**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Yahia Farès de Médéa**
**Département des Mathématiques et de l'Informatique**



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recheche Opérationelle

par

**Laghouati Mohamed El Bachir**

---

# Modélisation d'un modèle GARCH par les copules bivariées

---

Soutenu le 28 Septembre 2020

Devant le jury composé de

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Examinateur :* | Mr K. TABLENNEHAS | *M.A.A* | Université de Médéa |
| *Examinatrice :* | Mme S. KOUIDER AIAD | *M.A.A* | Université de Médéa |
| *Promotrice :* | Mme K. SERIER ABDALLAH | *M.A.A* | Université de Médéa |

**ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020**

# DÉDICACE

*je dédie cette modeste thèse aux personnes qui me sont chères et ont marqué mon parcours dans cette vie, à :*

*Celui qui m'a donné la vie, secondé dans ma vie personnelle, scolaire et universitaire, soutenu et m'a prêté main forte lors de mes échecs, MON SEUL ET UNIQUE MODÈLE :. . .*

***Mon père***

*Celle qui a tant attendu avec patience et affection de voir les fruits de ses endurances, de sa bonne éducation, . . .*

***Ma mère***

*Mes frères, mes sœurs, mes amis surtout ceux de la promotion AMM 2020. Ainsi qu'aux membres de ma famille paternelle LAGHOUATI et maternelle LADJEL sans exception. Ils sont vivement remerciés de leur soutien et de leur patience pour mes caprices. A tous les enseignants qui ont illuminés mon parcours universitaire avec leurs conseils et leur savoir et leur savoir-faire.*

Laghouati Mohamed El Bachir.

# REMERCIEMENTS

*Je remercie en premier lieu " Dieu" pour m'avoir aidé à finaliser mon travail, et mes parents, pour leur patience, leur assistance financière et surtout morale.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude et mes vifs remerciements à mon promotrice :* ***: K. SERIER ABDALLAH*** *pour son aide, sa patience, ainsi que sa gentillesse.*

*Je tiens à exprimer également ma gratitude à tous mes autres enseignants et à exprimer vivement ma sincère reconnaissance à tous ceux que je n'ai pas cités et qui ont participé de près ou de loin à la la réalisation de ce modeste travail.*

*Merci à tous*

Laghouati Mohamed El Bachir.

# ملخص

في هذه الأطروحة ، نحن مهتمون بنمذجة نموذج $GARCH$ باستخدام نظرية المتغيرات ثنائية المتغير ، وهي تقنية التقدير التي قدمناها في الورقة بواسطة $Y.Lui$ و $R.Luger$ [٢٦] حيث طوروا وفحصوا خوارزمية تكرارية (نقطة ثابتة) لتقييم كسب الكفاءة لأسلوب الاحتمال الأقصى $(MV)$ للنماذج القائمة على أساس المتغير ثنائي المتغير. يتطلب تعقيد تقدير معلمات هذه الطريقة تحلل الاحتمالية في خطوتين و اقترحوا خوارزمية معدلة $MMBP$.
أخيرًا ، قاموا بفحص كفاءة خوارزميات $IFM$ الخاصة بهم من خلال مثال رقمي لنموذج $GARCH$ على أساس المتغير ثنائي المتغير.
**الكلمات الرئيسية** : المتغيرات ثنائية ،تقدير الاحتمالية القصوى،

# Résumé

*Dans ce mémoire, nous nous intéressons à modéliser un modèle GARCH en utilisant la théorie des copules bivariées dont nous présentons la technique d'estimation présentée dans le papier de Y. Lui et R. Luger [26], où ils ont développé et examiné un algorithme itératif (à point fixe) afin d'évaluer le gain d'efficacité de la méthode du maximum de vraisemblance(MV) des modèles à base copules. La complexité de l'estimation des paramètres de cette méthode nécessite la décomposition de la vraisemblance en deux étapes ou ils ont proposé un algorithme modifié MMBP.*
*Enfin, ils ont examiné l'efficacité de leurs algorithmes IFM par un exemple numérique d'un modèle GARCH a base copule bivariée.*
**Mots clés** : Autorégressive Conditionnel Heteroskedastic, les copules, estimation du maximum de vraisemblance, inférence des fonctions marginales.

# Abstract

*In this thesis, we are interested in modeling a GARCH model using the theory of bivariate copulas, the estimation technique of which we present presented in the paper by Y. Lui and R. Luger [26], where they developed and examined an iterative (fixed point) algorithm to evaluate the efficiency gain of the maximum likelihood method(MLE) of copula-based models. The complexity of the estimation of the parameters of this method requires the decomposition of the likelihood in two steps or they proposed a modified algorithm MMBP*
*Finally, they examined the efficiency of their algorithms IFM by a numerical example of a GARCH model based on a bivariate copula.*
**Keywords** : Autoregressive Conditional Heteroskedastic, copula, maximum likelihood estimation, inference of marginal functions .

# NOTATIONS

**Abréviations**

| | |
|---|---|
| CCC | Corrélations Conditionnelles Constantes |
| E(.) | L'espérance linéaire |
| IFM | Fonction d'Inférence des Marginales |
| i.i.d | Indépendante et identiquement distribuée |
| MBP | Moving Peaks Benchmark |
| MMBP | Modifier Moving Peaks Benchmark |
| MLE | maximum likelihood estimation |
| MV | Méthode de Maximum de Vraisemblance |
| p.s | Presse que sure |
| resp | Respectivement |
| s.e.s | Si et seulement si |
| v.a | Variable aléatoire |
| v.a.r | Variables aléatoires réelles |
| V(.) | La variance |

**Notations**

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ | Ensembles des entiers relatifs, réels, |
| $\Gamma$ | La fonction gamma |
| $I$ | L$'$intervalle $[0, 1]$ |
| $I^2$ | $I \times I$ |

# TABLE DES MATIÈRES

**Dédicace** **1**

**Remerciements** **2**

**Résumé** **3**

**Abstract** **3**

**Notations** **4**

**Introduction générale** **2**

**1 Modèle Garch** **4**
1.1 Introduction . . . . . 4
1.2 Modèle ARCH univariè . . . . . 5
1.3 Propriétés du modèle ARCH (1) . . . . . 5
1.4 Modèle GARCH univarié . . . . . 6
1.5 Stationnarité du processus GARCH . . . . . 8
1.6 Processus GARCH multivarié . . . . . 10
1.6.1 Modèle GARCH vectoriels . . . . . 10
1.6.2 Modèles à corrélations conditionnelles constantes . . . . . 11
1.6.3 Modèle BEKK-GARCH . . . . . 11

**2 Les copules** **13**
2.1 Introduction . . . 13
2.2 Copule bivariée . . . 13
2.3 Copules multivariée . . . 16
2.4 Copules paramétriques . . . 18
2.4.1 Copules Elliptiques . . . 19
2.4.2 Copules Archimédiennes . . . 23
2.5 Estimation des modèles à base copules . . . 27
2.5.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance . . . 27
2.5.2 Inférence des fonctions marginales (IFM) . . . 27

**3 Modélisation d'un modèle GARCH par les copule bivariées** **29**
3.1 Introduction . . . 29
3.2 Estimation des modèles à base copules . . . 29
3.3 IFM algorithme . . . 31
3.3.1 MBP algorithme . . . 31
3.3.2 Algorithme MBP modifié . . . 34
3.4 Exemple numérique . . . 36

**Conclusion** **41**

**ANNEXE A Fonction de répartition** **42**

**ANNEXE B Convergence des variables aléatoires** **44**

**ANNEXE C Bruit blanc** **46**

**ANNEXE D Mesures de dépendance** **48**

**Bibliographie** **52**

# TABLE DES FIGURES


2.1 Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule gaussienne avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5 [5]. . . . . 19
2.2 Densité de la copule Gaussienne avec $\rho = 0,5$. [5] . . . . . 20
2.3 Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule de Student avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5.[5] . . . . . 21
2.4 Densité de la Copule de Student avec $\rho = 0,5$ et $\kappa = 1$. [5] . . . . . 22
2.5 Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule de Clayton avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5[5]. . . . . 23
2.6 Densité de la copule de Clayton ($\theta = 2,582$) [5]. . . . . 24
2.7 Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule de Gumbel avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5 [5]. . . . . 25
2.8 Densité de la copule de Gumbel $\theta = 1,5$ [5]. . . . . 26

# INTRODUCTION

La flexibilité des modèles a base copule permet de capter le lien entre la distribution conjointe et les distributions marginales en utilisant la fonction copule d'un modèle GARCH univarié de la variance conditionnelle. Ces modèles détectent la structure de dynamique des données, par exemple Jondeau et Rockinger (2006) [17] utilisent des modèles copule-GARCH dans leur travaux.

L'avantage de l'utilisation d'un tel modèle a base copule est qu'il permet d'estimer les paramètres du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant toutes les données disponibles.

Dans le cas des modèles multivariés l'estimation devient très défficile a cause du grand nombre de paramètres qui figure dans le modèle. Shih et Louis(1995) [22] et Joe et Xu (1996) [25] utilise la méthode des fonctions d'inférence sur les marges (IFM), où l'estimation se déroule en deux étapes dans la première étape les paramètres sont estimé séparément relativement aux distributions marginales et dans la deuxième étape les paramètres sont estimés relatifs aux fonctions de copule en fonction des estimations obtenu dans la première étape.

Dans notre travail nous nous intéressons à modéliser un modèle GARCH en utilisant la théorie des copules bivariées.
Ce mémoire est compose de trois chapitre : le premier chapitre est un chapitre introductif dont lequel nous présentons quelques définitions de base qui permettent de bien comprendre ce travail.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons la théorie du copule bivariée et nous présentons encore leur propriétés fondamentales.
Enfin, dans le troisième chapitre nous présentons le travail de Y. Lui et R. Luger [26] intitulé modélisation du modèle GARCH par les copule bivariée.

[26] fait une estimation des modèle GARCH a base copule bivariée par la méthode d'IFM. Dans cet algorithme, les dérivées secondes de la fonction de vraisemblance complète ne sont pas nécessaires parce que SFK ( Song, Fan, Kalbfleisch [23]) montre que MBP produit

l'estimation du maximum de vraisemblance (MV) lors de la convergence. Sous conditions standards régulières, les estimateurs MBP convergé sont cohérents et asymptotiquement normaux. Sa convergence repose sur une condition concernant la décomposition de la log-vraisemblance fonction. Cette dernière est celle de la dominance de l'information par rapport à la log-vraisemblance résiduelle et à la log-vraisemblance de travail qui doit contenir plus d'informations sur les valeurs des paramètres. Mais dans le cas où elle n'est pas satisfaite, MBP ne fonctionne pas. Afin d'obtenir le MV, un modèle de travail différent est nécessaire. De ce fait, ils ont proposé un algorithme modifié basé sur une probabilité de travail qui tient compte d'un certain degré de corrélation entre les marginaux. Par rapport à l'algorithme d'origine basé sur la probabilité de travail avec la corrélation indépendante, le modifié fournit une meilleure approximation de la pleine vraisemblance et surmonte les difficultés de convergence.

CHAPITRE

# 1

# MODÈLE GARCH

## 1.1 Introduction

Le processus Autorégressive Conditionnel Heteroskedastic notée ARCH introduit par Engle (1982) [8] est généralisé par Boollersleve [3] en 1986 permet à la variance conditionnelle de changer au cours du temps en fonction des erreurs passées, où la variance est inconditionnellement constante et ceux pour analyser et modéliser des séries financières.
Ce chapitre est un chapitre introductif eux processus ARCH et GARCH est composé de cinq section.
Dans la première section nous introduisons les modèles ARCH, la deuxième section : propriétés du modèle ARCH (1), la troisième section : modèle GARCH univarié, après introduisons la stationnarité du processuse GARCH. Dernièrement on a le processus GARCH multivariée.

## 1.2 Modèle ARCH univariè

Engle (1982) [8] propose la spécification ARCH(q) où le carré des perturbations est un processus autorégressif d'ordre q. Ces processus pouvent pallier les insuffisances de la classe des représentations ARMA, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle) fonction du temps.

**Définition 1.2.1.** *Le processus $x_t$ est un ARCH d'ordre q noté ARCH(q) s'il satisfait l'équation suivante :*

$$\begin{cases} x_t = z_t\sqrt{h_t}; \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_{t-i}^2; \end{cases} \tag{1.2.1}$$

*où $z_t$ est une séquence aléatoire où $E(z_t) = 0$ et $E(z_t^2) = 1$ avec $\alpha_0 > 0$,$\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., q$*

Un processus ARCH d'ordre 1 noté **ARCH(1)** défini par :

$$\begin{cases} x_t = z_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2}; \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2; \end{cases} \tag{1.2.2}$$

## 1.3 Propriétés du modèle ARCH (1)

Pour plus de détail sur les propriétés voir Johnst et Di Nardo (1997) [15]

**Propriétés 1.** *Le processus $x_t$ est un bruit blanc faible s'il s'agit d'une suite de variables de moyenne nulle, homoscédastiques et non corrélés.*

$$E(x_t|\underline{x_{t-i}}) = 0 \quad et \quad V(x_t) = h_t \ \ \forall t \tag{1.3.1}$$

*avec $\underline{x_{t-i}} = \{x_{t-i}, \cdots, x_{t-j}, \cdots\}$*

**Propriétés 2.** *Le processus $x_t$ du ARCH(1) défini par l'équation (1.2.2) est une différence de martingale homoscédastique :*

$$E(x_t|\underline{x_{t-i}}) = 0 \quad V(x_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \ \ \forall t. \tag{1.3.2}$$

*Cette propriété signifie que le processus $x_t$ est non conditionnellement homoscédastique.*

**Propriétés 3.** *La variance conditionnelle du processus $x_t$ de ARCH(1) défini par l'équation (1.2.2) est non constante dans le temps et vérifie :*

$$V(x_t|\underline{x_{t-i}}) = \alpha_0\frac{1-\alpha_1^i}{1-\alpha_1} + \alpha_1^i x_{t-1}^2 \quad i > 0 \quad \forall t. \tag{1.3.3}$$

## 1.4 Modèle GARCH univarié

**Définition 1.4.1.** *Un processus $x_t$ est un GARCH d'ordre p et q resp noté GARCH(p,q) s'il satisfait l'équation suivante :*

$$\begin{cases} x_t = z_t\sqrt{h_t}; \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-i}; \end{cases} \tag{1.4.1}$$

*où $z_t$ est une séquence aléatoire où $E(z_t) = 0$ et $E(z_t^2) = 1$ avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1, ..., p$ et $\beta_i \geq 0, i = 1, ..., q$.*

— *q : Le nombre de variances de décalage à inclure dans le modèle GARCH.*

— *p : Le nombre d'erreurs résiduelles de décalage à inclure dans le modèle GARCH.*

**Remarque 1.** — *Le moment conditionnelle du processus $x_t$ est*

$$E(x_t|x_{t-1}) = 0$$

— *la variance conditionnelle se présente de la façon suivante :*

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-i}$$

— *La variance non conditionnelle est constante dans le temps et se définit par :*
$V(x_t) = E(x_t - E(x_t)^2) = E(x_t^2)$

$$V(x_t) = E(x_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

### Propriétés des modèles GARCH

Pour mettre en évidence d'autres propriétés des modèles GARCH (voir Francq et Zakoïan (2010) [7]).

**Propriétés 4.** *Dans l'équation (1.4.1) en posons $v_t = x_{t-1}^2 - h_t$, nous observons que :*

$$x_t^2 = \alpha_0 + v_t + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_{t-j} \tag{1.4.2}$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} x_t^2 - v_t =& \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left( x_{t-j}^2 - v_{t-j} \right) \\ x_t^2 =& v_t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_{t-j} \end{aligned}$$

pour calculer la somme il y a des cas possible a étudier
Si $p > q$ alors $\max(p, q) = p$ $c'est - à - dire$

$$x_t^2 = \alpha_0 + v_t + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i) x_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Si $p < q$ alors $\max(p, q) = q$ $c'est - à - dire$

$$x_t^2 = \alpha_0 + v_t + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + \beta_i) x_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

D'après ces deux cas

$$x_t^2 = \alpha_0 + v_t + \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) x_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

où $r = \max(p, q)$.

**Propriétés 5.** *Si $p = q = 1$, le modèle (1.4.1) s'écrit*

$$\begin{cases} x_t = z_t \sqrt{h_t}; \\ h_t = \alpha_0 + \alpha x_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}; \end{cases} \tag{1.4.3}$$

*où $z_t$ est une séquence aléatoire où $E(z_t) = 0$ et $E(z_t^2) = 1$*
*avec $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, ..., p$ et $\beta_i > 0, i = 1, ..., q$.*

Posons que $a(z) = \alpha z^2 + \beta$ i,e que le processus est stationnaire.

## 1.5 Stationnarité du processus GARCH

**Stationnarité stricte :** la stationnarité stricte du GARCH fort est donné par le théorème (1.5.1) [7]

**Théorème 1.5.1.** *Soit $\gamma$ est l'exposant de Lyapounov*

$$-\infty < \gamma = E\log\left\{\alpha(z_t^2)+\beta\right\} < 0; \tag{1.5.1}$$

*où $\gamma$ est l'exposant de Lyapounov qui est inférieur à 0.*

*Soit la série*

$$h_t^* = \{1+\sum_{i=1}^{\infty} a(z_{t-1})\cdots a(z_{t-i})\}\alpha_0; \tag{1.5.2}$$

*converge presque sûrement (p.s), et le processus $x_t$, défini par $x_t = z_t\sqrt{h_t}$ est l'unique solution strictement stationnaire du modèle (1.4.3). Cette solution est non anticipative et ergodique.*

*Si $\gamma \geq 0$ et $\alpha_0 > 0$, il n'existe pas de solution strictement stationnaire.*

**Preuve**
Étant $\gamma = E\log\{a(z_t)\}$ existe toujours dans $[-\infty, +\infty[$
Car $E\log^+\{a(z_t)\} \leq Ea(z_t) = \alpha+\beta$
de (1.4.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{h}_t = \alpha_0 + a(z_{t-1})h_{t-1}\\
&= \alpha_0 + a(z_{t-1})[\alpha_0 + a(z_{t-2})h_{t-2}]\\
&= \alpha_0\left[1+\sum_{i=1}^{N} a(z_{t-1})\cdots a(z_{t-i})\right] + a(z_{t-1})\cdots a(z_{t-N-1})h_{t-N-1}\\
&= h_t^*(N) + a(z_{t-1})\cdots a(z_{t-N-1})h_{t-N-1}
\end{aligned}$$

Soit $h_t^* = \lim_{N->\infty} h_t^*(N)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0,\infty]$

$$h_t^*(N) = \alpha_0 + a(z_{t-1})h_{t-1}^*(N-1) \Rightarrow h_t^* = \alpha_0 + a(z_{t-1})h_{t-1}^*$$

Le processus limite

$$h_t^* = \alpha_0\left[1+\sum_{i=1}^{\infty} a(z_{t-1})\cdots a(z_{t-i})\right]$$

est-il à valeurs finies ?

$$[a(z_{t-1})\cdots a(z_{t-i})]^{1/n} = \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\{a(z_{t-i})\}\right] -> e^{\gamma}\ p.s$$

$$\gamma = E\log\left\{\alpha(z_t^2)+\beta\right\} \in [-\infty, +\infty[$$

quand $n \to \infty$ la suite $[a(z_{t-1}) \dots a(z_{t-n})]^{\frac{1}{n}} \to 1$, donc la série (1.5.2) est converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$

**Stationnarité au seconde ordre**

Stationnarité au second ordre du GARCH(1,1) est donné par le théorème (1.5.2).

**Théorème 1.5.2.** *[7]*

*On suppose* $\alpha_0 > 0$.

*Si* $\alpha + \beta < 1$, *il n'existe pas de solution GARCH(1,1) non anticipative et stationnaire au second ordre .*

*Si* $\alpha + \beta < 1$ , *le processus* $(x_t)$ *défini par (1.4.1), est stationnaire au second ordre.*

*Plus précisément,* $(x_t)$ *est un bruit blanc faible. De plus, il n'existe pas d'autre solution stationnaire au second ordre et non anticipative.*

*-La stationnarité pour GARCH(p,q) est établie par Bougerol et Picard (1992) [4], Pour plus de détails (voir Ander en et al. (2009) [2]; Francq et Zakoïan (2010) [7]).*

**Preuve**

Si $x_t$ est stationnaire au second-ordre et non anticipatif,

$$E(x_t^2) = E(E(x_t^2|\underline{x_{t-1}})) = E(h_t) = \alpha_0 + (\alpha + \beta)E(x_t^2).$$

Soit

$$(1 - (\alpha + \beta))E(x_t^2) = \alpha_0,$$

Si $\alpha + \beta < 1$. On obtient de plus :$E(x_t^2) > 0$.

Inversement si $\alpha + \beta < 1$ on a $\gamma < 0$. La solution strictement stationnaire vérifie

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{x}_t^2) = E(h_t^*) &= \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} E\left\{az_{t-1} \cdots az_{t-i}\right\}\right] \alpha_0 \\ &= \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{E(az_t)\right\}^2\right] \alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

**Propriétés 6.** *[7] Le modèle GARCH(p,q) est également stationnaire au second ordre. Cela nécessite alors que l'inégalité suivante soit respectée :*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$$

.

## 1.6 Processus GARCH multivarié

La modélisation GARCH multivariée repose sur les deux premiers moments conditionnels du processus. Un processus $(X_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $X_t = (X_{1t}, ..., X_{mt})$ est un GARCH donc doit vérifier pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} E(X_t|X_{t-i}) = 0\,;\ E(X_t X_t'|X_{t-i}) = \mathbb{H}_t; \\ X_t = \mathbb{H}_t^{1/2} Z_t; \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Où $Z_t$ est une suite de variable i.i.d a valeur dans $\mathbb{R}^m$, centrée et de matrice de variance unité.

$\mathbb{H}_t$ : matrice de variance covariance peut être choisie symétrique définie positive .

### 1.6.1 Modèle GARCH vectoriels

Ce modèle a été introduit par Engle et Kroner (1995) [9], le modèle qui représenter $\mathbb{H}_t$ s'écrit comme suit :

$$\mathbb{H}_t = C_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i X_{t-i} X_{t-i}' + \sum_{j=1}^{p} B_j \mathbb{H}_{t-j}; \tag{1.6.2}$$

$A_i$ $B_j, i = 1, \ldots, q$ et $j = 1, \ldots, p$ sont les matrices des paramètres d'ordre m,
$C_0$ et $\mathbb{H}_t$ sont des matrices symétriques définies positives d'ordre m.
Posant que

$$e_t = vec(X_{t-i} X_{t-i}') \text{ et } h_t = vec(\mathbb{H}_t).$$

L'opérateur vec (.) transforme une matrice quelconque en une seule colonne.
En utilisant l'opérateur vec dans l'équation (1.6.2) on obtient

$$h_t = c_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i e_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j h_{t-j}.$$

Notons "vech" l'opérateur transformant une matrice carrée $m \times m$ quelconque en un vecteur de taille $m(m+1)/2$, obtenu en ne gardant que les termes de la partie triangulaire inférieure de la matrice et en les empilant colonne par colonne (si
$A = (a_{ij})\,, \text{vech}(A) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}, a_{22}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{mm})'$)
Soit Z une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^m$, d'espérance nulle et de matrice de variance unité.
Le modèle Vec est stable par agrégation est donné par le théorème (1.6.1)

Si la matrice $\mathbb{H}_t$ est symétrique on peut utiliser l'opérateur vech(.)

**Définition 1.6.1.** *Soit $Z_t$ une suite de variables iid de loi Z. On dit que $X_t$ est un processus à représentation GARCH(p, q) vectorielle (relativement à la suite $Z_t$) s'il vérifie :*

$$\begin{cases} X_t = \mathbb{H}_t^{\frac{1}{2}} Z_t \text{ ou } \mathbb{H}_t; \text{ est définie positive telle que} \\ vech\,(\mathbb{H}_t) = C + \sum_{i=1}^{q} A^{(i)} \text{ vech } \left(X_{t-i} X_{t-i}'\right) + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)} \text{ vech } (\mathbb{H}_{t-j})\,; \end{cases} \tag{1.6.3}$$

*Où $C$ est un vecteur de taille $m(m+1)/2 \times 1$*
*les $A^{(i)}$ et $B^{(j)}$ sont des matrices de dimension $\frac{m(m+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2}$.*

**Théorème 1.6.1.** *[7] Soit $(x_t)$ vérifiant la définition (1.6.1). Alors, pour toute matrice $P$ inversible mm, le processus $\tilde{X}_t = PX_t$ est un processus GARCH(p, q) vectoriel au sens de la définition (1.6.1).*

### 1.6.2 Modèles à corrélations conditionnelles constantes

Posant

$$\underline{h_t} = \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ \vdots \\ h_{mm,t} \end{pmatrix}, D_t = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \sqrt{h_{mm,t}} \end{pmatrix}, \underline{X_t} = \begin{pmatrix} X_{1t}^2 \\ \vdots \\ X_{mt}^2 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.6.2.** *Soit $(Z_t)$ une suite de variables iid de loi Z. On dit que $(X_t)$ est un processus GARCH(p, q) à corrélations conditionnelles constantes (CCC) s'il vérifie*

$$\begin{cases} X_t = \mathbb{H}_t^{1/2} Z_t; \\ \mathbb{H}_t = D_t R D_t; \\ \underline{h_t} = \underline{C} + \sum_{i=1}^{q} \mathbf{A}_i \underline{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{B}_j \underline{h}_{t-j}; \end{cases} \tag{1.6.4}$$

*où $R$ est une matrice de corrélations, $\underline{C}$ est un vecteur de taille $m \times 1$ à coefficients strictement positifs, les $A_i$ et $B_j$ sont des matrices de dimension $m \times m$ à coefficients positifs.*

### 1.6.3 Modèle BEKK-GARCH

Ce modèle a été proposée par Baba, Engle, Kraft et Kroner [8], dans une version préliminaire de Engle et Kroner (1995) [9].

**Définition 1.6.3.** *Soit $(Z_t)$ une suite de variables iid de loi Z. On dit que $X_t$ est un processus GARCH(p,q) au sens fort (relativement à la suite $(Z_t)$) s'il vérifie*

$$\begin{cases} \mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^{1/2} Z_t; \\ \mathbb{H}_t = C + \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{K} A_{ik} X_{t-i} X'_{t-i} A'_{ik} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{K} B_{jk} H_{t-j} B'_{jk}; \end{cases} \tag{1.6.5}$$

*où $K$ est un entier, les matrices ,$A_{ik}$ et $B_{jk}$ sont carrées mm et symétrique définies positives.*

**Théorème 1.6.2.** *[7] Soit le modèle à représentation vectorielle diagonale défini par (1.6.4) avec*

$$A^{(i)} = \text{diag}\left\{\text{vech}\left(\tilde{A}^{(i)}\right)\right\}, \quad B^{(j)} = \text{diag}\left\{\text{vech}\left(\tilde{B}^{(j)}\right)\right\};$$

*où* $\tilde{A}^{(i)} = \left(\tilde{a}^{(i)}_{\ell\ell'}\right)$ *e*$\tilde{B}^{(j)} = \left(\tilde{b}^{(j)}_{\ell\ell'}\right)$ *sont mm symétriques semi-définies positives.*

Le modèle BEKK est stable par agrégation est donné par le théorème (1.6.3)

**Théorème 1.6.3.** *[7] Soit* $(X_t)$ *vérifiant la définition (1.6.1). Alors, pour toute matrice* $P$ *inversible mm, le processus* $\tilde{X}_t = PX_t$ *est un processus GARCH(p, q) au sens de la définition (1.6.3).*

CHAPITRE

# 2

# LES COPULES

## 2.1 Introduction

Pour comprendre le comportement conjoint de plusieurs variables aléatoires, l'outil le plus usuel depuis une vingtaine d'années est la copule. Rappelons qu'en dimension d, une copule est une fonction de répartition associée à un vecteur aléatoire $U = (U_1, ..., U_d)$ dont chacune des composantes $U_i$ est uniformément répartie sur l'intervalle unité $[0, 1]$.
Ce chapitre est un chapitre introductif eux fonction copule est composé de cinq section :La première section est copule bivarie et la deuxième copule multivarie, après on va voir les Copule paramétrique la dernière section c'est l'estimation des modèle à base copule .

## 2.2 Copule bivariée

**Définition 2.2.1.** *Une copule, notée $\mathbb{C}$, bivariée est une fonction dont le domaine est*

— *en cas de fonctions marginales continues : $I^2$ ;*

— *en cas de fonctions marginales discrètes : $S_1 \times S_2$ où $S_1$ et $S_2$ sont des sous-ensembles de $I$ contenant 0 et 1.*

**Propriétés 7.** *Une copule bivariée est une fonction* $\mathbb{C}$ *avec les propriétés :*

*i)* $\mathbb{C}$ *est caractérisée «grounded», c'est à dire :*

$$\mathbb{C}(u,0) = \mathbb{C}(0,v) = 0 \text{ pour tout } u, v \in I$$

*ii)* $\mathbb{C}$ *est 2-croissante c'est-à-dire,* $\forall (u_1,u_2),(v_1,v_2) \in I^2$ *telle que* $u_1 \leq v_1$ *et* $u_2 \leq v_2$ *on a*

$$\mathbb{C}(v_1,v_2) - \mathbb{C}(v_1,u_2) - \mathbb{C}(u_1,v_2) + \mathbb{C}(u_1,u_2) \geq 0.$$

*iii) Les marges sont uniformes, c'est-à-dire.*

$$\mathbb{C}(u,1) = u et\ \mathbb{C}(1,v) = v \begin{cases} \forall u, v \in I \text{ si les marges sont continues}, \\ \forall u \in S_1; \forall v \in S_2 \text{ sinon} \end{cases}$$

**Exemple**

$\forall u_1, u_2 \in I,$ la fonction $\mathbb{M}(u_1,u_2) = \min(u_1,u_2)$ est une copule.

1. $\forall u_1, u_2 \in I$, on a $\min(u_1,0) = 0 = \min(0,u_2)$, alors $\mathbb{M}$ vérifie la propriété $i$).
2. $\forall u_1, u_2 \in I$, on a $\min(u_1,1) = u_1$ et $\min(1,u_2) = u_2$, alors $\mathbb{M}$ vérifie la propriété $ii$).
3. $\forall u_1, u_2, v_1$ et $v_2 \in I$ avec $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$, on a

   $\min(u_2,v_2) \geq \min(u_2,v_1)$ et $\min(u_1,v_2) \geq \min(u_1,v_1)$, alors $M$ vérifie la propriété $iii$)

   Par conséquent $\mathbb{M}$ est une copule.

**Théoreme de sklar cas bivariée [19]**

**Théorème 2.2.1.** *[19] Soit* $F$ *la fonction de répartition jointe entre les variables* $x_1, x_2$ *de distributions marginales* $F_1, F_2$ *pour* $d = 2$*. Alors, il existe une copule* $\mathbb{C}$ *telle que, pour tout* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$*,*

$$F(x_1,x_2) = \mathbb{C}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \tag{2.2.1}$$

**Corollaire 2.2.2.** *[19] Soit* $F$ *étant la fonction de répartition jointe de dimension 2 entre les fonctions de distribution marginales* $F_1, F_2$*, et* $\mathbb{C}$ *la copule unissant ces dernières. Par ailleurs, soit* $F_1^{-1}, F_2^{-1}$ *étant l'inverse généralisé des fonctions de distribution marginales. Alors, pour* $u = (u_1,u_2) \in I^2$*,*

$$\mathbb{C}(u) = \mathbb{C}(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \tag{2.2.2}$$

**Exemple**
Soit la distribution logistique bivariée de Gumbel [14] dont la fonction de répartition conjointe est donnée par :

$$F(x_1, x_2) = \left(1 + e^{-x_1} + e^{-x_2}\right)^{-1}, \text{pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

nous obtenons les fonctions de répartitions marginales

$$F_1(x_1) = \left(1 + e^{-x_1}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad F_2(x_2) = \left(1 + e^{-x_2}\right)^{-1},$$

car

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2);$$
$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F(x_1, x_2);$$

Comme les fonctions inverses sont respectivement

$$F_1^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right);$$
$$\text{et} \quad F_2^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right);$$

En se basant sur le théorème (2.2.2), la copule associée à $F(x_1, x_2)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(u, v) &= F\left(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)\right) \\ &= \left[1 + e^{\ln\left(\frac{1}{u}-1\right)} + e^{\ln\left(\frac{1}{v}-1\right)}\right]^{-1} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv}.\end{aligned}$$

**Théorème 2.2.3.** *[19] Densité copule d'une copule a partir du théorème précédent et, en dérivant (2.2.2), la densité d'une copule bivariée est*

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{f\left(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\right)}{f_1\left(F_1^{-1}(u_1)\right) f_2\left(F_2^{-1}(u_2)\right)}$$

*et donc*

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \tag{2.2.3}$$

*où* $x_1 = F_1^{-1}(u_1)$, $x_2 = F_2^{-1}(u_2)$,

## 2.3 Copules multivariée

On rappelle que les marges de la copule sont uniformes. Alors, pour V , une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle I,

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \begin{cases} 0 & si\, u < 0 \\ u & si\, 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & si 1 < u \end{cases}$$

**Définition 2.3.1.** *Soit $d \geq 2$ Une fonction $\mathbb{C} : I^d \to I^d$ est appelée* ***copule*** *de dimension d, ou simplement copule, si $\mathbb{C}$ est (la restriction à $I^d$ de) la fonction de répartition d'une variable aléatoire $U = (U_1, ..., U_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ,où les variables aléatoires $U_1, ..., U_d$ sont de loi uniforme sur $[0, 1] : \mathbb{C}(u) = P(U \leq u)$ pour tout $u \in I^d$.*

**Lemme 2.3.1.** *[19] Soit $(a_k, k \in \mathbb{N}^*)$ et $(b_k, k \in \mathbb{N}^*)$ des suites de nombres complexes de modules inférieurs à 1 ($|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$). On a, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \tag{2.3.1}$$

La proposition suivante assure que les copules sont lipschitziennes.

**Proposition 2.3.2** (Continuité)**.** *[16] Soit $d \geq 2$ et C une copule de dimension d. Pour tout $u = (u_1, ..., u_d)$, $v = (v_1, ..., v_d) \in \mathbb{R}^d$ , On a*

$$|\mathbb{C}(u) - \mathbb{C}(v)| \leq \sum_{k=1}^{d} |u_k - v_k| \tag{2.3.2}$$

On utilise le lemme (2.3.1) dont la démonstration qui se fait par récurrence.et alors

**Preuve**
Soit $\mathbb{C}$ une copule et des variables aléatoires $U_1, ..., U_d$ de loi uniforme sur $I$ telles que $\mathbb{C}$ soit la fonction de répartition de
$U = (U_1, ..., U_d)$ . soit $u = (u_1, ..., u_d)$, $v = (v_1, ..., v_d) \in \mathbb{R}^d$ . On a

$$|\mathbb{C}(u) - \mathbb{C}(v)| = \left| \prod_{k=1}^{n} u_k - \prod_{k=1}^{n} v_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k - v_k|$$

Le théoréme suivant relie les copules aux fonctions de répartition.

**Théorème de Sklar cas multivariée**

**Théorème 2.3.3.** *[19]*

*Soit* $d \geq 2$

1. *Soit* $\mathbb{C}$ *une copule et* $(F_X, 1 \leq X \leq d)$ *des fonctions de répartition de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *. La fonction* $F$ *définie par* $(F_X(x) = P(X \leq x))$ *est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*

2. *Soit* $X = (X_1, ..., X_d)$ *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*. Il existe une copule pour* $X$*. Si les fonctions de répartition des variables aléatoires* $X_1, ..., X_d$ *sont continues, alors la copule est unique.*

**Théorème 2.3.4.** *[19]*

*Soit* $F$ *la fonction de répartition jointe entre les variables* $x_1, ..., x_d$ *avec les distributions marginales* $F_1, ..., F_d$ *pour* $d \geq 2$*. Alors, il existe une copule* $\mathbb{C}$ *telle que, pour tout* $x_1, ..., x_d \in \mathbb{R}^d$*,*

$$F(x_1, ..., x_d) = \mathbb{C}(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) \tag{2.3.3}$$

*Si* $F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_d(x_d)$ *sont continues, alors* $\mathbb{C}$ *est unique.*

**Corollaire 2.3.5.** *[19] Soit* $F$ *étant la fonction de répartition jointe de dimension* $d$ *entre les fonctions de distribution marginales* $F_1, ..., F_d$*,* $d \geq 2$*, et* $\mathbb{C}$ *la copule unissant ces dernières. Par ailleurs, soit* $F_1^{-1}, ..., F_d^{-1}$ *étant l'inverse généralisé des fonctions de distribution marginales. Alors, pour* $u = (u_1, ..., u_d) \in I^d$*,*

$$\mathbb{C}(u) = \mathbb{C}(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) = F(F_1^{-1}(u_1), ..., F_d^{-1}(u_d)). \tag{2.3.4}$$

**Preuve**

Soient $U = (U_1, ..., U_d)$ des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur l'intervalle $I^d$ et $\mathbb{C}$ une copule de dimension $d \geq 2$ telle qu'elle soit la fonction de répartition de ces variables. Soit $F_i, i \in \{1, ..., d\}$ une fonction de répartition prenant valeur dans $\mathbb{R}$. En posant $X = (F_1^{-1}(U_1), ..., F_d^{-1}(U_d))$ pour $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ , donc

$$\begin{aligned} F(x) &= F(F_1^{-1}(u_1), ..., F_d^{-1}(u_d)) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, ..., F_d^{-1}(U_d) \leq x_d) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) \\ &= \mathbb{C}(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) \\ &= \mathbb{C}(u) \end{aligned}$$

**Théorème 2.3.6.** *[19] Densité du copule : a partir du théorème précédent et, en dérivant (2.3.4), la densité d'une copule multivariée est*

$$c\left(u_1,...,u_d\right)=\frac{\partial^d\mathbb{C}}{\partial u_1...\partial u_d}=\frac{f\left(F_1^{-1}\left(u_1\right),...,F_d^{-1}\left(u_d\right)\right)}{f_1\left(F_1^{-1}\left(u_1\right)\right)...f_d\left(F_d^{-1}\left(u_d\right)\right)}$$

*et donc*

$$f\left(x_1,...,x_d\right)=c\left(F_1\left(x_1\right),...,F_d\left(x_d\right)\right)\prod_{i=1}^{d}f_i\left(x_i\right); \tag{2.3.5}$$

*où* $x_1=F_1^{-1}(u_1)$,...,$x_d=F_d^{-1}(u_d)$.

## 2.4 Copules paramétriques

Cette section présente deux exemples de copules pour les deux principales familles de copules paramétriques, soit la famille des copules elliptiques pour laquelle on présente la copule gaussienne et celle de Student ; puis la famille des copules archimédiennes pour laquelle on présente la copule de Clayton et celle de Gumbel [12].

**Définition 2.4.1.** *Soit $\phi$ strictement décroissante et convexe de I dans I.*

$$\mathbb{C}(u_1,...,u_d)=\prod_{i=1}^{d}\phi^{-1}(\phi(u_1)+...+\phi(u_d)). \tag{2.4.1}$$

**COPULE DE FRANK** pour $\theta\in\mathbb{R}^*$ :

$$\phi(x)=-\ln(\frac{\exp^{-\theta u}-1}{\exp^{-\theta}-1})$$

.

### 2.4.1 Copules Elliptiques

#### Copule gaussienne

Le premier type de copules paramétriques que l'on présente ici est la copule gaussienne (ou normale).

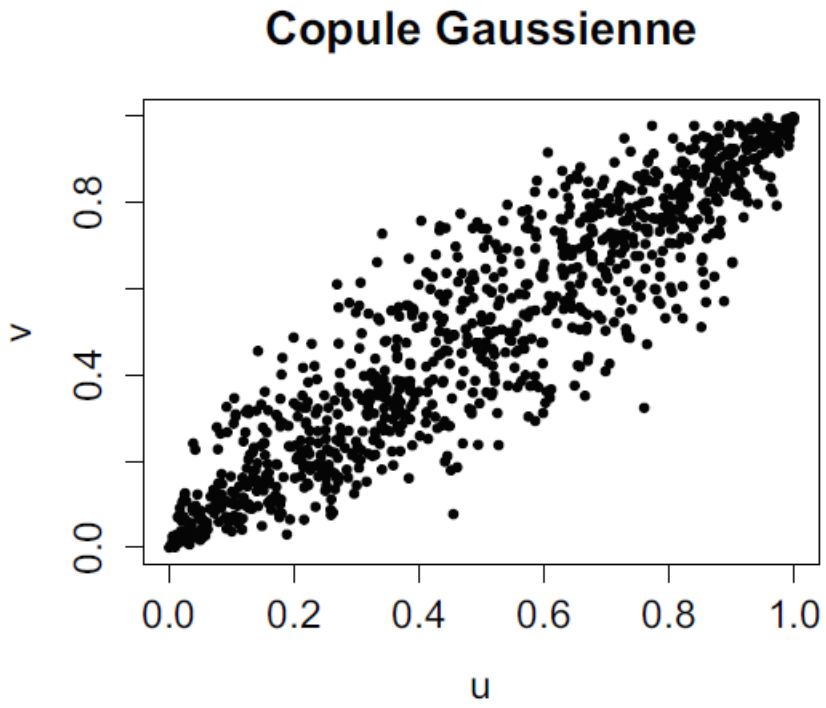



FIGURE 2.1: Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule gaussienne avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5 [5].

**Définition 2.4.2.** *Soient $\rho \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation de Pearson, $\phi^{-1}$ l'inverse d'une fonction de répartition gaussienne centrée réduite et*

$$\Phi_\rho(u, v) = \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{\frac{-(s^2+t^2-2\rho st)}{2(1-\rho^2)}\} ds\, dt \tag{2.4.2}$$

Alors, pour $(u, v) \in I^2$ :

$$\mathbb{C}(u, v) = \Phi_\rho(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$

En dérivant la copule gaussienne, on obtient sa densité de copule telle que

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbb{C}(u, v)$$

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 \Phi_\rho(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))}{\partial u \partial v}$$

$$c(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{\frac{2\rho\phi^{-1}(u)\phi^{-1}(v) - \rho^2(\phi^{-1}(u)^2 + \phi^{-1}(v)^2)}{2(1-\rho^2)}\}$$

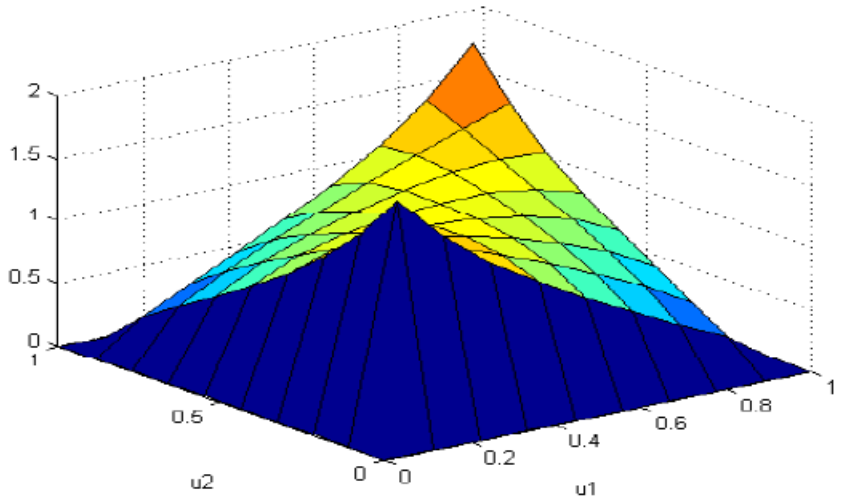



FIGURE 2.2: Densité de la copule Gaussienne avec $\rho = 0,5$. [5]

### Copule de Student

La copule associée a la distribution de Student multivariée est appelée la copule de Student.

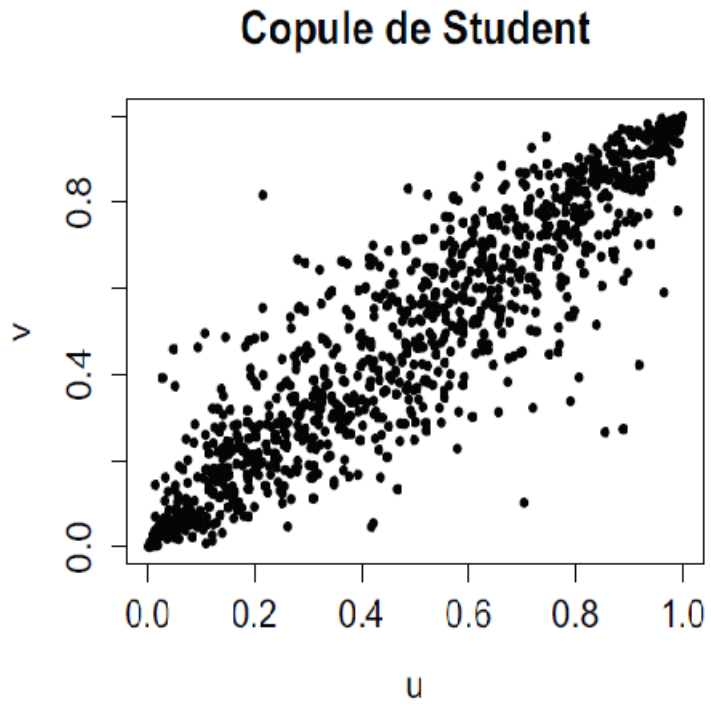



FIGURE 2.3: Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule de Student avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5.[5]

**Définition 2.4.3.** *Soient $\rho \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation de Pearson, $T^{-1}$ l'inverse de la fonction de répartition de Student centrée réduire univariée,*

$$T_{\rho,\kappa}(u, v) = \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[1 + \frac{-(s^2 + t^2 - 2\rho st)}{\kappa(1-\rho^2)}\right]^{\frac{-(\kappa+2)}{2}} ds\, dt \tag{2.4.3}$$

La copule de student de dimension 2 où $\kappa \geq 0$ représente le nombre de degrés de liberté. Alors, pour $(u, v) \in I^2$

$$\mathbb{C}(u, v) = T_{\rho,\kappa}(T^{-1}(u), T^{-1}(v))$$

Pour obtenir la densité de la copule de Student, il suffit d'utiliser la définition de la densité de copule :

$$\begin{aligned} c(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} T_{\rho,\kappa}(T^{-1}(u), T^{-1}(v)) \\ &= \frac{f(u,v)}{f(u)f(v)} \\ &= \frac{\kappa}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma(\kappa/2)^2}{\Gamma((\kappa+1)/2)^2} \frac{\left[1 + \frac{u^2+v^2-2\rho uv}{\kappa(1-\rho^2)}\right]^{-(\kappa+2)/2}}{\left[(1+\frac{u^2}{\kappa})(1+\frac{v^2}{\kappa})\right]^{(\kappa+2)/2}} \end{aligned}$$

où $\Gamma$ représente la fonction gamma, $f(u,v)$ la densité jointe d'une loi de Student et $f(u)$, $f(v)$ les densités marginales.

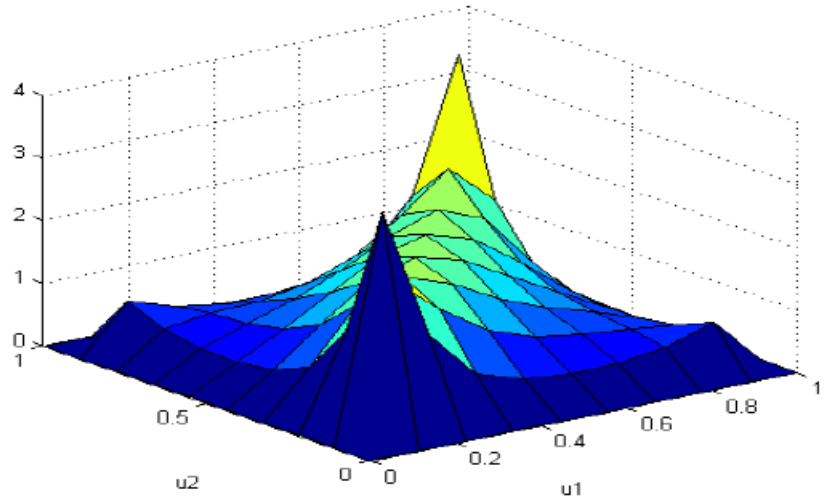



FIGURE 2.4: Densité de la Copule de Student avec $\rho = 0,5$ et $\kappa = 1$. [5]

### 2.4.2 Copules Archimédiennes

#### Copule de Clayton

La copule de Clayton modélise la relation entre deux fonctions de répartition avec une très forte dépendance à la partie inférieure de la distribution, et un nuage de points qui tend à croître lorsque l'on se déplace vers l'extrémité supérieure.

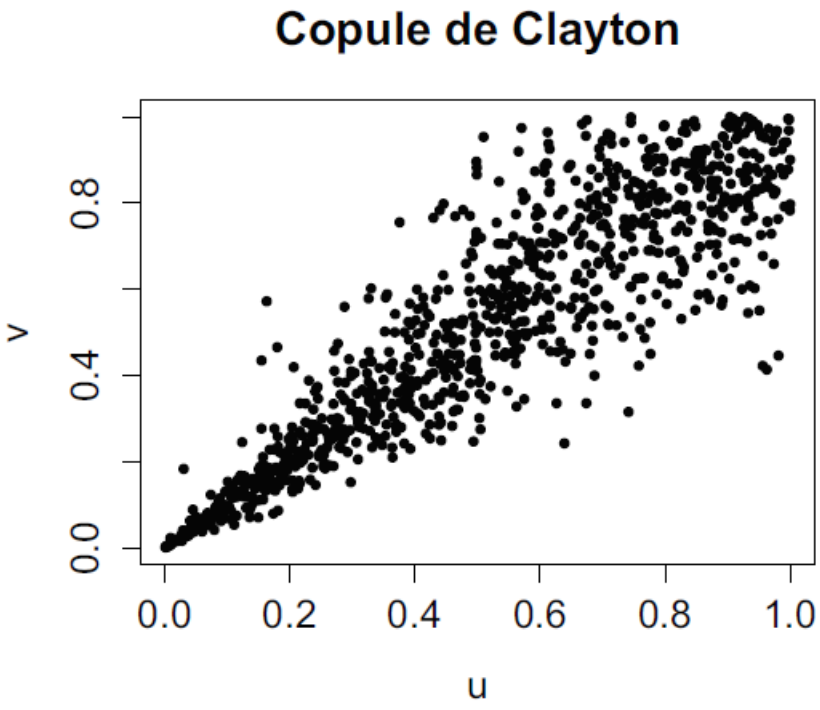



FIGURE 2.5: Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule de Clayton avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5[5].

**Définition 2.4.4.** *On définit la copule de Clayton par la fonction, pour un paramètre de dépendance* $\theta \in [-1, \infty[ \setminus \{0\}$

$$\mathbb{C}(u_1, ..., u_d) = \left(u_1^{-\theta} + ... + u_d^{-\theta} - d + 1\right)^{-1/\theta} \tag{2.4.4}$$

*où* $d \geq 2$. *On note que le générateur de cette copule est* $\phi(z) = z^{-\theta} - 1$

dans **le cas bivarié** ,la copule de Clayton a la forme

$$\mathbb{C}(u, v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}$$

et on en déduit sa densité de copule bivariée

$$\begin{aligned} c(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\mathbb{C}(u,v) \\ &= (\theta+1)(uv)^{-(\theta+1)}\left(u^{-\theta}+v^{-\theta}+1\right)^{-\left(\frac{2\theta+1}{\theta}\right)} \end{aligned}$$

on remarque que pour toute copule archimédienne, telle que montré par Savu et Trede [20], la densité de copule est fonction du générateur de cette dernière. Ainsi, pour toute copule archimédienne, la densité

$$c(u_1,...,u_d) = (\phi^{-1})^d(\phi(u_1),...,\phi(u_d))\prod_{i=1}^{d}\phi'(u_i)$$

où $\phi^{-1}$ est l'inverse du générateur, $\phi'$ la dérivée du gérénateur et $(\phi^{-1})^d$ la d-ième dérivée du générateur, est valide.

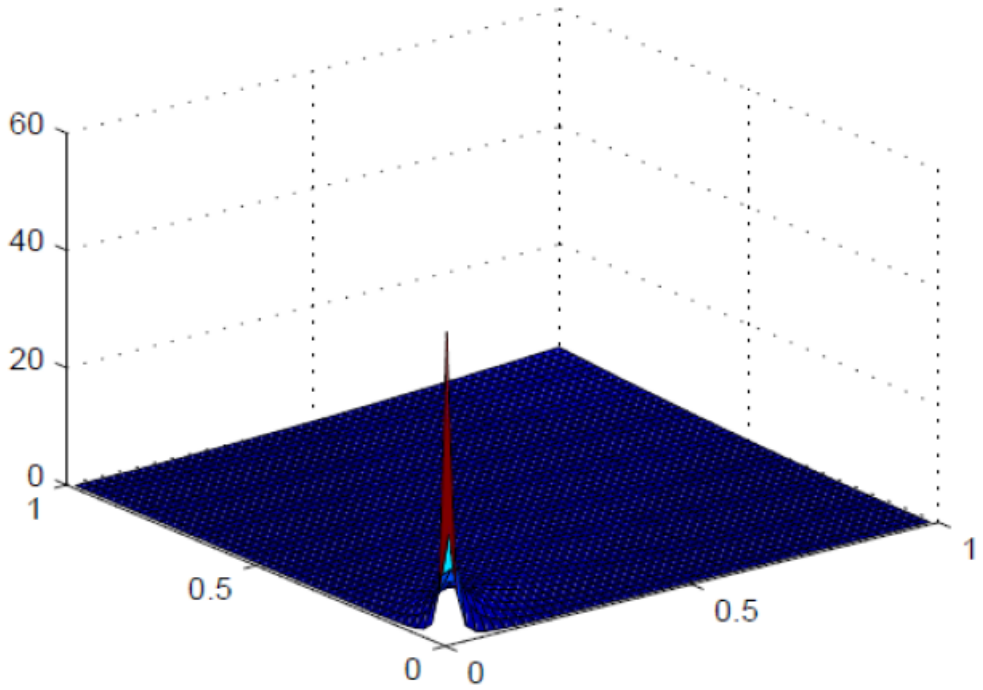



FIGURE 2.6: Densité de la copule de Clayton ($\theta = 2,582$) [5].

### Copule de Gumbel

La copule de Gumbel modélise une dépendance de l'extrémité supérieure de la distribution. On note son asymétrie provoquée simplement par une plus grande dépendance au niveau de l'extrémité supérieure de la distribution versus une dépendance presque nulle à la partie inférieure [5].

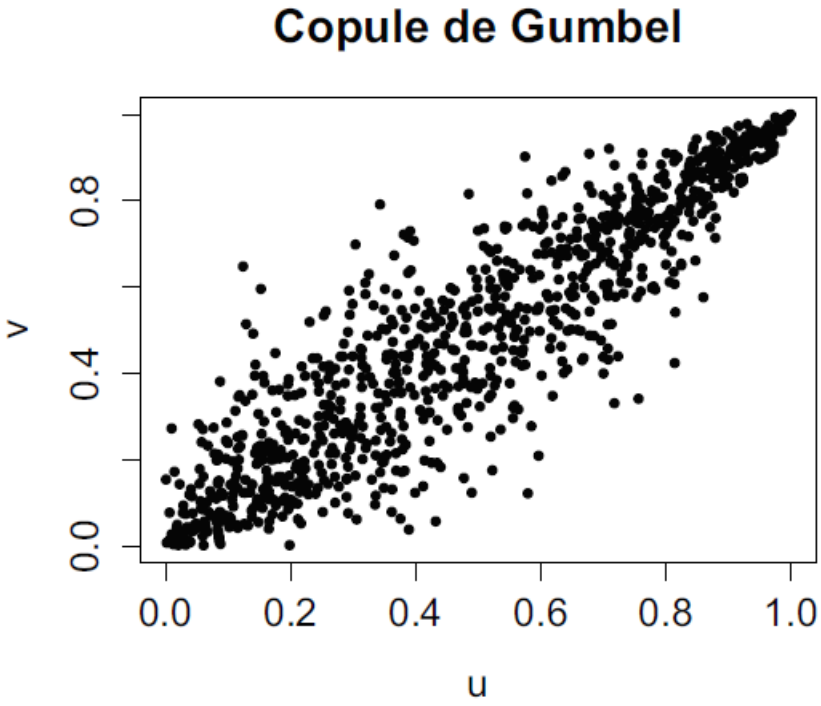



FIGURE 2.7: Exemple de dispersion de 2000 observations issues d'une copule de Gumbel avec une force de dépendance liée à un tau de Kendall de 0,5 [5].

**Définition 2.4.5.** *On définit la copule de Gumbel par la fonction, pour un paramètre de dépendance* $\theta \geq 1$,

$$\mathbb{C}(u_1, ..., u_d) = \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{d} (-\ln(u_i))^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\} \tag{2.4.5}$$

où $d \geq 2$ et pour laquelle le générateur est,$\phi(z) = (-\ln(z))^{\theta}$. Donc, dans le cas bivarié, la copule de Gumbel est de la forme

$$\mathbb{C}(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln(u))^{\theta} + (-\ln(v))^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\}$$

Pour trouver la densité bivariée, il faut utiliser le générateur de cette copule.

Alors

$$\begin{aligned} c(u,v) = c(u_1,...,u_d) &= (\phi^{-1})^d(\phi(u_1),...,\phi(u_d))\prod_{i=1}^{d}\phi^{'}(u_i) \\ &= \frac{\phi^{'}(C(u,v))\phi^{'}(u)\phi^{'}(v)}{\phi^{'}(C(u,v))^3} \\ &= \mathbb{C}(u,v)\left[\phi(u)+\phi(v)\right]\frac{1}{\theta}^{-2}\left[\theta-1+(\phi(u)+\phi(v))^{1/\theta}\right]\frac{(-\ln(u))^{\theta-1}(-\ln(v))^{\theta-1}}{uv} \end{aligned}$$

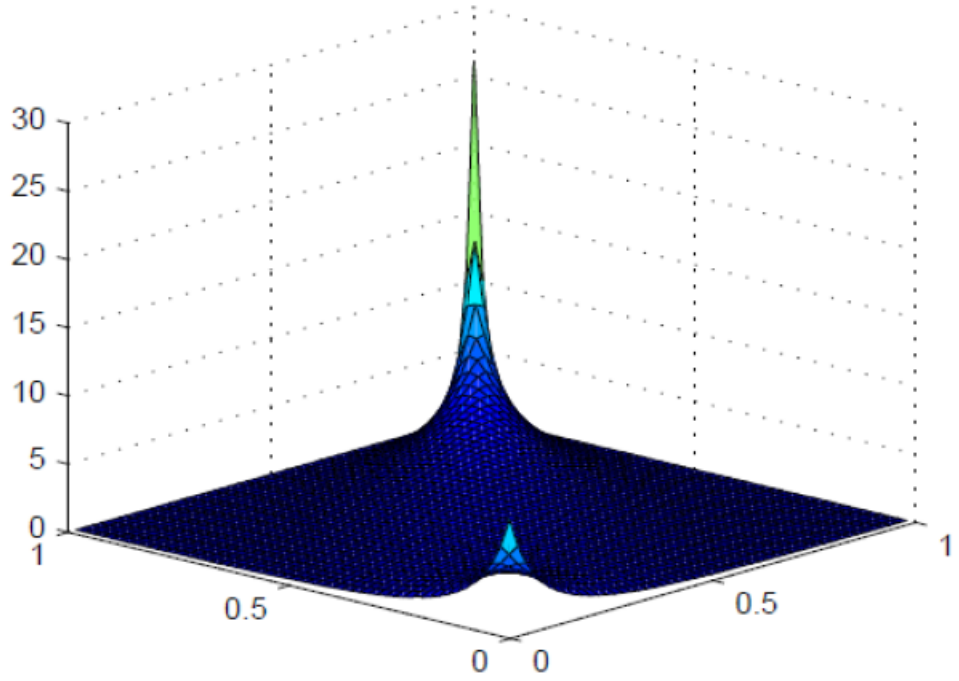



FIGURE 2.8: Densité de la copule de Gumbel $\theta = 1,5$ [5].

## 2.5 Estimation des modèles à base copules

On suppose disposer d'un échantillon $x_1^i, x_2^i$ pour $i = 1, ..., T$, T c'est la taille de l'échantillonne, et nous voulons choisir la copule correspondant aux variables précédentes. La littérature sur les copules nous donne quelques méthodes statistiques dont nous donnons les principales. Premièrement nous considérons le cas où nous choisissons une densité conjointe paramétrique ayant pour paramètre $\theta$ et nous cherchons à estimer les paramètres. Il y a les méthodes d'estimation du maximum de vraisemblance(MV), l'inférence des fonctions marginales notées(IFM).

### 2.5.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans cette section nous intéressons à l'estimation par la méthode MV pour faire supposons que les données tirées d'une distribution sont indépendantes et identiquement distribuées (iid) avec des paramètres inconnus. À partir de l'équation (2.2.3), si nous supposons que la copule, les fonctions marginales et les fonctions de densité dépendant du paramètre $\theta$ (qui pourrait être un vecteur de paramètres).

— La vraisemblance $L(\theta)$ est donne par :

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{T} (c\left(F_1\left(x_1^i, \alpha_1\right), F_2\left(x_2^i, \alpha_2\right), \theta_2\right)) \prod_{j}^{2} f_j\left(x_j^i, \alpha_j\right)$$

— et le calcul du logarithme de la vraisemblance $L(\theta)$ nous donne :

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^{T} \log c\left(F_1\left(x_1^i, \alpha_1\right), F_2\left(x_2^i, \alpha_2\right), \theta_2\right) + \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{2} \log f_j\left(x_j^i, \alpha_j\right)$$

On se pose : $\mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^{T} \log c\left(F_1\left(x_1^i, \alpha_1\right), F_2\left(x_2^i, \alpha_2\right), \theta_2\right)$

$\mathcal{L}_m(\theta) = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{2} \log f_j\left(x_j^i, \alpha_j\right)$.

telle que : $\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_m(\theta) + \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)$ et $\theta_1 = \left(\alpha_1^{'}, \alpha_2^{'}\right)^{'}$ .

Cette méthode d'estimation de $\theta$ en trouvant les valeurs de $\hat{\theta}$ qui maximisent $\mathcal{L}(\theta)$. Les valeurs de $\theta$ sont données par l'estimateur :

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \mathcal{L}(\theta)$$

### 2.5.2 Inférence des fonctions marginales (IFM)

Dans un but pour le cas d'implémentation de l'algorithme quand le nombre des paramètres est large, l'IFM est la plus utilisée. Au lieu d'utiliser le MV pour utiliser en une seule étape le paramètre $\theta$, on utilise la méthode de l'IFM

On décrit les deux étapes de la manière suivante :

**Première étape :** on estime les paramètres $\theta_j$ (le plus souvent un vecteur de paramètres) pour chacune des marginales.

La vraisemblance, le logarithme de la fonction de vraisemblance et l'estimateur de $\theta_j$ sont successivement (voir Shih et Louis (1995) [22]).

$$\mathrm{L}_m(\theta_1) = \prod_{i=1}^{T} f_j\left(x_j^i, \alpha_j\right), \quad j = 1, 2$$

$$\mathcal{L}_m(\theta_1) = \log \mathrm{L}_m(\theta_1) = \sum_{i=1}^{T} \log f_j\left(x_j^i, \alpha_j\right)$$

$$\hat{\alpha}_j = \arg\max_{\theta} \mathcal{L}_m(\theta_1), pour \quad j = 1, 2 \tag{2.5.1}$$

**Deuxième étape :** Estimer le paramètre $\theta_2$ de la loi conjointe

$$\mathcal{L}_c(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \theta_2) = \sum_{i=1}^{T} \log c\left(F_1(x_1^i, \hat{\alpha}_1), F_2(x_2^i, \hat{\alpha}_2), \theta_2\right).$$

Alors l'estimateur par la méthode de l'IFM est

$$\hat{\theta}_2 = \arg\max_{\theta_2} \mathcal{L}_c\left(\hat{\theta}_1, \theta_2\right) \tag{2.5.2}$$

CHAPITRE

# 3

# MODÉLISATION D'UN MODÈLE GARCH PAR LES COPULE BIVARIÉES

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, Y. Lui et R. Luger faire une estimation du modèle GARCH à base copule dans leur article [26] par la méthode IFM et ils donnent un exemple numérique pour avoir les résultats des estimateurs $\hat{\theta_1} = (\hat{\alpha_1}', \hat{\alpha_2}')$ et $\hat{\theta_2}$.
La section 2 traiter l'estimation des modèles basée sur les copules. La discussion commence par un examen de l'IFM et MBP et les propriétés asymptotiques des estimateurs MBP. Ensuite ils ont présenté leurs modifications de MBP qui surmonte la difficulté de convergence de l'algorithme itératif lorsque la corrélation entre les variables est élevée. Section 3 illustre les gains d'efficacité relative des algorithmes d'estimation dans le cadre des modèles GARCH à base copule. La section 4 applique les méthodes d'estimation avec un exemple numérique.

## 3.2 Estimation des modèles à base copules

La théorie des copules (Sklar, 1959) [24] montre que toute distribution conjointe peut être décomposée en sa marge de distribution univariée et une fonction copule, qui décrit la dépendance entre les variables. bien que le résultat puisse être étendu au cas général

multivarié, où $z_1, z_2$ deux variables aléatoires d'intérêt, où $z_i$ a une fonction de distribution cumulative paramétrique $F_i(z_i, \alpha_i)$ et correspondant densités notées par, $f_i(z_i, \alpha_i)$.
$\theta_1 = (\alpha_1^{'}, \alpha_2^{'})$ les paramètres de la distribution marginale,et $\theta_2$ le paramètre de la copule .
Le théorème de sklar montre que

$$F(z_1, z_2, \theta) = C(F_1(z_1, \alpha_1).F_2(z_2, \alpha_2), \theta_2);$$

avec

$$C : I^2 \to I$$

la densité est donnée par

$$f(z_1, z_2; \theta) = c(F_1(z_1, \alpha_1).F_2(z_2, \alpha_2), \theta_2) f_1(z_1, \alpha_1) f_2(z_2, \alpha_2) \tag{3.2.1}$$

de (3.2.1), le calcule du logarithme de vraisemblance $\mathcal{L}(\theta)$ donne :

$$\log(f(z_1, z_2; \theta)) = \log(c(F_1(z_1, \alpha_1).F_2(z_2, \alpha_2), \theta_2) \prod_{i=1}^{2} f_i(z_i, \alpha_i))$$

$$\log(f(z_1, z_2, \theta)) = \log(c(F_1(z_1, \alpha_1).F_2(z_2, \alpha_2), \theta_2) + \log(f_1(z_1, \alpha_1)) + \log(f_2(z_2, \alpha_2)))$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log(f(z_{t1}, z_{t2}, \theta)) = \sum_{t=1}^{T} \log(c(F_1(z_{t1}, \alpha_1).F_2(z_{t2}, \alpha_2), \theta_{t2}) + \sum_{t=1}^{T} \log(f_1(z_{t1}, \alpha_1)) + \log(f_2(z_{t2}, \alpha_2)))$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log c\left(F_1\left(z_{t1}, \alpha_1\right), F_2\left(z_{t2}, \alpha_2\right), \theta_2\right) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{2} \log f_i\left(z_{ti}, \alpha_i\right) \tag{3.2.2}$$

Pour trouver le résultats du MV $\hat{\theta}$, doit être résoudre l'équation $\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} = 0$
on peut écrire :

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_m(\theta_1) + \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2) \tag{3.2.3}$$

Telle que :

$$\mathcal{L}_m(\theta_1) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{2} \log f_i\left(z_{ti}, \alpha_i\right)$$

$$\mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2) = \sum_{t=1}^{T} \log c\left(F_1\left(z_{t1}, \alpha_1\right), F_2\left(z_{t2}, \alpha_2\right), \theta_2\right)$$

## 3.3 IFM algorithme

IFM procède en deux étapes : la première étape les paramètres sont estimé séparément relativement aux distributions marginales et dans la deuxième étape les paramètres sont estimés relatifs aux fonctions de copule en fonction des estimations obtenu dans la première étape.
-1$^{er}$*étape* : *obtenir*

$$\hat{\alpha_i} = arg\max \sum_{t=1}^{T} \log f_i\left(z_{ti}, \alpha_i\right) = arg\max \mathcal{L}_m(\theta_1) \ \forall \ i = 1, 2$$

-2$^{eme}$*étape* : *obtenir*

$$\hat{\theta_2} = arg\max \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}, \theta_2)$$

Où $\hat{\theta_1} = (\hat{\alpha_1}', \hat{\alpha_2}')$
Cette procédure est simple en calcul que l'estimation de tous les paramètres $\theta$ de simultanément à partir de $\mathcal{L}(\theta)$ en (3.2.2)

### 3.3.1 MBP algorithme

Le dériver de (3.2.3) donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta}$$

MBP est un algorithme à point fixe pour résoudre cette équation pour le MV dans les problèmes qui admettent une décomposition additive comme dans (3.2.3). les étapes de MBP pour les modèles à base de copule sont :
-1$^{er}$*étape* : *résoudre*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} = 0 \ \ pour \ \ \hat{\theta}_1^1$$

$$\hat{\theta}_1^1 = arg\max \log(f_1\left(z_{11}, \hat{\alpha_1}\right)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta}_1^1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \ \ pour \ \hat{\theta}_2^1$$

$$\hat{\theta}_2^1 = arg\max \log(c\left(F_1\left(z_{11}, \hat{\alpha_1}\right), F_2\left(z_{12}, \hat{\alpha_2}\right), \theta_2\right)$$

-k$^{eme}$*étape*$(k = 2, 3, ...)$ : *résoudre*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{k-1}, \hat{\theta_2}^{k-1})}{\partial \theta_2} \ pour \ \hat{\theta_1}^{k}$$

$$\hat{\theta_1}^{k} = arg\max \sum_{t=1}^{k} \log(f_1(z_{t1}, \hat{\alpha_1})$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{k-1}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \ pour \ \hat{\theta_2}^{k}$$

.

$$\hat{\theta_2}^{k} = arg\max \sum_{t=1}^{k} \log(c(F_1(z_{t1}, \hat{\alpha_1}), F_2(z_{t2}, \hat{\alpha_2}), \theta_2)$$

note que l'étape 1 est IFM, si l'algorithme converge, il doit converger vers le MV,
$si \ \ k- > \infty$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{k-1}, \hat{\theta_2}^{k-1})}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\hat{\theta_2}^{k} = arg\max \sum_{t=1}^{k} \log(c\left(F_1(z_{t1}, \hat{\alpha_1}), F_2(z_{t2}, \hat{\alpha_2}), \hat{\theta_2}\right) = 0$$

Alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\hat{\theta_1}^{k} = arg\max \sum_{t=1}^{k} \log(f_1(z_{t1}, \hat{\alpha_1}) = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{k-1}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{1}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$$

donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta} = 0$$

c'est la méthode MV.
car le point limite $(\hat{\theta_1}^{\infty}, \hat{\theta_2}^{\infty})$ satisfait l'équation (3.2.3) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{\infty}, \hat{\theta_2}^{\infty})}{\partial \theta_2} = 0 \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1}^{\infty}, \hat{\theta_2}^{\infty})}{\partial \theta_2} = 0 \tag{3.3.2}$$

L'estimateur MBP est cohérent et asymptotiquement normal, car $\hat{\theta}_i^{\,k}$ $\forall i = 1, 2$ suit approximativement la loi normale $N(0, 1)$.
Heuristiquement, l'algorithme exige que les termes de Hessienne utilisés pour mettre à jour l'algorithme dominent les termes de Hessienne laissés de côté.

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2^{\infty}})}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2^{\infty}})}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2^{\infty}})}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2^{\infty}})}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2}^{\infty})}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2}^{\infty})}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2}^{\infty})}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^{\infty}}, \hat{\theta_2}^{\infty})}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} \end{bmatrix}$$

ou point $\theta^{\infty} = (\theta_1^{\infty}, \theta_2^{\infty})$ :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta^{\infty}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1^{\infty})}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^{\infty}, \theta_2^{\infty})}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}(\theta^{\infty}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^{\infty}, \theta_2^{\infty})}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^{\infty}, \theta_2^{\infty})}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} \\ \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^{\infty}, \theta_2^{\infty})}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} & 0 \end{bmatrix}$$

MBP suppose que $\mathcal{L}_m$ et $\mathcal{L}_c$ sont deux fois en continu dans un voisinage des vraies valeurs de paramètre $\theta^*$ et que :

$$\Gamma(\theta^*)^k -> 0 \;\; si \;\; k -> \infty, \tag{3.3.3}$$

Où

$$\Gamma(\theta^*)^k = p \lim_{T\to\infty} \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta^*)^{(-1)} \mathcal{G}_{\mathcal{T}}(\theta^*)$$

avec
Calculant la matrice hessienne$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ ou point $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*)$ :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2^*})}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2^*})}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1^*)}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2^*})}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1^*)}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2^*})}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2}^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2}^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2}^*)}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^*}, \hat{\theta_2}^*)}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} \end{bmatrix}$$

Après les calcules du hessienne

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta^*) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_m(\theta_1^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^*,\theta_2^*)}{\partial\theta_2\partial\theta_2'} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}(\theta^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^*,\theta_2^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_1'} & \frac{1}{T}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^*,\theta_2^*)}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} \\ \frac{1}{T}\frac{\partial^2 \mathcal{L}_c(\theta_1^*,\theta_2^*)}{\partial\theta_2\partial\theta_1'} & 0 \end{bmatrix}$$

sous la condition de dominance de l'information dans (3.3.3), la matrice hessienne $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ dirige le mouvement des valeurs mises à jour à l'étape K et l'algorithme converge vers MV, si la taille de l'échantillon est suffisamment grande et la valeur initiale suffisamment proche du point MV.donc dans certaines conditions de régularité du maximum de vraisemblance et la condition de dominance de l'information $\sqrt{T}(\hat{\theta^k} - \theta^*)$ est asymptotiquement normale avec une moyenne nulle et une variance donnée par l'inverse de la matrice $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta^*)$
$(\sqrt{T}(\hat{\theta^k} - \theta^*) -> N(0, \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(\theta^*)))$, comme $k -> \infty$.
définir le rayon spectral d'une matrice comme la valeur absolue de ses valeurs propres (réelles ou complexes) .Une condition nécessaire et suffisante pour que (3.3.3) soit maintenu est que le rayon spectral de $\Gamma(\theta^*)$ soit strictement inférieur à un .Un contrôle numérique sur la condition de dominance de l'information peut ainsi être effectuée en évaluant une estimation cohérente de $\Gamma$ à l'estimation IFM $\hat{\theta}^{IFM}$ qui est obtenue à partir de la première étape de MBP.

### 3.3.2 Algorithme MBP modifié

Le choix du modèle de travail $\mathcal{L}_m$ doit satisfaire la condition de dominance de l'information pour assurer la convergence de l'algorithme MBP. L'importance de ce problème est illustrée par SFK (Song, Fan, Kalbfleisch [23]) dans une étude de simulation d'un modèle de copule gaussienne bivariée à distribution marginale exponentielle. Le problème est que $\mathcal{L}_m$ dans l'algorithme MBP original est basé uniquement sur les marginaux sous la structure de corrélation d'indépendance. Une solution est de trouver un nouveau modèle de travail qui prend en compte un certain degré de corrélation.
SFK [23] propose une nouvelle décomposition de la forme (3.1.3)

$$\mathcal{L}_w(\theta_1) = \mathcal{L}_m(\theta_1) + \Phi(\theta_1, \overline{\theta_2}), \mathcal{L}_r(\theta_1, \theta_2) = \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2) - \Phi(\theta_1, \overline{\theta_2}). \tag{3.3.4}$$

où $\Phi(\theta_1, \overline{\theta_2})$ est une log-densité avec une structure de corrélation connue $\overline{\theta_2}$,
les étape de l'algorithme MMBP est :

-$1^{er}$*étape* : *résoudre*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} = 0 \ \ pour \ \ \theta_1^{\hat{IFM}}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1^{\hat{IFM}}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \ \ pour \ \theta_2^{\hat{IFM}}$$

-$2^{eme}$*étape* : *résoudre*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2^{\hat{IFM}})}{\partial \theta_1} = 0 \ \ pour \ \hat{\theta_1^2}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\hat{\theta_1^2}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \ \ pour \ \hat{\theta_2^2}$$

.

-k$^{eme}$*étape*$(k = 3, 4, ...)$ : *résoudre*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2^{\hat{IFM}})}{\partial \theta_1} = -\left( \frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1^{\hat{k-1}}, \theta_2^{\hat{k-1}})}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1^{\hat{k-1}}, \theta_2^{\hat{IFM}})}{\partial \theta_1} \ \ pour \ \hat{\theta_1^2} \right) \ \ pour \ \hat{\theta_1^k}$$

*et*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1^{\hat{k-1}}, \hat{\theta_2})}{\partial \theta_1} \ \ pour \ \hat{\theta_2^k}$$

Alors la convergence, du point limite MMBP $(\hat{\theta_1^\infty}, \theta_2^\infty)$ satisfait l'équation en (3.3.1) et (3.3.2). On notera que les modèles de travail de cet algorithme utilisent la copule log-vraisemblance elle-même pour $\Phi(\theta_1, \overline{\theta_2})$ dans une décomposition comme en (3.3.4), où $\overline{\theta_2}$ est maintenant basé sur le estimations IFM de première étape, c'est-à-dire que l'algorithme MMBP utilise $\Phi(\theta_1, \overline{\theta_2}) = \mathcal{L}_c(\theta_1, \hat{\theta_2}^{IFM})$ . Certains algorithmes itératifs, tels que Newton-Raphson, s'appuieraient sur une dérivation du second ordre pour résoudre l'étape 2. Autrement dit, si nous laissons maintenant $\mathcal{L}_w(\theta_1) = \mathcal{L}_m(\theta_1) + \mathcal{L}_c(\theta_1, \hat{\theta_2}^{IFM})$, alors on utilise l'algorithme de newton pour l'étape 2 :

$$\hat{\theta_1}^j = \hat{\theta_1}^{j-1} - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_w(\hat{\theta_1}^{j-1})}{\partial \theta_1 \partial \theta_1'} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_w(\hat{\theta_1}^{j-1})}{\partial \theta_1} \right], \ \ j = 1, 2, ...$$

jusqu'à convergence pour trouver $\hat{\theta_1}^{j-1}$. notez que la matrice hessienne complète par rapport à tous les paramètres n'est pas requise pour cette étape.

## 3.4 Exemple numérique

Dans cette section, ils on illustré l'efficacité relative obtenue par l'algorithme d'estimation (IFM) pour présenter le modèle GARCH par la fonction copule bivariéé.
L'utilité des fonctions copule pour les modèles économiques de sérier des temps connaitre une croissance rapide dans le domaine de recherche .
L'origine de cette modèle remonte à Joundeau et Rokinge (2006) [17].
L'avantage de la fonction copule c'est que la capture l'effet du modèle ARCH, elle est séparée de la structure de dépendance entre les variables, la flexibilité de cette approche modéliser multivarié conditionnel hetroskedasticity est spécialement utile quant à la marginale volatilité dynamique et compliquer et peut pas facilement étendre à une multivariée volatilité-modèle.
Soit $\{y_{t1}, y_{t2}\}$, $t = 1, ..., T$ représentent les rendements d'une paire d'actifs, les marges sont spécifiées comme modèles GARCH(1,1) (Bollerslev(1986)) [3]

$$\begin{cases} x_{ti} = z_{ti}\sqrt{h_{ti}} \\ y_{ti} = u_{ti} + x_{ti} \quad x_{ti} \sim N(0, h_{ti}). \\ h_{ti} = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x_{t-1,i}^2 + \alpha_{2i}h_{t-1,i}, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

1. pour $i = 1, 2$, elle sont le plus simple et le plus célèbre par $\alpha_{0i} > 0, \alpha_{1i}, \alpha_{2i} \geq 0$ et $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} < 1$. La variance conditionnel est stationnaire au second ordre. La densité conjoint de la fonction gaussienne et définie par :
$$\begin{cases} \mathbb{C}(u_1, u_2) = \Phi_\rho\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right) \\ \mathbb{C}(u_1, u_2) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\dfrac{\rho^2(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2) - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right\} \end{cases}$$
Où $\Phi$ est une fonction de répartition et $\Phi_\rho$est une fonction de répartition bivariée avec moment 0 et variance 1 et la corrélation $-1 < \rho < 1$.
**Preuve**
On a la densité Gaussienne multivariée $f(x)$ en dimension d de moyenne $\mu$ et de matrice de corrélation $\Sigma$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{vmatrix} = (1-\rho^2)\ , \quad \mu = 0$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{det\Sigma} com(\Sigma)^t = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$

$$(x'\Sigma x) = \left[\begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))\right]\frac{1}{1-\rho^2}$$

On trouve après les calcules :

$$(x'\Sigma x) = \left[\rho^2(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2) - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)\right]\frac{1}{1-\rho^2}$$

On remplace

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(u_1,u_2) &= \Phi_\rho\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2)-2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right\}\end{aligned}$$

2. On a d'après (3.2.2)

$$\mathcal{L}(\theta)=\sum_{i=1}^{T}\log c\left(F_1\left(z_{t1},\alpha_1\right),F_2\left(z_{t2},\alpha_2\right);\theta_2\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{2}\log f_i\left(z_{ti},\alpha_i\right)$$

.
On note :
$x_{ti}=z_{ti}\sqrt{h_{ti}}\Rightarrow z_{ti}=x_{ti}/\sqrt{h_{ti}}$,
$z_{ti}=y_{ti}$,
Alors :

$$\mathcal{L}_c(\theta_1,\theta_2)=-\frac{T}{2}\log(1-\rho^2)-\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left(\rho A(\theta_1)-2B(\theta_1)\right).$$

**Preuve**
$C(F_1(z_{t1},\alpha_1),F_2(z_{t2},\alpha_2),\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2)-2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right\}$
telle que : $u_i=F_i(z_{ti},\alpha_i)=F_i(x_{ti}/\sqrt{h_{ti}},\alpha_i)\,;\quad i=1,2$

$$\log\left(C(F_1(z_{t1},\alpha_1),F_2(z_{t2},\alpha_2),\theta_2\right)=\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2)-2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right\}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)-\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left(\rho(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2)-2\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)\right)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\log\left(C(F_1(z_{t1},\alpha_1),F_2(z_{t2},\alpha_2),\theta_2\right)=$$
$$=\sum_{t=1}^{T}-\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)-\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left(\sum_{t=1}^{T}\rho(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2)-2\sum_{t=1}^{T}\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)\right)$$
Donc :

$$\mathcal{L}_c(\theta_1,\theta_2)=-\frac{T}{2}\log(1-\rho^2)-\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left(\rho A(\theta_1)-2B(\theta_1)\right)$$

telle que :

$$A(\theta_1)=\sum_{t=1}^{T}(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2)=\sum_{t=1}^{T}\left[z_{t1}(\alpha_1)^2+z_{t2}(\alpha_2)^2\right]$$

.

$$B(\theta_1) = \sum_{t=1}^{T} \Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) = \sum_{t=1}^{T} z_{t1}(\alpha_1)z_{t2}(\alpha_2)$$

· Où $z_{ti}(\alpha_i) = \Phi^{-1}(F_i(x_{ti}/\sqrt{h_{ti}}, \alpha_i))$
est alors :

$$\mathcal{L}_{ti}(\alpha_i) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(h_{ti}) - \frac{1}{2}\frac{(y_{ti} - \mu_i)^2}{h_{ti}}$$

**Preuve**

On a :

$$\log(f_i(y_{ti}, \alpha_i)) = \mathcal{L}_{ti}(\alpha_i)$$

et

$$x_{ti} \sim N(0, h_{ti})$$

$$f_i(x_{ti}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{ti}}} \exp\left\{-\frac{x_{ti}^2}{2h_{ti}}\right\}$$

mais $x_{ti} = y_{ti} - \mu_i$

on remplace :

$$f_i(y_{ti}, \alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{ti}}} \exp\left\{-\frac{(y_{ti} - \mu_i)^2}{2h_{ti}}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\log(f_i(y_{ti}, \alpha_i)) &= -\log((2\pi h_{ti})^{1/2}) - \frac{(y_{ti} - \mu_i)^2}{2h_{ti}} \\
&= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(h_{ti}) - \frac{(y_{ti} - \mu_i)^2}{2h_{ti}} \\
&= \mathcal{L}_{ti}(\alpha_i)
\end{aligned}$$

Cette fonction suppose que $h_{ti}$ peut être calculé pour tout t. Une pratique courante consiste à fixer la valeur initiale à une estimation de la variance inconditionnelle :

$$h_{0i} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \hat{x}_{ti}^2 \tag{3.4.2}$$

Dans la pratique, l'estimation du maximum de vraisemblance des modèles GARCH repose généralement sur l'utilisation de dérivés numériques. aux fins d'une étude de simulation, cependant, l'utilisation de dérivés analytiques est évidemment souhaitable pour accélérer la

procédure d'estimation. Nous suivons donc ici fiorentini et al(1996) [11] et donnons les dérivés analytiques requis.

La première dérivation de $\mathcal{L}_{ti}(\alpha_i)$ par rapport à $\alpha_i$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{ti}(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(h_{ti}) - \frac{(x_{ti})^2}{2h_{ti}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_i}\left(\frac{1}{h_{ti}}\right) - \frac{\dfrac{\partial x_{ti}^2}{\partial \alpha_i}h_{ti} - \dfrac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_i}x_{ti}^2}{2h_{ti}^2} \\ &= \frac{1}{2h_{ti}}\left(-\frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial x_{ti}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_i}\left(\frac{x_{ti}^2}{h_{ti}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2h_{ti}}\left(-\frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_i}\left(\frac{x_{ti}^2}{h_{ti}} - 1\right) - \frac{\partial x_{ti}}{\partial \alpha_i}\right)\end{aligned}$$

où $\dfrac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_i} = \left(0, \dfrac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_{0i}}, \dfrac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_{1i}}, \dfrac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_{2i}}\right)'$ *est* $\dfrac{\partial x_{ti}}{\partial \alpha_i} = (-2x_{ti}, 0, 0, 0)'$. ici les zéros sont inclus pour des raisons de dimension. les dérivées de la fonction skédastique sont données récursivement par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_{0i}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{0i}}\left(\alpha_{0i} + \alpha_{1i}x_{t-1,i}^2 + \alpha_{2i}h_{t-1,i}\right) \\ &= 1 + \alpha_{2i}\frac{\partial h_{t-i,i}}{\partial \alpha_{0i}}\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_{1i}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{1i}}\left(\alpha_{0i} + \alpha_{1i}x_{t-1,i}^2 + \alpha_{2i}h_{t-1,i}\right) \\ &= x_{t-1,i}^2 + \alpha_{2i}\frac{\partial h_{t-i,i}}{\partial \alpha_{1i}}\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{ti}}{\partial \alpha_{2i}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{2i}}\left(\alpha_{0i} + \alpha_{1i}x_{t-1,i}^2 + \alpha_{2i}h_{t-1,i}\right) \\ &= h_{t-1,i} + \alpha_{2i}\frac{\partial h_{t-i,i}}{\partial \alpha_{2i}}\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

avec $\dfrac{\partial h_{0i}}{\partial \alpha_{ji}} = 0$ car $h_{0i}$ in (3.3.2) ne dépend d'aucun paramètre. Le vecteur de dérivés de $\mathcal{L}_m(\theta_1)$par rapport à $\theta_1$ est :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \left(\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial \mathcal{L}_{t1}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1'}, \sum_{t=1}^{T}\frac{\partial \mathcal{L}_{t2}(\alpha_2)}{\partial \alpha_2'}\right)'$$

Le dérivés de $\mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)$ par rapport à $\theta_1$ est :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = -\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left\{\rho\frac{\partial A(\theta_1)}{\partial \theta_1} - 2\frac{\partial B(\theta_1)}{\partial \theta_1}\right\}$$

où

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(\theta_1)}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\sum_{t=1}^{T}(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2)\right) \\ &= 2\sum_{t=1}^{T}\left(z_{t1}(\alpha_1)\frac{\partial z_{t1}(\alpha_1)}{\partial \theta_1} + z_{t2}(\alpha_2)\frac{\partial z_{t2}(\alpha_2)}{\partial \theta_1}\right)\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial B(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\sum_{t=1}^{T}\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)\right) = \sum_{t=1}^{T}\left(z_{t1}(\alpha_1)\frac{\partial z_{t2}(\alpha_2)}{\partial \theta_1} + z_{t2}(\alpha_2)\frac{\partial z_{t1}(\alpha_1)}{\partial \theta_1}\right)$$

$$\frac{\partial z_{t1}(\alpha_1)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \Phi^{-1}(F_1(x_{t1}/h_{t1}^{1/2}, \alpha_i))}{\partial \theta_1} = -\frac{x_{t1}}{2h_{t1}^{3/2}}\left(\frac{2h_{t1}}{x_{t1}}, \frac{h_{t1}}{\alpha_{01}}, \frac{h_{t1}}{\alpha_{11}}, \frac{h_{t1}}{\alpha_{21}}, 0, 0, 0, 0\right)'$$

$$\frac{\partial z_{t2}(\alpha_2)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \Phi^{-1}(F_2(x_{t2}/h_{t2}^{1/2})}{\partial \theta_1} = -\frac{x_{t2}}{2h_{t2}^{3/2}}\left(0, 0, 0, 0, \frac{2h_{t2}}{x_{t2}}, \frac{h_{t2}}{\alpha_{02}}, \frac{h_{t2}}{\alpha_{12}}, \frac{h_{t2}}{\alpha_{22}}, \right)'$$

enfin, la dérivée de $\mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)$ par rapport à $\theta_2$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_c(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} &= \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(-\frac{T}{2}\log(1-\rho^2) - \frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left(\rho A(\theta_1) - 2B(\theta_1)\right)\right) \\ &= \frac{T\rho}{1-\rho^2} - \frac{1}{(1-\rho^2)^2}\left\{\rho A(\theta_1) - (1-\rho^2)B(\theta_1)\right\}\end{aligned}$$

# CONCLUSION

Les modèles basés sur les copules sont généralement estimés par la méthode IFM. L'avantage de cette méthode est la simplicité de calculer les estimations du paramètres à grand démentions. Tout d'abord, les paramètres des marges sont estimés séparément, puis les paramètres de la copule sont estimés sous réserve des estimations de la première étape. Le principal inconvénient de cette méthode d'estimation est la perte d'efficacité statistique cela se produit parce que la première étape ignore la dépendance entre les variables.

Les résultats obtenu par l'exemple numérique de [26] suggèrent que la méthode couramment utilisée pour estimer les modèles copule-GARCH peut être améliorés à l'aide de l'algorithme itératif avec relativement peu d'itérations. Un autre avantage de leur algorithme proposé est qu'il donne une version modifiée de l'IFM qui peut être utilisée pour améliorer l'efficacité de l'estimation IFM en première étape sans avoir besoin d'itération par l'intermédiaire de MMBP. La procédure modifiée de l'IFM peut être particulièrement intéressante dans les situations où la résolution de systèmes d'équations, qui sont nécessaires pour mettre à jour les estimations des paramètres MMBP, est un défi de calcul. Par exemple, l'algorithme modifiée de l'IFM serait un moyen intéressant d'améliorer l'IFM dans les modèles avec des corrélations variant dans le temps.

# ANNEXE A

# Fonction de répartition

**Définition 3.4.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de $X$ la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, parfois notée $F_X$, définie par :*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}$*

Le proposition suivante donne des propriétés de la fonction de répartition.

**Proposition 3.4.1.** *Soit $F$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $X$.*
*1-La fonction $F$ est croissante, continue a droite et vérifie $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \mathrm{P}(X = -\infty)$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \mathrm{P}(X < +\infty)$. En particulier, si $X$ est finie p.s., on a*

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$

*et*

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

*2-Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *,la limite a gauche de* $F$ *en* $x$*,* $F_X(-x) = \lim_{y\to x} F(y)$ $y < x$ *existe, et vaut* $P(X \leq x)$ *Ainsi on a* $F(x) - F(-x) = P(X = x)$*. La fonction* $F$ *possède au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.*

La proposition suivante assure que la fonction de répartition caractérise la loi.

**Proposition 3.4.2.** *La fonction de répartition caractérise la loi : deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.*

*Pour une variable aléatoire réelle continue de densité* $f$*, sa fonction de répartition* $F$ *est donnée par* $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{]-\infty,x]} f(y)dy$*. La fonction* $F$ *est continue. Remarquons que si* $f$ *est continue, alors la fonction* $F$ *est dérivable de dérivée* $f$*.*

# ANNEXE B

# Convergence des variables aléatoires

## Converge presque sûre

**Définition 3.4.2.** *Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers $X$ si la convergence est vraie avec une probabilité 1*

$$\mathbb{P}\left(w \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right) = 1$$

*On note la convergence presque sûre : $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X \cdot p.s$*

**Proposition 3.4.3.** *1. La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité : Si*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} X, \text{ alors } X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$$

*2. Si*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$$

*on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers X.*

**Remarque 2.** *La réciproque est fausse.*

# Convergence en probabilité

**Définition 3.4.3.** *On dit que la suite de v.a.r.* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers la v.a.r X si, pour tout* $\epsilon > 0$ *; on a :*

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

*On note*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$$

**Proposition 3.4.4.** *La suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers X si et seulement si :*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \geq 1), n \geq N \Rightarrow \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \leq \epsilon$$

**Proposition 3.4.5.** *Soient* $(X_n)_{n\geq 1}$ *et* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *deux suites convergent en probabilité vers X et Y respectivement, c'est-à-dire,*
*Si*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X \quad \text{et } Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} Y$$

*Alors*

$$X_n Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} XY$$

# ANNEXE C

# Bruit blanc

## Bruit blanc

**Définition 3.4.4.** *Le processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ composé de variables aléatoires réelles centrées, de variance finie $\sigma^2$ ; sans corrélation, s'appelle un bruit blanc $(0;\sigma^2)$ ; noté $BB(0;\sigma^2)$ :*

**Proposition 3.4.6.** *Sous les hypothèses précédentes, soit*

$$z_{t+1} = X_{t+1} - P^t_{-\infty}\left(X_{t+1}\right).$$

*Alors le processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc.*

## Bruit blanc faible

**Définition 3.4.5.** *Le processus $z_t$ est appelé bruit blanc faible s'il vérifie, pour une constante positive $\sigma^2$ :*

1. $\mathbb{E}\epsilon_t = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$.

2. $\mathbb{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}$.

3. $\text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = 0 \ \forall t, \ h \in \mathbb{Z}, \ h \neq 0$.

**Définition 3.4.6.** *On appelle bruit blanc fort toute suite* $(z_t; t \in \mathbb{Z})$ *telle que* $(z_t)$ *soit i.i.d.*

# ANNEXE D

# Mesures de dépendance

## Coefficient de corrélation linéaire

**Définition 3.4.7.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires ayant des variances finies. Le coefficient de corrélation linéaire des variables $X$ et $Y$ est donné par :*

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \tag{3.4.6}$$

*où* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X,Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *est la covariance entre $X$ et $Y$; Var(X),Var(Y ) correspondent aux variances respectives des variables $X$ et $Y$ .*

Dans le cadre d'une dépendance linéaire parfaite, $Y = aX + b$, $(a \neq 0\,;\ b \in \mathbb{R})$ , le coefficient de corrélation est égal a +1 ou -1 selon le signe de a.

## Les coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman

Les définitions de ces deux coefficients sont intimement liées à la notion de concordance.Ils constituent une alternative au coefficient de corrélation linéaire, qui n'est pas comme nous l'avons montré auparavant la mesure de dépendance la plus appropriée et souffre de certaines

lacunes.

**a - Notion de la concordance**

**Définition 3.4.8.** *Notons* $(x_1, y_1)$ *et* $(x_2, y_2)$ *deux observations d'un vecteur aléatoire continu* $(X; Y)$*, alors* $(x_1, y_1)$ *et* $(x_2, y_2)$ *sont dites :*

— ***Concordantes si :***

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2)$$

— ***Discordantes si :***

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2)$$

Plus généralement soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)\}$ un échantillon de n observations d'un couple (X ;Y). Il existe $C_n^2 = n!/2!(n-2)!$pairs de distributions de couples$(x_i; y_i)$ ; $(x_j; y_j)$ qui sont soit concordantes, soit discordantes .

**Définition 3.4.9.** *La fonction de concordance entre les deux couples* $(X_1; Y_1)$ *et* $(X_2; Y_2)$ *est définie par :*

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

**b - Le tau de Kendall**

**Définition 3.4.10.** *Soient* $(X_1; Y_1)$ *et* $(X_2; Y_2)$ *deux vecteurs aléatoires continus i.i.d de fonction de répartition conjointe H et de fonctions marginales F (pour* $X_1$ *et* $X_2$*) et G (pour* $Y_1$ *et* $Y_2$*). Le tau de Kendall noté* $\tau$ *est défini par :*

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Le tau de Kendall possède les propriétés suivantes :

— Le taux de Kendall est symétrique, c'est-à-dire : $\tau(X_1, X_2) = \tau(X_2, X_1)$

— $-1 \leq \tau \leq +1$

— Si $X$ et $Y$ sont comonotones alors $\tau = 1$ (la concordance la plus solide)

— Si $X$ et $Y$ sont antimonotones alors $\tau = -1$ (la discordance la plus solide).

— Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\tau = 0$

— Si $a$ et $b$ sont des fonctions strictement croissantes, alors $\tau(a(X), b(Y)) = \tau(X, Y)$
Malheureusement, lorsque $\tau = 0$ les variables $X$ et $Y$ ne sont pas forcement indépendantes.

**Théorème 3.4.7.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires continues de copule $C$, alors le tau de Kendall de $X$ et $Y$ (noté par $\tau_X Y$ ou par $\tau_C$) est donnée par :*

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = 4 \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

**c - Le rhô de Spearman**

**Définition 3.4.11.** *soient $(X_1; Y_1)$ ; $(X_2; Y_2)$ et $(X_3; Y_3)$ trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi H. Le coefficient de corrélation de Spearman est définit par :*

$$\rho_S = \rho_{XY} = 3 \left( \mathbb{P}\left[ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0 \right] - \mathbb{P}\left[ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0 \right] \right)$$

Les propriétés du $\rho_S$ sont les suivantes :

— $\rho_S$ existe toujours.

— $-1 \leq \rho_S \leq +1$

— Si $X$ et $Y$ sont comonotones alors $\rho_S = 1$

— Si $X$ et $Y$ sont antimonotones alors $\rho_S = -1$ Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\rho_S = 0$

— il est invariant sous des transformations non linéaires strictement croissantes. C'est-à-dire si $a$ et $b$ sont deux fonctions strictement croissantes, alors :

$$\rho_S(a(X), b(Y)) = \rho_S(X, Y)$$

**Théorème 3.4.8.** *Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires continues de copule $C$. Le rho de Spearman de $(X, Y)$ est donné par :*

$$\begin{aligned} \rho_{XY} = \rho_s = 3Q(C, \Pi) &= 12 \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_{I^2} C(u, v) du dv - 3 \end{aligned}$$

(voir Embrechts (2003) [20]).

# Loi gaussienne multivariée

Soit X $= (X_1, ..., X_n)^T$ un vecteur de variable aléatoire de dimension n qui est distribuée suivant une loi gaussienne, alors la densité de la fonction de probabilité est

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left( -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

où
— $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$

— $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \ldots, \mu_n]^T$ , est le vecteur constitués des valeurs moyennes $\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$

— $\Sigma$ et la matrice de covariance, de dimension $nn$ non singulière, définie positive sur l'ensemble des réels avec des éléments $\Sigma_{ij} = \mathrm{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$

Quand X est répartie suivant une loi normale multivariée, nous utilisons la notation suivante :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \quad f(x|\mu, \Sigma) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

On peut alors déduire simplement l'expression de la fonction de répartition, qui est donnée par

$$\Phi(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu})\right] dy_1 \ldots dy_n$$

Dans le cas bivarié, la loi de la densité de probabilité est :
$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}\right)\right)$ où $\rho$ est la corrélation entre $x_1$ et $x_2$, et $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} \\ \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}$.
Dans ce cas, il est évident que $f(x_1) = \mathcal{N}(\mu_{x_1}, \sigma_{x_1})$ et $f(x_2) = \mathcal{N}(\mu_{x_2}, \sigma_{x_2})$

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Alessandro, P., *Multivariate GARCH models : Inference and Evaluation (2009)*

[2] Andersen, T.G., *Handbook of Financial Time Series, Springer. A paraître (2009).*

[3] Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31 ; 307 - 327 (1986).*

[4] Bougerol, P., et N. Picard, *Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. Journal of Econometrics 52 ; 115 - 127, (1992).*

[5] Charles, F., *Utilisation de copules paramétriques en présence de données observationnelles : cadre théorique et modélisations (2017).*

[6] Christophe, H, *Modèles ARCH - GARCH Applications à la VaR (2006-2007).*

[7] Christian, F. Jean-Michel, Z., *Modèle GARCH structure, inférence statistique et applications financières (2009).*

[8] Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, Econometrica (1982).*

[9] Engle et F.K. Kroner, *Multivariate simultaneous generalized ARCH. Econometric Theory, 11 :122–150, (1995).*

[10] EZZEBSA, A., *Modélisation des Marchés Financiers et Krachs Boursiers (2014).*

[11] Foirentini. G,Calzolari.G,Panattoni,L, *Analytic derivatives and the computation of GARCH estimates.Jornal of applied Econometriers 11,399-417,(1996).*

[12] Gouriéroux C. ), *ARCH Models and Financial Applications, Springer (1997).*

[13] Gumbel, E. J, *Bivariate logistic distributions, 56 :335–349, (1961).*

[14] Hull J.C., *Options, Futures, and Other Derivatives, Sixth Edition, Prentice Hall (2005).*

[15] Jean-Michel, Z., *Modèles GARCH et à volatilité stochastique (2007).*

[16] Johnston, J., and DiNardo, J., *Econometric Methods, Fourth Edition, New York : McGraw-Hill (1997).*

[17] Jondeau et Rockinger, *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions (2007)*

[18] Nelson, R. B, *An Introduction to Copulas. Springer Series in Statistics,Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2nd édition, (2006).*

[19] Olivier, R., *Modèle GARCH ,Application à la prévision de la volatilité (2007)*

[20] Savu C, Trede M., *Hierarchical Archimedean Copulas : International Conference on High Frequency Finance. Konstanz, Germany. 2006 ;.*

[21] Paul, E., *Using Copulae to Bound the Value-at-risk for Functions of Dependent Risks (1991)*

[22] Shih et Louis, *Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data (1995).*

[23] Song, P.X.-K., Fan, Y., Kalbfleisch, J.D., *Maximization by parts in likelihood inference. Journal of the American Statistical Association 100, 1145–1158, (2005).*

[24] Sklar, A., *Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8, (1959).*

[25] Xu, James Jianmeng,Joe, Harry, *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models.1996-10, (1996).*

[26] Yan, L. et Richard, L., *Efficient estimation of copula-GARCH models (2009)*