Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la
Recherche Scientifique
Universite Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et applications

par

SAAD SAOUD Aicha

Calcul fractionnaire et applications aux problèmes aux limites d'inclusions différentielles

Soutenu publiquement le 12 Sept 2019 devant le jury composé de

Président :	N.BENAICHOUCHE	Université de Médéa
Examinateur :	H.BIBI	Université de Médéa
Examinateur :	F.AYADI	Université de Médéa
Encadreur :	N.MEKDECHE	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2018 – 2019

REMERCIEMENT

Arrivant à faire ce mémoire je dit **"el hamde Li Allah"** d'avoir accomplir ce modeste travail.

Je tient à remercier ma famille et particulèrement mes très chèrs **parents**, par leurs soutients, encourragements et leurs prières.

Merci beaucoup. Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos vifs remerciements à notre promoteur : Monsieur **Dr.MEKDACHE Noureddine** pour son aide, sa patience, ainsi que sa gentillesse.

Nous remerciements vont également à tous les enseignants de département de MI.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à : Celui qui m'a indiqué la bonne voie et qui a toujours été là pour moi ,dans ma vie et mes études. **Mon père** Celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation .... **Ma mère** Mes frères, mes sœurs, ainsi que mes amis et tout la famille**"SAAD SAOUD"** , sans exception. Remercies pour leur soutient et pour avoir supporté mes caprices A toutes les enseignantes qui m'ont guidée tout au long de mon parcours educatif. Enfin,je remercie tous ceux qui, de prés ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail. A tous mes amis de la promotion 2019 .

♡

NOTATIONS

$\Gamma(x)$: La fonction gamma.

$\beta(x, y)$: La fonction Bêta.

$G(t, s)$: La fonction de Green .

D^{α} : La dérivée fractionnaire d'ordre α .

$S_{F,y}$: L' ensemble des sélections de F.

I^{α} : L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

${}^{c}D^{\alpha}$: La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.

${}^{RL}D^{\alpha}$: La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.

$\mathscr{R}e(\alpha)$: La partie réels de nombre $\alpha \in \mathbb{C}$.

$[0, T]$: L'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant T$.

$s.c.s$:semi continuité supérieur.

$s.c.i$:semi continuité inférieur.

$AC([a, b])$: ou $AC^{1}([a, b])$c'est l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

$AC^{1}(J, E)$: l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : J \longmapsto E$ ayant la première dérivée absolument continue.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **5**

1 Préliminaires **8**

1.1 quelques définitions 8

1.2 Rappel sur les applications multivoques 10

1.3 Calcul fractionnaire 14

1.4 Quelques théorèmes du point fixe 21

1.5 Lemmes fondamentaux 22

2 Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires **26**

2.1 Existence des solutions 26

3 problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaires où cas convexe **33**

3.1 cas convexe 34

conclusion **42**

Bibliographie **44**

Résumé **44**

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude de concept mathématiques où la dérivée et l'intégrale classique sont remplacées par une intégrale et une dérivée fractionnaire.Ce concept n'est pas nouveau ,c'est origine remontent à la fin de 17^{eme} siècle l'époque de Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la n^{eme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), L'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématiques.

Le calcul fractionnaire est devenu un outil d'actualité vu son application dans plusieurs domaines de la physique et de la chimie et même en finance et en probabilité et statistiques, essentiellement conçu pour modéliser et bien interpréter les problèmes se rapportant aux matériaux viscoélastiques.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est la théorie analyse multivoque est une branche importante en mathématique Elle étudie les propriétés des relations F d'un ensemble X dans un ensemble Y, appelées applications multivoques qui, à chaque élément $x \in X$ associent un sous-ensemble éventuellement vide de Y. Cette branche apparait naturellement dans de nombreuses disciplines de la science, tels que la biomathématique, la physique, la théorie de

controle, la théorie des jeux,L'équilibre, L'optimisation paramétrique et L'analyse non lisse et autres. Ainsi, contrairement à l'idée émergée au cours de la première moitié du XXe siècle selon laquelle l'analyse multivoque n'avait pas de motivation réelle, elle s'est révélée au cours de ces dernières décennies comme étant la clé de la compréhension de nombreux problèmes provenant de domaines très variés. Vu la vaste étendue de son champ d'application, depuis plusieurs décennies l'analyse multivoque a retenu l'attention de nombreux mathématiciens. Si les théories des inclusions variationnelles et différentielles .

L'objectif principal de cette mémoire c'est pour donner un résultat d'existence des solutions d'une équations différentielles d'ordre fractionnaire et pour étudier l'existence des solutions d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire , Cette étude se fera principalement à l'aide de théorème de point fixe de l'alternative non linéaire de Leary Schaulder Notre thèse est organisée selon le plan suivant.

"Dans le premier chapitre" : intitulé préliminaires , contient un ensemble de définitions qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

"Dans le deuxième chapitre" : intitulé "problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires ", on traitera l'existence et l'unicité de la solutions d' un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivantes :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), pour\ t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leqslant 2$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T.$$

où $^{c}D^{\alpha}$ la dérivées d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

"Dans le troisième chapitre" : intitulé problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire où cas convexe, on présente quelques résultats d'existences des solutions du problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. On considère le problème suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F(t, y(t)), pourt \in J = [0, T], 1 < \alpha \leqslant 2$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T$$

où ${}^cD^\alpha$ est la drivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_T sont des constantes réelles.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 quelques définitions

Dans cette section , on donne quelques définitions, théorèmes et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce mémoire.

Proposition 1.1.1. *Soit $C(J,E)$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach E et $M \subset C(J,E)$.*

1. *M est borné i.e : il existe $b \geqslant 0$ tel que $\| f \|_\infty \leqslant b \ \ \forall f \in M$,*
2. *M est équicontinu i.e : $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J :| x_1 - x_2 | < \delta \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \xi \ \forall f \in M$,*
3. *$\forall x \in J$, $\{f(x) \in E,\ f \in M\}$ est relativement compact dans E.*

Définition 1.1.2. *[18] On appelle espace de Banach $(E, \| \ . \ \|_E)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme. Soit $J = [0,T], T > 0$. Notons $C(J,\mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme*

$$\| y \|_\infty = sup\{| y | : t \in J\}$$

Définition 1.1.3. *Soit (X,d) un espace métrique, A et B deux parties non vides de X. On considère l'application :*

$$H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to R^+ \cup +\infty,$$

donnée par :

$$H_d(A,B) = max\left\{ \sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b) \right\}$$

où $d(A,b) = \inf_{a\in A} d(a,b)$ *et* $d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$
On convient que $d(x,\varnothing) = \infty$ *,* H_d *est une distance de pompeiu - Hausdorff induite par la métrique d et l'espace* $(P_{cl}(X), H_d)$ *est un espace métrique généralisé.*
Pour chaque $y \in C(J;\mathbb{R}^n)$*, on définit l'ensemble :*

$$S_{F,y} = \{f \in L^1(J,\mathbb{R}^n) : f(t) \in F(t,y) p.p \quad t \in J\}$$

$S_{F,y}$ *est l'ensemble des sélections de F. Si F est à valeurs fermées, bornées et convexes et X est de dimension fini, alors* $S_{F,y}$ *est non vide.*

Définition 1.1.4. *[5] Un opérateur multivoque* $\mathcal{N} : X \longrightarrow \mathcal{P}_d(X)$ *est dit :*
(a) γ*-Lipshitz s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que :*

$$H_d(\mathcal{N}(u),\mathcal{N}(v)) \leqslant \gamma d(u,v) \quad pour \quad tout \quad u,v \in X,$$

(b) contractant s'il est γ*-Lipschitz avec* $\gamma < 1$*.*

Proposition 1.1.5. *Soient X un espace de Banach séparable et*

$$F_1, F_2 : J \to \mathcal{P}_{cp}(X),$$

de multi-fonction mesurables, alors la multi-fonction $t \to F_1(t) \cap F2(t)$ *est mesurable.*

Définition 1.1.6. *L'application* $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *est dite de carathéodory si*

1. $t \longrightarrow f(t,u)$ *est mesurable pour tout* $u \in \mathbb{R}$*,*
2. $u \longrightarrow f(t,u)$ *est semi continue supérieurement presque par tout* $t \in J$
3. $\forall r > 0$*, il existe une fonction* $\phi_r \in L^1(J,\mathbb{R}^+)$ *telle que pour tout* $u \in C(\mathbb{R})$ *avec* $\| u \| \leqslant r$ *:*

   $$\| F(t,u) \| = \{\sup \| f \|_{L^1} : f \in F(t,u)\} \leqslant \phi_r(t) p.p \; t \in J$$

   alors la fonction F est dite $L^1 -$ *carathodory*

Définition 1.1.7. *La fonction de Green pour un opérateur $\mathcal{N}$ est sous étudie être la fonction $G(t,s)$ satisfaisant les conditions suivantes*

1. *$G(t,s)$ est continue et admet des dérivées continues par rapport t l'ordre $(n-2)$, pour toutes les valeurs t et $s \in [a;b]$*
2. *Pour chaque s fixe dans $]a;b[$, la fonction $G(t;s)$ admet des dérivées continues d'ordre $(n-1)$ et n par rapport t dans chacun des intervalles $[a;s[$ et $]s;b]$ la $(n-1)-ime$ dérivée est discontinue en $t=s$, avec saut $\frac{1}{p_0(s)}$*
3. *Dans chacun des intervalles $[a;s[$ et $]s;b]$, $G(t;s)$ considérée comme une fonction de la variable t vérifie l équation :*

$$\frac{\partial^{n-1}G(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}G(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} = \frac{1}{p_0(s)}$$

1.2 Rappel sur les applications multivoques

Définition 1.2.1. *[20, 22] Une multifonction (où application multivoque) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y . On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$*[1]

Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé.

On note :

$\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X : Y \neq \varnothing\}$

$\mathcal{P}_{cl}(X) = \{Y \in P(X) : Y ferme\}$

$\mathcal{P}_{b}(X) = \{Y \in P(X) : Y borne\}$

$\mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \in P(X) : Y compact\}$

$\mathcal{P}_{cv}(X) = \{Y \in P(X) : Y convexe\}$

$\mathcal{P}_{cp,cv}(X) = \{Y \in P(X) : Y compact\ et\ convexe\}$.

Lemme 1.2.2. *[5] $G : J \longrightarrow \mathcal{P}_{b,cl,cv}(\mathbb{R})$ application multivoque à valeur fermée. G est s. c. s si et seulement si le graphe de G est fermé, i.e : si un $x_n \longrightarrow x^*, y_n \longrightarrow y^*, y_n \in G(x_n)$ alors $y_* \in G(x_*)$.*

Définition 1.2.3. *On considère X ensemble quelconque, l'ensemble des parties de X noté $\mathcal{P}(X)$. une multifonction ou bien fonction multivoque F de X vers Y, qui associe à $x \in X$, la partie $F(x) \subset Y$ noté par : $F : X \rightrightarrows Y$*

Définition 1.2.4. *Soient X et Y deux ensembles $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque*

1. *On appelle domaine de F l'ensemble*

$$domF := \{x \in X \backslash F(x) \neq \varnothing\}$$

2. *on appelle image de F l'ensemble*

$$ImF := \{y \in Y \backslash \exists x \in X; y \in F(x)$$

3. *On appelle image réciproque d'une partie non vide D de X par F l'ensemble*

$$F^{-1}(D) := \{x \in X \backslash F(x) \cap D \neq \varnothing\}$$

4. *On appelle image d'une partie A de X par F l'ensemble*

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$$

5. *le graphe de F est le sous-ensemble de $X \times Y$ définie par*

$$GrF := \{(x, y) \in X \times Y \backslash y \in F(x)\}$$

6. *l'inverse de l'application F est l'application $F^{-1} : X \rightrightarrows Y$ tel que $x \in F^{-1}(y)$ si et seulement si $y \in F(x)$*
7. *l'ensemble D est borné i.e il existe une constante $k > 0$ tel que $\| f(x) \| \leqslant k$ pour tout $x \in J$ et tout $f \in D$*
8. *l'ensemble A est équicontinue i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leqslant \varepsilon$$

   pour tout $t_1, t_2 \in J$ et tout $f \in A$
9. *pour tout $x \in J$ l'ensemble $f(x)$, $f \in A \subset X$ est relativement compacte*

Concepts de continuité des multifonctions

tout les espaces topologiques considérés séparés c-à-d,des espaces de Hausdorff.

continuité supérieure

Définition 1.2.5. *Soient X et Y deux espaces topologiques une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-continue supérieurement(s.c.s)en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$,il existe un voisinage U en x_0 tel que $F(x) \subset V, \forall x \in U$. La multifonction F est dite semi-continue supérieurement en x si elle est s.c.s en tout point de X.*

Proposition 1.2.6. *soit X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction F les propriétés suivante sont équivalentes :*

1. *F est s.c.s sur X.*
2. *pour tout ouvert V de Y , $F^+(V)$ est un ouvert de X.*
3. *pour tout fermé B de $Y, F^-(B)$ est un fermé de X.*

Proposition 1.2.7. *soient X, Y et Z trois espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ deux multifonction s.c.s alors la multifonction $GF : X \rightrightarrows Z$ défini par :*

$$GF(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y)$$

est s.c.s

Théorème 1.2.8. *soient X et Y deux espaces topologiques et soient F, G deux multifonctions de X dans Y telles que*
$F(x) \cap G(y) \neq \emptyset; \forall x \in X$ on suppose de plus que l'on a :

1. *F est s.c.s en $x_0 \in X$.*
2. *$F(x_0)$ est compact.*
3. *$Gr(F)$ est fermé. Alors la multifonction $F(x) \cap G(x) : X \rightrightarrows Y$ définie par $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$*

Proposition 1.2.9. *soit X un espace compact $F : X \rightrightarrows Y$ s.c.s à valeurs compact alors $F(x)$ est compact*

Semi continuité inférieure

Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction on dit que F est semi-continue inférieurement s.c.i en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$,il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $F(x) \cap V \neq \varnothing$ $\forall x \in U$ la multifonction F est dite s.c.i sur X si elle est s.c.i on tout point de X.

Proposition 1.2.10. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, alors les propriétés suivantes est équivalentes*

1. *F est s.c.i sur X*
2. *pour tout ouvert V de Y, $F^-(V)$ est un ouvert de x*
3. *pour tout fermé B de Y, $F^+(B)$ est un fermé de X*

Continuité lipschitzienne

Soit (x,d) un espace métrique $d(x, B) = \inf_{y \in B}(x, y)$
l'exess $e_d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$ en A et B
$h_d(A, B) = \max\{e_d(A, B), e_d(B, A)\}$ la distance de Hausdorff entre A et B.

Proposition 1.2.11. *soit (X, d) un espace métrique l'ensemble des fermés de X,h_d vérifie les propriétés d'une distance*

Proposition 1.2.12. *soient X un espace topologique ,Y espace métrique et F : $X \rightrightarrows Y$*
une multifonction si elles est s.c.i en x_0 et à valeur fermé Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $e_d(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$ pour tout $x \in U$

sélections de multifonctions

$:\rightleftharpoons FY$, une multifonction une sélection de F est une fonction $f : X \to Y$ telle que$f(x) \in F(x), \forall x \in X$ l'existence de sélections est garantie par l'axiome du chois ,Mais le problème des sélections est de trouver des sélections ayant des propriétés telles que la continuité la mesurabilité,la différentiabilité

1.3 Calcul fractionnaire

fonction spécifiques pour la dérivation fractionnaire

dans cette section , nous introduisons la fonction gamma , la fonction bêta , qui seront utilisée dans la suite de ce mémoire , ces fonction jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

Définition 1.3.1. *La fonction Gamma est une fonction complexe ,considérée également comme une fonction spéciale, elle prolonge la fonction factorielle a l'ensemble des nombres complexe et réelles ;*
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$,la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

Définition 1.3.2. *La fonction Gamma est définie sous la forme :*

$$\Gamma(n) = \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-x} x^{n-1} \mathrm{d}x \ , \ n > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Propriétés :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ , \ \forall z \neq 0$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$
3. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(n+1) = n!$ et aussi si $n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$
4. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone (strictement décroissante)pour $0 < z \leqslant 1$

Définition 1.3.3. *La fonction bêta est définie par*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t \quad \mathscr{R}e(x) > 0, \mathscr{R}e(y) > 0$$

la fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Intégration fractionnaire

soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$,on considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

pour une primitive d'ordre 2 on *à* :

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x I^{(1)}f(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_a^x (\int_a^u f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}u$$

$$= \int_a^x (\int_t^x \mathrm{d}u) f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^x (x-t) f(t)\mathrm{d}t$$

en répétant n fois on optent la relation suivante :

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_2} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} \mathrm{d}x_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

pour tout entier n . cette formule est appelée formule de Cauchy ,et depuis la généralisations du factoriel par la fonction Gamma :$\Gamma(n) = (n-1)!$
Riemann rendu compte que le second membre de (1.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non -entière ,il a définit fractionnaire de la manière suivant :

Définition 1.3.4. *[9] Si $f \in [a;b]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^{x} (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \qquad , \quad a \in]-\infty; +\infty[$$

est appelée l'intégrale fractionnaire(à gauche) de Riemann- Liouville d'ordre α et l'intégrale

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \qquad tq \ \ b \in]-\infty; +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann- Liouville d'ordre α ou Γ est la fonction Gamma lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^{(\alpha)} f(x) = f(x) * \varphi_\alpha(x)$ ou $\varphi_\alpha(x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
pour $x > 0.\varphi_\alpha(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $\varphi_\alpha(x) \longrightarrow \delta$ quand $\alpha \longrightarrow 0$



FIGURE 1.1 – G.F.B Riemann(1826-1866)



FIGURE 1.2 – J.Liouville (1809-1882)

Théorème 1.3.5. *pou $h \in \mathbb{C}[a;b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe.*

$$I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f(x)) = I_{a}^{\alpha+\beta} f(x) \qquad \alpha > 0, \beta > 0$$

Preuve. *la preuve découle directement de la définition suivante*

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{a}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \int_{a}^{x} \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du$$

or $f \in [a;b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement $t = u + (x-u)$ on

obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta}f(x)] &= \frac{\beta(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{f(u)}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}}du \\ &= I_a^{\alpha+\beta}f(x) \end{aligned}$$

où $\beta(\alpha,\beta)$ désigne la fiction Bêta.

Proposition 1.3.6. *[11] nous avons les propriétés suivantes*

1. $I_a^0 f(x) = f(x)$
2. *l'opérateur intégrale I_a^0 est linéaire.*

Exemple 1. $f(t) = (t-a)^m$ *ou* $m > -1$

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^t \frac{(t-a)^m}{(t-s)^{1-\alpha}}ds \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = \alpha + (t-a)x$ on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}f(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(a)}\int_a^t (1-x)^{\alpha-1}x^m dx \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(a)}\beta(\alpha, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} \end{aligned}$$

D'ou $I_a^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{m+\alpha}$

Dérivation fractionnaire

il ya beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire,nous allons souligner les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

La dérivation fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville

soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, et $0 < \alpha < 1$ on a :

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^0 (t-\tau)d\tau$$

et appelée la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α *de* f *,avec* $t \geqslant 0$

Définition 1.3.7. *soit* f *une fonction intégrable sur* $[a,b]$ *alors la dérivée fractionnaire d'ordre* α*(avec* $n-1 \leqslant \alpha < n$*) au sens de Riemann-Liouville et définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t)) \end{aligned}$$

en général la dérivée non entière d' une fonction constant au sens de Riemann-Liouville n'est pas null ni constant,mais on a :

$${}^{RL}D^{\alpha}(c) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

$${}^{RL}D^{\alpha}1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f *tell que :*
$f(t) = (t-a)^{\beta}$ *soit* α *non entier et* $n-1 \leqslant \alpha < n$ *avec* $\beta > -1$ *,alors on a*

$$(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\alpha}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(t-\alpha)^{\beta}d\tau$$

en faisant le changement de variable
$t = a + s(t-a)$ *on aura :*

$${}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds$$

$$= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-\alpha)^{\beta-\alpha}$$

Exemple 2. *$\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ et $a = 0$, on aura*
${}^{RL}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$

Remarque 1. *si f est de classe C^n en faisant des intégrations par parties des différentiations répétées on obtient*

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

dans la modélisation mathématique l'utilisateur des dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville même à des condition initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaire en la borne inférieure $t = a$ une certaine solution de ce problème a été proposée par M.Caputo.

Définition 1.3.8. *soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$,$n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction tell que $\frac{d^n f}{dt^n} \in L^1[a,b]$, la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :*

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds$$

$$= I^{(n-\alpha)}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right)$$

1. *composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire si f est une fonction continue on a :*

$${}^{c}D^{\alpha}I_a^{\alpha}f = f$$

et

$${}^{c}D^{\alpha}I_a^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)(t-a)^{(k)}}{k!}$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur

d'intégration fractionnaire mais il n'est pas inverse à droite

2. *la dérivée d'une fonction constante f au sens de Caputo est nulle :*

$$^cD^\alpha f = 0$$

3. *la dérivée fractionnaire de la fonction*

$$f(t) = t^\beta$$

est donnée par :

$$^cD^\alpha t^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t)^{\beta-\alpha} & ,\beta > \alpha - 1 \\ 0 & ,\beta \leqslant \alpha - 1 \end{cases}$$

Propriétés importantes des dérivées fractionnaires

1. ***Linéarité** [10]*

   la différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t)$$

   tel que D^α désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

2. ***Règle de Leibniz**[10]*

   pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f.g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$$

   la généralisation de cette formule nous donne :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t) + R_n^{(\alpha)}(t)$$

où $n \geqslant \alpha+1$ *et* $R_n^\alpha(t) = \dfrac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{(-\alpha-1)} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\varepsilon)(\tau-\varepsilon)^{(n)} d\varepsilon.$

(avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^\alpha(t) = 0$*)*

Si f *et* g *avec toutes ses dérivées sont continues dans* $[a;t]$ *la formule devient :*

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t).$$

D^α *est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Granwald-Letnikov*

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 1.4.1 (Schauder). *[18] Soit* (E,d) *un espace métrique complet, Soit* A *une partie convexe et fermé de* E *et soit* $F : A \longrightarrow A$ *une application telle que l'ensemble* $\{Fx : x \in A\}$ *est relativement compact dans* E *. Alors* F *possède au moins un point-fixe*

Théorème 1.4.2 (théorème de l'internative non linéaire de Leray Schauder). *[6] soient* X *un espace de Banach et* $C \subset X$ *un sous-ensemble convexe non vide de* X *.on suppose qu'il existe un ouvert* U *dans* C *tel que* $0 \in U$ *et* $\mathbb{N} : \bar{U} \longrightarrow C$ *une multi-fonction semi -continue supérieur et compact,alors on a l'alternative suivante :*

1. N *a un point fixe sur* $\bar{U}$*.*
2. *il existe* $\lambda \in]0,1[$ *et* $u \in U$ *tel que :* $u \in \lambda N(u)$*.*

Théorème 1.4.3 (Ascoli-Arzéla). *[20]*

Soit F *un sous ensemble de* $C(J,E)$ *,* F *est relativement compact dans* $C(J,E)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifier :*

1. *l'ensemble* F *est borné i.e* $\exists$ *une constante* $k > 0$ *tel que :*
   $\| f(x) \| \leqslant k \quad \forall \quad x \in J$ *et tout* $f \in F$*,*
2. *l'ensemble* F *est équicontinue i.e* $\forall \quad \varepsilon > 0$ *,* $\exists \quad \delta > 0$ *tel que* $|t_1 - t_2| < \delta \implies \| f(t_1) - f(t_2) \| \leqslant \varepsilon \quad \exists \quad t_1, t_2 \in J$ *et tout* $f \in F$*.*
3. *Pour tout* $x \in J$ *l'ensemble* $\{f(x) \ , \ f \in F\} \subset E$ *est relativement compacte .*

1.5 Lemmes fondamentaux

Lemme 1.5.1. *[14, 16] soit $\alpha > 0$,alors l'équation différentielle*

$$^cD^{\alpha}h(t) = 0$$

admet les solutions

$$h(t) = c_0 + c_1t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2 \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1$

Preuve. *supposons que*

$$^cD^{\alpha}h(t) = 0$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-\alpha}(\frac{d}{dt})^n h(t) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}(\frac{d}{ds})^n h(s)ds = 0$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-1}(\frac{d}{ds})^n h(s)ds = 0$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s) = 0$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de légalité

$$L\big(t^{n-\alpha-1} * h^{(n)}(t)\big)(p) = L(0)(p) = 0$$

posant $H(p) = L(h)(p)$*on obtient*

$$\frac{\Gamma(n-r)}{p^{n-\alpha}}\big(p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{(k-1)}(0)\big) = 0$$

alors

$$p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{(k-1)}(0) = 0$$

donc

$$H(p) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{(k-1)}(0)$$

on applique maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(H(p))(t) = L^{-1}\big(\sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{(k-1)}(0)\big)(t)$$

il s'ensuit que

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} h^{(k-1)}(0) L^{-1}\big(p^{-k}\big)(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} h^{(k-1)}(0).\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ *on trouve*

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

pour $c_i = \frac{h_i(0)}{i!}$ *on a*

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

Supposons maintenant que :

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$${}^cD^{\alpha} h(t) = {}^cD^{\alpha} h(t)\big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i\big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^c D^{\alpha} t^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \big(\frac{d}{dt}\big)^n t^i$$

puisque $(0 \leqslant i \leqslant n-1 < n)$*on a*

$$^cD^\alpha h(t) = 0$$

Ce qui achève la démonstration.

Lemme 1.5.2. *[14, 16] soit* $\alpha > 0$*,alors*

$$I^\alpha \ {}^cD^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2 \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1$

Preuve. *On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo*

$$^cD^\alpha h(t) = I^{n-\alpha} h^{(n)}(t)$$

on applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$I^{\alpha c}D^\alpha h(t) = I^\alpha I^{n-\alpha} h^{(n)}(t)$$

$$= I^{nRL} D^n h(t)$$

$$= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t \longrightarrow 0} \big(\frac{d}{dt}\big)^{n-j} I^{n-n} h(t)$$

$$= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \big((\frac{d}{dt})^{n-j} h(t)\big)(0)$$

$$= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h^{(n-j)}(0)$$

par le changement de variable $k = n - j$ *on obtient :*

$$I^{\alpha c}D^\alpha h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0) t^k}{k!}$$

$$= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c'_k t^k}{k!}$$

$$= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!}$$

CHAPITRE 2

PROBLÈME AUX LIMITES POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre , nous présenterons un résultat d'existence des solution basé sur Le théorème de point fixe de Schauder pour le problème aux limites suivante :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), pour\ \ t \in J := [0, T], 1 < \alpha \leqslant 2 \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T. \tag{2.2}$$

où $^cD^\alpha$ la dérivées d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue

2.1 Existence des solutions

On commence de donner la définition d'un solution au problème (2.1)-(2.2)

Définition 2.1.1. *[11, 13] une fonction $y \in C(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (2.1)-(2.2),si y satisfait l'équation (2.1), et les conditions (2.2)*
soit $h : C[0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in J, 1 < \alpha \leqslant 2 \tag{2.3}$$

on note le problème(2.3)-(2.2) par

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in J, 1 < \alpha \leqslant 2 \\ y(0) = y_0, y(T) = y_T \end{cases} \tag{2.4}$$

Lemme 2.1.2. *une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)h(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)}{T}t \tag{2.5}$$

si et seulement si y est une solution de (2.4) où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si \quad 0 \leqslant s \leqslant t < T \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si \quad 0 < t \leqslant s \leqslant T \end{cases}$$

Démonstration. supposons que y vérifier (2.5),alors le lemme (1.5.2)nous donne

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= h(t) \\ &\Leftrightarrow I^\alpha \, {}^cD^\alpha y(t) = I^\alpha h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) + c_0 + c_1 t = I^\alpha h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t h(s)(t-s)^{\alpha-1}ds + c_0 + c_1' t \end{aligned}$$

avec

$$c_0' = -c_0 \quad et \quad c_1' = -c_1$$

on a : $y_0 = c_0' = y_0$

et

$$y(T) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + y_0 + c_1' T$$

ce qui implique que :

$$c_1' = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{y_T - y_0}{T}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s) + y_0 - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{(y_T-y_0)}{T}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + y_0 + \frac{(y_T-y_0)}{T}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\bigg(\int_0^t \Big((t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1}\Big)\Big(h(s)\Big)ds + \int_t^T -\frac{t}{T}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\bigg) \\ &+ y_0 + \frac{(y_T-y_0)}{T}t \end{aligned}$$

c'est à dire on a

$$y(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds + y_0 + \frac{(y_T-y_0)}{T}t$$

avec

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si 0 \leqslant s \leqslant t < T \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si 0 < t \leqslant s \leqslant T \end{cases}$$

inversement on a :

$$y(t) = \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)h(s)ds + y_0 + \frac{(y_T-y_0)}{T}t$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si 0 \leqslant s \leqslant t < T \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si 0 < t \leqslant s \leqslant T \end{cases}$$

posons $g(t) = y_0 + \frac{(y_T-y_0)}{T}t$

on a

$${}^cD^\alpha y(t) = {}^c\,D^\alpha\bigg(g(t) + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)h(s)ds\bigg)$$

avec $1 < \alpha < 2 \quad et \quad n = 2$

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha g(t) + {}^c D^\alpha\Big(\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)h(s)ds\Big) \\ &= I^{2-\alpha}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2 g(t) + I^{2-\alpha}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2\Big(\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)h(s)ds\Big) \\ &= I^{2-\alpha}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2\Big(\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)h(s)ds\Big) \end{aligned}$$

car $\Big(g(t) = g(t) = y_0 + \frac{(y_T - y_0)}{T}t\Big)$

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= I^{2-\alpha}\big(\frac{d}{dt}\big)^2\big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big(\int_0^T \big((t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1}\big)h(s)ds - \frac{t}{T}\int_t^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\big)\big) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^T (t-s)^{\alpha-1}\big(\frac{d}{ds}\big)^2\big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s ((s-\tau)^{\alpha-1} \\ &- \frac{s}{T}(T-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau - \frac{s}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau\big]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\big(\frac{d}{ds}\big)^2\big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s ((s-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau \\ &- \frac{s}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^s (T-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau - \frac{s}{T\Gamma(\alpha)}\int_s^T (T-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau\big]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\big(\frac{d}{ds}\big)^2\big[I^\alpha h(s) - \frac{s}{T}I^\alpha h(T)\big]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}I^{\alpha-2}h(s)ds \end{aligned}$$

car $(\frac{d}{ds})^2(-\frac{s}{T}I^\alpha h(T)) = 0$ alors on a :

$$ {}^cD^\alpha y(t) = {}^c D^\alpha\ I^\alpha h(t) = h(t)$$

donc

$$ {}^cD^\alpha y(t) = h(t)$$

.

□

Remarque 2. *la fonction $t \in J \to \int_0^T \mid G(t,s) \mid ds$ est continue sur J,alors est bornée.soit $\hat{G} = sup\big\{ \int_0^T \mid G(t,s) \mid ds, \quad t \in J\big\}$*

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point

fixe de Schauder

Théorème 2.1.3. *[13] soit les trois condition suivant :*

$(H1)$ *la fonction* $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue .*

$(H2)$ *Il existe une fonction* $\mathcal{P} \in C(J, \mathbb{R}^+)$, *et* $\psi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty[$ *continues et croissante, telles que*

$$\mid f(t,x) \mid \leqslant \mathcal{P}(t)\Psi(\mid x \mid), \forall \quad t \in J \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$(H3)$ *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$\frac{M}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{P}^*\Psi(M)\hat{G} + \mid y_0 \mid + \mid y_T - y_0 \mid} \geqslant 1 \tag{2.6}$$

où $\mathcal{P}^* = \sup \mathcal{P}(s), s \in J.$

Preuve. *soit*

$$C = y \in (J, \mathbb{R}), \parallel y \parallel_\infty \leqslant M$$

où M *est la constante donné par (H3).il est claire que le sous ensemble* C *est fermé et convexe. donc on montre que* F *vérifier les condition du théorème de point fixe de Schauder. Alors la demenstration se fait***4** *étape suivante :*

Etape 1 : F *est continue.*

Soit $\{y_n\}$ *une suite telle que* $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ *dans* $C(J, \mathbb{R})$. *Alors* $\forall t \in J$ *on a :*

$$\begin{aligned} \mid F(y_n)(t) - F(y)(t) \mid &= \mid \int_0^T \frac{1}{\Gamma(\alpha)} G(t,s)[f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))]ds \mid \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \mid G(t,s) \mid\mid f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \mid ds \end{aligned}$$

on a f *est continue , alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons*

$$\mid F(y_n)(t) - F(y)(t) \mid_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où la continueé de F.

Etape 2 : *F transforme C,en un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$.*

Soit $y \in C$, alors pour chaque $y \in J$,$(H2)$ implique

$$\begin{aligned} \mid F(y)(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \mid G(t,s) \mid\mid f(s,y(s)) \mid ds + \mid y_0 \mid + \frac{\mid y_T - y_0 \mid}{T} \mid t \mid \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{P}(t)\Psi(\mid y(t) \mid) \int_0^T \mid G(t,s) \mid ds + \mid y_0 \mid + \mid (y_T - y_0) \mid \end{aligned}$$

Alors on a :

$\| Fy \|_\infty \leqslant \mathcal{P}^*\Psi(M)\hat{G} + y_0 + \mid y_T - y_0 \mid := l$

Etape 3 : *F transforme C,en un ensemble équicontinue de $C(J,\mathbb{R})$.*

Soit $y \in C$, et $t_1; t_2 \in J$ telle que $t_1 < t_2$,Alors :

$$\begin{aligned} \mid F(y)(t_2) - F(y)(t_1) \mid \leqslant & \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t_2,s) f(s,y(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t_1,s) f(s,y(s)) ds \mid \\ & + \mid \frac{y_T - y_0}{T} t_2 - \frac{y_T - y_0}{T} t_1 \mid \\ & \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \mid G(t_2,s) - G(t_1,s) \mid\mid f(s,y(s)) \mid ds \\ & + \frac{y_T - y_0}{T} \mid t_2 - t_1 \mid \end{aligned}$$

Alors quand $.t_1 \longrightarrow t_2$le second membre droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro donc par le théorème d'Ascoli-Arzéla(1.4.3) , $\mathcal{N}(C)$ est relativement compact pour tout borné de F.Alors $\mathcal{N}$ est complètement continu.

Etape 4 : *$F(C) \subset C$.*

Soit $y \in C$ on va montrer que $Fy \in C$.$\forall t \in J$,on a :

$$\begin{aligned} \mid F(y)(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \mid G(t,s) \mid\mid f(s,y(s)) ds + \mid y_0 \mid + \frac{\mid y_T - y_0 \mid}{T} \mid t \mid \\ &\leqslant \mid \frac{y_T - y_0}{T} t_2 - \frac{y_T - y_0}{T} t_1 \mid \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{P}^*\Psi(\| y \|_\infty)\hat{G} + \mid y_0 \mid + \mid y_T - y_0 \mid \end{aligned}$$

Donc on :

$$\| F(y)(t) \|_\infty \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{P}^*\Psi(M)\hat{G} + \mid y_0 \mid + \mid y_T - y_0 \mid$$

et par (2.6)

$$\| F(y)(t) \|_{\infty} \leqslant M$$

Alors en déduit que F admet au moins un point fixe et qui est une solution du problème aux limites(2.1)-(2.2).

CHAPITRE 3

PROBLÈME AUX LIMITES D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRES OÙ CAS CONVEXE

Dans ce chapitre nous allons donner un résultat d'existence pour le problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire suivant :

$$^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), pour \quad t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leqslant 2 \tag{3.1}$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T \tag{3.2}$$

où $^cD^\alpha$ est la drivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_T sont des constantes réelles. Tout d'abord nous donnons la définition d'une solution au problème (3.1)-(3.2)

Définition 3.0.1. *[16] Une fonction $y \in AC^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.1)-(3.2) s'il existe une fonction $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $f(t) \in F(t, y(t))$, pour tout $t \in J$, telle que,*

$$^cD^\alpha y(t) = f(t), \text{ pour tout } t \in J, 1 < \alpha \leqslant 2,$$

et la fonction y satisfait la condition (3.2)

3.1 cas convexe

pour l'existence de la solution pour le problème (3.1)-(3.2) , nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *Soient $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $1 < \alpha \leqslant 2$. Une fonction y est solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \quad (3.3)$$

si et seulement si y est solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire :

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T], \quad (3.4)$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T. \quad (3.5)$$

Démonstration. Supposons d'abord que y est solution de (3.3) c'est-à-dire

$$y(t) = I^\alpha h(t) + \tfrac{t}{T}[y_T - y_0 - I^\alpha h(T)] + y_0.$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} ^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha \left(I^\alpha h(t) + \frac{t}{T} \underbrace{[y_T - y_0 - I^\alpha h(T)] + y_0}_{K} \right) \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) + \frac{K}{T}\, {}^cD^\alpha t + \underbrace{{}^cD^\alpha y_0}_{0} \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t), \end{aligned}$$

et d'après les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$$^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t).$$

Ce que montre (3.4) i.e :

$$^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

D'autre part on a :

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T$$

Ce que montre (3.5)

Inversement supposons que y est solution du problème :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T] \\ y(0) = y_0, y(T) = y_T, \quad . \end{cases}$$

D'après le lemme (1.5.2) on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha y(t) &= c_0 + c_1 t + y(t) \\ &= I^\alpha h(t) \\ y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 - c_1 t. \end{aligned}$$

De plus ona :

$$\begin{cases} c_0 = y_0, \\ c_1 = \frac{-1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{T} y_0 + \frac{1}{T} y_T \quad . \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Alors,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^t (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \big(\frac{t}{T} - 1\big) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Théorème 3.1.2. *[16] Supposons que :*

$(H1) F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ *est une application multivoque Carathéodory.*

$(H2)$ *Il existe une fonction* $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$, *et* $\psi : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *continue et non décroissante, telles que*

$$\| F(t,u) \|_{\mathcal{P}} \leqslant p(t)\psi(| u |), \text{ pour tout } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathbb{R}.$$

$(H3)$ *Il existe* $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *avec* $I^\alpha l < \infty$ *telle que*

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leqslant l(t) \mid u - \overline{u} \mid \text{ pour tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R}$$

et

$$d(0, F(t,0)) \leqslant l(t), \text{ pour tout } t \in J.$$

$(H4)$ *Il existe une constante* $M_1 > 0$ *telle que*

$$\frac{M_1}{\psi(M_1) \parallel I^{\alpha}p \parallel_{\infty} + \psi(M_1(I^{\alpha}p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid} > 1 \tag{3.6}$$

Alors le problème(3.1)-(3.2) admet au moins une solution dans J.

On va transformer le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$\mathcal{N}(y) = \Bigg\{ h \in C(J,\mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds$$
$$- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T, v \in S_{F,y} \Bigg\}.$$

Il est claire d'après le lemme (3.1.1), les points fixes de $\mathcal{N}$ *sont solutions de (3.1)-(3.2).*

On va utiliser l'alternative non linéaire de Leray Shauder pour montrer que $\mathcal{N}$ *admet au moins un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes*

Etape 1 : $\mathcal{N}$ *est convexe pour tout* $y \in C(J,\mathbb{R})$.

si $h_1, h_2 \in \mathcal{N}(y)$, *alors il existe* $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ *telle que pour tout* $t \in J$, *nous avons :*

$$h_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_i(s) ds$$
$$- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_i(s) ds - (\frac{t}{T} - 1) y_0 + \frac{t}{T} y_T, i = 1, 2.$$

Soit $0 < \lambda < 1$. *Alors, pour tout* $t \in J$, *nous avons :*

$$(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)\big]ds$$
$$- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\big[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)\big]ds$$
$$- \big(\frac{t}{T} - 1\big)y_0 + \frac{t}{T}y_T,$$

comme $S_{F,y}$ est convexe (car F a des valeurs convexes),nous avons :

$$\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in \mathcal{N}(y)$$

Etape 2 : *$\mathcal{N}(y)$ transforme les bornées en des bornées dans $C(J,\mathbb{R})$.*

Soit $B_r = \{y \in C(J,\mathbb{R}) :\| y \|\leqslant r\}$ un ensemble bornée de $C(J,\mathbb{R})$ ou r un réel positive.

Soit $y \in B_r$ alors pour tout $h \in \mathcal{N}(y)$, il existe $v \in S_{F,y}$ telle que :

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds$$
$$- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \big(\frac{t}{T} - 1\big)y_0 + \frac{t}{T}y_T$$

par $(H2)$, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
| h(t) | &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | v(s) | ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} | v(s) | ds - | y_0 | + | y_T | \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(| y |)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(| y(s) |)ds + | y_0 | + | y_T | \\
&\leqslant \psi(r)I^{\alpha}(p)(t) + \psi(r)I^{\alpha}(p)(T) + | y_0 | + | y_T | .
\end{aligned}$$

Alors,

$$\| h \|_{\infty} \leqslant \psi(r) \| I^{\alpha}(p) \|_{\infty} + \psi(r)I^{\alpha}(p)(T) + | y_0 | + | y_T | = K.$$

On en conclut que pour tout $h \in \mathcal{N}(B_r)$, il existe K telle que

$$\| y \|_\infty \leqslant K,$$

ce que montre que $\mathcal{N}(y)$ *est bornée.*

Etape 3 : $\mathcal{N}$ *est équicontinu .*

Considérons B_r *une partie bornée de* $C(J,\mathbb{R})$. *Soient* $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2, y \in B_r$ *et* $h \in \mathcal{N}(y)$ *alors*

$$\begin{aligned}
| h(t_2) - h(t_1) | =& | \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} |]v(s)ds \\
&+ \frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} v(s)ds \mid + (\frac{(t_2-t_1)}{T}) \mid y_0 \mid + \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_T \mid \\
&\leqslant \frac{\| p \|_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]ds \\
&+ \frac{(t_2-t_1) \| p \|_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ (\frac{t_2-t_1}{T}) \mid y_0 \mid + \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_T \mid \\
&\leqslant \frac{\| p \|_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] \\
&+ \frac{(t_2-t_1) \| p \|_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha \\
&+ (\frac{(t_2-t_1)}{T}) \mid y_0 \mid + \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_T \mid .
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, *le coté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par consquente des étapes* (1) *à*(3) *avec le théorème d'Arzélà-Ascoli(1.4.3), nous peut conclure que* $\mathcal{N} : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ *est complètement continue.*

Etape 4 : $\mathcal{N}$ *a un graphe fermée.*

Soit $y_n \longrightarrow y_*, h_n \in \mathcal{N}(y)$ *et* $h_n \longrightarrow h_*$. *Il suffit de montre que* $h_* \in \mathcal{N}(y_*)$. *On* $h_n \in \mathcal{N}(y_n)$ *i.e : il existe* $x_n \in S_{F,y_n}$ *telle que pour chaque* $t \in J$,

$$\begin{aligned}
h_n(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \alpha - 1 v_n(s)ds \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)ds - \big(\frac{t}{T} - 1\big) y_0 + \frac{t}{T} y_T.
\end{aligned}$$

Nous devons montrer qu 'il existe $v_* \in S_{F,y_*}$ *tel que ,pour chaque* $t \in J$,

$$h_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds$$
$$- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - \big(\frac{t}{T} - 1\big) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Étant donner que $F(t,.)$ *est semi-continue supérieurement ,alors pour tout* $\varepsilon > 0$,*il existe* $\mathcal{N}_0(\varepsilon) > 0$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$ *, nous avons*
$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B(0,1))$,*pour chaque* $t \in J$

Étant donner que ,$F(.,.)$ *est à valeur compactes, alors il existe une sous suite* $v_{n_m}(.)$ *telle que,*

$$v_{n_m}(.) \to v_*(.) \quad si \quad m \to \infty$$

et

$$v_*(t) \in F(t, y_*(t)) \quad pour\ chaque \quad t \in J$$

.

pour tout $\omega \in F(t, y_*(t))$, *nous avons*

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leqslant \mid v_{n_m}(t) - \omega \mid + \mid \omega - y_*(t) \mid$$

Alors

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leqslant d(v_{n_m}(t), F(t, y_*(t)))$$

par une relation semblable , obtenue par l'échange des rôles de v_{n_m} *et* v_*, *il suit que,*

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leqslant H_d(F(t, y_n(t))), F(t, y_*(t))) \leqslant l(t) \parallel y_n - y_* \parallel_\infty$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mid h_n(t) - h_*(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\parallel h_{n_m} - h_* \parallel_\infty \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds - \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \to 0 \quad si \qquad m \to \infty
\end{aligned}$$

donc $h_* \in \mathcal{N}(y_*)$. *ce qui montre que* $\mathcal{N} : C(J, \mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}))$ *a un graphe fermé.*

Etape 5 : *Estimation à priori des solution.*

soit y *une solution possible au problème (3.1)-(3.2)telle que* $y \in \lambda \mathcal{N}(y)$ *avec* $\lambda \in]0, 1[$.

Alors il existe $v \in S_{F,y}$ *telle que pour tout* $t \in J$,

$$\begin{aligned}
y(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\
- \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \lambda \big(\frac{t}{T} - 1\big) y_0 + \frac{\lambda t}{T} y_T.
\end{aligned}$$

ceci implique d'après (H2)que, pour tout $t \in J$*,nous avons*

$$\begin{aligned}
y(t) &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds - \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\
. &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y \mid)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid)ds \mid y_0 \mid) + \mid y_T \mid \\
&\leqslant \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)ds \\
&+ \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)ds \mid + \mid y_0 + \mid y_T \mid \\
&\leqslant \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(t) + \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid .
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\parallel y \parallel_\infty}{\psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(t) + \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid} < 1$$

Ainsi, la condition (3.6) implique qu'il existe une constante $M_1 > 0$, telle que $\parallel y \parallel \neq M_1$ Soit

$$U = \left\{ y \in C(J, \mathbb{R}) : \parallel y \parallel_\infty \neq M_1 \right\}$$

L'opérateur $\mathcal{N} : \bar{U} \to \mathcal{P}(C(J, R))$ est semi continue supérieurement complètement continu. Le choix de U, entraine qu'il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que

$$y \in \lambda \mathcal{N}(y)$$

avec $\lambda \in]0, 1[$, par conséquent, d'après l'alternative non linéaire de Leray Schauder, on déduit que $\mathcal{N}$ admet un point fixe dans $\bar{U}$ qui est solution du problème (3.1)-(3.2)

□

CONCLUSION

Le calcule fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques gr̂ace à son immense application des différentes domaines tel que la chimie ,la physique,l'ingénierie,la biologie et d' autre sciences.

Notre but principale ,dans ce travail est de présenter quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites :

- Pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires,les résultats ont été obtenu par l'utilisation de théorème de point fixe de Schauder ;
- l'inclusion différentielles d'ordre fractionnaires,ces résultats ont obtenus pour l'application de la théorie de point fixe ,en particulier on a utiliser le théorème du point fixe de L'alternative non linéaire de Laery-Schauder

Nous prévoyons,dans le futur appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autre classes d(EDF),et développer d'autres méthodes numériques de résolution des différentes types d'inclusions différentielles .

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.Adjimi, *Traitement numériques des equations diférentielle d'ordre fractionnelle*, Université deM'sila, thèse de Master, 2018.

[2] M.Aissaoui, *L'intégrale et la dérivée fractionnaires au sense de Rimann-Liouville*, Université de Telemcen , thèse de licence, 2013.

[3] R.Aouafi, *existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non lineaire*, Université de Oum el Bouaghi, thèse de Magister.

[4] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata *Topics in fractional differential equations*, Springer, New York, 2002.

[5] M. Benchohra , J. R. Graef and F.Z. Mostefai *Weak Solutions for Boundary-Value Problems with Nonlinear Fractional Differential Inclusions,Nonlinear Dynamics and Systems Theory* , 11 (3) (2011) 227-237,July 20- 2011.

[6] M. FRIGON, A. GRANAS *Resultats du type de Laray-Schauder pour des contractions multivoques, Jornale of the Juliusz Schauder center*, Volume 4.1994, 197-208.

[7] O.Hassani *Analyse multivoque et inclution différentelles*, Université de Saïda, thèse de Master, 2015.

[8] M.Hamidaoui, *Méthodes des différences finies appliquée aux EDP_s fractionnaires*, Université de deTelemcen ,thèse de Master , 2016.

[9] M.Hamdi.Cherif, *Résolutions numerique des equations différentielles et aux dérivées partielles non linéaire et d'ordre fractionnaire par la méthode HPM*, Université D'Oran 1, thèse de Doctorat, 2016.

[10] K.Haouam, *Existence et non-Existence de solutions des equations différentielles fractionnaires*, Université de Constantine , thèse de Doctorat, 2007.

[11] D.Hammadi, *Calcul fractionnaire et ses application aux problem aux limites*, Université de Ourgla, thèse de Master, 2017.

[12] M.Kaddouri, *probleme pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire*, Université de saäda, thèse de Master, 2017.

[13] R.Lakehal, *Equations différentielles fractionnaires résultats d'existences et d'unicité*, Université m'sila, thèse de Master, 2017.

[14] G.Mama, *Poplem aux limitespour dzs equations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach*, Université Tlemcen , thèse de Master, 2015.

[15] H.Medjkal, *Existence et unicité de la solutions d'une équation différentielle fractionnaires impulsive de temps infini dans un espace de Banach*, Université de-Telemcen ,thèse de Master , 2016.

[16] Y.Rabegh, *Etude de quelque inclusion différentielles d'ordre fractionnaire*, Université Saïda, thèse de Master, 2017.

[17] H.Rahou, *Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires*, Université deTelemcan ,thèse de Master , 2015.

[18] A.Salah, *les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires* , Université Constantine ,thèse de Magister , 2009.

[19] D.Slimani, *Dérivation non entière :Application ettraitement d'images*, Université de Tizi-Ouzou, thèse de Maigster, 201.

[20] M.Slman, *E'quation differetielle d'ordre fractionnaires dansdes espaces de Banach*, Université , thèse de Magister, 2012.

[21] M.Salhi, *Applications de quelques théorèmes du point fixe pour la résolution des équations différentielles fractionnaires*, Université Ouargla ,thèse de Master , 2016.

[22] M.Yvesner, *Développements récents en analyse multivoque :Prédérivées et optimisation multivoque* , Université des Antilles ,thèse de Doctorat , 2016.