac} \leqslant 2\sqrt{bc}$, et donc $(c-a)/(2\sqrt{ac}) \geqslant (c-b)/(2\sqrt{bc})$. Soit $\alpha = \arctan(c-a)/(2\sqrt{ac})$ et $\beta = \arctan(c-b)/(2\sqrt{bc})$, comme l'illustre la figure 4.10. puisque $\beta \leqslant \alpha$ et alors $\cos\beta = 2\sqrt{bc}/(b+c) \geqslant 2\sqrt{ac}/(a+c) = \cos\alpha$.

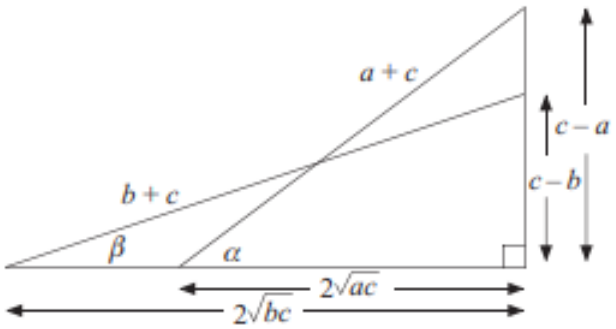


FIGURE 4.10 –

Mais $a \leqslant b$ implique $\sqrt{\rho(\rho-a)} \geqslant \sqrt{\rho(\rho-b)}$, et ainsi

$$w_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\rho(\rho-a)} \geqslant \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{\rho(\rho-b)} = w_b.$$

La preuve que $w_b \geqslant w_c$. La preuve peut être modifiée pour montrer que $0 < a < b$ implique $w_a \geqslant w_b$.

4.5 Le théorème de Steiner-Lehmus

C'est un exercice facile de prouver que, dans un triangle isocèle, les bissectrices d'angles égaux sont égales. L'inverse n'est pas si facile à prouver et est devenu connu sous le nom de théorème de Steiner-Lehmus. En 1840, C.L. Lehmus demanda au géomètre suisse Jakob Steiner, une preuve purement géométrique, les preuves algébriques étant relativement simples une fois que l'on connaît les longueurs des bissectrices angulaires en termes de côtés. H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer [Coxeter et Greitzer, 1967] écrivent que ce résultat est celui qui semble "exercer une fascination particulière sur quiconque tombe sur". Depuis 1840, des centaines de preuves différentes ont été publiées, et elles continuent d'apparaître avec une certaine régularité. Notre preuve est basée sur le résultat de la section précédente concernant l'ordre des longueurs des bissectrices angulaires.

Théorème 4.5.1. *Si deux bissectrices d'un triangle sont égales, alors le triangle est isocèle.*

Démonstration. Nous devons montrer que $w_a = w_b$ implique $a = b$. Si $a < b$, alors $w_a > w_b$, et si $a > b$, $w_a < w_b$. Donc $w_a = w_b$ implique $a = b$.

□

4.6 Symétries et inégalités

Une isométrie dans le plan est une transformation qui préserve les distances. Les isométries primaires sont les symétries, les rotations et les translations. La préservation de la distance implique que les isométries préservent les angles et les aires, donc les formes sont invariantes. Comme nous le verrons dans ce chapitre, l'utilisation des isométries est une méthode puissante pour prouver les inégalités géométriques. Les symétries seront utilisées à trois fins différentes, que nous illustrons dans les trois exemples suivants.

Exemple 4.6.1. ***Chemins minimaux***

Étant donné deux points A et B du même côté d'une ligne L, quel point C dans L fait $|AC| + |CB|$ un minimum ?

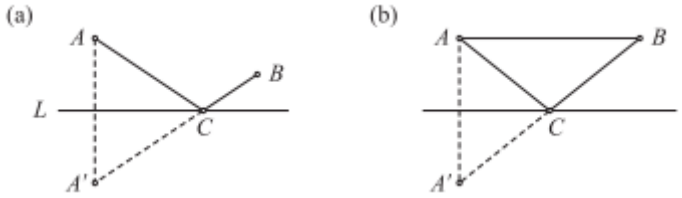


FIGURE 4.11 –

En utilisant L comme miroir, le point A se reflète sur le point A', donc le segment de ligne $A'B$ est le chemin de longueur minimale joignant A' et B, et donc le chemin de longueur minimale de A à B contenant un point de L est $AC \cup CB$, comme illustré sur la figure 4.11(a). Lorsque le segment AB est parallèle à L, comme sur la figure 4.11(b), nous avons le résultat suivants.

Théorème 4.6.1. *Parmi tous les triangles avec une base et une aire spécifiées, le triangle isocèle a un périmètre minimum.*

Exemple 4.6.2. *cordes divisant une figure en deux parties de surface et de périmètre égaux.*

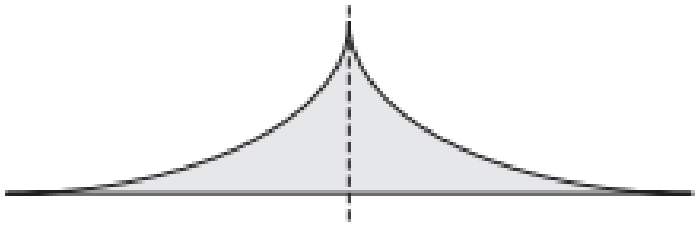


FIGURE 4.12 –

De toute évidence, chaque fois que nous pouvons localiser un axe de symétrie dans une figure, il détermine une partition égale de l'aire et du périmètre. Cette observation, quoique élémentaire, est étonnamment utile.

Exemple 4.6.3. *Génération de nouvelles figures ayant même périmètre mais une plus grande surface.*

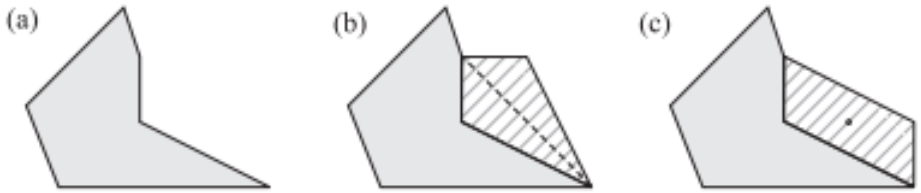


FIGURE 4.13 –

Par exemple, lorsqu'il s'agit de figures concaves comme la région de la figure 4.13(a), le reflet d'une partie de la frontière sur une ligne (figure 4.13b) ou un point (figure 4.13c) donne une nouvelle région avec le même périmètre mais une plus grande surface. Le processus peut être répété pour produire une figure convexe avec le même périmètre que l'original.

4.6.1 Un triangle inscrit avec un périmètre minimum

Soit P un point fixe à l'intérieur d'un angle aigu, et soit Q et R des points sur les côtés de l'angle. Pour quel emplacement de Q et R le périmètre du triangle PQR est-il au minimum ? Pour répondre à cette question, nous réfléchissons d'abord à P de chaque côté de l'angle pour localiser les points P' et P'', comme le montre la figure 4.14(a). Tirage P' P'', croisant les côtés de l'angle en R et Q. Nous prétendons que le triangle PQR a un périmètre minimum parmi tous les triangles avec des sommets en P et sur les côtés de l'angle donné.

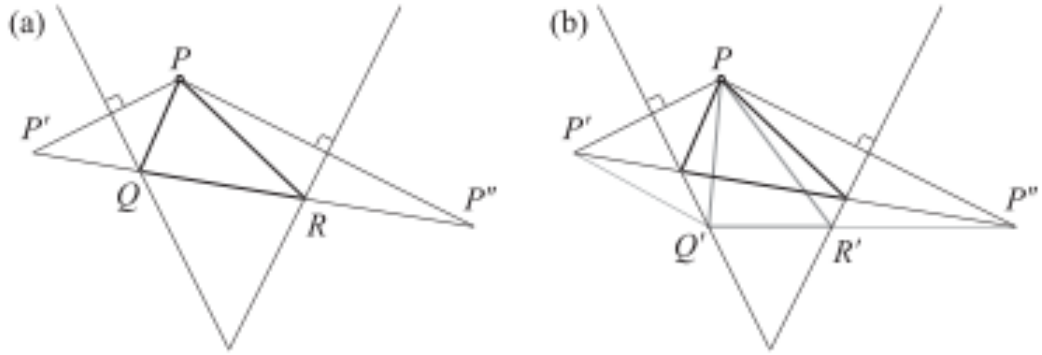


FIGURE 4.14 –

Pour établir la minimalité du périmètre du triangle PQR, supposons que Q' et R' soient deux autres points sur les côtés de l'angle, et considérons le triangle $PQ'R'$, comme dans la figure 4.14b. alors

$$\begin{aligned} |PQ| + |QR| + |RP| &= |P'Q| + |QR| + |RP''| = |P'P''| \\ &\leqslant |P'Q'| + |Q'R'| + |R'P''| \\ &= |PQ'| + |Q'R'| + |R'P| \end{aligned}$$

et par conséquent le triangle PQR a un périmètre minimum.

4.6.2 Hauteurs et triangle orthique

En 1775, Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi (1715–1797) pose le problème suivant : étant donné un triangle aigu, trouver le triangle inscrit de périmètre minimum. Par triangle inscrit dans un triangle ABC donné, nous entendons un triangle PQR tel que chaque sommet P, Q, R se trouve sur un côté différent de ABC. Fagnano a résolu le problème en utilisant le calcul, mais nous présentons une solution sans calcul utilisant la symétrie due à Lipot Fejér (1880–1959) [$Kazarinoff, 1961$]. La solution implique le triangle orthique - le triangle PQR

dont les sommets sont le les pieds des hauteurs de chacun des sommets de ABC, comme illustré sur la figure 4.15a.

Théorème 4.6.2. *Dans tout triangle aigu, le triangle inscrit avec un périmètre minimum est le triangle orthique.*

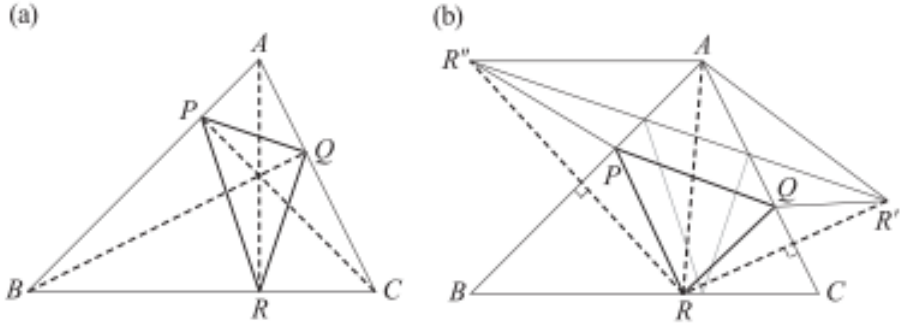


FIGURE 4.15 –

Démonstration. Pour trouver les emplacements des points P, Q, R qui minimisent le périmètre de PQR, refléter le point R dans les côtés AB et AC (comme dans la section précédente) pour localiser les points $R^{'}$ et $R^{''}$. Ainsi, le périmètre de PQR est égal à $|R^{''}P| + |PQ| + |QR^{'}|$.

. Le périmètre de PQR sera minimum chaque fois que $R^{''}$, P, Q et $R^{'}$ se trouvent tous sur la même ligne. Donc, pour tout R donné, cela donne emplacement optimal pour P et Q. Pour trouver l'emplacement optimal pour R, notez que le triangle $R^{''}AR^{'}$ est isocèle, avec $|AR^{''}| = |AR^{'}| = |AR|$ et l'angle du sommet $R^{''}\hat{A}R' = 2B\hat{A}C$.

Puisque la taille de l'angle au sommet du triangle $R^{''}AR^{'}$ n'est pas dépend de R, la base $R^{''}R^{'}$ (le périmètre de PQR) sera la plus courte lorsque les pieds sont les plus courtes et les pieds sont les plus courtes lorsque $|AR|$ est un minimum, c'est-à-dire lorsque AR est perpendiculaire à BC.

□

4.6.3 Symétrisation de Steiner

Lemme 4.6.1. *Parmi tous les trapèzes ayant les mêmes bases et hauteurs parallèles, le trapèze isocèle a un périmètre minimum.*

Démonstration. Les trapèzes des figures 4.16a et 4.16b ont les mêmes bases parallèles et hauteurs, et donc la même aire ; cependant, le trapèze isocèle de la figure 4.16b a un axe de symétrie vertical, la médiatrice des bases parallèles.

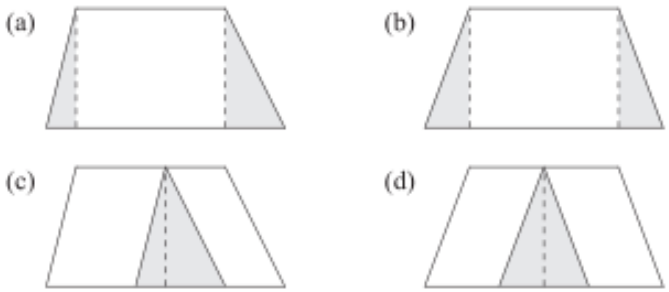


FIGURE 4.16 –

Pour conclure que le trapèze de la figure 4.16(b), possède le plus petit périmètre, il suffit de montrer que la somme des longueurs des côtés non parallèles est plus petite. Réorganiser les parties des trapèzes et appliquer le théorème 4.6.1 aux triangles gris des figures 4.16 et 4.16(d) accomplit cela. L'une des preuves ingénieuses de Steiner de l'inégalité isopérimétrique utilise le théorème suivant [Kazarinoff, 1961]. □

Théorème 4.6.3. *Parmi toutes les figures convexes avec un périmètre donné, alors dans n'importe quelle direction donnée une avec une aire maximale possède un axe de symétrie.*

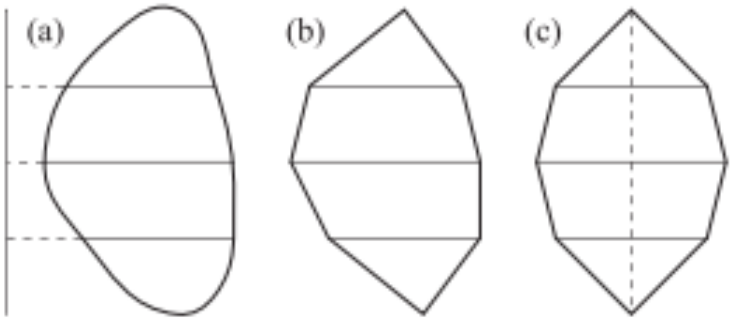


FIGURE 4.17 –

Démonstration. Coupons la figure convexe en fines bandes parallèles avec des bases perpendiculaires à la direction donnée (figure 4.17a). Maintenant, nous pouvons construire une nouvelle figure convexe composée de trapèzes (figure 4.17b). En appliquant le lemme 4.6.1, nous pouvons construire une autre figure composée de trapèzes isocèles ayant les mêmes bases et la même aire, mais un périmètre plus petit, et alignés de manière à ce qu'ils aient une médiatrice commune (figure 4.17c). Si nous découpons la figure d'origine en bandes de plus en plus fines, les polygones approximatifs ont des zones et des périmètres proches de ceux de la figure d'origine.

□

4.6.4 Un autre chemin minimal

Dans l'exemple 4.6.1, nous avons vu comment trouver le chemin minimal d'un point à un autre en touchant une ligne donnée ne passant pas par ces deux points. Comme nous l'avons noté, la ligne donnée agit comme un miroir et le chemin comme un rayon de lumière. Ce principe d'éclairage est un outil clé pour trouver des chemins minimaux soumis à des contraintes données. Un problème géométrique classique est le suivant : étant donnés deux points A et B à l'intérieur d'un angle déterminé par deux lignes r et s, quelle est la chemin minimal du point A à r à s au point B ?

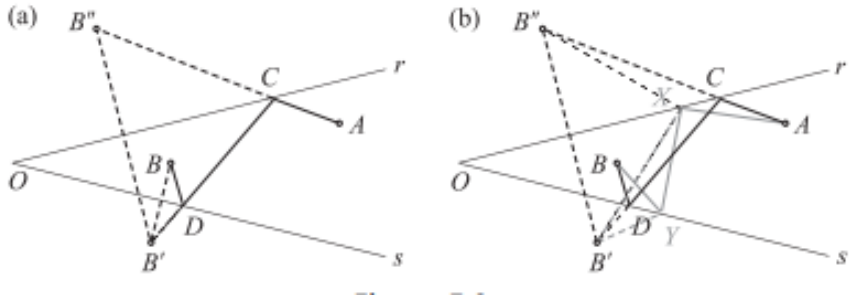


FIGURE 4.18 –

La clé est de l'utilisation des symétries. Comme illustré sur la figure 4.18a. Soit $B^{'}$ le symétrique de B par rapport a s et $B^{''}$ le symétrique de B par rapport à r, $AB^{''}$ coupe r en C et $CB^{'}$ coupe s en D. Alors C et D sont les points requis respectivement sur r et s, donc $ACDB$ est le chemin de A à r à s à B de longueur minimale, et cette longueur est

$$|AC| + |CD| + |DB| = |AC| + |CD| + |DB^{'}| = |AC| + |CB^{'}| = |AB^{''}|.$$

Pour vérifier la minimalité de la longueur de ce chemin, supposons que X et Y soient deux autres points sur r et s, respectivement, comme illustré sur la figure 4.18b. alors

$$|AB''| \leqslant |AX| + |XB''| = |AX| + |XB'| \leqslant |AX| + |XY| + |YB'|$$
$$= |AX| + |XY| + |YB|$$

On pourrait également demander le chemin le plus court de A à s à r à B, comme le montre la figure 4.19. Il est construit de manière analogue et peut être supérieur, égal ou plus court que le chemin de la figure 4.18.

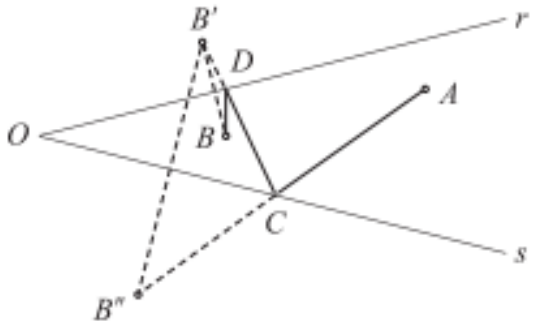


FIGURE 4.19 –

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudiés un certain nombre d'inégalités qui ne représentent quasiment pas grand-chose comparé à l'immensité du domaine et de l'activité des mathématiciens qui ne cessent pour l'intérêt du sujet. Nous avons étudié l'inégalité de Price qui par le biais du lemme qui affirme que si le module de z est différent de 1, et n un entier positif alors :

$$|\frac{z^n-1}{z-1}| \leqslant \frac{|z|^n-1}{|z|-1}$$

mais nous avons toujours besoin de savoir si l'inégalité suivante est vraie pour m positif :

$$|\frac{z^n-z^m}{z-1}| \leqslant \frac{|z|^n-|z|^n}{|z|-1}$$

et beaucoup de question reste ouverte sur la manière de généraliser de façon correcte l'inégalité de Thomas Price. Nous avons la puissance de l'inégalité AM-GM dans le calcul d'extremas en analyse d'une manière générale et dans l'établissement de relation entre périmètres, surface et segments particuliers d'une triangle.

Il est apparu clairement pour nous comment les inégalités des fonctions convexes permettent de prouver de manière simple et élégante les inégalités fondamentales de l'analyse fonctionnelle. Comme pour toute branche de recherche, les nouvelles découvertes suscitent de nouvelles questions, ce qui permet de garder la recherche toujours soif de chercheurs.

Bibliographie

[1] Haim BREZIS, ANALYSE FONCTIONNELLE ,paris 1983 , ISBN 2-225-77198-7.

[2] Amy Dreiling, Mathematical Inequalities ,San Jose State University ,August 2013.

[3] CHABANE FARID, Quelques variantes fractionnaires de l'inégalité de Hermite Hadamard , Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana, Année Universitaire : 2017/2018.

[4] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen, When Less is More Visualizing Basic Inequalities, Published and Distributed by The Mathematical Association of America (2009), Print ISBN 978-0-88385-342-9, Electronic ISBN 978-1-61444-202-8.

[5] Andrejs Treibergs, Inequalities of Analysis, University of Utah, Fall 2014.

[6] Victor Oxman, Moshe Stupel, Jay M. Jahangiri, Finding extrema without resorting to calculus, ISSN : (Print) 2331-186X (Online) Journal homepage : https ://www.tandfonline.com/loi/oaed20, (2018).

[7] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson, OLD AND NEW ON THE HERMITE-HADAMARD INEQUALITY, University of Craiova, Department of Mathematics, Department of Mathematics, Lulea University of Technology, Street A. I. Cuza 13, Craiova 200585, Romania, SE 971 87 Lulea, Sweden, email : larserik@sm.luth.se, 2003/2004.

[8] Jean-Baptiste, HIRIART-URRUTY (JBHU), Topologie et Analyse hilbertienne : Une Introduction Pragmatique, Université Paul Sabatier de Toulouse.

[9] F. Boyer, Fonctions convexes, Aix-Marseille Université - 2013/2014 .

[10] Titu Andreescu Zuming Feng, 103 Trigonometry Problems : From the Training of the USA IMO Team, Berlin 2005, ISBN 0-8176-4334-6.