République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

DEBBAH Messaouda

Stabilisation asymptotique d'une chaîne de déplacement axial sous une tension spatio-temporellement variable avec contrôle aux limites

---

Soutenu le 19/ 06/2018 devant le jury composé de

Présidente :	K.SERIER.ABDALLAH	M.A.A	Université de Mèdèa
Examinateur :	H.AYADI	M.A.A	Université de Mèdèa
Promotrice :	F.BOULARIAH	M.A.A	Universitéde Mèdèa
Invité :	A.BOUTAGHOU	M.C.A	Université de Mèdèa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2017-2018

Remerciements

En premier lieu, je tient a témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant,

de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient a exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreuse de

mémoire, Madame :$BOULARIAH.F$, pour ces conseils, et son encouragement durant

la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincèrement les membres du jury.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université.

Yahia Farès de Médéa.

Dédicace

♢

je dédie ce

modeste travail

à mes très chèrs parents

qui m'ont toujours soutenu,

qui m'ont aide à affronter les diffi-

cultés, à tous mes enseignants pour leurs

utiles conseilles, leurs patience, leur persévérance.

Á mes frères : Amrou, Rabeh et ma soeur

Hadjira. À mes amies Hada, Naima,

Mounira, Meriem, Amina, ma

chère Amel, á tous mes

collègues de pro-

motion

♢

Table des matières

Résumé **6**

Abstract **7**

Introduction **8**

1 Rappels et outils de base **10**

1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels 10

1.1.1 Espaces de Lebesgue 10

1.1.2 Espaces de Sobolev 11

1.1.3 Espace H_L^k 11

1.2 Principe de Hamilton 11

1.3 Méthode de Lyapunov 12

1.3.1 Fonction definie positive 12

1.3.2 Fonction de Lyapunov 12

1.4 Semi-groupes des opérateurs linéaires bornés 12

1.4.1 Semi-groupe 12

1.4.2 Générateur infinitésimal 14

1.4.3 Opérateur dissipatif 16

1.5 Fonction lacalement Lipchitzienne 16

2 Formulation du problème **18**

2.1 Equation de mouvement 18

3 Stabilité asymptotique du mouvement **23**

3.1 Énergie mécanique du mouvement 23

3.2 Conception de lois robustes de contrôle des limites adaptatives 25

3.2.1 Lois de contrôle sous des perturbations inconnues 28

3.2.2 Contrôle des lois sous un paramètre et une perturbation inconnus . 31

4 Analyse de la stabilité **34**

Conclusion **47**

Bibliographie **48**

Résumé

Dans ce mémoire, on va étudier la supression des vibrations d'une chaîne du mouvement axial sous une tension variant spatio-temporellement et une force de perturbation aux limites inconnue, la chaîne a deux partie : partie non contrôlée et une partie contrôlée qui nous s'interesse.

On utlise le principe de Hamilton pour obtenir le modèle mathématique du système, et la méthode de Lyapunov pour concevoir des lois de contrôle pour assurer la reduction de vibration.

La stabilité asymptotique du système va étudier par la théorie de semi-groupe.

Mots-clés :

Stabilité asymptotique, principe de Hamilton, méthode de Lyapunov, théorie de semi-groupe.

Abstract

In this dissertation, we will study the suppression of the vibrations for an axially moving string under a spatiotemporally varying tension and a boundary disturbance force unknown, the string is divided into two parts : uncontrolled part and controlled part who is interested. we used the Hamilton's principle to obtain the mathematical model of the system, and Lyapunov method to desing the control laws for ensuring the vibration reduction.
The asymptotic stability of the système will study with semigroupe theory.
key-word :
Asymptotic stability, Hamilton's principle, Lyapunov method, semigroupe theory.

Introduction

Des matériaux continus en mouvement axial peuvent être trouvés dans diverses domaines d'ingénierie : bande magnétiques à grande vitesse, chaînes de transmission de puissance et ceintures et des feuilles de papier en cours de traitement. L'analyse dynamique et le contrôle des matériaux continus en mouvement axial ont reçu une attention croissante en raison de l'entrée des nouvelles applications dans des manipulateurs robotiques et structures spatiales flexibles, cependant, l'utilisation des systèmes mobilent axialement est limitée en raison de la vibration indésirable des systèmes dans des nombreuses applications et en particulier dans les systèmes de précision à grande vitesse.

L'excentricité de rouleau de support, non uniformité matérielle, perturbations aérodynamiques, ou processus de fabrication, (découpage, calendrier, impression ou galvanisation) peut provoquer des vibrations matérielles indésirables [10].

Le contrôle des vibrations est une solution importante pour réduire les vibrations et améliorer les performances dans des nombreux processus de transport axial.

Une loi de contrôle (obtenu sous une tension constante) aux limites, par opposition à une loi de contrôle répartie est non seulement facilement réalisable par des moyens actifs ou semi-actifs au limite, et le modèle mathématique n'est pas modifié par des capteurs et des actionneurs, mais la loi de contrôle aux limites peut être obtenir d'une fonction de Lyapunov qui est en relation avec l'énergie mécanique totale basée sur la dynamique du mouvement de bande et dispositifs de détection et d'actionnement. Les schémas de contrôle des vibrations comprennent sur les chaînes en mouvement axial [12, 6], en particulier, dans [4], un contrôleur au limite basé sur une technique adaptive indapté pour un système de corde déplace axialement a été proposé, ainsi la mise en oeuvre du schéma de contrôle n'est pas facile car la loi de contrôle a besoin de données distribuées. Dans [6], un système d'isolation

des vibrations avec un modèle de chaîne en mouvement axial réparti a été présenté, dans laquele il a été montré que l'énergie de la partie contrôlée converge asymptotiquement vers zéro par un contrôleur de frontière adaptif, en plus, pour obtenir la stabilité asymptotique de l'ensemble du système en boucle fermé, la pente de la partie non contrôlée de l'actionneur devrait également converge vers zéro mais malheureusement la loi de contrôle proposé ne satisfait pas cette condition cruciale en raison des vibrations de la partie non contrôlée.
Dans les situations pratique, presque tous les systèmes en déplacement axial ont la tension variant spatio-temporellement en raison de l'excentricité d'un rouleau de support, et/ ou perturbation externe, et/ ou gravité. . . etc [10], alors pour atteindre une meilleure performance de contrôle, un nouveau contrôleur au limite incorporant la tension spatio-temporellement variable doit être étudié.
Dans [11]qui est le principe de notre travail, un système d'une chaîne en déplacement axial qui est divisé en deux travées, c'est-à-dire : une travée contrôlée et une travée non contrôlée, par un actionneur à force transversale, sous une tension variant spatio-temporellement. Considérons des situations pratiques, la limite inférieure de tension est supposée être suffisamment plus grande que leurs dérivées, et la vibration de la partie non contrôlée agit comme une berturbation de l'actionneur. L'objectif principal est de supprimer les vibrations latérales dans la partie controlée avec un contrôleur implémentable.
Le modèle mathématique décrivant la dynamique de la corde mobile et de l'actionneur de rouleau tactile hydraulique pour exercer une force de contrôle aux bords sont représentés par une équation différentielle partielle (EDP) et une équation différentielle ordinaire (EDO), respectivement. Le système de (EDP) et (EDO) est analysé par la méthode de Lyapunov et la théorie de semi-groupe pour obtenir le contrôleur au borne et assurer la stabilité du système en boucle fermée.
Ce mémoire composé de quatre chapitres, le chapitre 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et des résultats nécessaire à la suite de ce travail, chapitre 2 est consacré l'equation du mouvement axial qui est obtenu par le principe de Hamilton.
Dans le chapitre 3 on va étudier la stabilité asymptotique de l'énergie mécanique et la Conception de lois robustes de contrôle des limites adaptatives par la méthode de Lyapunov, et dans le dernier chapitre, on va etudier l'analyse de la stabilité de la partie contrôlé par la théorie de semi-groupe .

Chapitre 1

Rappels et outils de base

1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

Définition 1.1 *On définie l'espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *par*

pour $1 \leq p < +\infty$

$$\mathrm{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable; \ \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

pour $p = +\infty$*, l'espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *défini par*

$$\mathrm{L}^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable; \quad \sup_\Omega \text{-ess}(u) < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \quad \sup_\Omega \text{-ess}(u)$$

L^p *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$ *et de Hilbert pour* $p = 2$ *muni de produit scalaire*

$$< f, g >_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1.p}(\Omega)$ par*

$$\mathrm{W}^{1.p}(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega);\ |\nabla u| \in \mathrm{L}^p(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1.p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 1 \leq p < +\infty \\ \max\left\{\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}; \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\right\}, & si \quad p = +\infty \end{cases}$$

L'espace $\mathrm{W}^{1.2}(\Omega)$ est un espace de Banach pour$1 \leq p \leq +\infty$ de plus pour $p = 2$ l'espace $\mathrm{W}^{1.2}(\Omega)$ noté $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est de Hilbert muni de produit scalaire

$$< u, v >_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = < u, v >_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + < \nabla u, \nabla v >_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

1.1.3 Espace $\mathrm{H}^k_{\mathrm{L}}$

Définition 1.3 *Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$; on définie l'espace $\mathrm{H}^k_{\mathrm{L}}(\mathbb{R})$ par*

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{L}}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \text{ et } f(0) = 0 \right\}$$

Théorème 1.1 *(Inégalité de Poincaré)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (ou Ω borné au moins dans une direction),
$1 \leq p < \infty$, alors il existe une constante positve $C = C(p, \Omega)$ tel que :

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathrm{W}^{1.p}_0(\Omega).$$

1.2 Principe de Hamilton

Définition 1.4 *Le mouvement d'un système réel , depuis l'instant t_1 jusqu'à l'instant t_2 est donnée par : $\int_{t_1}^{t_2}(T - V - W)dt$,*
où T est l'énergie cinétique, V l'énergie potentielle, δW le travail virtuel ,
pour que le système doit être stationnaire, il faut que $\delta \int_{t_1}^{t_2}(T - V - W)dt = 0$. [3].

1.3 Méthode de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c-à-d décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état déquilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative. [7], [2].

1.3.1 Fonction definie positive

Définition 1.5 *Soit* $V(t) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *est définie positive si :*

1. $V(t) > 0, \forall t \neq 0$.
2. $V(0) = 0$.

1.3.2 Fonction de Lyapunov

Définition 1.6 $V(t)$ *est une fonction de Lyapunov si :*

1. $V(t)$ *est définie positive*
2. $\dot{V}(t) \leq 0, t \neq 0, \dot{V}(0) = 0$.

Stabilité asymptotique(mécanique)
Si la dérivée totale $\dot{V}(t)$ est définie négative, alors on a la stabilité asymptotique.

Remarque 1.1 *La stabilité asymptotique implique la convergence de l'énergie vers zéro. [7]*

1.4 Semi-groupes des opérateurs linéaires bornés

Soit X un espace de Banach, et $\mathcal{L}$(X) l'espace des opérateurs continus de X dans luis même.[8]

1.4.1 Semi-groupe

Définition 1.7 *On appelle semi-groupe continu (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur* X *une famille* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $T(0) = I_{\mathrm{X}}$.
2. $T(t+s) = T(t)T(s),\ \forall\ t, s \geq 0$.
3. $\lim_{t \to >0} T(t)x = x,\ \forall x \in \mathrm{X}$.

On note $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *un* C_0*semi-groupe.*

Exemple 1.1 *Soit*

$$T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{X}$$
$$t \longrightarrow e^{tA}$$

1. $T(0) = I_{\mathrm{X}}$

   $T(t) = e^{tA} = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{t^n A^n}{n!} = I_{\mathrm{X}} + \sum\limits_{n \geq 1} \frac{t^n A^n}{n!}$

   pour $t = 0$ *on a* $T(0) = I_{\mathrm{X}} + \sum\limits_{n \geq 1} \frac{0^n A^n}{n!} = I_{\mathrm{X}}$

   donc

   $$T(0) = I_{\mathrm{X}}.$$

2. *Soit* $t \geq 0$ *;* $s \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t+s) = e^{(t+s)A} &= \sum_{m \geq 0} \frac{(t+s)^m A^m}{m!} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{A^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} s^k t^{m-k} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^m t^{m-k} s^k}{k!(m-k)!} = \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^{m-k} A^k t^{m-k} s^k}{k!(m-k)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{A^k s^k}{k!} \sum_{m \geq k} \frac{A^{m-k} t^{m-k}}{(m-k)!} \end{aligned}$$

   on pose $m - k = l \geq 0$

   donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \tfrac{A^k s^k}{k!} \sum_{l \geq 0} \tfrac{A^l t^l}{l!} &= e^{sA} e^{tA} \\ &= T(s)T(t) \end{aligned}$$

3. *L'application*

$$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{X}$$
$$t \longrightarrow T(t)z$$

est continue en $0^+,\ \forall z \in \mathrm{X}$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} T(t)z &= \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0} \frac{t^n A^n}{n!} z \\ &= \lim_{t\to 0^+} (I_{\mathrm{X}} z + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n A^n}{n!} z \\ &= \lim_{t\to 0^+} (z + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n A^n}{n!} z = z.\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$T(0)z = I_{\mathrm{X}} z = z,$$

donc

$$T(0)z = \lim_{t\to 0^+} T(t)z = z$$

d'ou l'application est continue,

alors $T(t)$ *est un* C_0*semi-groupe.*

Définition 1.8 *On appelle semi-groupe uniformément continu* $\{T(t)\}_{t>0} \subset \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *qui vérifie la propriété suivante :*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

Définition 1.9 *Le* C_0*-semi-groupe* $T(t)$ *est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives* M *et* α *telles que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t},$$

de plus $T(t)$ *est de contraction si :*

$$\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

1.4.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.10 *On appelle générateur infinitésimal d'un* C_0*semi-groupe* $\{T(t)\}_{t>0}$ *un opérateur* A *définit sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathrm{X} : \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} existe \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Exemple 1.2 *De l'exemple(1.1), on a*

$$\begin{aligned} \frac{T(t)z - z}{t} &= \frac{\sum_{n\geq 0} \frac{t^n A^n}{n!} z - z}{t} \\ &= \frac{z + tAz + \sum_{n\geq 2} \frac{t^n A^n}{n!} z - z}{t}, \end{aligned}$$

on pose $n - 1 = m$

$$\begin{aligned} \frac{T(t)z - z}{t} &= Az + \sum_{n\geq 2} \frac{t^{n-1} A^n z}{n!} \\ &= Az + \sum_{m\geq 1} \frac{t^m A^{m+1}}{(m+1)!} z, \end{aligned}$$

on passe à la limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} (Az + \sum_{m\geq 1} \frac{t^m A^{m+1}}{(m+1)!} z) = Az,$$

d'où

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = Az,$$

et par conséquent, A est le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Définition 1.11 *(Famille stable) Une famille $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ des génerateurs infinitésimals d'un C_0semi-groupe est stable s'il existe deux constants $M \geq 1$ et α (le constant de stabilité) tels que :*

- $]\alpha, +\infty[\subset \rho(A(t)) \quad t \geq 0.$
- $\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda; A(t_j)) \| \leq M(\lambda - \alpha)^k \quad \lambda > \alpha \textit{ et } 0 \leq t_1 \leq t_2 ... \leq t_k, \ k = 1, 2...$

avec $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \textit{ est inversible}\}$

et

$$R(.; A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

1.4.3 Opérateur dissipatif

Définition 1.12 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur lineaire , on dit que A est dissipatif si et seulment si*

$$< Ax; x >\leq 0,\ \forall x \in D(A),$$

avec $< .;. >$ est le produit scalaire.

Définition 1.13 *(Système d'évolution) Une famille de deux paramètres d'un operateur lineaire borné $U(s,t)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, dans* X *est un système d'évolution(definition5.3,p129)[8] s 'il vérifie les conditions suivantes :*

1. $U(s,s) = I_d,\ s \in [0,T]$.
2. $U(t,r)U(r,s) = U(t,s),\ 0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.
3. $(t,s) \longrightarrow U(t,s)$ *est fortement continu,* $0 \leq s \leq t \leq T$.

Théorème 1.2 *(théorème5.3.p147[8])*
Soit$\{A(t)\}_{t\geq 0}$ une famille stable des génerateurs infinitésimal d'un C_0 semi-groupe dans X *tel que $D(A(t)) = D$ est independent de t et pour tout $v \in D$, $A(t)v$ est continuellement différentiable sur* X. *Si $f \in \mathcal{C}^1([s,t];\mathrm{X})$, alors pour tout $v \in D$ le problème*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU(t) + f(t), 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = v. \end{cases}$$

admet une solution unique sous la forme :

$$u(t) = u(t,s)v + \int_s^t u(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

1.5 Fonction lacalement Lipchitzièn̈ne

I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert d'un espace de Banach X, f une application continue de $I \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.14 *Soit $A \subset I \times \Omega$.*
L'application f est dite lipschitzièn̈ne en la deuxième variable sur A. [2].
s' il existe $l > 0$ tel que :$\forall (t,x_1) \in A, (t,x_2) \in A$,

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \|_{\mathrm{X}} \leq l \| x_1 - x_2 \|_{\mathrm{X}} .$$

. L'application f est dite localement lipschitzièn*ne* en la deuxième variable si tout point de $I \times \Omega$ admet un voisinage A sur lequel f est lipschitzienne en la deuxième variable.

Chapitre 2

Formulation du problème

2.1 Equation de mouvement

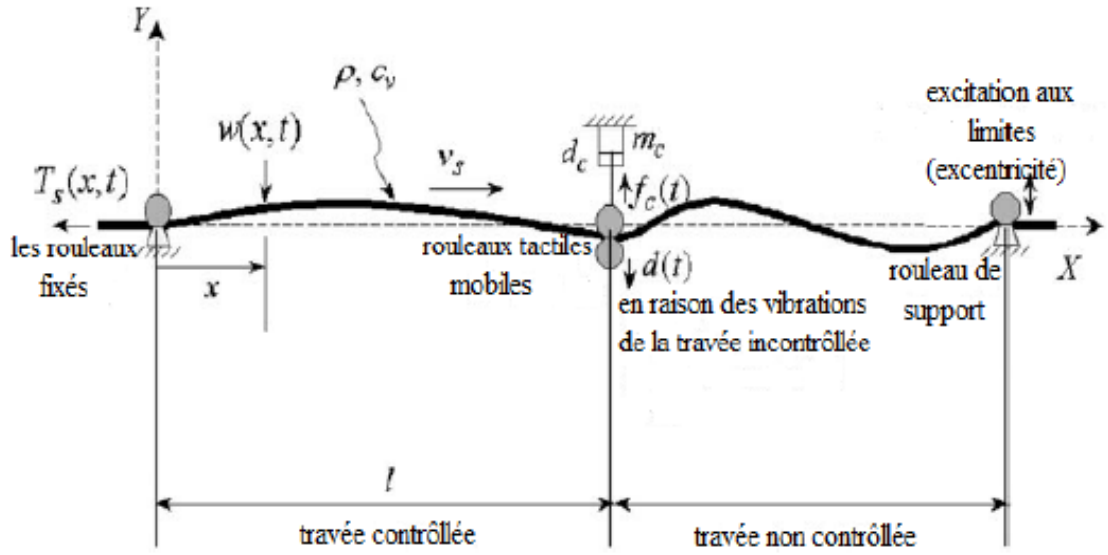


FIGURE 2.1 – Un schéma de contrôle du déplacement axial avec un actionneur hydraulique.

Figure2.1 représente un schéma d'une chaîne déplace axialement pour la conception du système de contrôle, Le rouleau à la limite gauche est supposé fixe c'est à dire, fixé dans le sens qu'il n'y a aucun mouvement vertical mais permet à la corde de se déplacer dans le sens horizontal.

Les deux rouleaux tactiles, où l'entrée de contrôlle (force) est exercée par l'actionneur

hydraulique, sont situés dans la section centrale de la chaîne. Les rouleaux tactiles divisent la chaîne en deux parties, c'est à dire : une travée contrôlée et une travée non contrôlée comme montré dans figure2.1. Si seulement la partie de la corde contrôllée est prise en compte, les rouleaux tactiles jeuent un role comme la limite droite de la travée contrôlée.

On note qu'il apparaît une perturbation à la limite droite en raison de la vibration de la partie non contrôlée de la chaîne et de l'excentricité du rouleau de support qui provoque une excitation périodique.

Soit t le temps, x est la coordonnée spatiale au long du mouvement, v_s est la vitesse axiale de la chaîne, $w(x,t)$ est le déplacement transversal de la chaîne à la coordonnée spatiale x et le temps t et l la longueur de la partie contrôlée de gauche à droite. Aussi, soit ρ la masse par unité de longueur, $T_s(x,t)$ la tension appliquée à la chaîne, c_v le coefficient d'amortissement visqueux de la chaîne.

Les coefficients de masse et d'amortissement de l'actionneur hydraulique sont m_c et d_c (respectivement).

La force de contrôle $f_c(t)$ est appliquée aux rouleaux tactiles pour supprimer les vibrations transversales de la partie contrôlée.

$d(t)$ est la force externe de perturbation inconnue en raison de la vibration transversale de la partie non contrôlée, qui est uniformément bornée.

Remarque 2.1 *Puisque la corde se déplace à une vitesse constante v_s, l'opérateur dérivé total (dérivé matériel) en ce qui concerne le temps devrait être défini par :*

$$\dot{(.)} \cong d(.)/dt = (.)_t + v_s(.)_x,$$

où $(.)_t = \partial(.)/\partial t$ et $(.)_x = \partial(.)/\partial x$ sont les dérivées partielles.

L'energie cinétique T, l'energie potentielle V et le travail virtuel δW par les forces externes de la partie contrôlée entre $x = 0$ et $x = l$ comprenant l'actionneur hydraulique sont donnés respectivement par :

$$T = \int_0^l \rho(v_s w_x + w_t)^2 dx + \frac{1}{2} m_c w_t^2(l,t), \tag{2.1}$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l T_s(x,t) w_x^2 dx, \tag{2.2}$$

$$\delta W = f_c \delta w(l,t) - \int_0^l c_v(w_t + v_s w_x)\delta w dx - d_c w_t(l,t)\delta w(l,t) - d(t)\delta w(l,t), \tag{2.3}$$

où

$$w_x = w_x(x,t) \quad et \quad w_t = w_t(x,t).$$

Maintenant, on applique le principe de Hamilton, c'est à dire,

$$\delta \int_{t_0}^{t_2} (T - V + W)dt = 0,$$

d'abord, les variations (δ) [5] de (2.1) et de (2.2) sont données respectivement par :

$$\delta T = \rho \int_0^l (w_t + v_s w_x)(\delta w_t + v_s \delta w_x)dx + m_c w_t \delta w_t, \tag{2.4}$$

$$\delta V = \int_0^l T_s(x,t) w_x \delta w_x, \tag{2.5}$$

on remplace δT, δV, δW dans le principe de Hamilton, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1}(\delta T - \delta V + \delta W)dt &= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho(w_t(x,t) + v_s w_x(x,t))\delta w_t(x,t)dxdt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l T_s(x,t) w_x(x,t)\delta w_x(x,t)dxdt + \int_{t_0}^{t_1} m_c w_t(l,t)\delta w_t(l,t)dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} f_c(t)\delta w(l,t)dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_v(w_t(x,t) + v_s w_x(x,t))\delta w(x,t)dxdt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} d_c w_t(l,t)\delta w(l,t)dt - \int_{t_0}^{t_1} d(t)\delta w(l,t)dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho(v_s w_t(x,t) + v_s^2 w_x(x,t))\delta w_x(x,t)dxdt \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

par intégration par partie de (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1}(\delta T - \delta V + \delta W)dt &= \int_0^l(\rho w_t + \rho v_s w_x)\delta w|_{t_0}^{t_1}dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho w_{tt} + \rho v_s w_{xt})\delta w dxdt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}(\rho v_s w_t + \rho v_s^2 w_x)\delta w|_0^l dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho v_s w_{tx} + \rho v_s^2 w_{xx})\delta w dxdt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} T_s(x,t) w_x \delta w|_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (T_s(x,t)w_x)_x \delta w dxdt + m_c w_t(l,t)\delta w|_{t_0}^{t_1} \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1}(m_c w_{tt} + f_c(t) + d_c w_t + d(t))\delta w dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_v(w_t + v_s w_x)\delta w dxdt \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Comme l'extrémité à gauche est fixé, c'est à dire : $w(0,t) = 0$, et par conséquent, (2.7) reécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho w_{tt}(x,t)+2\rho v_s w_{xt}(x,t))\delta w dx dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho v_s^2 w_{xx}(x,t)-(T_s(x,t)w_x(x,t))_x)\delta w dx dt \\ & -\int_{t_0}^{t_1}(m_c w_{tt}(l,t)-f_c(t)+d_c w_t(l,t)+d(t))\delta w dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_v(w_t(x,t)+v_s w_x(x,t))\delta w dx dt \\ & -\int_{t_0}^{t_1} T_s(l,t)w_x(l,t)\delta w dt + \int_{t_0}^{t_1}(\rho v_s w_t(l,t)+\rho v_s^2 w_x(l,t))\delta w dt \\ = \;& 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

alors l'équation directrice et les conditions aux limites de la partie contrôlée de la chaîne déplace axialement sont données par :

$$\begin{cases} \rho w_{tt}(x,t)+2\rho v_s w_{xt}(x,t)+\rho v_s^2 w_{xx}(x,t)-(T_s(x,t)w_x(x,t))_x & x\in]0,l[, \quad (2.9) \\ +c_v(w_t(x,t)+v_s w_x(x,t))=0, & \\ w(x,0)=w_0(x),\ w_t(x,0)=w_{t0}(x), & (2.10) \\ w(0,t)=0, & (2.11) \\ f_c(t)=m_c w_{tt}(l,t)+(d_c-\rho v_s)w_t(l,t)+(T_s(l,t)-\rho v_s^2)w_x(l,t) & (2.12) \\ +d(t). & \end{cases}$$

Remarque 2.2 - *L'equation (2.9)est une équation différentielle partielle (EDP) linéaire regissant du mouvement tranversal $w(x,t)$ du mouvement axial de la chaîne.*

- *Les equations (2.10)et (2.11) sont les conditons initiales et le condition au limite de la partie contrôlée(respectivement).*
- *L'equation(2.12) est une équation différentielle ordinaire(ODE) qui décrit le mouvement de l'actionneur hydraulique en conformité avec la force transversale au $x = l$.*

Notation 2.1 *Pour la brièveté de notation, toutes les variables aux limites seront écrites sans temps explicite :*

$$\begin{aligned} w(0,t) &= w(0), \\ w(l,t) &= w(l), \\ T_s(l,t) &= T_s(l). \end{aligned}$$

Comme montré dans les équations ci-dessus, la tension$T_s(x,t)$ est une fonction variant spatio-temporellement, qui varie de façon inconnue mais bornée.

Si la chaîne se déplace verticalement, la force gravitationnelle $\rho g x$ qui agit comme une tension supplémentaire à la chaîne, ne peut pas être négligé.

De même, la tension elle-même peut varier dans le temps en raison de l'excentricité d'un rouleau de support, qui provoque une excitation périodique, ainsi la variation de tension $T_s(x,t)$ dans la chaîne doit être incorporée dans la conception de la loi de contrôle.

On suppose que $T_s(x,t)$ est lisse et uniformément délimitée comme suit :

$$0 < T_{s,min}(x,t) \leq T_s(x,t) \leq T_{s,max}(x,t), \tag{2.13}$$

$$|(T_s(x,t))_t| \leq (T_s(x,t))_{t,max}, \tag{2.14}$$

$$|(T_s(x,t))_x| \leq (T_s(x,t))_{x,max}, \tag{2.15}$$

pour tout $x \in [0,l]$, $t \geq 0$ et certaines constantes connues a priori, $T_{s,min}$, $T_{s,max}$, $(T_s)_{t,max}$, $(T_s)_{x,max}$.

Considérant des situations pratiques, on suppose également que la borne inférieure $T_{s,min}$ est suffisamment plus grande que $(T_s)_{t,max}$ et $(T_s)_{x,max}$ c'est à dire :

$$T_{s,min}(x,t) > (T_s(x,t))_{t,max},$$

$$T_{s,min}(x,t) > (T_s(x,t))_{x,max}.$$

Chapitre 3

Stabilité asymptotique du mouvement

3.1 Énergie mécanique du mouvement

L'objectif de contrôle est maintenant de stabiliser asymptotiquement l'énergie vibratoire de la partie contrôlée avec une condition variant dans le temps à $x = l$.

À partir de (2.1) et (2.2), l'énergie $E_m(t)$ de la chaîne de la partie contrôlée est donnée par :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(v_s w_x + w_t)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l T_s(x,t) w_x^2 dx, \tag{3.1}$$

où, la vitesse de déplacement de la chaîne v_s est une constante.

Dans le reste de cette chapitre, afin de fournir à une idée spécifique sur le fonctionnement d'un contrôle au limite, la dynamique de la chaîne mobile avec des frontière mais permettant toujours un mouvement axial est d'abord analysée.

La dérivée de $E_m(t)$ par rapport au temps est défini par :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\partial E_m}{\partial t} + v_s \frac{\partial E_m}{\partial x}.$$

D'abord, on a :

$$\frac{\partial E_m(t)}{\partial t} = \int_0^l \rho(v_s w_x + w_t)(v_s w_{xt} + w_{tt}) dx + \frac{1}{2}\int_0^l (T_s)_t w_x^2 dx + \int_0^l T_s w_{xt} w_x dx,$$

$$v_s \frac{\partial E_m(t)}{\partial x} = \int_0^l \rho v_s (v_s w_x + w_t)(v_s w_{xx} + w_{tx}) dx + \frac{1}{2}\int_0^l v_s (T_s)_x w_x^2 dx + \int_0^l v_s T_s w_{xx} w_x dx,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{dE_m(t)}{dt} &= \int_0^l \rho(v_s w_x + w_t)(w_{tt} + v_s^2 w_{xx} + 2v_s w_{tx})dx + \frac{1}{2}\int_0^l ((T_s)_t + v_s(T_s)_x)w_x^2 dx \\ &\quad + \int_0^l T_s w_x(w_{xt} + v_s w_{xx})dx,\end{aligned}$$

d'aprés (2.9) on a :

$$\rho(w_{tt} + v_s^2 w_{xx} + 2v_s w_{tx}) = (T_s(x,t)w_x)_x - c_v(w_t + v_s w_x),$$

alors $\frac{dE_m(t)}{dt}$ devient :

$$\begin{aligned}\frac{dE_m(t)}{dt} &= \int_0^l (v_s w_x + w_t)((T_s w_x)_x - c_v(w_t + v_s w_x))dx + \int_0^l T_s w_x(w_{xt} + v_s w_{xx})dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^l ((T_s)_t + v_s(T_s)_x)w_x^2 dx,\end{aligned}$$

où $T_s = T_s(x,t)$.

Par intégration par partie :

$$\int_0^l (w_t(T_s w_x)_x + T_s w_x w_{xt})dx = T_s w_t w_x|_0^l,$$

$$\int_0^l w_x(T_s w_x)_x dx = T_s w_x^2|_0^l - \int_0^l T_s w_x w_{xx} dx,$$

d'après les calculs, ainsi que les conditions aux limites fixes, $\frac{dE_m(t)}{dt}$ reécrite sous la forme :

$$\dot{E_m}(t) = -c_v\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx + v_s T_s(l)w_x^2(l) - v_s T_s(0)w_x^2(0) + \frac{1}{2}\int_0^l ((T_s)_t + v_s(T_s)_x)w_x^2 dx. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1 *Á partir de (2.17), on remarque que :*

- *L'amortissement visqueux(c_v) réduit l'énergie mécanique de la chaîne déplace axialement, en raison de l'existence de $-c_v\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx$.*
- *Même si les déplacements transversaux aux deux limites sont nuls, la force transversale en raison de la tension instantanée de la chaîne $v_s T_s w_x$ à chaque limite peut encore déformer la chaîne.*
- *La dérivée temporelle de $T_s(x,t)$ augmente le flux d'énergie par le facteur de w_x^2.*
- *La dernière observation justifie pleinement que le changement du $T_s(x,t)$ ne peut pas être simplement négligé.*

Conclusion

. Il est conclu que pour la chaîne qui déplace avec des conditions aux limites fixes, la tension de la chaîne au limte droite $x = l$ et la vitesse de changement de la tension $T_s(x,t)$ devrait être correctement choisis pour diminuer l'énergie mécanique $E_m(t)$.

. Si $\dot{T}_s(x,t)$ et les conditions aux limites variant avec le temps sont uniformément bornées, alors on peut conclure que $w(x,t)$ et $w_t(x,t)$ pour $0 \leq x \leq l$ sont uniformément bornées.

. Le déplacement de bande et la vitesse de la partie non contrôlée sont également uniformément limités en fin de compte si les conditons variant avec le temps aux limites droite et gauche de la partie non contrôlée, c'està dire, l'actionneur hydraulique du rouleau tactile et le rouleau de support sont délimités.

. Puisque w_x et w_t au rouleau de support avec une excitation périodique sont vraiment borné, seule la limite de ceux à l'actionneur est alors nécessaire.

. Le déplacement de la partie non contrôlée ne peut pas converger vers zéro en raison de l'excitation périodique du rouleau de support, ainsi de telles vibrations indésirables de la partie non contrôlée donnent un effet à l'actionneur hydraulique comme une force externe.

La force externe inconnue qui est bornée, appliquée à l'actionneur est défini par $d(t)$ et est traité comme une perturbation de la limite droite sur la partie contrôlée.

3.2 Conception de lois robustes de contrôle des limites adaptatives

Une loi robuste de contrôle aux limites et des lois d'adaptation, pour supprimer l'énergie vibratoire de la partie contrôlée sont obtenues en utilisant la méthode de Lyapunov.
La sélection d'une fonction de Lyapunov et la construction d'une loi de contrôle efficace sont les problèmes les plus importantes dans la méthode de Lyapunov.
Comme représenté dans (2.9)-(2.12), le mécanisme de contrôle est couplé au système de la

chaîne puisque le système de contrôle est attaché à la limite de la chaîne à partir de laquelle la force de contrôle f_c est appliquée. Par conséquent, pour obtenir la stabilité asymptotique du système couplé (2.9)-(2.12), la convergence du déplacement de l'actionneur hydraulique $w(l)$ et la vitesse $w_t(l)$ doit également être satisfaite.
Ainsi, une modification de (2.16) est recherchée pour obtenir une fonction de Lyapunov approprié du système couplé (2.9)-(2.12).

Lemme 3.1 *Soit w de $[0,l]\times\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, d'aprés la condition au limite (2.11)et l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_1 positive telle que :*

$$\int_0^l w^2 dx \leq C_1 \int_0^l w_x^2 dx. \tag{3.3}$$

Preuve.

Soit $w : [0,l]\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit la norme :

$$\|w(x,t)\| = \left(\int_0^l w^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'aprés l'inégalité de poincaré , il existe une costante C_1 positve, telle que :

$$\|w(x,t)\| \leq C_1\|\nabla w\|,$$

implique que

$$\left(\int_0^l w^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1\left(\int_0^l w_x^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\int_0^l w^2(x,t)dx \leq C_1\int_0^l w_x^2(x,t)dx.$$

■

Remarque 3.2 *À partir de la relation (3.3), on remarque que la convergence du déplacement transversal $w(x,t)$ pour $x\in[0,l]$ vers zéro est assuré en considérant la convergence de la pente $w_x(x,t)$ pour $x\in[0,l]$ vers zéro, c'est à dire :*

si

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^l w_x^2 dx = 0,$$

alors

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^l w^2 dx = 0.$$

La stabilité asymptotique de l'actionneur hydraulique peut être analysée en ajoutant la limite de pente au $x = l$ dans l'énergie mécanique, c'est à dire :

$$V_m(t) = E_m(t) + \frac{1}{2} m_c (w_t^2(l) + w_x^2(l)).$$

Maintenant, en supposant que la perturbation $d(t)$ est uniformément bornée par μ_d, c'est à dire :

$$|d(t)| \leq \mu_d,$$

où μ_d est une constante positive inconnue.

La fonction définie positive $V(t)$ qui remplace $V_m(t)$ est

$$\begin{aligned} V(t) &= \alpha V_0(t) + 2\beta \textstyle\int_0^l \rho x w_x (w_t + v_s w_x) dx + \frac{1}{2\gamma_d} \tilde{\mu}_d^2 \\ &= \alpha V_0(t) + \beta \textstyle\int_0^l \rho x (w_x + (w_t + v_s w_x))^2 dx - \beta \int_0^l \rho x w_x^2 dx \\ &\quad -\beta \textstyle\int_0^l \rho x (w_t + v_s w_x)^2 dx + \frac{1}{2\gamma_d} \tilde{\mu}_d^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec α et β sont des constants positifs et

$$V_0(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (w_t + v_s w_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l T_s w_x^2 dx + \frac{1}{2\alpha} m_c (\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l) w_x(l))^2,$$

$$\beta \int_0^l \rho x (w_t + v_s w_x)^2 dx \leq \beta \int_0^l \rho l (w_t + v_s w_x)^2 dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^l \rho (w_t + v_s w_x)^2 dx,$$

$$\beta \int_0^l \rho x w_x^2 dx \leq \beta \int_0^l \rho l w_x^2 dx \leq \frac{\alpha}{2} T_{s,min} \int_0^l w_x^2 dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^l T_s(x,t) w_x^2 dx,$$

$$\tilde{\mu_d} = \hat{\mu_d} - \mu_d,$$

et $\hat{\mu_d}$ est l'estimateur adaptive de μ_d, ce qui sera indiqué dans la suite.

À partir de (3.4) on remarque que $V(t)$ est définie postive si $\alpha > 2\beta l$ et $T_{s,min} > \rho$.

Lemme 3.2 *On considère la fonction $V^*(t)$, où*

$$V^*(t) = V(t) - \frac{1}{2\gamma_d} \tilde{\mu}_d^2,$$

qui est équivalente à $V_0(t)$, c-à-d, il existe un constant positif C_2, telle que :

$$(\alpha - C_2) V_0(t) \leq V^*(t) \leq (\alpha + C_2) V_0(t), \tag{3.5}$$

$V^*(t)$ est aussi équivalent à $V_m(t)$.

Preuve.

Pour montrer (3.5), il suffit de montrer l'inégalité suivante :

$$-C_2V_0(t) \leq 2\beta \int_0^l \rho x w_x(w_t + v_s w_x)dx \leq C_2V_0(t),$$

en utilisant l'inégalité $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx\right)$,

$$\begin{aligned}
2\beta \int_0^l \rho x w_x(w_t + v_s w_x)dx &\leq \beta\rho l\left(\int_0^l w_x^2 dx + \int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx\right) \\
&\leq \beta\rho l\left(\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx\right) + \beta l\left(\int_0^l T_{s,min}(x,t) w_x^2 dx\right) \\
&\leq \beta\rho l\left(\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx\right) + \beta l\left(\int_0^l T_s(x,t) w_x^2 dx\right) \\
&\quad + \frac{\beta l}{\alpha} m_c(\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l) w_x(l))^2 \\
&\leq 2\beta l V_0(t),
\end{aligned}$$

si $C_2 = 2\beta l > 0$, alors :

$$-C_2V_0(t) \leq 2\beta \int_0^l \rho x w_x(w_t + v_s w_x)dx \leq C_2V_0(t),$$

donc

$$\alpha V_0(t) - C_2V_0(t) \leq \alpha V_0(t) + 2\beta \int_0^l \rho x w_x(w_t + v_s w_x)dx \leq \alpha V_0(t) + C_2V_0(t),$$

d'où le résultat.

■ En conséquence, la fonction définie positive $V(t)$ est considéré comme une fonction de Lyapunov du système couplé (2.9)-(2.12).

3.2.1 Lois de contrôle sous des perturbations inconnues

Un contrôleur de force au limite adaptatif robuste est conçu pour stabiliser asymptotiquement la partie contrôlée de la chaîne en mouvement axial en présence de la tension spatio-temporellement variable et de la perturbation aux limites inconnue alors que tous les

signaux dans la boucle fermée restent bornée.

La derivée de $V(t)$ par rapport au temps est :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \alpha\dot{V}_0 + \tfrac{d}{dt}\left[2\beta\int_0^l \rho x w_x(w_t+v_s w_x)dx\right] + \tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d \\ &= \alpha\dot{V}_0(t) + 2\beta\rho\int_0^l x(w_{xt}+v_s w_{xx})(w_t+v_s w_x)dx \\ &\quad +2\beta\rho\int_0^l x w_x(w_{tt}+2v_s w_{xt}+v_s^2 w_{xx})dx + \tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d \\ &= \alpha\dot{V}_0(t) + \beta\rho[x(w_t+v_s w_x)^2] - \beta\rho\int_0^l (w_t+v_s w_x)^2 dx \\ &\quad +2\beta\int_0^l x w_x((T_s w_x)_x - c_v(w_t+v_s w_x)dx + \tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d,\end{aligned} \tag{3.6}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha\dot{V}_0(t) &= -\alpha c_v\int_0^l (w_t+v_s w_x)^2 dx + \alpha v_s T_s(l)w_x^2(l) - \alpha v_s T_s(0)w_x^2(0) \\ &\quad +\tfrac{\alpha}{2}\int_0^l ((T_s)_t + v_s(T_s)_x)w_x^2 dx + (\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l))(f_c(t)-d(t)) \\ &\quad -(d_c-\rho v_s)w_t(l) + \rho v_s^2 w_x(l) + \tfrac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)w_{xt}(l) \\ &\quad -(\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l))T_s(l)w_x(l),\end{aligned}$$

on intègre par partie :

$$2\int_0^l x w_x(T_s w_x)_x dx = \left[x T_s w_x^2\right]_0^l - \int_0^l T_s w_x^2 dx + \int_0^l x(T_s)_x w_x^2 dx.$$

L'inégalité suivante est également utilisée :

$$uv \le \gamma u^2 + \frac{1}{\gamma}v^2\,,\ \textit{pour tout}\ \gamma > 0,$$

d'où :

$$\int_0^l x w_x(w_t+v_s w_x)dx \le l\gamma_1\int_0^l w_x^2 dx + \frac{1}{\gamma_1}\int_0^l (w_t+v_s w_x)^2 dx, \gamma_1 > 0.$$

Ainsi, on remplace (2.11),(2.13) et (2.15) dans (3.6), avec un actionneur au limite droite au $x = l$ et la condition fixé à la limite gauche, la derivée de la fonction de Lyapunov $V(t)$, donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\le -(\alpha c_v + \beta\rho - \tfrac{2\beta c_v l}{\gamma_1})\int_0^l (w_t+v_s w_x)^2 dx \\ &\quad -\left\{\beta T_{s,min} - (\beta l + \tfrac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max} - \tfrac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max} - 2\beta c_v\gamma_1 l\right\}\int_0^l w_x^2 dx \\ &\quad -\alpha v_s T_s(0)w_x^2(0) + \alpha T_s(l)w_t(l)w_x(l) + (\alpha v_s + \beta l)T_s(l)w_t(l)w_x^2(l) \\ &\quad +\beta\rho l(w_t(l)+v_s w_x(l))^2 + \tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d - \{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\}T_s(l)w_x(l) \\ &\quad +\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\} \\ &\quad \times\{f_c - d - (d_c-\rho v_s)w_t(l) + \rho v_s^2 w_x(l) + \tfrac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)w_{xt}(l)\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

On propose alors une loi robuste de contrôle de la force au limite comme suit :

$$f_c = (d_c - \rho v_s)w_t(l) - \rho v_s^2 w_x(l) - \frac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)w_{xt}(l) + f_d + k_1 w_x(l) - k_2 w_t(l), \quad (3.8)$$

avec :

$$0 < k_1 < \frac{T_s(l)\beta l - \beta\rho l v_s^2}{\alpha v_s + 2\beta l} \ ; \ k_2 > \frac{\beta\rho l}{2\alpha} \ \ et \ \ k_2 = \frac{k_1\alpha + 2\beta\rho l v_s}{\alpha v_s + 2\beta l},$$

et le terme supplémentaire $f_d(t)$ est considéré comme un nouveau signal d'entrée à déterminer sur la base d'une stratégie robuste de contrôle et il est donné par :

$$f_d(t) = \frac{\tilde{\mu}_d^2(t)}{\hat{\mu}_d(t)|\bar{w}(l)| + \varepsilon_d}\bar{w}(l),$$

où

$$\bar{w}(l) = \{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\}, \ \varepsilon_d > 0,$$

et La loi d'adaptation $\hat{\mu}_d$ est proposé par :

$$\dot{\hat{\mu}}_d(t) = -\delta_d\hat{\mu}_d(t) + \gamma_d|\bar{w}(l)|, \quad avec \ \ \delta_d > 0 \ \ et \ \ \gamma_d > 0,$$

le terme $-\delta_d\hat{\mu}_d(t)$ est intentionnement inséré pour s'assurer que $\hat{\mu}_d$ ne devient pas illimité. Donc, $\dot{V}(t)$ devient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \ \leq \ & -(\alpha c_v + \beta\rho - \tfrac{2\beta c_v l}{\gamma_1})\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx \\
& - \left\{\beta T_{s,min} - (\beta l + \tfrac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max} - \tfrac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max} - 2\beta c_v\gamma_1 l\right\}\int_0^l w_x^2 dx \\
& -\alpha v_s T_s(0)w_x^2(0) + \beta\rho l(w_t(l) + v_s w_x(l))^2 - \beta l T_s(l)w_x^2(l) + \tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d \\
& +\{k_1 w_x(l) - k_2 w_t(l)\} \times \{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\} \\
& +\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\}(f_d + d)
\end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\leq \ & -(\alpha c_v + \beta\rho - \tfrac{2\beta c_v l}{\gamma_1})\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx \\
& - \left\{\beta T_{s,min} - (\beta l + \tfrac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max} - \tfrac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max} - 2\beta c_v\gamma_1 l\right\}\int_0^l w_x^2 dx \\
& -\alpha v_s T_s(0)w_x^2(0) - \{\beta l T_s(l) - k_1(\alpha v_s + 2\beta l) - \beta\rho l v_s^2\}w_x^2(l) \\
& -(2k_2\alpha - \beta\rho l)w_t^2(l) + \{2\beta\rho l v_s + k_1\alpha - k_2(\alpha v_s + 2\beta l)\}w_x(l)w_t(l) \\
& -\tfrac{\delta_d}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2 + \varepsilon_d + \tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}\mu_d,
\end{aligned}$$

où

$$\{\beta l T_s(l) - k_1(\alpha v_s + 2\beta l) - \beta\rho l v_s^2\} > 0 \ ; \ \{2\beta\rho l v_s + k_1\alpha - k_2(\alpha v_s + 2\beta l)\} > 0 \ \ et \ \ (2k_2\alpha - \beta\rho l) > 0,$$

on note qu'on obtenu la deuxième inégalité dans (3.9) par :

$$\begin{aligned}\bar{w}(l)(f_d+d)+\tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d &\leq -\tfrac{\hat{\mu}_d^2}{\hat{\mu}_d|\bar{w}(l)|+\varepsilon_d}|\bar{w}(l)|^2+\mu_d|\bar{w}(l)|-\tfrac{\delta_d}{\gamma_d}\hat{\mu}_d\tilde{\mu_d}+\tilde{\mu_d}|\bar{w}(l)| \\ &= \tfrac{-\hat{\mu}_d^2|\bar{w}|^2+\hat{\mu}_d^2|\bar{w}|^2+\hat{\mu}_d|\bar{w}|\varepsilon_d}{\hat{\mu}_d|\bar{w}|+\varepsilon_d}-\tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2-\left(\sqrt{\tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}}\tilde{\mu}_d+\sqrt{\tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}}\mu_d\right)^2+\tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}\mu_d \\ &\leq \varepsilon_d-\tfrac{\delta_d}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2+\tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}\mu_d,\end{aligned}$$

on prend, $T_{s,min}$ est suffisamment grand, les valeurs positives α,β et $\gamma_i, i=1,2$, peut être choisi pour satisfaire :

$$\left(\alpha c_v+\beta\rho-\frac{2\beta c_v l}{\gamma_1}\right)>0,$$

$$\left\{\beta T_{s,min}-(\beta l+\frac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max}-\frac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max}-2\beta c_v\gamma_1 l\right\}>0.$$

Ainsi, les éléments suivants sont obtenus :

$$\dot{V}(t)\leq -C_3\left(\int_0^l(w_t+v_s w_x)^2dx+\int_0^l w_x^2dx+w_t^2(l)+w_x^2(l)\right)+v(t), \tag{3.10}$$

où

$$C_3=min\big\{\alpha c_v+\beta\rho-\frac{2\beta c_v l}{\gamma_1},\beta T_{s,min}-(\beta l+\frac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max}-\frac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max},$$
$$T_s(l)\beta l-k_1(\alpha v_s+2\beta l)-\beta\rho l v_s^2,2k_2\alpha-\beta\rho l\big\},$$

$v(t)=-\frac{\delta_d}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2+\varepsilon_d+\frac{\delta_d}{2\gamma_d}\mu_d$, et $v(t)$ est borné en raison de l'hypothèse que μ_d est borné.

Remarque 3.3 *$v(t)$ dans (3.10) peut être posé dans une région arbitrairement bornée en faisant, on prend ε_d,δ_d sont suffisamment petits et γ_d est suffisament grand.*

3.2.2 Contrôle des lois sous un paramètre et une perturbation inconnus

Une loi de contrôle adaptatif pour le cas de densité de matériau inconnue est maintenant considérée.

La loi robuste de contrôle de la force bornée (3.8) dépend de la connaissance exacte du système et des paramètres de l'actionneur (ρ,m_c,d_c),

les valeurs des paramètres de l'actionneur, m_c et d_c peut être déterminé avec certitude par le concepteur de l'actionneur, mais pas celui du paramètre ρ de système.

Ainsi, pour compenser la constante inconnue ou lentement paramètre au temps ρ, une loi de contrôle adaptatif est nécessaire et à partir de laquele le paramètre inconnu est estimé et est utilisé pour mettre à jour la loi de contrôle des limites robustes.
De (3.8), la loi de contrôle robuste bornée est reécrite en utilisant un paramètre estimé $\hat{\rho}$ sous la forme :

$$f_c = (d_c - \hat{\rho}v_s)w_t(l) - \hat{\rho}v_s^2 w_x(l) - \frac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)w_{xt}(l) + f_d + k_1 w_x(l) - k_2 w_t(l), \quad (3.11)$$

où

$\hat{\rho}$ est l'estimateur adaptatif de ρ et la loi d'adaptation est donnée par :

$$\dot{\hat{\rho}} = \gamma_0 v_s \{w_t(l) + v_s w_x(l)\}\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\},$$

avec $\gamma_0 > 0$ est le gain d'adaptation,

et $\tilde{\rho} = \hat{\rho} - \rho$ est l'erreur d'estimateur de paramètre .

On applique la relation (3.4), pour definir une autre fonction positive $\hat{V}(t)$ de Lyapunov tel que :

$$\hat{V}(t) = \alpha V_0(t) + 2\beta \int_0^l \rho x w_x(w_t + v_s w_x)dx + \frac{1}{2\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2 + \frac{1}{2\gamma_0}\tilde{\rho}^2. \quad (3.12)$$

À l'aide de (3.6)-(3.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{V}}(t) &= \alpha\dot{V}_0(t) + \tfrac{d}{dt}[2\beta\textstyle\int_0^l \rho x w_x(w_t + v_s w_x)dx] + \tfrac{1}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d\dot{\hat{\mu}}_d + \tfrac{1}{\gamma_0}\tilde{\rho}\dot{\hat{\rho}} \\
&\leq -(\alpha c_v + \beta\rho - \tfrac{2\beta c_v l}{\gamma_1})\textstyle\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx \\
&\quad - \left\{\beta T_{s,min} - (\beta l + \tfrac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max} - \tfrac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max} - 2\beta c_v\gamma_1 l\right\}\textstyle\int_0^l w_x^2 dx \\
&\quad -\alpha v_s T_s(0)w_x^2(0) - \{T_s(l)\beta l - k_1(\alpha v_s + 2\beta l) - \beta\rho l v_s^2\}w_x^2(l) \\
&\quad -(2k_2\alpha - \beta\rho l)w_t^2(l) + \varepsilon_d - \tfrac{\delta_d}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2 + \tfrac{\delta_d}{2\gamma_d}\mu_d \\
&\quad +\tfrac{1}{\gamma_0}\tilde{\rho}\gamma_0 v_s\{w_t(l) + v_s w_x(l)\}\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\},
\end{aligned} \quad (3.13)$$

alors d'aprés (3.10), on a :

$$\dot{\hat{V}}(t) \leq -C_3\left(\int_0^l (w_t + v_s w_x)^2 dx + \int_0^l w_x^2 dx + w_t^2(l) + w_x^2(l)\right) + \hat{v}(t), \quad (3.14)$$

avec $\hat{v}(t) = -\frac{\delta_d}{\gamma_d}\tilde{\mu}_d^2 + \varepsilon_d + \frac{\delta_d}{2\gamma_d}\mu_d + \frac{1}{\gamma_0}\tilde{\rho}\dot{\hat{\rho}}$.

Remarque 3.4 *On applique la loi robuste de contrôle de la force au limite (3.11) et des lois d'adaptation $\dot{\hat{\mu}}_d$ et $\dot{\hat{\rho}}$, la mesure de $w_t(l)$, la pente $w_x(l)$ et le taux de pente $w_{xt}(l)$ à $x = l$ du côté contrôlé de l'actionneur est obtenue.*

Par l'utilisation d'un encodeur (ou de la photodiode) sur l'actionneur et deux capteurs laser, le déplacement $w(l)$ de l'actionneur et la pente $w_x(l)$ du côté contrôlé de l'actionneur peuvent être mesurés, (respectivement).

Conclusion

$\dot{V}(t)$ et $\dot{\hat{V}}(t)$ peuvent prendre des valeurs positives en raison du dernier terme $v(t)$ et $\hat{v}(t)$, qui implique que la perturbation au limite droite sur la partie contrôlée en raison de la vibration transversale de la partie non contrôlée provoque une augmentation de l'ènergie mécanique de la partie contrôlée de la chaine,

donc , aucune conclusion de la stabilité ne peut être tirée des fonctions de Lyapunov $V(t)$ et $\hat{V}(t)$.

Chapitre 4

Analyse de la stabilité

Stabilité asymptotique de la partie contrôlée

La stabilité asymptotique de la parite contrôlée du système en déplacement axial sous une loi de contrôle robuste aux limites (3.11) et des lois d'adaptation $\dot{\hat{\mu}}_d$ et $\dot{\hat{\rho}}_d$ est prouvée par la théorie de semi-groupe.

De (2.12) et (3.11) on a :

$$\begin{aligned} f_c &= m_c w_{tt}(l,t) + (d_c - \rho v_s) w_t(l,t) + (T_s(l,t) - \rho v_s^2) w_x(l,t) + d(t) \\ &= (d_c - \hat{\rho} v_s) w_t(l) - \hat{\rho} v_s^2 w_x(l) - \frac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l) w_{xt}(l) + f_d + k_1 w_x(l) - k_2 w_t(l), \end{aligned}$$

donc

$$m_c w_{tt}(l) = -\frac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l) w_{xt}(l) - \tilde{\rho} v_s w_t(l) - (T_s(l) - \tilde{\rho} v_s^2) w_x(l) + f_d - d + k_1 w_x(l) - k_2 w_t(l),$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{tt}(l) &= -m_c^{-1}(T_s(l) - k_1) w_x(l) + \alpha^{-1} v_s (\alpha v_s + 2\beta l) w_{xx}(l) \\ &\quad -\alpha^{-1}(\alpha v_s + 2\beta l)(w_{xt}(l) + v_s w_{xx}(l)) \\ &\quad -m_c^{-1} k_2 w_t(l) - m_c^{-1} \tilde{\rho} v_s (w_t(l) + v_s w_x(l)) + m_c^{-1}(f_d - d). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour analyser la stabilité asymptotique du système de boucle fermé (2.9)-(2.11) et (4.1), on définit l'espace d'état $\mathfrak{J}$,

Définition 4.1 *On définit l'espace d'état* $\mathfrak{J}$ *par :*

$$\mathfrak{J} = \left\{ (w, \dot{w}, w(l), w_t(l))^T \text{ tels que } w \in H_L^2, w_t \in L^2 \text{ et } w(l), w_t(l) \in \mathbb{R} \right\}$$

muni de produit scalaire :

soit $z = (w, \dot{w}, w(l), w_t(l))^T$, $z' = (w', \dot{w}', w(l)', w_t'(l))^T \in \mathfrak{J}$,

$$\begin{aligned} < z, z' >_{\mathfrak{J}} &= \tfrac{\alpha}{2}\int_0^l T_s w_x w_x' dx + \tfrac{\alpha}{2}\int_0^l \rho \dot{w}\dot{w}' dx \\ &\quad +\beta\int_0^l \rho x(w_x + \dot{w})(w_x' + \dot{w}')dx - \beta\int_0^l \rho x w_x w_x' dx - \beta\int_0^l \rho x \dot{w}\dot{w}' dx \\ &\quad +\tfrac{1}{2}m_c\left\{(\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l) + \alpha w_t(l)\right\}\left\{(\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l) + \alpha w_t'(l)\right\} \\ &= \tfrac{\alpha}{2}\int_0^l T_s w_x w_x' dx + \tfrac{\alpha}{2}\int_0^l \rho \dot{w}\dot{w}' dx + \beta\int_0^l \rho x w_x \dot{w}' dx + \beta\int_0^l \rho x \dot{w} w_x' dx \\ &\quad +\tfrac{1}{2}m_c\left\{(\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l) + \alpha w_t(l)\right\}\left\{(\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l) + \alpha w_t'(l)\right\}, \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta > 0$.

Pour le système de boucle fermé comprenant les deux lois d'adaptation, on définit l'espace d'état $\mathrm{W} = \mathfrak{J} \times \mathbb{R}^2$.

En utilisant

$$\ddot{w} = \frac{d^2}{dt^2}w = \frac{d}{dt}(w_t + v_s w_x) = w_{tt} + 2v_s w_{xt} + v_s^2 w_{xx},$$

qui implique que

$$\dot{w} = w_t + v_s w_x,$$

et de (2.9)-(2.11) on a :

$$\begin{aligned} w_{tt} + 2v_s w_{xt} + v_s^2 w_{xx} &= \rho^{-1}(T_s w_x)_x - \rho^{-1}c_v(w_t + v_s w_x) \\ &= \ddot{w}, \end{aligned}$$

alors on peut ecrire la dynamique couplée (2.9)-(2.11) et (4.1) , $\dot{\hat{\mu}}_d$ et $\dot{\hat{\rho}}$ sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0(t)y + F_0(t, y) \\ y(0) \in \mathrm{W}, \end{cases} \tag{4.2}$$

avec $y = (z, \hat{\rho}, \hat{\mu}_d)^T = (w, \dot{w}, w(l), w_t(l), \hat{\rho}, \hat{\mu}_d)^T \in \mathrm{W}$, le domaine de définition de l'opérateur $A_0(t)$ est défini par :

$D(A_0) = \{(w, \dot{w}, w(l), w_t(l), \hat{\rho}, \hat{\mu}_d)^T$ *telsque* $w \in \mathrm{H}_L^2, w_t \in \mathrm{H}_L^1, w(l), w_t(l), \hat{\rho}, \hat{\mu}_d \in \mathbb{R}, w(0) = 0$ *et*

$m_c w_{tt}(l) + \dfrac{m_c}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)w_{xt}(l) + \tilde{\rho}v_s w_t(l) + (T_s(l) - \tilde{\rho}v_s^2)w_x(l) - f_d + d - k_1 w_x(l) + k_2 w_t(l) = 0\}$.

Définition 4.2 *La famille des opérateurs* $\{A_0(t)\}_{t\geq 0}$ *tel que,* $A_0 : D(A_0) \subset \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ *est définie par :*

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_d \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

et $F_0(t,y)$ est donnée par :

$$F_0(t,y) = \begin{pmatrix} F(t,z,\hat{\rho},\hat{\mu}_d) \\ \varepsilon\hat{\rho} + \gamma_0 v_s\{w_t(l) + v_s w_x(l)\}\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\} \\ \gamma_d|\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta)w_x(l)| \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

où $\varepsilon > 0$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(T_s\frac{\partial}{\partial x}) & -\rho^{-1}c_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m_c^{-1}(T_s - k_1)\frac{\partial}{\partial x}|_{x=l} + \frac{v_s}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)\frac{\partial^2}{\partial x^2}|_{x=l} & -\frac{1}{\alpha}(\alpha v_s + 2\beta l)\frac{\partial}{\partial x}|_{x=l} & 0 & -m_c^{-1}k_2 \end{pmatrix},$$

et

$$F(t,z,\hat{\rho},\hat{\mu}_d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_c^{-1}\tilde{\rho}v_s(w_t(l) + v_s w_x(l)) + m_c^{-1}(f_d - d) \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.1 *L'opérateur $A_0(t) : D(A_0) \longrightarrow \mathrm{W}$ est dissipatif.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} A_0(t)y &= \begin{pmatrix} A(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \hat{\rho} \\ \hat{\mu}_d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(t)z \\ -\varepsilon\hat{\rho} \\ -\delta_d\hat{\mu}_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$A(t)z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(T_s\frac{\partial}{\partial x}) & -\rho^{-1}c_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \{-m_c^{-1}(T_s-k_1)\frac{\partial}{\partial x}|_{x=l} & & & \\ +\frac{v_s}{\alpha}(\alpha v_s+2\beta l)\frac{\partial^2}{\partial x^2}|_{x=l}\} & -\frac{1}{\alpha}(\alpha v_s+2\beta l)\frac{\partial}{\partial x}|_{x=l} & 0 & -m_c^{-1}k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \dot{w} \\ w(l) \\ w_t(l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \rho^{-1}(T_s w_x)_x - \rho^{-1}c_v\dot{w} \\ w_t(l) \\ -m_c^{-1}(T_s-k_1)w_x(l) + \frac{v_s}{\alpha}(\alpha v_s+2\beta l)w_{xx}(l) - \frac{1}{\alpha}(\alpha v_s+2\beta l)\dot{w}_x(l) - m_c^{-1}k_2 w_t(l) \end{pmatrix}$$

donc

$$< A_0(t)y; y >_{\mathrm{W}} = < \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \rho^{-1}(T_s w_x)_x - \rho^{-1}c_v\dot{w} \\ w_t(l) \\ \big\{ -m_c^{-1}(T_s-k_1)w_x(l) + \frac{v_s}{\alpha}(\alpha v_s+2\beta l)w_{xx}(l) \\ -\frac{1}{\alpha}(\alpha v_s+2\beta l)\dot{w}_x(l) - m_c^{-1}k_2 w_t(l)\big\} \\ -\varepsilon\hat{\rho} \\ -\delta_d\hat{\mu}_d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w \\ \dot{w} \\ w(l) \\ w_t(l) \\ \hat{\rho} \\ \hat{\mu}_d \end{pmatrix} >_{\mathrm{W}}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int_0^l T_s(w_{tx}+v_s w_{xx})w_x dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^l (T_s w_x)_x(w_t+v_s w_x)dx$$
$$-\frac{\alpha}{2}\int_0^l c_v(w_t+v_s w_x)^2 dx + \beta\int_0^l \rho x(w_{tx}+v_s w_{xx})(w_t+v_s w_x)dx$$
$$+\beta\int_0^l x(T_s w_x)_x w_x dx - \beta\int_0^l c_v x(w_t+v_s w_x)w_x dx + \frac{1}{2}m_c\{(\alpha v_s+2\beta l)w_{tx}(l)$$
$$-\frac{\alpha}{m_c}(T_s-k_1)w_x(l) - v_s(\alpha v_s+2\beta l)w_{xx}(l) - (\alpha v_s+2\beta l)(w_{tx}(l)+v_s w_{xx}(l))$$
$$-\frac{\alpha}{m_c}k_2 w_t(l)\}\{(\alpha v_s+2\beta l)w_x(l)+\alpha w_t(l)\} - \varepsilon\hat{\rho}^2 - \delta_d\hat{\mu}_d^2.$$

D'aprés (3.6) ona :

$$< A_0(t)y; y >_{\mathrm{W}} \leq -C_3\left(\int_0^l (w_t+v_s w_x)^2 dx + \int_0^l w_x^2 dx + w_t^2(l) + w_x^2(l)\right) - \varepsilon\hat{\rho}^2 - \delta_d\hat{\mu}_d^2$$
$$\leq 0,$$

où C_3 est la constante positive définie dans (3.10). ∎

Proprieté

L'opérateur $A_0(t)$ satisfait les proprietés suivantes :

. Il existe $\rho_1 > 0$ tel que $| < A_0(t)y, y' >_{\mathrm{W}} | \leq \rho_1 \|y\|_{\mathrm{W}} \|y'\|_{\mathrm{W}},\ y,\ y' \in \mathrm{W}$.

. Il existe $\rho_2 > 0$ pour lequel $< A_0(t)y, y >_{\mathrm{W}} \leq -\rho_2 \|y\|^2_{\mathrm{W}},\ y \in \mathrm{W}$.

Les conditions (i) et (ii) impliquent que l'opérateur $(A_0, D(A_0))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique des opérateurs linéaires bornés sur W,voir[1].
Par conséquent $\{A_0(t), t \geq 0\}$ est une famille stable des générateurs infinitésimals de C_0 semi-groupe sur W.
L'operateur défini par

$$t \longrightarrow A_0(t)y,\ \textit{pour}\ y \in D(A_0)$$

est fortement continu différentiable dans W.

Proposition 4.2 *Soit*

$$\begin{aligned} F_0 : \mathrm{W} &\longrightarrow \mathrm{W} \\ y &\longrightarrow F_0(t)y \end{aligned}$$

est continue et lacalement lipchitzienne, c'est à dire :
il existe une constante $C_4 > 0$ telle que,

$$\|F_0(t,y) - F_0(t,y')\|_{\mathrm{W}} \leq C_4 \|y - y'\|_{\mathrm{W}},\ \textit{pour tout}\ y, y' \in \mathrm{W}.$$

Preuve. Soit $y = (w, \dot{w}, w(l), w_t(l), \hat{\rho}, \hat{\mu}_d)^T \in \mathrm{W}$ et $y' = (w', \dot{w}', w(l)', w_t'(l), \hat{\rho}', \hat{\mu}_d')^T \in \mathrm{W}$, ona :

$$F_0(t,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_c^{-1}\tilde{\rho}v_s(w_t(l) + v_s w_x(l)) + m_c^{-1}(f_d - d) \\ \varepsilon\hat{\rho} + \gamma_0 v_s\{w_t(l) + v_s w_x(l)\}\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\} \\ \gamma_d|\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)| \end{pmatrix},$$

et

$$F_0(t,y') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_c^{-1}\tilde{\rho}' v_s(w_t'(l) + v_s w_x'(l)) + m_c^{-1}(f_d' - d) \\ \varepsilon\hat{\rho}' + \gamma_0 v_s\{w_t'(l) + v_s w_x'(l)\}\{\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)\} \\ \gamma_d|\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)| \end{pmatrix},$$

donc

$$F_0(t,y) - F_0(t,y') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (-m_c^{-1}\tilde{\rho} v_s(w_t(l) + v_s w_x(l)) + m_c^{-1}\tilde{\rho}' v_s(w_t'(l) + v_s w_x'(l)) \\ +m_c^{-1}(f_d - d) - m_c^{-1}(f_d' - d)) \\ \big(\varepsilon\hat{\rho} - \varepsilon\hat{\rho}' + \gamma_0 v_s\{w_t(l) + v_s w_x(l)\}\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\} \\ -\gamma_0 v_s\{w_t'(l) + v_s w_x'(l)\}\{\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)\}\big) \\ \gamma_d|\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)| - \gamma_d|\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)| \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \|F_0(t,y) - F_0(t,y')\|_{\mathrm{W}}^2 &= \frac{m_c\alpha}{2}|m_c^{-1}v_s(\hat{\rho} - \rho)(w_t(l) + v_s w_x(l)) - m_c^{-1}v_s(\hat{\rho}' - \rho)(w_t'(l) + v_s w_x'(l)) \\ &\quad + m_c^{-1}(f_d - d) - m_c^{-1}(f_d' - d)|^2 \\ &\quad + |\varepsilon\hat{\rho} - \varepsilon\hat{\rho}' + \gamma_0 v_s\{w_t(l) + v_s w_x(l)\}\{\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)\} \\ &\quad - \gamma_0 v_s\{w_t'(l) + v_s w_x'(l)\}\{\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)\}|^2 \\ &\quad + |\gamma_d|\alpha w_t(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x(l)| - \gamma_d|\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)||^2, \end{aligned}$$

avec

$$f_d'(t) = -\frac{\hat{\mu_d}'^2}{\hat{\mu_d}'|\bar{w}'(l) + \varepsilon_d}\bar{w}'(l),$$

et

$$\bar{w}'(l) = \{\alpha w_t'(l) + (\alpha v_s + 2\beta l)w_x'(l)\}.$$

On considère l'inégalité suivante :

$$|w_x(l)w_t(l) - w_x'(l)w_t'(l)|^2 \leq w_t^2|w_x(l) - w_x'(l)|^2 + w_x'^2|w_t(l) - w_t'(l)|^2,$$

et

$$
\begin{aligned}
|f_d - f_d^{'}|^2 &= \left| \frac{\hat{\mu_d}^2}{\hat{\mu_d}|\bar{w}| + \varepsilon_d}\bar{w}(l) - \frac{\hat{\mu_d^{'}}^2}{\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}| + \varepsilon_d}\bar{w}(l) + \frac{\hat{\mu_d^{'}}^2}{\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}| + \varepsilon_d}\bar{w}(l) - \frac{\hat{\mu_d^{'}}^2}{\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}'| + \varepsilon_d}\bar{w}^{'}(l) \right|^2 \\
&\leq \left| \frac{\hat{\mu_d}\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}(l)| + \varepsilon_d(\hat{\mu_d} + \hat{\mu_d}^{'})}{(\hat{\mu_d}|\bar{w}(l)| + \varepsilon_d)(\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}'| + \varepsilon_d)} \right|^2 |\bar{w}(l)|^2 |\hat{\mu_d} - \hat{\mu_d}^{'}|^2 \\
&\quad + \left| \frac{\varepsilon_d}{(\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}(l)| + \varepsilon_d)(\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}'| + \varepsilon_d)} \right|^2 |\hat{\mu_d}^{'}|^4 |\bar{w}(l) - \bar{w}^{'}(l)|^2 \\
&\quad + 2 \left| \frac{\hat{\mu_d}^{'}}{(\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}(l)| + \varepsilon_d)(\hat{\mu_d}^{'}|\bar{w}'| + \varepsilon_d)} \right|^2 |\hat{\mu_d}^{'}|^4 |\bar{w}^{'}(l)|^2 |\bar{w}(l) - \bar{w}^{'}(l)|^2,
\end{aligned}
$$

et d'aprés (3.3), on a l'inégalité

$$\|F_0(t,y) - F_0(t,y^{'})\|_{\mathrm{W}} \leq C_4 \|y - y^{'}\|_{\mathrm{W}}, \ \textit{pour tout } y, y^{'} \in \mathrm{W}, C_4 > 0.$$

■ D'aprés le théorème(1.3), il existe un système unique $\{s(t,\tau) : 0 \leq \tau \leq t\}$ associé au système(4.2).

Enfin, la solution $z(t)$ de (4.2) est donnée par :

$$z(t) = \varphi(t,0)z_0 + \int_0^t \varphi(t,\tau)F(\tau, z(\tau), \hat{\rho}(\tau), \hat{\mu_d}(\tau))d\tau, \ t > 0, \tag{4.5}$$

avec $\varphi(t,s), \ 0 \leq s \leq t$ est l'opérateur d'évolution associé à $A(t)$ dans l'espace $\mathfrak{J}$,

et $\|\varphi(t,s)\| \leq M_1$ où M_1 est un constant positif, $0 \leq s \leq t < \infty$.

Théorème 4.1 *On considère le système de boucle fermé constitué de plant et la dynamique de l'actionneur (2.9)-(2.11), (4.1) et les estimateurs adaptifs* $\dot{\hat{\rho}}, \ \dot{\hat{\mu}}_d$.

On supppse que :

$$\alpha > 2\beta, \ T_{s,min} > \rho, \ \left(\alpha c_v + \beta\rho - \frac{2\beta c_v l}{\gamma_1}\right) > 0,$$

$$\left\{\beta T_{s,min} - (\beta l + \frac{\alpha v_s}{2})(T_s)_{x,max} - \frac{\alpha}{2}(T_s)_{t,max} - 2\beta c_v \gamma_1 l\right\} > 0,$$

$$0 < k_1 < \frac{T_s()\beta l - \beta\rho l v_s^2}{\alpha v_s + 2\beta l}, \ k_2 \frac{\beta\rho l}{2\alpha}, \ \textit{et } k_2 = \frac{k_1\alpha + 2\beta\rho l v_s}{\alpha v_s + \beta l},$$

et $v(t)$ *de (2.25) est uniformément borné par un constant positif* σ,

$$|v(t)| \leq \sigma,$$

alors :

(i) *La solution du système de boucle fermé et les lois d'adaptation*$(z(t), \hat{\rho}(t), \hat{\mu_d})$*, sont généralement uniformément bornés.*

(ii) *Si* $\int_0^\infty v(t) < \infty$ *, alors* $z(t) \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$ *.*

Preuve.

Pour montrer les assertions (i) et (ii), on pose :

(A1)

$$\forall t > 0, \ \|F(t, z, \hat{\rho}, \hat{\mu_d}\|_{\mathfrak{J}} \leq \alpha_0(\theta(t))\|z(t)\|_{\mathfrak{J}} + c_0, \tag{4.6}$$

avec

c_0 un constant postif,

$$\alpha_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \textit{ est borne pour la valeur } finie \ \theta(t) = (\hat{\rho}, \hat{\mu_d})^T.$$

(A2) La fonction $\hat{V}(t) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ obtenu par (3.13) satisfait

$$\alpha_1(\|z(t)\|_{\mathfrak{J}}) + \beta_1(|\theta(t)|) \leq \hat{V}(t) \leq \alpha_2(\|z(t)\|_{\mathfrak{J}}) + \beta_2(|\theta(t)|), \tag{4.7}$$

avec $\alpha_i(t)$ et $\beta_i(t)$ pour $i = 1, 2.$ sont des fonctions continues et strictement croissantes, où

$$\alpha_i(0) = \beta_i(0) = 0$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_i(t) = \lim_{t\to\infty} \beta_i(t) = \infty.$$

(A3) De (3.10)(ou (3.14)), la dérivée de $\hat{V}(t)$ satisfait

$$\dot{\hat{V}}(t) \leq -\alpha_3(\|z(t)\|_{\mathfrak{J}}) + \hat{v}(t), \tag{4.8}$$

avec

$\alpha_3(t)$ est une fonction continue et strictement croissante et $v(t)$ est uniformément bornée par σ, c-à-d :

$$|v(t)| \leq \sigma.$$

(i) En utilisant(A2) et(A3) pour montrer que $z(t)$ et $\theta(t)$ sont géneralement uniformément bornés.

D'abord, on considère la solution de (3.2) donnée par :

$$z : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathfrak{J}, \quad \|z(t_0)\| \leq r,$$

$$\theta : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad |\theta(t_0)| \leq r^{'}.$$

. Soit $\bar{r} = max\{r, R\}$ avec $R = \alpha_3^{-1}(\sigma)$, donc $\|z(t_0)\| \leq \bar{r}$ et $|\theta(t)| \leq \bar{r}^{'}$.

. Soit

$$d(\bar{r}) = (\alpha_1^{-1} o \alpha_2)(\bar{r}) \;\; et \;\; d(\bar{r}^{'}) = (\beta_1^{-1} o \beta_2)(\bar{r}^{'}). \tag{4.9}$$

De l'inégalité (4.7) on a :

$$\alpha_1(\bar{r}) + \beta_1(\bar{r}^{'}) \leq \hat{V}(t) \leq \alpha_2(\bar{r}) + \beta_2(\bar{r}^{'}),$$

donc

$$\alpha_1(\bar{r}) \leq \alpha_2(\bar{r}) \;\; et \;\; \beta_1(\bar{r}^1) \leq \beta_2(\bar{r}^{'}), \tag{4.10}$$

d'aprés (4.9) et (4.10), on a

$$(\alpha_1^{-1} o \alpha_1)(\bar{r}) \leq (\alpha_1^{-1} o \alpha_2)(\bar{r}) \;\; et \;\; (\beta_1^{-1} o \beta_1)(\bar{r}) \leq (\beta_1^{-1} o \beta_2)(\bar{r}),$$

donc

$$\bar{r} \leq d(\bar{r}) \;\; et \;\; \bar{r}^{'} \leq d(\bar{r}^{'}).$$

a) Montrons que $z(.)$ et $\theta(.)$ sont uniformément bornés dans $[t_0, t_1]$.

La démonstration sera fait par absurde.

Soit $t_3 \in [t_0, t_1]$ tel que $t_3 > t_0$, on pose que

$$\|z(t_3)\| > d(\bar{r}) \;\; et \;\; |\theta(t)| > d(\bar{r}^{'}). \tag{4.11}$$

$z(t)$ et $\theta(t)$ sont continus et

$$\|z(t_0)\| \leq \bar{r} \leq d(\bar{r}) < \|z(t_3)\| \;\; et \;\; |\theta(t_0)| \leq \bar{r}^{'} \leq d(\bar{r}^{'}) < |\theta(t_3)|.$$

$\exists \;\; t_2 \in [t_0, t_3] \;\; telque \;\; \|z(t_2)\| = \bar{r} \; et \; |\theta(t_2)| = \bar{r}^{'}$ et

$$\forall \;\; t_4 \in [t_2, t_3], \;\; \|z(t_4)\| \geq \bar{r} \geq R \;\; et \;\; |\theta(t_4)| \geq \bar{r}^{'}, \tag{4.12}$$

d'après (4.7),(4.8) et (4.12) on a

$$\begin{aligned} \alpha_1(\bar{r}) + \beta_1(\bar{r}^{'}) \leq \alpha_1(\|z(t_3)\|) + \beta_1(|\theta(t_3)|) &\leq \hat{V}(t_3, z(t_3), \theta(t_3)) \\ &\leq \alpha_2(\bar{r}) + \beta_2(\bar{r}^{'}) + \textstyle\int_{t_2}^{t_3}(-\alpha_3(R) + \sigma)d\tau \\ &= \alpha_2(\bar{r}) + \beta_2(\bar{r}^{'}), \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_1(\|z(t_3)\|) \leq \alpha_2(\bar{r}) \;\; et \;\; \beta_1(|\theta(t_3)|) \leq \beta_2(\bar{r}^{'}),$$

d'où

$$\|z(t_3)\| \leq (\alpha_1^{-1} o \alpha_2)(\bar{r}) = d(\bar{r}) \;\; et \;\; |\theta(t_3)| \leq (\beta_1^{-1} o \beta_2)(\bar{r}^{'}) = d(\bar{r}^{'}), \qquad (contradiction)$$

alors

$$\|z(t)\| \leq d(\bar{r}) \;\; et \;\; |\theta(t)| \leq d(\bar{r}^{'}).$$

b) Montrons que $z(t)$ et $\theta(t)$ sont généralement uniformément bornés dans $[t_0, +\infty[$.

Soit

$$\bar{d} > (\alpha_1^{-1} o \alpha_2)(R) \;\; et \;\; \bar{R} = (\alpha_2^{-1} o \alpha_1)(\bar{d}),$$

ainsi

$$\bar{R} > R \;\; et \;\; d(\bar{R}) = (\alpha_1^{-1} o \alpha_2)(\bar{R}) = \bar{d}.$$

si $\bar{r} \leq \bar{R} \;\; et \;\; \bar{r}^{'} \leq \bar{R}^{'}$ alors $\|z(t_0)\| \leq \bar{R} \;\; et \;\; |\theta(t_0) \leq \bar{R}^{'}$.

Soit encore $d(\bar{R}^{'}) = (\beta_1^{-1} o \beta_2)(\bar{R}^{'}) = \vec{d}$,

d'aprés (**a**), ona

$$\|z(t)\| \leq d(\bar{R}) = \bar{d} \;\; et \;\; |\theta(t)| \leq d(\bar{R}^{'}) = \vec{d}, \;\; \forall t \in [t_0, +\infty[.$$

Maintenant, on considère $\bar{r} > \bar{R} \;\; et \;\; \bar{r}^{'} > \bar{R}^{'}$, on pose

$$\forall t \in [t_0, t_1], \;\; \|z(t)\| > \bar{R} \;\; et \;\; |\theta(t)| > \bar{R}^{'}, \tag{4.13}$$

avec $t_1 = t_0 + T(\bar{d}, \vec{d}, \bar{r}, \bar{r}^{'}) \;\; et \;\; T(\bar{d}, \vec{d}, \bar{r}, \bar{r}^{'}) = \frac{\alpha_2(\bar{r}) + \beta_2(\bar{r}^{'}) - \alpha_1(\bar{R}) - \beta_1(\bar{R}^{'})}{\alpha_3(\bar{R}) - \sigma}$.

D'après (4.7),(4.8) et (4.13)on a

$$\begin{aligned} \alpha_1(\bar{r}) + \beta_1(\bar{r}^{'}) \leq \alpha_1(\|z(t_1)\|) + \beta_1(|\theta(t_1)|) &\leq \hat{V}(t_1, z(t_1), \theta(t_1)) \\ &\leq \alpha_2(\bar{r}) + \beta_2(\bar{r}^{'}) + T(\bar{d}, \vec{d}, \bar{r}, \bar{r}^{'})(-\alpha_3(\bar{R}) + \sigma), \\ &= \alpha_1(\bar{R}) + \beta_1(\bar{R}^{'}), \end{aligned}$$

donc

$$\|z(t_1)\| \leq \bar{R} \;\; et \;\; |\theta(t_1)| \leq \bar{R}^{'}, \qquad (contradiction).$$

pour $t_2 \in [t_0, t_1]$, $\|z(t_2)\| \leq \bar{R}$ *et* $|\theta(t_2)| \leq \bar{R}'$.

À partir du résultat de (**a**) on a

$$\forall t \geq t_2 \ \ \|z(t)\| \leq d(\bar{R}) \ \ et \ \ |\theta(t)| \leq d(\bar{R}'),$$

d'où

$$\|z(t)\| \leq \bar{d} \ \ et \ \ |\theta(t)| \leq \bar{d}', \forall t > t_0 + T(\bar{d}, \bar{d}', \bar{r}, \bar{r}').$$

(ii) De (4.5), la solution $z(t)$ de (4.2) consernant le temps initial s est écrit sous la forme :

$$z(t) = \varphi(t,s)z(s) + \int_s^t \varphi(t,\tau)F(\tau, z(\tau), \theta(\tau))d\tau, \ t > 0. \tag{4.14}$$

Une famille de deux paramètre de $M(t,s)$ dans $\mathfrak{J}$ peut définir d'après (4.14) par :

$$M(t,s)z(s) = z(t, z(s), s), 0 \leq s \leq t < \infty. \tag{4.15}$$

Par l'unicité et la dépendance continue de la solution sur le triplet $\{t, z(s), s\}$,

$M(t,s)$ dans $\mathfrak{J}$ devient un processus d'évolution tel que :

1. $M(.,s)z(s) : \mathrm{R}^+ \longrightarrow \mathfrak{J}$ est continue.
2. $M(t,.)(.) : \mathrm{R}^+ \times \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}$ est continue.
3. $M(s,s)z(s) = z(s)$.
4. $M(t,s)z(s) = M(t,r)M(r,s)z(s), \ \forall \ z(s) \in \mathfrak{J}$ *et* $0 \leq s \leq r \leq t < \infty$.

L'intégration des deux côtés de (4.8) de zéro à l'infini nous donne :

$$\int_0^{+\infty} \dot{\hat{V}}(t)dt \leq \int_0^{+\infty} -\alpha_3(\|z(t)\|)dt + \int_0^{+\infty} \hat{v}(t)dt,$$

de (4.15), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \alpha_3(\|z(t)\|)dt = \int_0^{+\infty} \alpha_3(\|M(t,0)z_0\|dt \leq \hat{V}(0) - \hat{V}(+\infty) + \int_0^{+\infty} \hat{v}(t)dt < +\infty, \tag{4.16}$$

avec le temps initial et l'état initial sont choisis pour être zéro.

On note que $z(t) = M(t,0)z_0$.

La suite de la preuve est identique au théorème1[9], qui sera fait par absurde.

On pose que $z(t)$ ne tend pas vers zéro quand $t \longrightarrow +\infty$,

d'abord, $\exists\, k > 0 \quad et \quad t_j \longrightarrow +\infty$ tels que :

$$\|M(t_j, 0)z_0\| \geq k \quad avec \quad k \ est \ assez \ petit,$$

et $\exists\, M_2 > 0$ *et* $k_0 > 0$ tels que :

$$\sup_{|\theta(t)|\leq \vec{d}'} \alpha_0(\theta(t)) \leq M_2,$$

$$0 < k_0 \leq \frac{c_0}{M_2} - \frac{k}{\exp(1)}.$$

On passe à la norme de (4.14),

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \|\varphi(t,s)\|\|z(s)\| + \int_s^t \|\varphi(t,\tau)\|\|F(\tau, z(\tau), \theta(\tau))\|d\tau \\
&\leq \|\varphi(t,s)\|\|z(s)\| + \int_s^t \|\varphi(t,\tau)(\alpha_0(\theta(\tau))\|z(\tau)\| + c_0)d\tau \\
&\leq M_1\|z(s)\| + M_1M_2\int_s^t (\|z(\tau)\| + \frac{c_0}{M_2})d\tau,
\end{aligned}$$

d'aprées l'inégalité de Bellman-Gronwall ona :

$$\forall\, 0 \leq s \leq t;\ \|z(t)\| \leq (M_1\|z(s)\| + \frac{c_0}{M_2})\exp(M_1M_2(t-s)),$$

maintenant, on pose que t_j satisfait $(M_1M_2)^{-1} < t_{j+1} - t_j$,
si on prend $I_j = [t_j - (M_1M_2)^{-1}, t_j]$ alors $m(I_j) = (M_1M_2)^{-1}$,
avec m est la mesure de Lebesgue .
Pour $t \in I_j$,

$$\begin{aligned}
k &\leq \|z(t_j)\| = \|M(t_j,t)z(t)\| \\
&\leq (M_1\|z(t)\| + \frac{c_0}{M_2})\exp(M_1M_2(t_j - t) \\
&\leq (M_1\|z(t)\| + \frac{c_0}{M_2})\exp(1),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& k \leq (M_1\|z(t)\| + \frac{c_0}{M_2})\exp(1) \\
\Rightarrow\quad & \frac{k}{\exp(1)} \leq M_1\|z(t)\| + \frac{c_0}{M_2} \\
\Rightarrow\quad & \frac{k}{\exp(1)} - \frac{c_0}{M_2} \leq M_1\|z(t)\| \\
\Rightarrow\quad & k_0 \leq M_1\|z(t)\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$0 < \frac{k_0}{M_1} \leq \|z(t)\|,\ \forall\, t \in I_j,$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty} \alpha_3(\|M(t,0)z_0\|)dt \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{I_j} \alpha_3(\|M(t,0)z_0\|)dt$$

$$\geq \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{I_j} \alpha_3\left(\frac{k_0}{M_1}\right) dt = \alpha_3\left(\frac{k_0}{M_1}\right) \sum_{j=1}^{+\infty} m(I_j) = +\infty \qquad (contradiction)$$

alors

$$z(t) \longrightarrow 0 \quad quand \quad t \longrightarrow +\infty.$$

■ **Conclusion**

Le problème (4.1) admet une solution unique, généralement uniformément bornée et tend vers zéro quand t tend vers l'infini, alors on obtenu la stabilité asymptotique à la frontière.

Conclusion

Nous avons intéressés dans ce mémoire, à l'étude du problème de stabilité d'un matérial solide en mouvement axial sous une tension spatio-temporaire variante.
Alors on obtenu Les résultats suivants

i) Dans le cas d'un déplacement continue des matériaux sous une tension spatio-temporaire variante, même si les déplacements aux deux bords est nul, le changement de $T_s(x,t)$ peut provoquer une croissance de l'énergie mécanique totale.

ii) Un contrôleur de force de limite adaptive robuste peut réaliser la suppression de vibration de la partie contrôlée de la chaîne en présence de tension spatio-temporaire variante et d'une force inconnue, tant que les vibrations de la partie non contrôlée restent.

iii) Comme les termes qui interviennent dans la loi du contrôle des frontières et les lois d'adaptation sont : la vitesse, la pente, le taux de la pente et le côté contrôlé du mécanisme, la suppression de la vibration de la partie contrôlée, peut être réalisée, avec succès.

La stabilité asymptotique du système en boucle fermée avec la loi de contrôle des frontières robuste et les lois d'adaptation proposées ont été prouvées avec la méthode de Lyapunov et la théorie de semi-groupe.

Nous éspérons à la venir de faire des changements sur la tension , la force de perturbation et sur les conditions aux bords pour voir la stabilité asymptotique.

Bibliographie

[1] M.BOHM, M. A. DEMETRIOU, S.REICH, AND I.G. ROSEN, Model reference adaptive control of distributed parameter systems, *SIAM J. CONTROL OPTIM*, 36 (1) (1998)(33-81

[2] A.CHEKROUN, *Fonction de Lyapunov et stabilité globale pour un modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection*, Université ABOUBEKR BELKAID - TLEMCEN, (2011-2012).

[3] J.Ferreira, *Cours de Mécanique Analytique*, Université Joseph Fourier, Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble, (2007-2008).

[4] R-F. Fung, J-W. Wu, P-Y. Lu, Adaptive boundary control of an axially moving string system, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics*, 124 (2002) 435-440.

[5] C-W.Kim, H.Park, and K-S.Hong, Boundary Control of Axially Moving Continua : Application to a Zinc Galvanizing Line, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, **3**, p. 601-611(December 2005).

[6] Y. Li, D. Aron, C.D. Rahn, Adaptive vibration isolation for axially moving strings : Theory and experiment,*Automatica*, 38 (3) (2002) 379-390.

[7] E.Moulay, *Stabilité des équations différentielles ordinaires*, Cours de Master.

[8] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.

[9] K-J.Yang, K-S.Hong, Partian convergence of coupled time-varying systems,*Copyright © IFAC System Identification*, Santa Barbara, California, USA, 2000.

[10] K.-J. YANG, K.-S. HONG, Robust boundary control of an axially moving steel strip,*International Federation of Automatic Control 15th IFAC World Congress*, T-Tu-E 192, Barcelona, Spain, 2002.

[11] K-J.YANG, K-S.HONG, F.MATSUNO, Robust adaptive boundary control of an axially moving string under a spatiotemporally varying tension, *Journal of Sound and Vibration* , 273 (2004) 1007-1029.

[12] B. YANG, C.D. MOTE, Active vibration control of the axially moving string in the s domain, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 58 (1991) 189-196.