République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par :

BOUKRA Amar

Sur :

Les nombres hybrides de Horadam

Mémoire évalué par le jury composé de

M^{me} **AIT-AMRANE N. Rosa**	**M.A.A**	**U.Y.F.M.**	**Directrice de thèse**
M^{lle} **AZROU Nadia**	**M.A.A**	**U.Y.F.M.**	**Examinatrice**
M^{me} **GUETTAI Ghania**	**M.A.A**	**U.Y.F.M.**	**Examinatrice**

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Table des matières

Remerciements I

Dédicace II

Abstract III

Résumé IV

Résumé en arabe V

Introduction 1

1 Les suites récurrentes linéaires 2

1.1 Rappel sur les suites récurrentes linéaires 2

1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 2

1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 3

1.4 La formule de Binet d'une suite récurrente linéaire 3

1.5 La fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire 4

2 La suite de Fibonacci 5

2.1 La suite de Fibonacci 5

2.2 La formule de Binet de la suite de Fibonacci 6

2.3 La fonction génératrice de la suite de Fibonacci 6
2.4 Propriétés de la suite de Fibonacci 7

3 La suite de Lucas 18

3.1 La suite de Lucas 18
3.2 La formule de Binet pour la suite de Lucas 18
3.3 La fonction génératrice de la suite de Lucas 19
3.4 Les liens entre la suite de Lucas et la suite de Fibonacci 20
3.5 Propriétés de la suite de Lucas 23

4 Les nombres Horadam 26

4.1 Les nombres Horadam 26
4.2 La formule de Binet la suite de Horadam 27
4.3 La fonction génératrice de la suite Horadam 27

5 Les nombres hybrides de Horadam 29

5.1 Les nombres hybrides 29
5.2 Les nombres hybrides de Horadam 32
5.3 La formule de Binet des nombres hybrides de Horadam 34
5.4 La fonction génératrice des nombres hybrides de Horadam 37

Conclusion 38

Bibliographie 39

Liste des tableaux

2.1 Les premiers termes de la suite de Fibonacci 5

3.1 Les premiers termes de la suite de Lucas 18

4.1 Les premiers termes des nombres de Horadam 28

5.1 Les produits des opérateurs 31

Remerciements

Merci d'abord et avant tout à **ALLAH** Le Tout-Puissant qui m'a aidé dans mon présent travail de recherche.

Je remercie sincèrement ma Directrice de thèse, Madame **AIT-AMRANE Nacima Rosa**, Maitre assistante à l'université Yahia Farès de Médéa, qui m'a proposé ce sujet et qui m'a dirigé tout au long de ce travail.

Je remercie également Mesdames ; **AZROU Nadia** et **GUETTAI Ghania**, Maitres assistantes à l'université Yahia Farès de Médéa, qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce présent mémoire.

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut, tous les mots ne sauraient exprimer ma gratitude, l'amour, le respect et la reconnaissance envers mes parents. Je dédie ce modeste travail :

-À ma chère mère **MESSAOUDA**.

-À mon cher père **ABDERRAHMAN**.

-À mes chers frères.

-À mes chères soeures.

-À la princesse **RETAJ**.

-À toute ma famille.

-À tous mes amis.

Je tiens à saluer l'ensemble des étudiants et étudiantes de ma promotion 2020.

Enfin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Abstract

In this research, we were interested in the twinning of two families of numbers, resulting from linear recurrent sequences ; the numbers of Horadam and the hybrid numbers, which gave rise to the hybrid numbers of Horadam that we found a good subject to study, which are actually a generalization of Fibonacci and Lucas numbers. This is why we show in our memory, the most important basic, properties of these numbers, such as the Binet's formula, the generating function and some analytical properties.

Keywords : Fibonacci numbers, Lucas numbers, Horadam numbers, hybrid numbers, Horadam hybrid numbers, relation of linear recurrence, Binet formula, generating function.

Résumé

Dans ce présent mémoire, nous nous sommes intéressés au jumelage de deux familles de nombres, issues de suites récurrentes linéaires ; les nombres de Horadam et les nombres hybrides, qui ont donnés naissance aux nombres hybrides de Horadam, que nous avons estimé un bon sujet à étudier, qui sont en réalité une généralisation des nombres de Fibonacci et de Lucas. Nous avons mis en exergue des propriétés de base des plus importantes de ces nombres, comme la formule de Binet, la fonction génératrice et certaines propriétés analytiques.

Mots-Clés : Les nombres de Fibonacci, les nombres de Lucas, les nombres de Horadam, les nombres hybrides, les nombres hybrides de Horadam, relation de récurrence linéaire, formule de Binet, fonction génératrice.

Résumé en arabe

ملخص

في مذكرتنا، إهتممنا بجمع وتوأمة عائلتين من الأرقام الناتجة عن التسلسلات الخطية المتكررة؛ ارقام هورادام و الأرقام الهجينة التي نتج عنهما أرقام هورادم الهجينة. حيث وجدناه موضوعا جيدا للدراسة، وهو في الواقع تعميم لأرقام فيبوناتشي ولوكا. لذلك أبرزنا في بحثنا، أهم الخصائص الأساسية لهذه الأرقام، مثل صيغة بينيه، الدالة المولدة وبعض الخصائص التحليلية.

الكلمات المفتاحية : أرقام فيبوناتشي، أرقام لوكا، أرقام هورادام، الأرقام الهجينة، أرقام هورادام الهجينة، علاقة التكرار الخطي، صيغة بينيه، الدالة المولدة.

Introduction

Les nombres de Hordam et les nombres hybrides sont apparus nouvellement et offrent un nouveau domaine à exploiter des mathématiques modernes qui ont donné naissance aux nombres hybrides de Horadam que nous avons estimé un bon sujet à étudier tout au long de ce mémoire. Les nombres hybrides de Horadam sont, en réalité, une extension importante des nombres de Fibonacci et de Lucas. Nous avons étudié dans notre recherche les propriétés les plus importantes et de bases de ces nombres, comme la formule de Binet, la fonction génératrice et certaines propriétés que vérifient ces nombres.

Le mémoire est organisé en cinq chapitres dont le contenu est le suivant :

Dans le premier chapitre des rappels, nous citons les suites récurrentes linéaires et certaines de leurs propriétés de base.

Dans le deuxième et troisième chapitres nous définissons et étudions les propriétés des deux suites particulières ; la suite de Fibonacci et sa compagnon la suite de Lucas.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons les nombres de Horadam.

Dans le dernier chapitre, nous construisons les nombres hybrides de Horadam pour lesquels on donne des propriétés de base qui donnent un bon point de départ et ouvrent la porte sur un nouveau domaine de recherche pour les futurs chercheurs.

Chapitre 1

Les suites récurrentes linéaires

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions des suites récurrentes linéaires et certaines propriétés de base.

1.1 Rappel sur les suites récurrentes linéaires

Définition 1.1. *Une suite récurrente linéaire sur un corps $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ d'ordre r, avec $r \in \mathbb{N}^*$ est une suite définie par*

$$u_n = c_{r-1}u_{n-1} + c_{r-2}u_{n-2} + \cdots + c_0 u_{n-r}, \quad n \geq r, \tag{1.1}$$

avec $c_0, c_1, \cdots, c_{r-1} \in \mathbb{K}$ et $u_0, u_1, \cdots, u_{r-1}$ des valeurs initiales.

1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Définition 1.2. *Une suite est dite récurrente linéaire d'ordre 1 si elle est définie par*

$$u_{n+1} = qu_n, \quad n \geq 0, \tag{1.2}$$

où $q \in \mathbb{K}$ et u_0 une valeur initiale.

1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 1.3. *Une suite est dite récurrente linéaire d'ordre* 2 *si elle est définie par*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0, \tag{1.3}$$

où $a, b \in \mathbb{K}$ *et* u_0, u_1 *deux valeurs initiales.*

1.4 La formule de Binet d'une suite récurrente linéaire

Définition 1.4. *Soit* (u_n) *suite récurrente linéaire d'ordre 2, l'équation* $x^2 = ax + b$ *s'appelle* ***équation caractéristique*** *de la suite* (u_n).

L'étude des racines de l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire permet d'éxprimer le terme générale de cette suite en fonction de ces racines, qui est appelée : **formule de Binet** de la suite. Le théorème suivant permet de classifier les différents cas de la formule de Binet d'une suite d'ordre 2.

Théorème 1. *(Voir [7])*

1. *Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes* r_1 *et* r_2 *;*

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \quad avec \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \tag{1.4}$$

2. *Si l'équation caractéristique admet une racine double* r_0 *;*

$$u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n, \quad avec \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \tag{1.5}$$

3. *Si l'équation caractéristique n'a pas de racines réelles, on ne peut malheureusement rien dire dans* $\mathbb{R}$.

1.5 La fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire

Dans cette section on définit la fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire.

Définition 1.5. *Pour une suite*

$$u_n = c_0 u_{n-1} + \cdots + c_{k-1} u_{n-k},$$

la somme

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m x^m,$$

est la fonction génératrice ordinaire.

Nous observons que

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 + \cdots + u_m x^m + \cdots \\ xf(x) &= xu_0 + \cdots + u_{m-1} x^m + \cdots \\ x^2 f(x) &= x^2 u_0 + \cdots + u_{m-2} x^m + \cdots \\ &\vdots \\ x^k f(x) &= x^k u_0 + \cdots + u_{m-k} x^m + \cdots \end{aligned}$$

Donc, pour $m \geq k$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} (1 - c_0 x - c_1 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^k) f(x) &= \cdots + (u_m - c_0 u_{m-1} - \cdots - c_{k-1} u_{m-k}) x^m + \cdots \\ &= \cdots + 0 x^m + \cdots \end{aligned}$$

Donc, nous devons avoir cela

$$(1 - c_0 x - c_1 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^k) f(x) = g(x),$$

où $g(x)$ est un polynôme de degré au plus $k-1$. Il s'ensuit que

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - c_0 x - c_1 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^k}.$$

Chapitre 2

La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci présente de remarquables propriétés. En voici quelques unes démontrées a partir de la formule de Binet ou par récurrence. Nous donnons également quelques propriétés liant les différents termes de la suite de Fibonacci.

2.1 La suite de Fibonacci

Définition 2.1. *(Voir [3]) La suite de Fibonacci est définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre 2*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2 \tag{2.1}$$

avec les valeurs initiales

$$F_0 = 0 \quad et \quad F_1 = 1.$$

Dans le tableau suivant, nous listons les premiers nombres de Fibonacci :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

TABLE 2.1: Les premiers termes de la suite de Fibonacci

Remarque 1. *L'équation caractéristique de la suite de Fibonacci donnée par (2.1) est*

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{2.2}$$

qui admet deux solutions $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2.2 La formule de Binet de la suite de Fibonacci

Pour exprimer la formule de Binet de la suite de Fibonacci, nous utilisons le Théorème 1, ainsi les racines α et β de (2.2) vérifient :

$$F_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, \tag{2.3}$$

où C_1 et C_2 sont obtenues à partir des conditions initiales, d'où

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\alpha + C_2\beta = 1 \end{cases}$$

En résolvant les équations ci-dessus, nous obtenons

$C_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}$ et $C_2 = \frac{1}{\beta-\alpha}$

En remplaçant C_1 et C_2 dans (2.3), on obtient

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{2.4}$$

qui est la formule de Binet de la suite de Fibonacci.

2.3 La fonction génératrice de la suite de Fibonacci

La fonction génératrice de la suite de Fibonacci est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 1. *La fonction génératrice de la suite de Fibonacci est*

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \ . \tag{2.5}$$

Preuve. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n,$$

puis

$$\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{\alpha-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}u_nF_nx^n.$$

En particulier, si $u_n=1$, alors $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, donc

$$F(x)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

■

2.4 Propriétés de la suite de Fibonacci

Dans cette section, nous donnons quelques propriétés de la suite de Fibonacci.

Théorème 2. *1. La somme des n premiers termes de Fibonacci est les nombres de Fibonacci deux plus loin de n moins 1.*

$$\sum_{k=0}^{n}F_k=F_{n+2}-1. \tag{2.6}$$

2. La somme des nombres de Fibonacci pairs consécutifs est égal au nombre de Fibonacci un plus loin dans la suite moins 1.

$$\sum_{k=1}^{n}F_{2k}=F_{2n+1}-1. \tag{2.7}$$

3. La somme des nombres de Fibonacci impairs consécutifs est égal au nombre de Fibonacci qui suit le dernier nombre impair de la somme.

$$\sum_{k=1}^{n}F_{2k-1}=F_{2n}. \tag{2.8}$$

4. Le total des carrés des n premiers nombres de Fibonacci est le produit du dernier nombre et le nombre de Fibonacci suivant dans la suite.

$$\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}. \tag{2.9}$$

5. *La somme des produits des nombres de Fibonacci consécutifs est soit le carré d'un nombre de Fibonacci ou carré d'un nombre de Fibonacci moins* 1

$$\sum_{k=2}^{n+1} F_k F_{k-1} = \begin{cases} F_{n+1}^2, \textit{ si } n \textit{ est impair.} \\ F_{n+1}^2 - 1, \textit{ si } n \textit{ est pair.} \end{cases} \tag{2.10}$$

6. *La somme des carrés de deux nombres de Fibonacci consécutifs est égale au nombre de Fibonacci dans la suite dont le nombre de position est la somme de leur nombres de position.*

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}. \tag{2.11}$$

7. *Pour termes consécutifs de la suite de Fibonacci, différence de carrés des deux termes intermédiaires est le produit de deux termes externes*

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2}. \tag{2.12}$$

8. *Le produit de deux termes alternatifs de la suite de Fibonacci est le carré du moyen terme entre eux plus* 1 *ou moins* 1

$$F_{n-1}F_{n+1} = \begin{cases} F_n^2 + 1, \textit{ si } n \textit{ est pair.} \\ F_n^2 - 1, \textit{ si } n \textit{ est impair.} \end{cases} \tag{2.13}$$

9. *Un nombre de Fibonacci F_{mn} est divisible par un nombre de Fibonacci F_m. En d'autres termes, si p est divisible par q alors F_p est divisible par F_q, où m, n, p et q sont des entiers positifs.*

10. *La somme de dix nombres de Fibonacci consécutifs est divisible par* 11.

Exemple 1. *Soit*

$$3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 = 605.$$

Donc

$$\frac{605}{11} = 55.$$

Preuve.

1. (Voir [10]) Nous allons démontrer cette propriété par récurrence

$$F_0 = F_2 - F_1$$
$$F_1 = F_3 - F_2$$
$$F_2 = F_4 - F_3$$
$$\vdots$$
$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$
$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1},$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - F_1,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

2.

$$F_2 = F_3 - F_1$$
$$F_4 = F_5 - F_3$$
$$F_6 = F_7 - F_5$$
$$\vdots$$
$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - F_1,$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

3. De la définition de :

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$$

4. Notons que : $F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1} = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2$,

donc

$$F_1^2 = F_1F_2$$

$$F_2^2 = F_2F_3 - F_1F_2$$

$$F_3^2 = F_3F_4 - F_2F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n^2 = F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n,$$

terme par terme, on arrive à la formule qu'on voulait

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}.$$

■

Proposition 1.

$$F_{n+m} = F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m, \qquad m, n \geqslant 1. \tag{2.14}$$

Preuve. (Voir[11]) Nous proposons une preuve par récurrence sur m,

Pour $m = 1$, on a

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= F_{n-1}F_1 + F_nF_2. \end{aligned}$$

qui est vraie.

Pour $m = 2$,

la formule reste vraie, comme

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= F_{n-1} + F_n + F_n \\ &= F_{n-1} + 2F_n \\ &= F_{n-1}F_2 + F_nF_3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons maintenant vérifié la base de notre récurrence. Supposons maintenant notre formule vraie pour $m = k$ et pour $m = k + 1$.

Nous prouverons qu'il en est de même pour $m = k + 2$.

Donc, par récurrence, supposons

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$$

et

$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}.$$

Si on additionne ces deux équations terme par terme, on obtient

$F_{n+k} + F_{n+k+1} = F_{n-1}(F_k + F_{k+1}) + F_n(F_{k+1} + F_{k+2})$.

$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$ Ainsi, par récurrence, nous avons prouvé notre formule initiale vraie pour $m = k + 2$, et donc pour toutes les valeurs de m.

■

Proposition 2. *La différence des carrés de deux nombres de Fibonacci alternés, est le nombre de Fibonacci dans la suite dont le nombre de position est la somme de*

leurs nombres de position

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}. \tag{2.15}$$

Preuve. Pour $m = n$ dans (2.14)

on obtient

$$F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}.$$

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}),$$

comme

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1}.$$

Nous pouvons maintenant réécrire la formule comme suit :

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

où

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$$

■

Proposition 3. *On a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha. \tag{2.16}$$

Preuve. D'après la formule (2.4) on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}}{\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(1 - \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}})}{\alpha^n(1 - \dfrac{\beta^n}{\alpha^n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(1 - \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}})}{(1 - \dfrac{\beta^n}{\alpha^n})} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

■

Proposition 4. *La somme des nombres de Fibonacci avec des signes alternés est donnée par*

$$F_1 - F_2 + ... + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1, \quad n \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Preuve. En construisant la soustraction de la somme paire, de la somme impaire, on trouve :

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1. \tag{2.18}$$

Maintenant, en ajoutant F_{2n+1} des deux cotés de cette équation, nous obtenons

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+1} - F_{2n-1} + 1.$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n} + 1. \tag{2.19}$$

En combinant les équations (2.18) et (2.19), on trouve

$$F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1.$$

■

Théorème 2. *Pour n divisible par m alors F_n est divisible par F_m.*

Preuve. Pour n divisible par m. Alors $n = mm_1$, où $n > m_1 > 0$.

Nous prouvons le théorème par récurrence sur m_1.

Si $m_1 = 1$ alors $n = m$ et le résultat est évident.

Supposons que le résultat soit valable pour $m_1 = k$. Par conséquent, F_{mk} est divisible par F_m. Considérons maintenant $F_{m(k+1)}$. En utilisant la Proposition 1, on obtient

$$F_{m(k+1)} = F_{mk}F_{m+1} + F_{mk-1}F_m,$$

$(F_{mk}F_{m+1} + F_{mk-1}F_m)$, est divisible par F_m.

■

Dans ce que suit nous vérifions quelques identités remarquables, comme l'identité de Cassini, D'Ocagne, de Catalan et l'identité de Johnson.

L'identité de Cassini

Proposition 5. *Pour $n > 0$, on a*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{2.20}$$

Preuve. Pour tout $n > 0$, posons

$$u_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Alors pour $n = 1$, on a

$$u_1 = F_2F_0 - F_1^2 = -1,$$

et pour $n > 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \\ &= -u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n>0}$ est donc géométrique de premier terme $u_1 = -1$ et de raison -1.

Il en découle $u_n = (-1)^n$ pour tout $n > 0$, c'est-à-dire

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

■

L'identité D'Ocagne

Proposition 6. *Pour n, $r \in \mathbb{N}$, on a*

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r. \tag{2.21}$$

Preuve. (Voir[10]) Pour tout $n \geq 0$, posons

$$u_n = F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n.$$

Tout d'abord

$$u_0 = F_r F_1 - F_{r+1} F_0 = F_r.$$

Pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F_{n+r+1} F_{n+2} - F_{n+r+2} F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}(F_{n+1} + F_n) - (F_{n+r+1} + F_{n+r}) F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1} F_{n+1} + F_{n+r+1} F_n - F_{n+r+1} F_{n+1} - F_{n+r} F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1} F_n - F_{n+r} F_{n+1} \\ &= -u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de premier terme $u_0 = F_r$ et de raison -1.

Il en découle $u_n = (-1)^n F_r$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire

$$F_{n+r} F_{n+1} - F_{n+r+1} F_n = (-1)^n F_r.$$

■

L'identité de Catalan

Proposition 7. *Pour $n \geq r$, on a*

$$F_n^2 - F_{n+r} F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2. \tag{2.22}$$

Preuve. Pour $n \geq r$

$$\begin{aligned} F_n^2 - F_{n+r} F_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{2r} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \beta^{n+r}\alpha^{n-r} + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n - \alpha^{2n} + \alpha^{n+r} + \beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r} + \beta^{2n}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\left(-2(\alpha\beta)^n + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(-2+\alpha^r\beta^{-r}+\beta^r\alpha^{-r}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(-2+\frac{\alpha^r}{\beta^r}+\frac{\beta^r}{\alpha^r}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{(\alpha^r-\beta^r)^2}{(\alpha\beta)^r}\right)\\
&= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2\\
&= (-1)^{n-r}F_r^2,
\end{aligned}
$$

car $\alpha\beta=-1$,

donc

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

■

L'identité de Johnson

Proposition 8. *Pour k,l,m,n et $r\in\mathbb{N}$ tel que $k+l=m+n$*

$$F_kF_l - F_mF_n = (-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}). \tag{2.23}$$

Preuve. Pour k,l,m,n et $r\in\mathbb{N}$ tel que $k+l=m+n$

$$
\begin{aligned}
F_kF_l - F_mF_n &= \left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^l-\beta^l}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{k+l}-\beta^l\alpha^k-\beta^k\alpha^l+\beta^{k+l}-\alpha^{m+n}+\beta^n\alpha^m+\beta^m\alpha^n-\beta^{m+n}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\beta^l\alpha^k-\beta^k\alpha^l+\beta^n\alpha^m+\beta^m\alpha^n\right).
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
(-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}) &= (-1)^r\left(\frac{\alpha^{k-r}-\beta^{k-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{l-r}-\beta^{l-r}}{\alpha-\beta}\right)\\
&\quad -(-1)^r\left(\frac{\alpha^{m-r}-\beta^{m-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^r}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\beta^{l-r}\alpha^{k-r}-\beta^{k-r}\alpha^{l-r}+\beta^{n-r}\alpha^{m-r}+\beta^{m-r}\alpha^{n-r}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\beta^l\alpha^k - \beta^k\alpha^l + \beta^n\alpha^m + \beta^m\alpha^n\right)$$
$$= F_kF_l - F_mF_n.$$

Donc

$$F_kF_l - F_mF_n = (-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}).$$

■

Chapitre 3

La suite de Lucas

A la suite de Fibonacci est associée une suite qui lui est très liée, dite suite compagnon de Lucas.

3.1 La suite de Lucas

Définition 3.1. *La suite de Lucas est définie par la relation de récurrence*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.1}$$

avec les valeurs initiales

$$L_0 = 2 \quad et \quad L_1 = 1.$$

Nous listons les premiers termes de la suite de Lucas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	150	226	376	602

TABLE 3.1: Les premiers termes de la suite de Lucas

3.2 La formule de Binet pour la suite de Lucas

Exactement de la même manière que pour la suite de Fibonacci, on détermine la formule de Binet pour la suite de Lucas.

Théorème 3. *La formule de Binet pour la suite de Lucas est*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{3.2}$$

Preuve. (Voir[2]) Nous procédons par récurrence sur n. Pour $n = 1$,

$L_1 = \alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$. Alors le théorème est vrai pour $n = 1$.

Supposons que ce soit vrai pour $n = 1, 2, \cdots, k$. Nous devons prouver que c'est vrai pour $n = k + 1$. Maintenant (3.3), donne

$$\begin{aligned} L_k + L_{k-1} &= \alpha^k + \alpha^{k-1} + \beta^k + \beta^{k-1} \\ L_{k+1} &= \alpha^k(1 + \alpha^{-1}) + \beta^k(1 + \beta^{-1}) \\ &= \alpha^k(1 + \alpha - 1) + \beta^k(1 + \beta - 1) \\ &= \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}. \end{aligned}$$

■

3.3 La fonction génératrice de la suite de Lucas

La fonction génératrice de la suite de Lucas est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4. *La fonction génératrice de la suite de Lucas est donnée par*

$$L(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n. \tag{3.3}$$

Preuve. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n,$$

puis

$$f(\alpha x) + f(\beta x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha^n + \beta^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n L_n x^n.$$

En particulier, si $u_n = 1$, alors $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, donc

$$L(x) = \frac{1}{1 - \alpha x} + \frac{1}{1 - \beta x} = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}.$$

■

3.4 Les liens entre la suite de Lucas et la suite de Fibonacci

En se basant sur le théorème suivant, qui donne le lien entre la suite Fibonacci et la suite de Lucas, on peut déduire les propriétés entre la suite de Lucas et la suite de Fibonacci.

Théorème 5. *La suite de Fibonacci est liée à la suite de Lucas par la relation suivante*

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n. \tag{3.4}$$

Preuve. D'après les formules (2.4) et (3.3), on a

$$\begin{aligned} F_{n-1} + F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha + \alpha^{-1}) - \beta^n(\beta + \beta^{-1})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha + \alpha - 1) - \beta^n(\beta + \beta - 1)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= L_n. \end{aligned}$$

■

D'autres liens entre les deux suites peuvent être vérifiés.

Théorème 6.

1. $F_{2n} = F_n L_n$.
2. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$.
3. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1}$.
4. $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$.
5. $L_{n+2} - L_{n-2} = 5F_n$.
6. $L_{2m+n} - (-1)^m L_n = 5F_m F_{m+n}$.

7. $F_{2m+n} + (-1)^m F_n = F_{m+n} L_m$.

Preuve.

1. D'après la formule de Binet (2.4) et (3.3), donnent

$$\begin{aligned} F_{2n} &= \frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)}{\sqrt{5}} \\ &= F_n L_n. \end{aligned}$$

2. D'après la définition de la suite de Fibonacci et la Formule (3.4), on a

$$\begin{aligned} F_{n+2} - F_{n-2} &= (F_n + F_{n+1}) - (F_n - F_{n-1}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} \\ &= L_n. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} L_n^2 + L_{n+1}^2 &= (\alpha^n + \beta^n)^2 + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2 \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} \\ &= \alpha^{2n+1}(\alpha - \alpha^{-1}) + \beta^{2n+1}(\beta - \beta^{-1}) \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) \\ &= 5F_{2n+1}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} L_n^2 - 4(-1)^n &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(\alpha\beta)^n \\ &= (\alpha^n - \beta^n)^2 \\ &= 5F_n^2. \end{aligned}$$

5. (Voir[9])

$$L_{n+2} - L_{n-2} = (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^n(\alpha^2 - \alpha^{-2}) - \beta^n(\beta^{-2} - \beta^2) \\
&= \alpha^n(\alpha^2 - \beta^2) - \beta^n(\alpha^2 - \beta^2) \\
&= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^2 - \beta^2) \\
&= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha - \beta) \\
&= 5F_n.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
L_{2m+n} - (-1)^m L_n &= (\alpha^{2m+n} + \beta^{2m+n}) - (\alpha\beta)^m(\alpha^n + \beta^n) \\
&= \alpha^{m+n}(\alpha^m - \beta^m) - \beta^{m+n}(\alpha^m - \beta^m) \\
&= (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) \\
&= 5F_m F_{m+n}.
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}F_{2m+n} + (-1)^m F_n &= (\alpha^{2m+n} - \beta^{2m+n}) + (\alpha\beta)^m(\alpha^n - \beta^n) \\
&= \alpha^{m+n}(\alpha^m + \beta^m) - \beta^{m+n}(\alpha^m + \beta^m) \\
&= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) \\
&= \sqrt{5}F_{m+n}L_m,
\end{aligned}$$

donc

$$F_{2m+n} + (-1)^m F_n = F_{m+n}L_m.$$

■

3.5 Propriétés de la suite de Lucas

Nous aborderons dans cette partie quelques propriétés de la suite de Lucas.

Théorème 7. *On a*

1. $\sum_{1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3.$
2. $\sum_{1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1.$
3. $\sum_{1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2.$
4. $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$
5. $\sum_{1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2.$
6. $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+1}.$
7. $L_n^2 - L_{2n} = 2(-1)^n.$
8. $L_{-n} = (-1)^n L_n.$

Preuve. On considère

1.

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{n} L_i &= \sum_{1}^{n} L_{i+2} - \sum_{1}^{n} L_{i+1} \\ &= (L_3 + L_4 + \cdots + L_{n+2}) - (L_2 + L_3 + \cdots + L_{n+1}) \\ &= L_{n+2} - L_2 \\ &= L_{n+2} - 3.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{n} L_{2i} &= \sum_{1}^{2n} L_i - \sum_{1}^{n} L_{2i-1} \\ &= (L_{2n+2} - 3) - (L_{2n} - 2) \\ &= (L_{2n+2} - L_{2n}) - 1 \\ &= L_{2n+1} - 1.\end{aligned}$$

3. Puisque $\sum_{1}^{1} L_1^2 = L_1^2 = L_1 L_2 - 2$ le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons que ce soit vrai pour un entier positif arbitraire k. Ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{k+1} L_i^2 &= \sum_{1}^{k} L_i^2 + L_{k+1}^2 \\ &= (L_k L_{k+1} - 2) + L_{k+1}^2 \\ &= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) - 2 \\ &= L_{k+1} L_{k+2} - 2.\end{aligned}$$

Donc, le résultat est vrai pour tout $n \geq 1$.

4.

$$\begin{aligned}L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 &= (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (\alpha\beta)^{n-1}\beta^2 + (\alpha\beta)^{n-1}\alpha^2 - 2(\alpha\beta)^{n-1}\alpha\beta \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha\beta)^{n-1} \\ &= (\alpha - \beta)^2(\alpha\beta)^{n-1}\end{aligned}$$

On a $\alpha\beta = -1$ et $(\alpha - \beta)^2 = 5$

donc

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$$

5. Nous allons démontrer cette propriété par récurrence

$$\begin{aligned}L_1 &= L_2 - L_0 \\ L_3 &= L_4 - L_2 \\ L_5 &= L_6 - L_4 \\ &\vdots \\ L_{2n-1} &= L_{2n} - L_{2n-2},\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - L_0,$$

donc

$$\sum_{1}^{n} F_{2i-1} = L_{2n} - 2.$$

■

Chapitre 4

Les nombres Horadam

Horadam a considéré une forme généralisée des nombres de Fibonacci classiques, en changeant les termes initiaux $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ par a et b, deux réels, respectivement. Dans ce qui suit nous présenterons quelques définitions et remarques.

4.1 Les nombres Horadam

La suite de Horadam est une généralisation deux suites de Fibonacci et Lucas, qu'on peut retrouver en prenant les cas particuliers des valeurs initiales appropriées.

Définition 4.1. *(Voir[1]) Soient p, q, n des entiers, pour $n \geqslant 0$ Horadam a défini les nombres $W_n = W_n(W_0, W_1; p, q)$ par l'équation de récurrence*

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.1}$$

avec des valeurs initiales, les nombres réels W_0, W_1.

Remarque 2. *Pour des raisons historiques, ces nombres ont été appelés plus tard les nombres de Horadam.*

L'équation caractéristique de la suite de Horadam est donnée par

$$x^2 - px + q = 0, \tag{4.2}$$

pour $p^2 - 4q \neq 0$, on pose α et β ses deux racines.

4.2 La formule de Binet la suite de Horadam

Définition 4.2. *La formule de Binet de la suite de Horadam pour* $p^2-4q\neq 0$, *est*

$$W_n = A\alpha^n + B\beta^n, \tag{4.3}$$

où

$$\begin{cases} A = \dfrac{W_1 - W_0\beta}{\alpha-\beta} \\ B = \dfrac{W_0\alpha - W_1}{\alpha-\beta} \end{cases} \tag{4.4}$$

4.3 La fonction génératrice de la suite Horadam

La fonction génératrice de la suite de Horadam est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 8. *La fonction génératrice de la suite de Horadam* $W_n(a,b;p,q)$ *est*

$$g(t) = \frac{a+(b-pa)t}{1-pt+qt^2}. \tag{4.5}$$

avec $a, bdesrels.$

Remarque 3. *([6]) La suite* $(W_n)_{n\geq 0}$ *généralise la suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\geq 0}$, *définie par*

$$\begin{aligned} F_n = W_n(0,1;1,-1) &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Remarque 4. *Pour* W_0, W_1, p, q *des valeurs spéciales, l'équation* (4.1) *définit les nombres classiques de Fibonacci, Lucas, Pell, etc. Nous en listons certains*

a)− $W_n(2,1;1,-1) = L_n$ *- Les nombres de Lucas,*

b)− $W_n(0,1;2,-1) = P_n$ *- Les nombres de Pell,*

$c)-$ $W_n(2,2;2,-1) = Q_n$ - *Les nombres de Pell-Lucas,*

$d)-$ $W_n(0,1;1,-2) = J_n$ - *Les nombres de Jacobsthal,*

$e)-$ $W_n(2,1;1,-2) = j_n$ - *Les nombres de Jacobsthal-Lucas.*

Exemple 2. *Le tableau suivant présente les premiers termes des nombres de Horadam pour* $n = 0, 1, \cdots, 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025

TABLE 4.1: Les premiers termes des nombres de Horadam

Chapitre 5

Les nombres hybrides de Horadam

Dans ce chapitre, nous présentons le jumelage des nombres de Horadam et des nombres hybrides, qui ont donné naissance aux nombres hybrides de Horadam.

5.1 Les nombres hybrides

Dans cette section nous définissons les propriétés des nombres hybrides.

Définition 5.1. *L'ensemble des nombres hybrides, noté* $\mathbb{H}$*, est l'ensemble des éléments* Z*, sous la forme*

$$Z = a + bi + c\epsilon + dh, \tag{5.1}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *et* i, ϵ, h *sont des opérateurs tels que*

$$i^2 = -1, \epsilon^2 = 0, h^2 = 1 \tag{5.2}$$

et

$$ih = -hi = \epsilon + i. \tag{5.3}$$

Remarque 5. *Pour le nombre hybride* $Z = a + bi + c\epsilon + dh$*, le nombre réel* a*, noté* $S(Z)$ *est appelé la partie scalaire.*

La partie $bi + c\epsilon + dh$*, notée* $V(Z)$ *appelée partie vectorielle.*

Nous citons, dans les définitions suivantes, des cas particuliers de nombres hybrides.

Définition 5.2. *L'ensemble des nombres complexes est donné par*

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi : i^2 = -1; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Définition 5.3. *L'ensemble des nombres hyperboliques est donné par*

$$\mathbb{P} = \{z = x + yh : h^2 = 1; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Définition 5.4. *L'ensemble des nombres duals est donné par*

$$\mathbb{D} = \{z = x + y\epsilon : \epsilon^2 = 0; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Opérations sur les nombres hybrides

Soit $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1\epsilon + d_1 h$ et $Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2\epsilon + d_2 h$,
deux nombres hybrides quelconques, l'égalité, l'addition, la soustraction et la multiplication par des scalaires sont définies comme suit :

Égalité :

$Z_1 = Z_2$, si et seulement si $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.

Addition :

$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\epsilon + (d_1 + d_2)h$.

Soustraction :

$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)\epsilon + (d_1 - d_2)h$.

Multiplication par scalaire

Pour $s \in \mathbb{R}$ on a $sZ_1 = sa_1 + sb_1 i + sc_1\epsilon + sd_1 h$.

L'opération " addition" dans les nombres hybrides est à la fois commutative et associative. Le Zéro est l'élément nul pour l'addition, le symétrique d'un élément hybride Z est : $-Z = -a - bi - c\epsilon - dh$. Cela signifie que $(\mathbb{H}, +)$ est un groupe abélien.

Remarque 6. *La multiplication des nombres hybrides est définie à l'aide de* (5.2) *et* (5.3). *Notons qu'en utilisant les formules* (5.2) *et* (5.3), *nous pouvons trouver le produit de deux nombres hybrides quelconques.*
Le tableau suivant, est nécessaire pour les calculs, car il présente les produits deux à deux des opérateurs des nombres hybrides i, ϵ *et* h.

	i	ϵ	h
i	-1	$1-h$	$\epsilon+i$
ϵ	$h+1$	0	$-\epsilon$
h	$-\epsilon-i$	ϵ	1

TABLE 5.1: Les produits des opérateurs

En utilisant les règles données dans le Tableau 1. La multiplication des nombres hybrides peut être faite de manière analogue comme la multiplication des expressions algébriques.

Le conjugué d'un nombre hybride

Définition 5.5. *Le conjugué d'un nombre hybride* $Z = a + bi + c\epsilon + dh$ *est défini par*

$$\overline{Z} = \overline{a + bi + c\epsilon + dh} = a - bi - c\epsilon - dh \tag{5.4}$$

Cette définition est utilisée pour définir d'autres quantités.

Le caractère d'un nombre hybride

Définition 5.6. *Le caractère d'un nombre hybride est donné par*

$$C(Z) = Z\overline{Z} = \overline{Z}Z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2. \tag{5.5}$$

La norme d'un nombre hybride

Définition 5.7. *(Voir [8]) La norme d'un nombre hybride est définie comme suit :*

$$\| Z \| = \sqrt{| ZZ |} = \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}. \tag{5.6}$$

Remarque 7. *La valeur* $\sqrt{|C(Z)|}$ *est appelée la norme du nombre hybride* Z*, notée* $\| Z \|$.

Cette définition de la norme est une norme généralisée qui coïncide avec les définitions des normes dans les nombres complexes, hyperboliques et duals. En effet,

1. *Si* Z *est un nombre complexe* i, e $(c = d = 0)$*, alors*

$$\| Z \| = \sqrt{| Z\overline{Z} |} = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{5.7}$$

2. *Si* Z *est un nombre hyperbolique* i, e $(b = c = 0)$ *alors*

$$\| Z \| = \sqrt{| Z\overline{Z} |} = \sqrt{| a^2 - d^2 |}. \tag{5.8}$$

Définition 5.8. *(Voir[8]) L'inverse du nombre hybride* $Z = a+bi+c\epsilon+dh, \| Z \| \neq 0$ *comme*

$$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{C(Z)}, \tag{5.9}$$

par conséquent, nous appelons, les nombres hybrides légers ceux qui n'ont pas d'inverse.

Exemple 3. *Par exemple, l'inverse du nombre hybride* $Z = 3 + 4i + 3\epsilon + 2h$*, est*

$$Z^{-1} = \frac{3 - 4i - 3\epsilon - 2h}{-3}.$$

Ainsi, nous pouvons déduire la résultat suivant, à partir des caractéristiques ci-dessus.

L'ensemble des nombres hybrides est un anneau non inversible pour l'addition et la multiplication.

5.2 Les nombres hybrides de Horadam

Définitions 5.1. *(Voir[1]) Le* $n^{ième}$ *nombre hybride de Horadam* H_n *est défini comme*

$$H_n = W_n + iW_{n+1} + \epsilon W_{n+2} + hW_{n+3}. \tag{5.10}$$

Remarque 8. *Pour les cas particuliers de W_n, nous obtenons*

1. *Le $n^{ième}$ nombre hybride de Fibonacci FH_n*

$$FH_n = F_n + iF_{n+1} + \epsilon F_{n+2} + hF_{n+3}. \tag{5.11}$$

2. *Le $n^{ième}$ nombre hybride de Pell PH_n*

$$PH_n = P_n + iP_{n+1} + \epsilon P_{n+2} + hP_{n+3}. \tag{5.12}$$

3. *Le $n^{ième}$ nombre hybride de Jacobsthal JH_n*

$$JH_n = J_n + iJ_{n+1} + \epsilon J_{n+2} + hJ_{n+3}. \tag{5.13}$$

Remarque 9. *De la même manière, on définit le $n^{ième}$ nombre hybride de Lucas LH_n, le $n^{ième}$ nombre hybride Pell-Lucas QH_n et le $n^{ième}$ nombre hybride de Jacobsthal-Lucas jH_n, substituant à la place des coefficients des nombres de Lucas, nombres de Pell-Lucas et Jacobsthal-Lucas, respectivement.*

Exemples 5.2.1. *En utilisant les définitions ci-dessus, nous pouvons écrire les premiers nombres hybrides de Fibonacci :*

$$FH_0 = i + \epsilon + 2h.$$

$$FH_1 = 1 + i + 2\epsilon + 3h.$$

$$FH_2 = 1 + 2i + 3\epsilon + 5h.$$

les premiers nombres de Pell :

$$PH_0 = i + 2\epsilon + 5h.$$

$$PH_1 = 1 + 2i + 5\epsilon + 12h.$$

$$PH_2 = 2 + 5i + 12\epsilon + 29h.$$

les premiers nombres de Jacobsthal :

$$JH_0 = i + \epsilon + 3h.$$

$$JH_1 = 1 + i + 3\epsilon + 5h.$$

$$JH_2 = 2 + 3i + 5\epsilon + 11h.$$

5.3 La formule de Binet des nombres hybrides de Horadam

Nous donnons la formule de Binet pour les nombres hybrides de Horadam, qui est très utile pour la vérification des beaucoup de propriétés de ces nombres et leurs relations avec les autres nombres existants.

Théorème 9. *Soit $n \geq 0$ un entier. Alors*

$$H_n = A\alpha^n(1 + i\alpha + \epsilon\alpha^2 + h\alpha^3) + B\beta^n(1 + i\beta + \epsilon\beta^2 + h\beta^3), \tag{5.14}$$

où A, B sont définis par (4.4).

Preuve. En utilisant la définition (5.10) et la formule de Binet (4.3) des nombres hybrides de Horadam, nous obtenons

$$\begin{aligned} H_n &= (A\alpha^n + B\beta^n) + i(A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1}) + \epsilon(A\alpha^{n+2} + B\beta^{n+2}) + h(A\alpha^{n+3} + B\beta^{n+3}) \\ &= A\alpha^n + B\beta^n + iA\alpha^{n+1} + iB\beta^{n+1} + \epsilon A\alpha^{n+2} + \epsilon B\beta^{n+2} + hA\alpha^{n+3} + hB\beta^{n+3} \\ &= A\alpha^n(1 + i\alpha + \epsilon\alpha^2 + h\alpha^3) + B\beta^n(1 + i\beta + \epsilon\beta^2 + h\beta^3) \end{aligned}$$

■

Remarque 10. *Pour $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $p = 1$ et $q = -1$*
Nous avons $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
et la formule de Binet pour les nombres hybrides de Fibonacci FH_n est

$$\begin{aligned} FH_n = &\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}i + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\epsilon + \frac{4+2\sqrt{5}}{2}h\right) \\ &- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}i + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\epsilon + \frac{4-2\sqrt{5}}{2}h\right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Remarque 11. *Pour $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $p = 2$ et $q = -1$ nous avons $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$, $A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et la formule de Binet pour les nombres hybrides*

de Pell, PH_n *est*

$$PH_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+(1+\sqrt{2})i+(3+2\sqrt{2})\epsilon+(7+5\sqrt{2})h\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1+(1-\sqrt{2})i+(3-2\sqrt{2})\epsilon+(7-5\sqrt{2})h\right). \quad (5.16)$$

Remarque 12. *Pour* $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $p = 1$ *et* $q = -2$ *nous avons* $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ *et la formule de Binet pour les nombres hybrides de Jacobsthal,* JH_n *est*

$$JH_n = \frac{1}{3}2^n(1+2i+4\epsilon+8h) - \frac{1}{3}(-1)^n(1-i+\epsilon-h) \quad (5.17)$$

En utilisant (5.5)*, nous calculerons le caractère du nombre hybride de Horadam.*

Théorème 10. *Pour* $n \geq 0$ *un entier, alors*

$$C(H_n) = W_n^2(1-p^2q^2) + W_nW_{n+1}(2q+2p^3q-2pq^2) + W_{n+1}^2(1-2p-p^4+2p^2q-q^2). \quad (5.18)$$

Preuve. Soit

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n,$$

et

$$W_{n+3} = pW_{n+2} - qW_{n+1} = (p^2-q)W_{n+1} - pqW_n,$$

et

$$C(H_n) = W_n^2 + W_{n+1}^2 - 2W_{n+1}W_{n+2} - W_{n+3}^2,$$

alors

$$C(H_n) = W_n^2 + W_{n+1}^2 - 2W_{n+1}(pW_{n+1}-qW_n) - ((p^2-q)W_{n+1} - pqW_n)^2,$$

donc

$$C(H_n) = W_n^2(1-p^2q^2) + W_nW_{n+1}(2q+2p^3q-2pq^2) + W_{n+1}^2(1-2p-p^4+2p^2q-q^2).$$

■

Remarque 13. *Pour $n \geq 0$ un entier, alors*

$$C(H_n) = A^2\alpha^{2n}(1+\alpha^2-2\alpha^3-\alpha^6) + B^2\beta^{2n}(1+\beta^2-2\beta^3-\beta^6) + 2AB\alpha^n\beta^n(1+\alpha\beta-\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha^3\beta^3). \tag{5.19}$$

Remarque 14. *Pour $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $p = 1$ et $q = -1$ nous avons le caractère du nombre hybride de Fibonacci FH_n*

$$C(FH_n) = -5F_{n+1}^2 - 6F_nF_{n+1}. \tag{5.20}$$

Remarque 15. *Pour $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $p = 2$ et $q = -1$ nous avons le caractère du nombre hybride de Pell PH_n*

$$C(PH_n) = -3P_n^2 - 28P_{n+1}^2 - 22P_nP_{n+1}. \tag{5.21}$$

Remarque 16. *Pour $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $p = 1$ et $q = -2$ nous avons le caractère du nombre hybride de Jacobsthal JH_n*

$$C(JH_n) = -3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}. \tag{5.22}$$

5.4 La fonction génératrice des nombres hybrides de Horadam

La fonction génératrice des nombres hybrides de Horadam est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 11. *La fonction génératrice des nombres hybrides de Horadam est*

$$G(t) = \frac{H_0 + t(H_1 - pH_0)}{1 - pt + qt^2}. \tag{5.23}$$

Preuve. En posant que la fonction génératrice des nombres hybride de Horadam (H_n), a la forme $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n$, on obtient

$$\begin{aligned}(1 - pt + qt^2)G(t) &= (1 - pt + qt^2)(H_0 + H_1 t + H_2 t^2 + \cdots) \\ &= H_0 + H_1 t + \cdots - pH_0 t - pH_1 t^2 - \cdots qH_0 t^2 + qH_1 t^3 + \cdots \\ &= H_0 + t(H_1 - pH_0).\end{aligned}$$

Puisque $H_n = pH_{n-1} - qH_{n-2}$, et les coefficients de t^n pour $n \geq 2$ sont égaux à zéro.

De plus $H_0 = W_0 + iW_1 + \epsilon(pW_1 - qW_0) + h(p^2W_1 - pqW_0 - qW_1)$,

et $H_1 - pH_0 = (W_1 - pW_0) - iqW_0 - \epsilon qW_1 + h(-pqW_1 + q^2W_0)$.

■

Remarque 17. *Pour $W_0 = 0$, $W_0 = 1$, $p = 1$ et $q = -1$ nous avons la fonction génératrice des nombres hybrides de Fibonacci (FH_n)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} FH_n t^n = \frac{FH_0 + t(FH_1 - FH_0)}{1 - t - t^2} = \frac{(i + \epsilon + 2h) + t(1 + \epsilon + h)}{1 - t - t^2}. \tag{5.24}$$

Remarque 18. *Pour $W_0 = 0$, $W_0 = 1$, $p = 2$ et $q = -1$ nous avons la fonction génératrice des nombres hybride de Pell (PH_n)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} PH_n t^n = \frac{PH_0 + t(PH_1 - 2PH_0)}{1 - 2t - t^2} = \frac{(i + 2\epsilon + 5h) + t(1 + \epsilon + 2h)}{1 - 2t - t^2}. \tag{5.25}$$

Remarque 19. *Pour $W_0 = 0$, $W_0 = 1$, $p = 1$ et $q = -2$ nous avons la fonction génératrice des nombres hybrides de Jacobsthal (JH_n)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} JH_n t^n = \frac{JH_0 + t(JH_1 - JH_0)}{1 - t - 2t^2} = \frac{(i + \epsilon + 3h) + t(1 + 2\epsilon + 2h)}{1 - t - 2t^2}. \tag{5.26}$$

Conclusion

Les nombres hybrides de Horadam sont très riches en propriétés. Malgré leur nouveauté ; ce sont des nombres qui ouvrent un large domaine des mathématiques. Par conséquent, de nombreux résultats sont attendus de l'étude de ces nombres et des applications aux autres domaines scientifiques, tel que la physique et la mécanique etc. En effet, dans le domaine des mathématiques, en se basant sur les travaux de E. Tan et Ho-Hon Leung dans [5] et [4], quelques chercheurs se sont intéressés à la construction des nombres hybrides de Horadam de la deuxième période et de nombreux résultats sont trouvés. La documentation sur ces nombres est très limitée. Compte tenu de tout cela nous encourageons les jeunes chercheurs à étendre les propriétés des suites de Fibonacci et Lucas étudiées dans les chapitres 2 et 3, aux nombres hybrides de Horadam.

Bibliographie

[1] A. Szynal-Liana, The Horadam hybrid numbers, *General algebra and applications* **38** p. 91–98, (2018).

[2] B. Barik, Lucas sequence, its properties and generalision, *Thèse de doctorat* (2013).

[3] C. N. Phadte, On Fibonacci sequence and its extension, *Thèse de doctorat, Goa University*, (2016).

[4] E.Tan, Some properties of the bi-periodic Horadam sequences, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics Print ISSN 1310–5132*, **23. 4**, p. 56 – 65, (2017).

[5] E. Tan and Ho-Hon Leung, Some basic properties of the generalized bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences, *Advances in Difference Equations*, **2020. 1**, p. 1-11, (2020).

[6] G. Udrea, A note on the sequence $(W_n)_{n\geq 0}$ A.F. Horadam, *Portugaliae Mathematica* **53. 2** ; p. 143 - 156, (1996).

[7] G. Lafon, Un an de maths, *ECE3* 2011 - 2012, (2012).

[8] M. Özdemir, Introduction to Hybrid Numbers, *Advances in Applied Clifford Algebras* **28. 1** ; p. 11, (2018).

[9] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with application*, John Wiley , 2019.

[10] W. Zerroug et S. Attabi , Nombers de Fibonacci, *Thèse de master, Université Mohamed Boudiaf De M'sila,* (2017).

[11] Clancy, Tyler, The Fibonacci numbers.